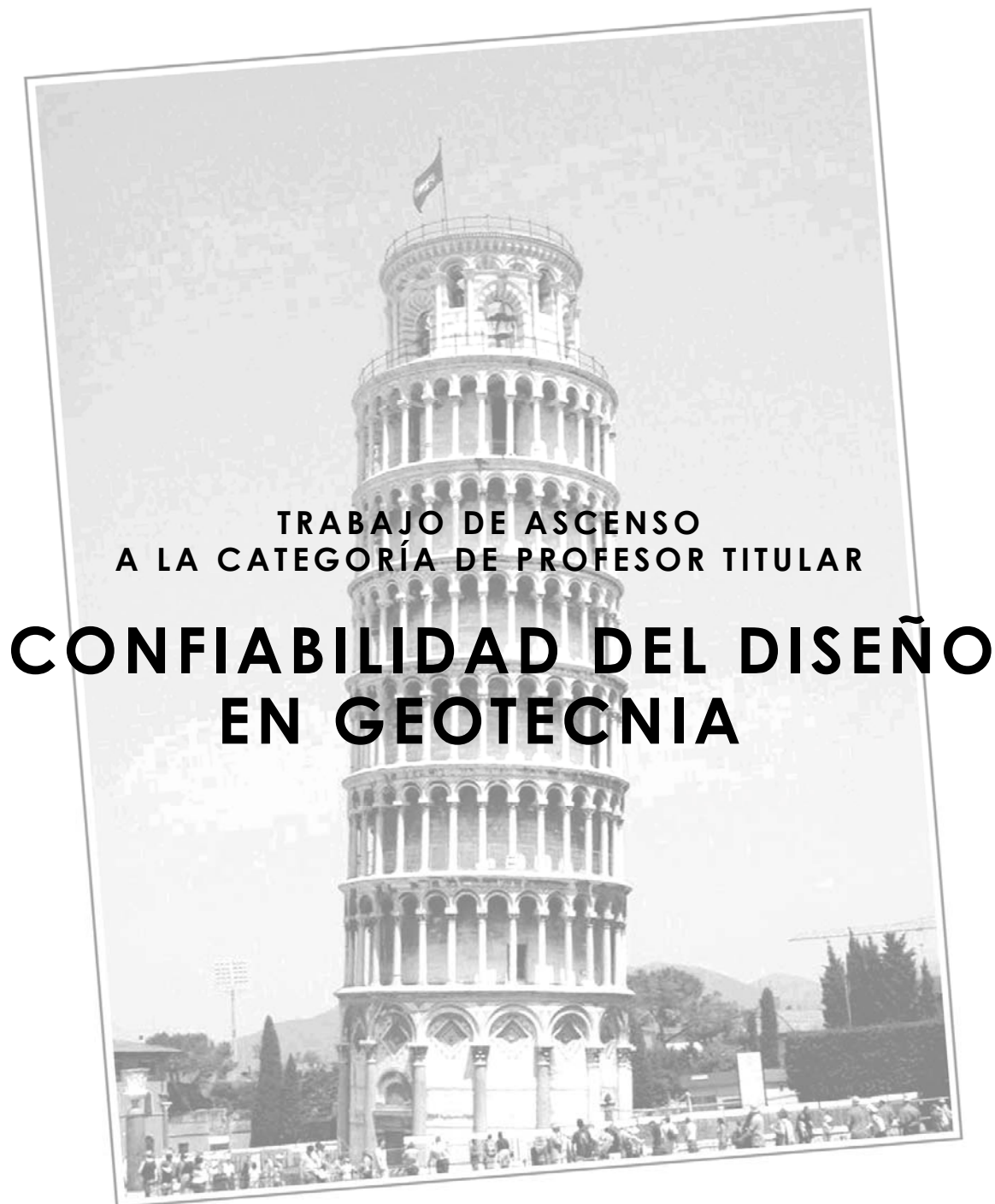




UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA



TRABAJO DE ASCENSO
A LA CATEGORÍA DE PROFESOR TITULAR

CONFIABILIDAD DEL DISEÑO EN GEOTECNIA

PRESENTADO POR EL PROFESOR
CARLOS CRESPO TAIBO
SARTENEJAS – MAYO 2002

CONFIABILIDAD DEL DISEÑO EN GEOTECNIA

Índice General

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA	8
1.1 Introducción	8
1.2 Introducción al concepto de probabilidad	9
1.2.1 Experimento, evento y espacio de muestreo	9
1.2.2 Concepto de probabilidad	10
1.2.3 Unión e intersección de eventos	11
1.2.4 Probabilidad condicional	14
1.2.5 Diagrama en árbol	16
1.2.6 Fórmula binómica o de Bernoulli.	17
1.3 Variables aleatorias y distribuciones de Probabilidades	18
1.3.1 Variables aleatorias	18
1.3.2 Variables aleatorias continuas	20
1.3.3 Distribución conjunta de dos variables aleatorias	24
1.3.4 Parámetros característicos de las funciones de variables aleatorias.	27
1.3.5 Distribuciones Normal y lognormal	30
1.4 Inferencia estadística	33
1.4.1 Población y muestra	33
1.4.2 Teorema del límite central	37
1.5 Correlación	41
1.5.1 Conceptos generales sobre la correlación de dos variables aleatorias	41
1.5.2 Coeficiente de correlación	42
1.5.3 Modelos lineales	44
CAPÍTULO 2 TRANSFORMACIONES DE UNA SOLA VARIABLE ALEATORIA	48
2.1 Introducción	48
2.2 Caso de un muro de gravedad simple	50
2.2.1 General	50
2.2.2 Funciones Estadísticas de las variables independientes	50
2.2.3 Aplicación de la Ecuación de Transformación	54
2.2.3 a) Coeficiente de Fricción	54
2.2.3 b) Función Empuje Lateral de Rankine	55
2.2.4 Probabilidad conjunta	57

CAPÍTULO 2 (Cont.)

2.2.5 Probabilidad Condicional	59
2.2.6 Cálculo de la pdf y PDA de la función F- E_a	61
2.2.7 Independencia de los valores de E_a y F	63

CAPÍTULO 3 CONFIABILIDAD 66

3.1 Introducción 66

3.2 Factor de seguridad 66

3.3 Índice de Confiabilidad 70

3.3.1 Definición	70
3.3.2 Interpretación geométrica del índice de confiabilidad	73
3.3.3 Factores que afectan el índice de confiabilidad	75

3.4 Caso de una fundación directa. 77

3.4.1 Conceptos Generales	77
3.4.2 Influencia del método de cálculo	78
3.4.3 Método a seguir y parámetros de cálculo	79
3.4.4 Cálculo de las distribuciones de probabilidades de N_γ y N_q	81
3.4.5 Cálculo del ancho de la fundación.	81
3.4.6 Consideraciones acerca del asentamiento	82
3.4.7 Distribución de probabilidades de q_{su}	83

CAPÍTULO 4 TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES CON MÁS DE UNA VARIABLE ALEATORIA 87

4.1 Introducción 87

4.2 Función Lineal de Variables Aleatorias 87

4.3 Método del Primer Orden Segundo Momento 88

4.4 Caso de asentamiento sobre arcilla Blanda 90

4.4.1 Teoría General	90
4.4.2 Asentamiento por consolidación, unidimensional o edométrico.	91
4.4.3 Procedimiento de Cálculo del Asentamiento por Consolidación.	94

4.5 Cálculo del asentamiento por métodos probabilistas 95

4.5.1 Descripción del caso	95
4.5.2 Determinación de los parámetros a utilizar en el método probabilista	96
4.5.3 Cálculo del asentamiento.	99
4.5.4 Análisis de los resultados.	102
4.5.5 Comparación con el análisis de sensibilidad	104

4.6 Método de Monte Carlo 105

CAPÍTULO 5 FUNCIONES QUE DEPENDEN DE UNA REGRESIÓN LINEAL	108
5.1 Introducción	108
5.2 Comportamiento de un pilote sometido a carga vertical	109
5.2.1 Teoría General	109
5.2.2 Métodos de Cálculo de la Resistencia por Fuste	113
5.3 Cálculo de la Resistencia lateral de un pilote sometido a Carga Vertical por Métodos Probabilistas	116
5.3.1 Presentación del Caso	116
5.3.2 Análisis de los valores de S_u	117
5.3.3 Análisis Probabilista de la relación entre α y S_u	119
5.3.4 Parámetros de la Distribución de Probabilidades de la Resistencia Lateral Unitaria, f_{su}	121
5.3.4.a Valor Esperado de la Resistencia Lateral	121
5.3.4.b Varianza y Desviación Estándar de la fricción lateral	122
5.3.5 Aplicación de los Resultados	125
5.3.6 Importancia del coeficiente de correlación	126
5.3.7 Probabilidad de Falla	129

Confiabilidad del Diseño en Geotecnia

Introducción

El grado de confiabilidad de las obras geotécnicas está directamente relacionado con la incertidumbre presente en el diseño y la construcción. En el sentido matemático, la confiabilidad es una probabilidad.

La confiabilidad es la probabilidad del evento opuesto al evento falla. Por lo tanto, ambos eventos son complementarios desde el punto de vista de la teoría matemática de la probabilidad. Una obra falla o no falla. En virtud de lo anterior, puede decirse que la confiabilidad, como probabilidad, es igual a uno menos la probabilidad de falla. Se suele expresar de esta forma porque la probabilidad de falla es más fácil de estimar que la confiabilidad.

¿Es posible calcular la probabilidad matemática de que una obra falle? Para ello hay que definir primero lo que se entiende por falla y lo que se entiende por probabilidad.

Respecto a definición de falla, puede decirse que es la incapacidad de una obra para cumplir la función que le asignaron quienes la concibieron. Una vía puede fallar porque el pavimento está absolutamente deteriorado en un tramo, porque colapsó el estribo o el apoyo de cualquiera de sus puentes, porque se inundó un tramo, porque se deslizó un terraplén o se derrumbó un talud de corte sobre ella y de muchas otras formas. Es decir, una vía falla cuando no cumple con el objetivo de comunicar los puntos que ella debería unir.

Por su parte, la definición de probabilidad resulta algo más problemática ya que normalmente la probabilidad se define como el cociente entre el número de veces que ocurre el evento de interés dividido por el número total de intentos cuando este último es suficientemente grande. En el caso de una obra, ésta se construirá sólo una vez y, por lo tanto, la definición anterior no es aplicable. Sin embargo, hay casos en los que no es necesario repetir muchas veces un experimento para conocer la frecuencia relativa o probabilidad del resultado de interés. En muchos problemas pueden determinarse ciertas probabilidades básicas por inspección, por ejemplo: la probabilidad de cara o sello en una moneda es $\frac{1}{2}$, la de obtener un número específico en un dado es $\frac{1}{6}$ o la de extraer un as en

un mazo de barajas es $4/52$. A partir de estas probabilidades básicas y mediante las leyes de la teoría matemática de probabilidades se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos mucho más complejos, por ejemplo: la probabilidad de que la suma de los valores obtenidos después de lanzar un dado seis veces sea dieciocho. En este caso, la probabilidad puede interpretarse como un grado de certeza que aconseja si se debe tomar o no un riesgo ante un experimento que ocurrirá una sola vez. Este es el sentido que se da a la probabilidad de éxito o fracaso en una obra civil.

Por el mismo razonamiento anterior, al comienzo del análisis geotécnico de una obra pueden asignarse probabilidades a las variables primigenias (coeficiente de compresibilidad, ángulo de fricción interna, permeabilidad, etc.). Tales probabilidades básicas se asignarán tras estudiar resultados de laboratorio, comparar con casos similares y cualquier otro medio válido para este fin. Posteriormente, aplicando las leyes de la teoría matemática de probabilidades, puede determinarse la incertidumbre final que la asignación de probabilidades a las variables básicas acarreo en modelo de cálculo utilizado (estabilidad de taludes, capacidad portante etc.). Se obtiene así una distribución de probabilidades para el resultado buscado en lugar de una sola respuesta. Es decir, el resultado ya no es un solo valor como en el cálculo determinista usual sino, más bien, un conjunto de resultados asociados cada uno de ellos a una probabilidad de ocurrencia. La suma de las probabilidades del subconjunto de los resultados donde la capacidad de la obra es inferior a la exigida es la probabilidad de falla ante una determinada amenaza (deslizamiento, hundimiento, asentamiento excesivo, etc.). Este es, a grandes rasgos, el tema y objetivo del presente trabajo.

El uso de la teoría de probabilidades y la estadística no mejorará la calidad ni la precisión de los resultados de un cálculo determinado, pero sí les añadirá una nueva dimensión al incluir como variables de cálculo la calidad y cantidad de los datos empleados en la solución del problema. Así, parámetros estadísticos como el promedio, la varianza y el coeficiente de variación juegan un papel importante en la determinación racional de la confiabilidad de un resultado. En esencia, los cálculos se realizan siguiendo el método determinista usual de la ingeniería, pero ahora se dispone de valores colaterales que permiten juzgar la calidad de su resultado. No representa lo mismo el factor de seguridad de un talud natural calculado sobre la base de seis ensayos de corte directo que el

factor de seguridad, calculado para el mismo talud, por el mismo método de cálculo, sobre la base de doce ensayos de corte directo.

La incertidumbre es el factor que domina la totalidad del entorno geotécnico. Al contrario de otras disciplinas de la ingeniería civil en las que se trata con materiales definidos y fabricados por el hombre (acero, concreto etc.), la geotecnia debe tratar con una gran variedad de materiales distintos, provenientes de procesos geológicos complejos, que normalmente se encuentran entremezclados y con propiedades difíciles de determinar con precisión por ser dependientes de muchos factores (granulometría, composición mineralógica, humedad, historia y nivel de esfuerzos etc.).

Aunque ninguna disciplina de la ingeniería está exenta de incertidumbre, la geotecnia es una de las más afectadas en este sentido. Esta incertidumbre está presente en todas las fases del análisis geotécnico y en su interrelación, principalmente en:

- A) La caracterización del subsuelo (estratificación, variación espacial, etc.), normalmente llevada a cabo mediante exploraciones de superficie y sondeos puntuales que sólo permiten visualizar una pequeña parte de un medio muy variable.
- B) La obtención de las propiedades mecánicas e hidráulicas del terreno (compresibilidad, resistencia al corte, permeabilidad), mediante ensayos de laboratorio o de campo, sobre muestras del terreno alteradas en mayor o menor grado y siguiendo trayectorias de esfuerzos que rara vez coinciden con las que seguirán los elementos del terreno bajo el sistema de esfuerzos impuestos por la obra. En consecuencia, los valores obtenidos son sólo aproximaciones a los requeridos por el modelo de cálculo.
- C) Los modelos de cálculo, los cuales distan mucho de reproducir el comportamiento de suelos y rocas debido a la necesidad de introducir hipótesis simplificadoras en su traslado al lenguaje matemático (homogeneidad, isotropía, ortotropía, elasticidad, plasticidad, bidimensionalidad, etc.).

Cuando las fuentes de error citadas se encadenan, la incertidumbre se propaga y se amplifica durante el paso de una fase del diseño a la siguiente: ensayos con sesgo sobre muestras no del todo representativas de un medio no completamente caracterizado cuyos resultados contienen una dispersión considerable y que deben alimentar un modelo de cálculo impreciso de por sí como consecuencia de necesarias simplificaciones para su tratamiento matemático el cual, de mejorarse, requerirá entonces de un mayor número de propiedades del terreno para las que no existen ensayos específicos.

En palabras de G. Baecher (2000)¹: “ ... *La incertidumbre viene en muchas formas. Las mediciones post construcción son escasas, en consecuencia la habilidad para calibrar los modelos de cálculo respecto al resultado real es imprecisa. Los ensayos de laboratorio tienen sesgo, por lo tanto los parámetros del terreno a introducir en los modelos de cálculo son inexactos. Los modelos utilizados para predecir el comportamiento del terreno son simplificaciones de la realidad, así estas predicciones son sólo aproximaciones. ¿Todos estos tipos de incertidumbre afectan las predicciones del comportamiento del terreno en la misma forma?*”

Respecto al uso de la teoría de probabilidades en geotecnia, hay una pregunta que debe responderse y es la relativa a su validez ¿Es la geotecnia un fenómeno aleatorio, o uno determinista? ¿Dado un sitio de construcción específico, sus condiciones cambian como cambia el clima, o siempre son las mismas? Evidentemente, mientras no cambien ciertas condiciones geológicas o ambientales, las condiciones de ese sitio siempre serán las mismas. Por lo tanto, no puede hablarse de fenómenos aleatorios. Las propiedades mecánicas e hidráulicas de un terreno existen, su caracterización es única y tales propiedades deberían ser medibles. Es la carencia de habilidad para estas mediciones durante el proceso geotécnico, resumido en los tres puntos antes expuestos, lo que obliga a utilizar la teoría de probabilidades para el manejo de las imprecisiones que no pueden, o que sería muy costoso, ser conocidas con exactitud.

Es posible que ningún fenómeno natural, al menos macroscópico, sea aleatorio. No existe razón teórica para pensar que no pueda predecirse a priori el resultado de un dado si se conocen, con la exactitud necesaria, una serie de parámetros que definen su movimiento,

¹ Las referencias así como la nomenclatura empleada en este trabajo se encuentran en apéndices al final del mismo.

o el de una moneda, o el orden que tomarán las cartas tras barajar un mazo. Es la imposibilidad práctica, no teórica, del conocimiento de los parámetros que rigen el fenómeno en cuestión lo que justifica el uso de la teoría de probabilidades en muchos campos donde la incertidumbre, entendida como carencia o excesivo costo de la precisión, está presente.

Como complemento a lo anterior, también debe admitirse que ciertos fenómenos son tan extremadamente susceptibles a cambios ínfimos en las variables que los gobiernan que tal vez hasta un futuro razonablemente distante no será posible determinar con precisión dichos cambios con aparatos de medición adecuados. Este efecto, denominado “efecto de la mariposa”, ante la pregunta de si el aletear de una mariposa en las circunstancias precisas puede alterar el clima en las próximas horas, justifica la conversión de fenómenos teóricamente predecibles a fenómenos aleatorios para su trato matemático. Según palabras de Richard Feynman citadas por Gleick (1988): *“Los físicos se complacen en pensar que basta decir: Éstas son las condiciones. Pero ¿Qué sucede a continuación?”*

Hasta la fecha, las aplicaciones del análisis probabilista a la geotecnia poseen sólo un valor relativo y su campo de acción es restringido. Una causa frecuente de fracasos que la teoría de probabilidades no puede tomar en cuenta, es la debida a errores en la caracterización del terreno, por ejemplo: la no-detección de materiales blandos, de sectores de relleno, de buzamientos desfavorables, de agua subterránea o de deslizamientos antiguos; ausencia de medidas contra la tubificación, el no-reconocimiento de materiales expansivos, etc. Tales causas escapan al alcance del análisis probabilista. Por lo tanto, cuando un resultado probabilista indica que la probabilidad de falla de un talud es de 10^{-4} no está tomando en cuenta si hubo omisión en la detección de los factores antes mencionados.

Otro aspecto no completamente cubierto en el método probabilista es el relativo a la incertidumbre del método de cálculo empleado. Debido a que en geotecnia todos los métodos adolecen de simplificaciones a fin de permitir su tratamiento matemático estos métodos son solamente una aproximación al comportamiento real del terreno. Es interesante observar que en las palabras de G. Baecher antes citadas no se proponen métodos de cálculo nuevos sino la calibración de los existentes, es decir la comparación de

la predicción con lo medido post construcción con el fin de introducir factores correctivos. Esta actividad no es nueva, es casi tan antigua como la geotecnia moderna misma (circa 1925). Véase por ejemplo: Meyerhof (1964), Tan y Duncan (1991), Long y Wysockey (1999). Las modernas técnicas de instrumentación y la informática prometen acelerar considerablemente este proceso. De todas formas, la introducción de la incertidumbre debida al método en los cálculos probabilistas es escasa, aunque hay trabajos muy importantes en este sentido (Christian y coautores 1992).

De las dos limitaciones tratadas, es posible que la primera: la incertidumbre debida a los errores en la caracterización del subsuelo, nunca pueda ser incluida en los cálculos probabilistas y que la segunda: la consideración de la incertidumbre debida al método de cálculo, tome cierto tiempo en incluirse mientras se recopila suficiente información para calibrar los modelos. Mientras esto sea así, los resultados del método probabilista aplicado a la geotecnia tendrán un valor relativo solamente. Se necesitará dar por buenos tanto la caracterización del subsuelo como la precisión del método de cálculo para la aplicación de este método.

Por lo tanto, la ayuda que actualmente puede esperarse del método probabilista se refiere a la comparación de riesgos y costos de distintos diseños bajo un mismo método de cálculo; a la evaluación objetiva de la calidad de los resultados a partir de la cantidad y calidad en la determinación en las variables básicas que intervienen en un problema determinado y a la posibilidad de evaluar estas variables de acuerdo con su jerarquía probabilista, aspecto que no siempre es fácil de visualizar y que un análisis de sensibilidad puede no revelar completamente, pues en él todos los valores posibles de todas las variables que intervienen tienen la misma probabilidad de ocurrencia, cosa que normalmente no es cierta.

La teoría de probabilidades y la estadística comenzaron a aplicarse sistemáticamente a la geotecnia en la década de los años setenta y hoy es raro aquel congreso donde no se incluyen algunos trabajos sobre este tema. Existen también congresos con este solo propósito (Shackelford y coautores, 1996).

En Venezuela, hasta donde el autor de este trabajo conoce, casi nada se ha escrito sobre este tema con excepción del excelente trabajo del ingeniero Roberto Centeno W.

denominado “Inspección y Control de Obras Civiles” (Centeno, 1982) el cual, como su nombre implica, está orientado mayormente hacia la parte del tratamiento estadístico del muestreo durante la construcción. Este aspecto, como se indicó al comienzo de esta introducción, es fundamental a la confiabilidad del proceso geotécnico completo.

El presente trabajo está orientado hacia la fase de diseño y hace uso de todos los conceptos hasta ahora expresados. El primer capítulo es un capítulo de introducción a la teoría de probabilidades y estadística. Los conceptos básicos de estas disciplinas están ilustrados con ejemplos aplicados a la geotecnia, pero los lectores familiarizados con estos conceptos no necesitan leerlo.

En el segundo capítulo se presenta un caso muy simple de un muro de contención. Allí se pretende desarrollar el cálculo probabilista de una manera conceptual, con las matemáticas más simples posibles, a fin de que destaquen conceptos fundamentales como probabilidad conjunta, la jerarquía estadística entre variables y el concepto de probabilidad de falla. El siguiente capítulo está dedicado a la confiabilidad y a la relación entre la calidad de los datos y el resultado final. En el capítulo 4 se estudia por métodos probabilistas el caso real del asentamiento de un terraplén sobre arcilla blanda el cual se encuentra muy bien documentado en varios artículos de la literatura especializada. La influencia de las simplificaciones propias del método de cálculo unidimensional de asentamientos parecen ser las responsables de la discrepancia entre cálculo y realidad.

Finalmente, en el capítulo 5 se estudia el manejo probabilista de una regresión lineal en un caso también real y bien documentado sobre la capacidad de soporte por fricción lateral de un pilote sometido a una carga vertical. El uso de regresiones lineales es muy frecuente en geotecnia y, por lo tanto, sus propiedades estadísticas deben ser bien comprendidas para poder tratarlas por métodos probabilistas.

Capítulo 1

Conceptos básicos de la teoría de probabilidades y estadística

1.1 Introducción

Este primer capítulo puede considerarse como no necesario para la comprensión de este trabajo o, al menos, para los objetivos del mismo.

Su intención es la de familiarizar al lector con los conceptos básicos de la teoría matemática de probabilidades y estadística que se emplean a lo largo de este trabajo.

Por lo tanto, aquellos lectores que conozcan lo fundamental de estas teorías pueden omitir su lectura. El capítulo está escrito de una manera informal, más sobre la base de ejemplos que sobre postulados matemáticos. Estos ejemplos se basan en situaciones simples, pero propias de la geotecnia con las que el especialista estará seguramente familiarizado e incluso habrá experimentado muchas similares.

Por consiguiente, este primer capítulo puede considerarse una guía rápida sobre probabilidades que establece solamente los conceptos fundamentales y la nomenclatura a utilizarse. Algunos de los conceptos expresados pueden repetirse más adelante con el fin de dar mayor énfasis a su aplicación en un problema particular. Otros conceptos algo más avanzados se expondrán cuando sea necesario utilizarlos en los próximos capítulos..

En este capítulo se introducen los conceptos de evento, espacios de muestreo, probabilidad, unión e intersección de eventos, probabilidad condicional, variables aleatorias: sus distribuciones y parámetros más importantes, inferencia estadística, correlación y regresión lineal.

1.2 Introducción al concepto de probabilidad

1.2.1 Experimento, evento y espacio de muestreo

La lámina² N° 1.1 muestra un terreno compuesto por 4 zonas o sectores geotécnicamente distintos. Los sectores 1 y 2 ocupan el 30% del área total cada uno, mientras el restante 40% se divide por igual entre los sectores 3 y 4 (20% cada uno).

Supóngase que la litología es tal que una perforación hasta doce metros de profundidad solamente encontraría material tipo “A” en el sector 1; solamente material tipo “B” en el sector 2; solamente material tipo “C” en el sector 3 y los tres materiales “A”, “B” y “C” en una misma perforación, en el sector 4. Las correspondientes columnas de perforación se muestran en figura inferior de la lámina.

En términos probabilistas cada perforación sería un *experimento aleatorio* o simplemente *un experimento*. Un experimento es un proceso que puede concretarse al menos en dos resultados posibles con incertidumbre en cuanto a cuál de ellos tendrá lugar (Spiegel, 1975).

El conjunto que contiene todos los resultados de un experimento se denomina espacio muestral. Con frecuencia habrá más de un espacio muestral que describe los resultados de un experimento, pero comúnmente hay solamente uno que suministra la mayor información (Spiegel, 1975).

En el experimento de lanzar un dado un espacio muestral podría ser: número par o impar. El más importante de los espacios muestrales sería el conjunto 1; 2 ; 3;... 6. En el caso de las perforaciones del terreno anterior, el espacio muestral más importante sería: sólo material “A”; sólo material “B”; sólo material “C” y materiales “A”, “B” y “C” en la misma perforación. Otro espacio de muestreo podría ser: la perforación contiene material tipo “C” o no contiene material tipo “C”.

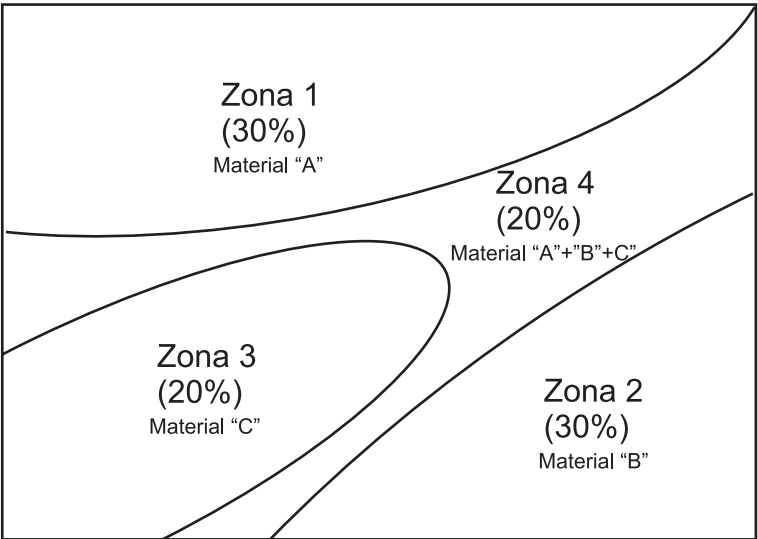
Cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina *evento*. En el caso de las perforaciones el obtener: sólo material “A” sería un evento, un evento simple o básico porque consiste en un solo punto del espacio muestral. Obtener material “A” o “B” en una

² En este trabajo las figuras están agrupadas en láminas. Cada lámina aparece en la página siguiente a aquella en que se nombra por primera vez.

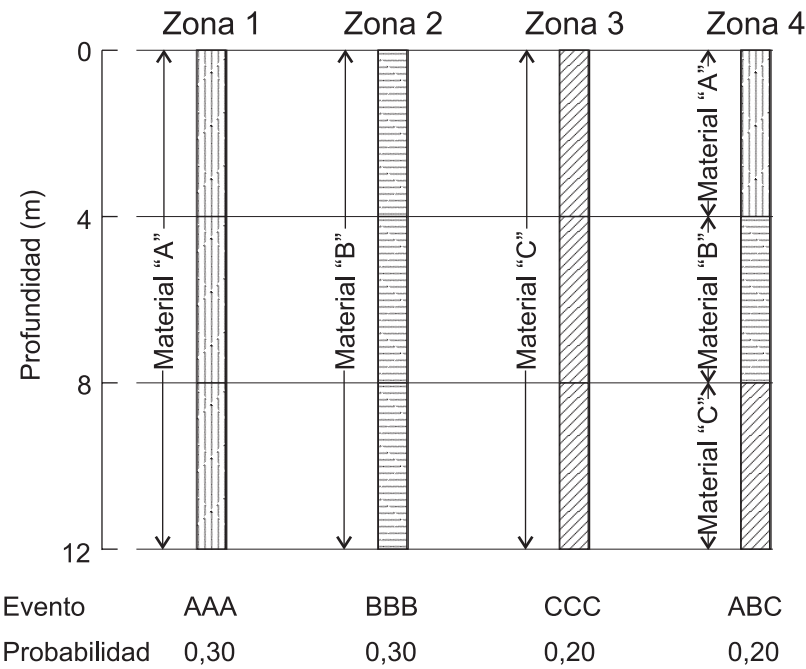
Lámina 1.1

Descripción del Terreno y de las Perforaciones

A)Características del Terreno



B)Resultado de las Perforaciones



perforación sería también un evento³. Por lo tanto, un evento es la combinación de uno o más resultados de un experimento.

Tal como está planteado el caso del terreno, sólo podría haber cuatro eventos básicos, o *puntos de muestreo*: material “A” en toda la longitud de la perforación (zona 1), y este evento podría designarse “evento AAA”; material “B” en toda la longitud (zona 2), “evento BBB”; material “C” en toda la longitud (zona 3), “evento CCC” o, finalmente los tres materiales en la misma perforación (zona 4) “Evento ABC”. Por consiguiente, el resultado de cualquier perforación está completamente definido y los cuatro resultados posibles o eventos son *exhaustivos* (ocupan todo el espacio de muestreo) y son *mutuamente excluyentes* (la ocurrencia de cualquiera de ellos impide la de cualquiera de los otros tres en el mismo experimento).

1.2.2 Concepto de probabilidad

El concepto de probabilidad es difícil de precisar. Su definición normalmente viene dada desde dos puntos de vista diferentes (Spiegel, 1975). El primero de ellos se ocupa de la probabilidad a priori que establece que; “si un evento puede ocurrir en h maneras diferentes de un número total de N maneras posibles, todas igualmente factibles, entonces la probabilidad de ese evento es h / N ”. Por ejemplo, obtener un número par tras lanzar un dado puede ocurrir de tres maneras diferentes de seis igualmente factibles, por lo tanto, la probabilidad de obtener un número par es: $3/6 = 1/3$.

La otra definición, denominada probabilidad a posteriori, establece que: “si después de N repeticiones de un experimento, donde N es muy grande, un determinado evento ocurre h veces, entonces la probabilidad del evento es: h / N ”.

Benjamin y Cornell (1975) establecen que “... a cada punto de muestreo se le asigna un número denominado probabilidad. La teoría matemática de la probabilidad no se refiere a qué significan o de dónde provienen esos números, solamente enseña a utilizarlos de una manera consistente”.

Para darle carácter aleatorio a todo lo que se expondrá a continuación se supondrá que en el terreno antes descrito hay diseminados seis equipos de perforación y que cada

³ Este sería un evento compuesto formado por los siguientes eventos: sólo material “A”, solo material “B” y materiales “A”, “B” y “C”.

uno de ellos, una vez finalizada su respectiva perforación, la envía a un laboratorio comercial cuyo director no sabe de antemano de cuál sector provendrán, pero debe estar razonablemente preparado en cuanto a personal y equipos para ejecutar los diversos ensayos particulares requeridos para cada uno de los materiales A, B y C y para ello necesita estimar, sobre la base de la teoría de probabilidades, la cantidad y secuencia de las muestras de cada tipo que va a recibir.

Tras la inspección de la figura “A” de la lámina 1.1, es razonable pensar el evento AAA ocurrirá en el 30% de los casos, el evento BBB en igual porcentaje y los eventos CCC y ABC en el 20% de los casos cada uno. Mediante este razonamiento se estaría aplicando la primera definición de probabilidad (probabilidad a priori).

La notación usual para expresar las probabilidades de los cuatro eventos antes descritos es:

$$P[AAA] = 0,3$$

$$P[BBB] = 0,3$$

$$P[CCC] = 0,2$$

$$P[ABC] = 0,2$$

Donde la expresión $P[AAA] = 0,3$ significa que la probabilidad de que ocurra el evento AAA es de 0,3 ó 30%.

1.2.3 Unión e intersección de eventos

El evento unión de dos eventos L y M, denominado $L \cup M$, es el conjunto de todos los resultados básicos del espacio muestral que pertenecen al menos a uno de estos dos eventos. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado el evento unión de los eventos “múltiplo de dos” y “múltiplo de tres” serían los números: 2, 3, 4, 6.

La probabilidad del evento unión de dos eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los eventos. Así, la probabilidad de que una perforación que llega al laboratorio resulte en el evento AAA o en el evento BBB es igual a: $P[AAA \cup BBB] = P[AAA] + P[BBB] = 0,30 + 0,30 = 0,60$.

Se denomina evento cierto a aquél cuya probabilidad es igual a la unidad. El evento cierto debe entonces ocupar todo el espacio de muestreo, puede ser un solo evento individual, pero más comúnmente es el evento unión de todos los eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes de un espacio de muestreo dado. En el caso del terreno, el evento cierto es AAAUBBBUCCCUABC.

La probabilidad de ocurrencia de un evento que no pertenece al espacio de muestreo es nula y se denomina evento imposible. Así, por ejemplo, para un cuarto material “D” no existente en la zona, se tiene: $P[D] = 0$, suponiendo que el evento D esté asociado con la obtención del material “D” en una perforación.

En consecuencia, la probabilidad de ocurrencia de un evento varía entre cero (evento imposible) y la unidad (evento cierto).

Considérese ahora la probabilidad de encontrar material “A” en las muestras de una perforación, aunque no necesariamente en toda su longitud. Tal condición sólo ocurre en la zona 1 o en la zona 4. Llamando A a este evento para distinguirlo del evento AAA, se tiene⁴:

$$P[A] = P[AAA] + P[ABC] = 0,30 + 0,20 = 0,50$$

De igual forma, llamando evento B a la ocurrencia de material “B” en una perforación, aunque no necesariamente en toda su longitud, se tiene:

$$P[B] = P[BBB] + P[ABC] = 0,30 + 0,20 = 0,50$$

Lo mismo para el material “C”

$$P[C] = P[CCC] + P[ABC] = 0,20 + 0,20 = 0,40$$

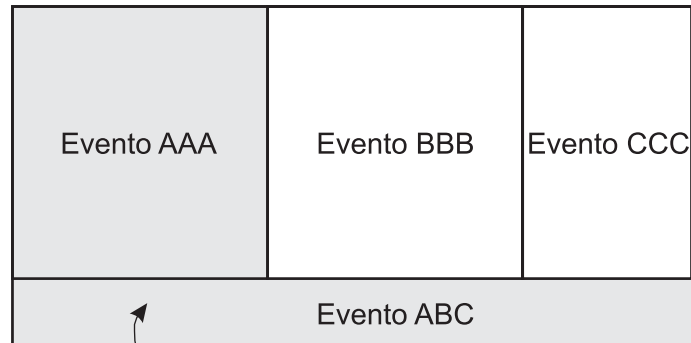
Los primeros dos diagramas de la lámina 1.2 muestran gráficamente los eventos A y B en el espacio de muestreo. Obsérvese que, a pesar de que los eventos A, B y C son exhaustivos, no son mutuamente excluyentes porque en una perforación de la zona 4 (evento ABC) aparecerían los tres materiales, por lo tanto el evento A puede ser simultáneo

⁴ Obsérvese que el evento AAA, en el cual toda la perforación sí está compuesta por material “A”, es un subconjunto del evento A.

Lamina 1.2

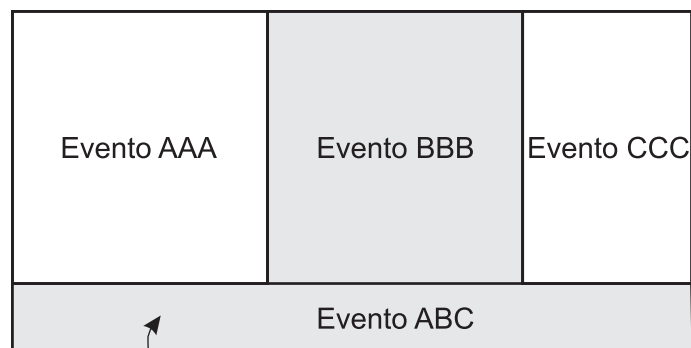
Diagramas de Venn Relativos a la Deficición y Combinación de los eventos A y B

A) Definición del Evento A



Toda la zona sombreada
Evento A = AAAUABC

B) Definición del Evento B



Toda la zona sombreada
Evento B = BBBUABC

C) Definición del Evento CCC^c



Toda la zona sombreada
Evento CCC^c = AUB

con B y con C. Por esta razón la suma de las probabilidades de los eventos A, B y C, no es igual a la unidad.

Se denomina *intersección* de dos eventos, L y M, al conjunto de los resultados básicos que pertenecen tanto al conjunto L como al conjunto M y se designa por $L \cap M$. En el caso de lanzar el dado, la intersección de los eventos “múltiplo de dos” y “múltiplo de tres” sería únicamente el numero seis.

¿Cuál es la probabilidad de obtener en una sola perforación material “A” y material “B”? Este evento, que comprende solamente el conjunto resultados comunes de los eventos A y B sólo puede ocurrir en la zona 4. Por lo tanto, la probabilidad del evento intersección de los eventos A y B:

$$P[A \cap B] = P[ABC] = 0,20$$

Los conceptos de unión e intersección pueden aplicarse a más de dos eventos.

¿Cuál es la probabilidad de obtener en una sola perforación muestras de los materiales “A” o “B”, no necesariamente en toda su longitud⁵? Nuevamente aparece aquí el concepto del evento unión de dos eventos. Lo que aquí se plantea es: ¿ $P[A \cup B]$? Este evento ocurre si la perforación se ejecuta en las zonas 1, 2 ó 4, Es decir, es la probabilidad de la unión de los conjuntos mutuamente excluyentes AAA, BBB y ABC. En consecuencia:

$$P[A \cup B] = P[AAA] + P[BBB] + P[ABC] = 0,30 + 0,30 + 0,20 = 0,80$$

Este evento, AUB también podría interpretarse como la no-ocurrencia del evento CCC, evento denominado *complemento* del evento CCC y designado como evento CCC^c . La probabilidad de ocurrencia de un evento complementario de otro es igual a la unidad menos la probabilidad de este último. Por lo tanto, se obtiene la misma respuesta si:

$$P[A \cup B] = 1 - P[CCC^c] = 1 - 0,20 = 0,80$$

En el diagrama de la figura C) de la lámina 1.2 se muestra en forma gráfica el evento CCC^c .

⁵ Obsérvese que la pregunta se refiere a la obtención de material A ó B (unión) en una perforación, no a la obtención simultánea de los materiales A y B (intersección), aunque esta última condición es un subconjunto de la primera.

Debido a que los eventos A y B no son mutuamente excluyentes, la probabilidad del evento unión de ambos, $A \cup B$, no es la suma de las probabilidades del evento A y el evento B, tal como ocurría con los eventos AAA y BBB que sí eran mutuamente excluyentes.

La probabilidad del evento unión de dos eventos, A y B, que no son mutuamente excluyentes, está dada por:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \quad (1.1)$$

En la figura superior de la lámina 1.3 puede verse el porqué de esta expresión⁶. Los diagramas como el presentado en esta lámina y la anterior se denominan *diagramas de Venn* y resultan muy útiles a la hora de visualizar las leyes de las probabilidades.

En la figura intermedia de la lámina N° 1.3 se muestra el diagrama de Venn de dos eventos, M y N, mutuamente excluyentes. A partir de esta figura se comprende por qué en los eventos mutuamente excluyentes la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades particulares. A los eventos mutuamente excluyentes también se les denomina eventos *disjuntos*.

Por lo tanto, igual resultado se obtiene si:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,50 + 0,50 - 0,20 = 0,80$$

1.2.4 Probabilidad condicional

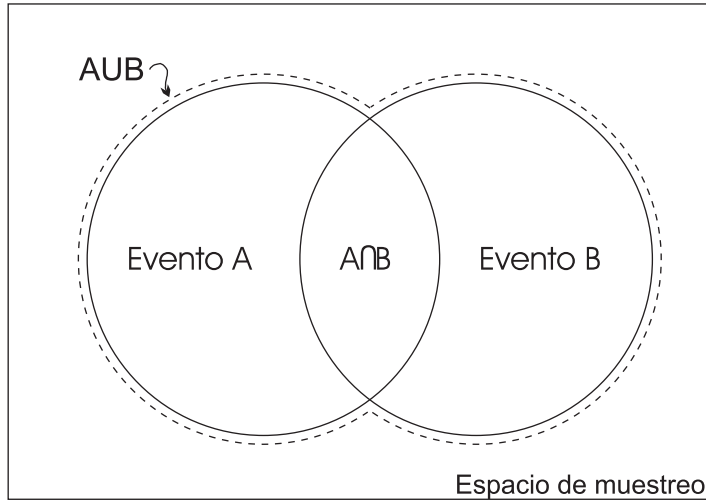
La *probabilidad condicional* se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un evento, X, cuando ha ocurrido otro evento, Y. La probabilidad condicional se representa por la expresión $P[X|Y]$ y significa: probabilidad del evento X dada la ocurrencia del evento Y. Si la ocurrencia de este segundo evento, Y, no modifica la probabilidad de ocurrencia del primero, X, se dice que ambos eventos son *independientes*, de lo contrario ambos eventos son *dependientes*⁷.

La expresión de la probabilidad condicional del evento X, dado que ocurrió el evento Y, está dada por:

⁶ Esta expresión puede generalizarse para la unión de más de dos eventos

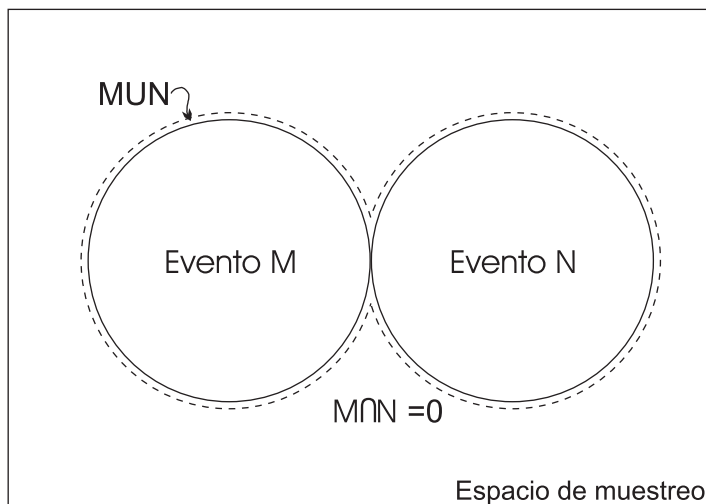
⁷ Por ejemplo si se lanzan dos dados el resultado del segundo dado no está condicionado por el valor obtenido en el primero (eventos independientes), pero si se extraen en secuencia dos naipes de un mismo mazo la pinta de la segunda carta sí depende de la pinta que se haya obtenido en la primera porque el número de naipes ya no es el mismo ni tampoco el número de barajas de la pinta extraída.

Lamina 1.3 Diagramas de Venn



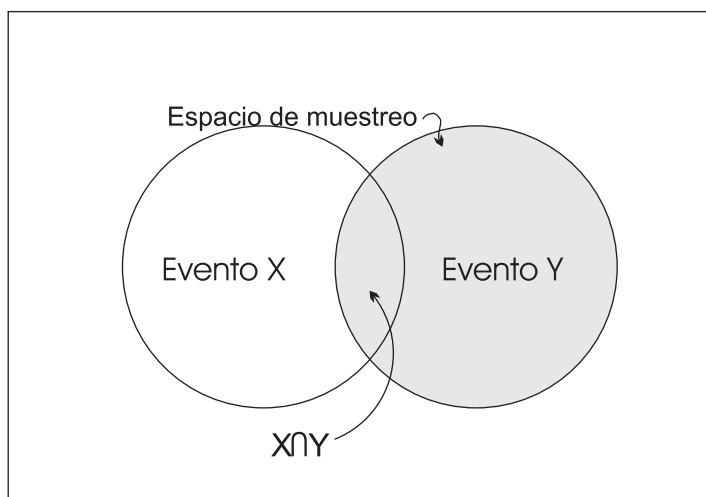
$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

A) Unión de Dos Eventos



$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

B) Eventos Mutuamente Excluyentes (Disjuntos)



$$P[A | B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

C) Probabilidad Condicional de Dos Eventos

$$P[X|Y] = \frac{P[X \cap Y]}{P[Y]} \quad (1.2)$$

En la figura C de la lámina N° 1.3 se muestra gráficamente el porqué de la expresión (1.2). En palabras: una vez ocurrido el evento Y el espacio de muestreo se reduce ahora al área que representa dicho evento en el diagrama de Venn. Este área está directamente asociada con $P[Y]$, por lo tanto, los únicos puntos posibles para la ocurrencia de X son aquellos que se encuentran en el sector $X \cap Y$.

Como ilustración de lo anterior: Si se encuentra una muestra de material tipo “B” en el laboratorio que ha perdido su etiqueta de origen. ¿Cuál es la probabilidad de que esa muestra provenga de la zona 4, es decir, del evento ABC?

En este caso, el evento ocurrido es una muestra del material “B”. Esta muestra puede provenir de la zona 2 (evento BBB) o de la zona 4 (evento ABC). La probabilidad de que provenga de la zona 4 se calcularía aplicando la expresión (1.2):

$$P[ABC|B] = \frac{P[ABC \cap B]}{P[B]}$$

La intersección del evento ABC con el evento B es precisamente el mismo evento ABC pues es el único espacio donde ambos eventos coinciden (únicos puntos de muestreo comunes). Ya se indicó que probabilidad del evento B es la probabilidad de la unión de los eventos mutuamente excluyentes BBB y ABC (Figura B, lámina 1.2). En consecuencia:

$$P[ABC|B] = \frac{P[ABC]}{P[BBB] + P[ABC]} = \frac{0,20}{0,30 + 0,20} = 0,40$$

Es decir, si se encuentra una muestra de material “B”, sin identificación de procedencia, hay 40% de probabilidad de que provenga de la zona 4 y 60% de probabilidad de que provenga de la zona 2 (evento complementario).

Como ya se ha dicho, si dos eventos son independientes, la ocurrencia del primero no afecta la probabilidad de ocurrencia del segundo. En este caso, si X e Y son eventos independientes, por definición:

$$P[X|Y] = P[X] \quad (1.3)$$

Igualando los segundos términos de las ecuaciones (1.2) y (1.3) y despejando $P[X \cap Y]$, resulta la importante relación para eventos independientes:

$$P[X \cap Y] = P[X]P[Y] \quad (1.4)$$

Por ejemplo: si se reciben dos perforaciones en el laboratorio ¿Cuál es la probabilidad de que una de ellas provenga de la zona 1 y la otra de la zona 3?

Suponiendo que los seis equipos de perforación están diseminados aleatoriamente en el terreno, los eventos pueden considerarse independientes⁸. En consecuencia:

$$P[AAA \cap BBB] = P[AAA] \times P[BBB] = 0,3 \times 0,3 = 0,09$$

Debe quedar claro que los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes se refieren a situaciones diferentes y no tienen nada que ver entre sí, aunque los eventos independientes no pueden ser mutuamente excluyentes.

1.2.5 Diagrama en árbol

Como introducción al método que se basa en el *diagrama en árbol* (Koosis, 1973) considérese el siguiente ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que llegadas dos perforaciones al laboratorio exista, al menos en una de ellas, un tramo de material “C”?

Continuando con la suposición de que las perforaciones de los distintos sectores llegan al laboratorio en una forma aleatoria, si se denomina $P[C_1]$ a la probabilidad de que en la primera perforación exista total o parcialmente material tipo “C” y $P[C_2]$ la probabilidad de igual condición en la segunda perforación, lo que se pide en este caso es $P[C_1 \cup C_2]$. De acuerdo a la ecuación (1.1) y sabiendo que $P[C] = P[C_1] = P[C_2] = 0,40$ y que, por tratarse de eventos independientes, $P[C_1 \cap C_2] = P[C_1] \times P[C_2] = 0,40 \times 0,40$.

$$P[C_1 \cup C_2] = P[C_1] + P[C_2] - P[C_1 \cap C_2] = 0,40 + 0,40 - 0,40 \times 0,40 = 0,64$$

⁸Esta suposición no tiene por que ser cierta en un caso real. Aunque todas las perforaciones sean de la misma longitud es posible que unos materiales sean más difíciles de perforar que otros o que los equipos de perforación no tengan la misma eficiencia. Por lo tanto, la secuencia de envío puede ser muy compleja y guardar un “orden oculto”. La independencia entre eventos es una de los aspectos más difíciles de establecer en la práctica. En todo caso existen métodos para determinar hasta cierto grado de confiabilidad si el proceso es aleatorio o no examinando su secuencia.

En la lámina 1.4 se muestra una forma secuencial de resolver este caso mediante el llamado diagrama en árbol. En este procedimiento se suman todos los resultados favorables ponderados por sus respectivas probabilidades. El procedimiento es engorroso aun para un problema simple como este, pero permite visualizar todas las posibilidades. Por ejemplo, es fácil darse cuenta de que la probabilidad de que el material “C” se encuentre en una sola de las dos perforaciones es 0,48 mientras que la probabilidad de que esté presente en las dos es de 0,16, para una probabilidad total 0,64, igual a la antes calculada. La suma de las probabilidades anteriores es directa porque nuevamente se trata de eventos mutuamente excluyentes: el material “C” aparece en una, aparece en las dos o no aparece. Los tres eventos que constituyen este particular espacio de muestreo caso son exhaustivos y mutuamente excluyentes.

La inspección del árbol de probabilidades sugiere que para éste y para otros casos más complejos, la teoría combinatoria podría ser de gran utilidad para separar los resultados de interés de los resultados posibles como en efecto, así es.

1.2.6 Fórmula binómica o de Bernoulli.

Una de las expresiones más importantes de las muchas que se pueden derivar de la teoría combinatoria aplicada al cálculo de probabilidades es la llamada *distribución binómica* o de *Bernoulli*.

Si se denomina x al número de veces que ocurre el evento de interés, comúnmente denominado “éxito”⁹ y se designa por la letra x . Si se designa por la letra N al número de intentos y p a la probabilidad de éxito ($1-p$, sería la probabilidad de “fracaso”) en cada intento, entonces la probabilidad de obtener x éxitos en N intentos viene dada por:

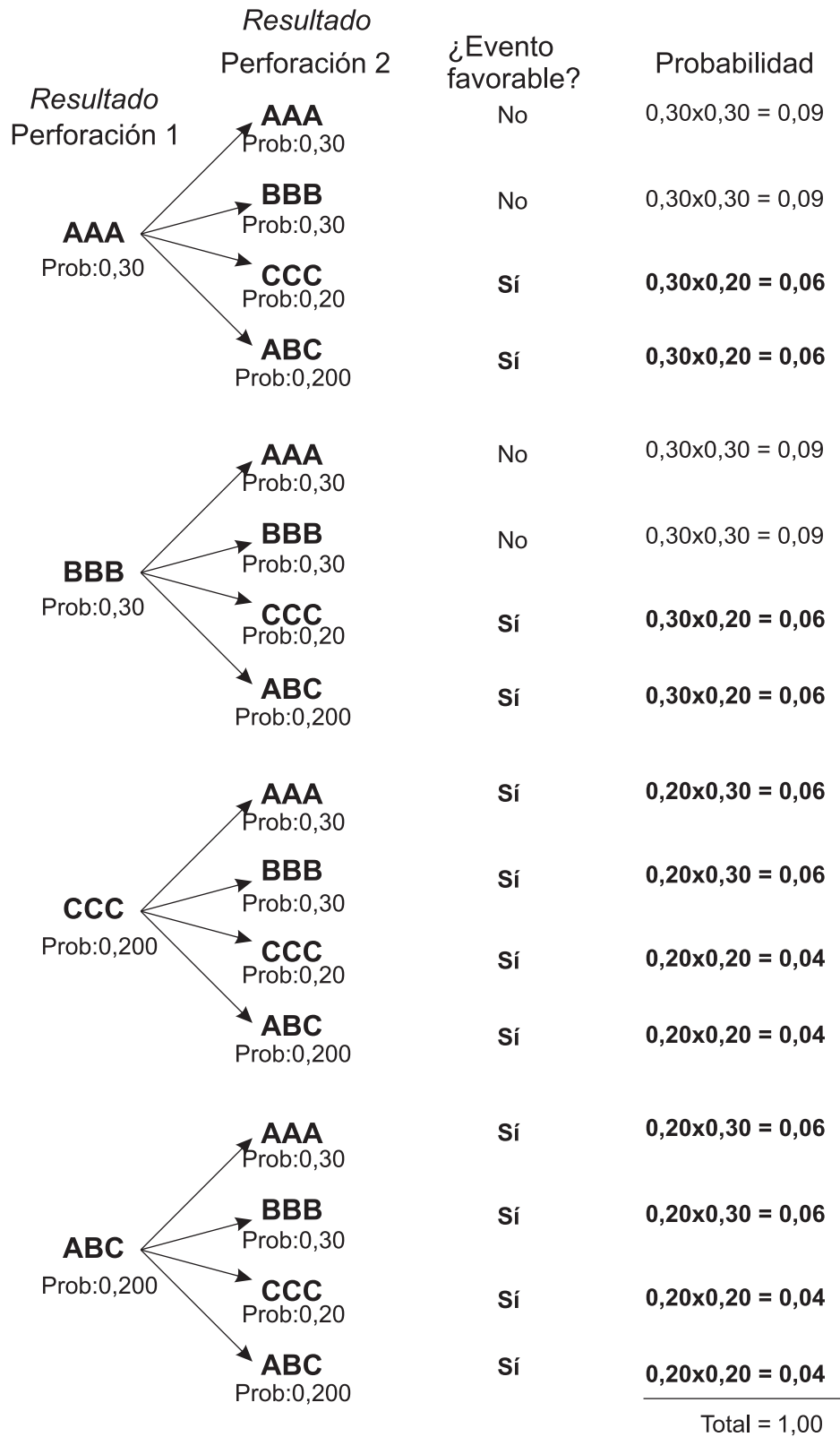
$$b(x; N; p) = C_x^N p^x (1-p)^{(N-x)} = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{(N-x)} \quad (1.5)$$

Así, en el ejemplo anterior, la probabilidad de que aparezca material “C” en solamente una de las dos perforaciones (sólo un éxito, x , en dos intentos, N , con una probabilidad de 0,40 en cada uno, p), viene dada por:

⁹ Aquí también se utiliza esta palabra en su sentido más amplio. “éxito” podría un terremoto.

Lámina 1.4

Diagrama de Árbol



$$P[C_1 \cup C_2] = \frac{\sum P[\text{Eventos favorables}]}{1,00} = \frac{0,64}{1,00}$$

$$b(1; 2; 0,40) = \frac{2!}{1!(2-1)!} 0,4^1 (1-0,4)^{(2-1)} = 2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48$$

y la probabilidad de que aparezcan muestras de material “C” en las dos perforaciones ($x = 2$; $N = 2$; $p = 0,40$):

$$b(2; 2; 0,4) = \frac{2!}{2!(2-2)!} 0,4^2 (1-p)^{(2-2)} = 1 \times 0,16 \times 1 = 0,16$$

Estos son los mismos resultados obtenidos mediante el diagrama de árbol. Para completar la distribución de Bernoulli, que abarca todo el espacio de muestreo y, por ende, la suma de las probabilidades de todos los eventos debe ser la unidad, habría que calcular la probabilidad de que el material “C” no aparezca en ninguna de las dos perforaciones. Esta probabilidad vendría dada por¹⁰:

$$b(0; 2; 0,40) = \frac{2!}{0!(2-0)!} 0,40^0 (1-0,40)^{(2-0)} = 1 \times 1 \times 0,40^2 = 0,36$$

1.3 Variables aleatorias y distribuciones de Probabilidades

1.3.1 Variables aleatorias

Supóngase que el material “C” requiere de ensayos de ejecución más lenta (consolidación, por ejemplo) que los de los otros dos materiales. Si el encargado del laboratorio recibe una llamada donde se le comunica que en los próximos días llegarán los envases correspondientes a seis perforaciones, pero no se le dice de cuáles sectores provienen. ¿Cómo podrá estimar cuantas perforaciones contendrán material tipo “C” para hacer sus previsiones de personal y equipos?

La estimación tendrá que hacerla calculando la probabilidad de que: ninguna, una, dos, etc., perforaciones contengan muestras de material “C”.

Mediante la distribución binómica es posible calcular estas probabilidades, las cuales vienen dadas por la expresión; $b(x; 6; 0,40)$ para todos los valores de x , es decir, desde $x = 0$ (probabilidad de que ninguna perforación contenga material “C”) hasta $x = 6$

¹⁰ Esta última probabilidad podría calcularse también como el evento complementario del evento $[C_1 \cup C_2]$, es decir: $1 - (0,48 + 0,16) = 1 - 0,64 = 0,36$

(probabilidad de que todas las muestras contengan material tipo “C”). Así, por ejemplo, la probabilidad de que cuatro de las seis perforaciones contengan muestras del material tipo “C” viene dada por:

$$b(4; 6; 0,40) = \frac{6!}{4!(6-4)!} 0,40^4 (1-0,40)^{(6-4)} = 15 \times 0,0256 \times 0,36 = 0,138$$

En forma similar pueden calcularse los restantes valores.

En figura superior de la lámina N° 1.5 se muestran los resultados de estos cálculos en forma gráfica, como un diagrama de barras. El diagrama es fácil de comprender, pero para su utilización resulta muy conveniente introducir el concepto de *variable aleatoria*.

Una variable aleatoria es una variable numérica cuyo valor está asociado con el resultado de un evento, su dominio es el espacio de muestreo y sus posibles valores son los puntos de muestreo. Por lo tanto, el valor de una variable aleatoria es impreciso y está asociado a la ocurrencia de un evento y por lo tanto a una probabilidad.

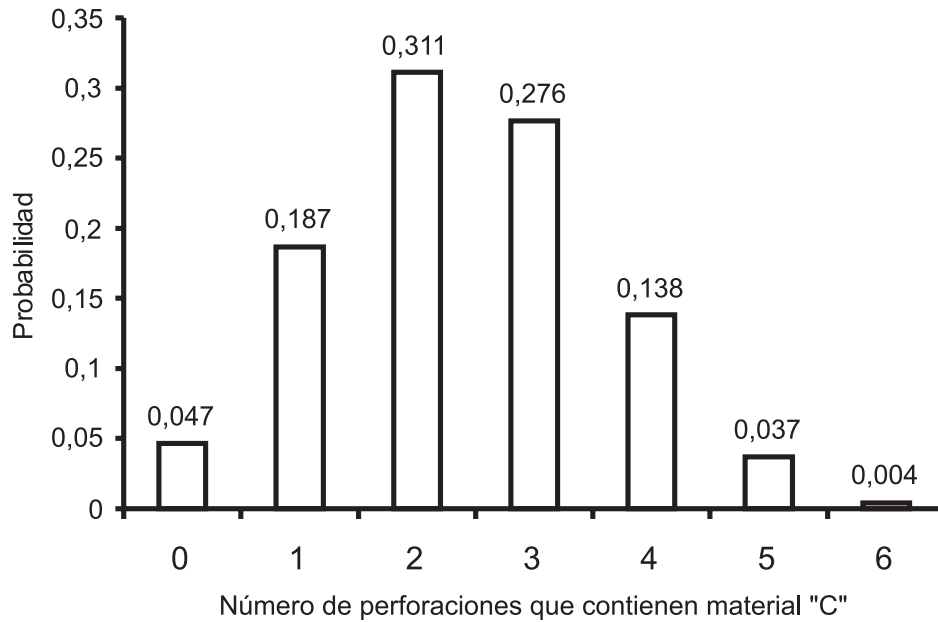
En el ejemplo anterior, la variable aleatoria es el número de perforaciones, de un total de seis, que contienen alguna muestra del material “C”. Esta variable aleatoria tomaría valores enteros desde cero hasta seis, ambos inclusive. Si se designa a esta variable por la letra X puede escribirse $P[X = 4] = 0,138$, es decir la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor $X = 4$ es 0,138. En este caso, la variable aleatoria X se clasifica como una *variable aleatoria discreta* porque sólo toma valores puntuales (0; 1; 2;...;6). En contraposición, las *variables aleatorias continuas* pueden tomar cualquier valor dentro del universo de muestreo. En geotecnia y en general en ingeniería, las variables continuas son más frecuentes que las discretas y de ellas se hablará más adelante. Ejemplos de variables aleatorias continuas en geotecnia podrían ser: el contenido de humedad natural en un terreno, el grado de compactación de un relleno, la capacidad de soporte de un pilote, la duración de un pavimento, etc.

La lámina 1.5 muestra la variable discreta X del ejemplo de las seis perforaciones en las dos representaciones usuales. La figura superior representa la llamada *función de masas de la probabilidad* (fmp) y relaciona cada valor de la variable aleatoria con la probabilidad correspondiente y la figura inferior representa la *función de probabilidades*

Lámina 1.5

Distribuciones Probabilísticas de una Variable Aleatoria Discontinua

A) Función de Masas de la Probabilidad



B) Distribución Acumulada de Probabilidad

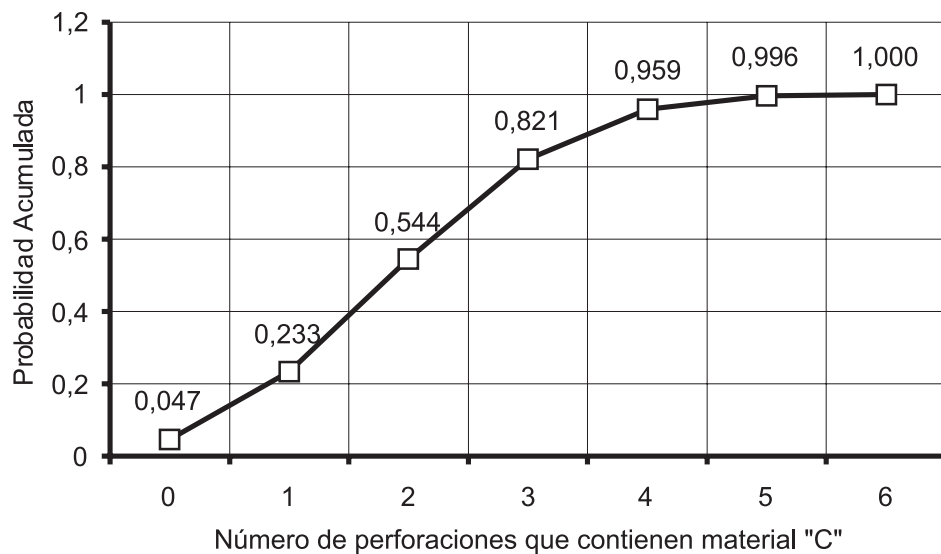


Lámina 1.5

acumuladas (FPA) e indica la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria sea igual o menor que un valor dado. Esta función es la suma de los valores de las probabilidades obtenidos en la función de masas (fmp) hasta el punto considerado inclusive. Así, la probabilidad de que el número de perforaciones que contengan muestras del material “C” sea igual o menor que tres es de 0,821 según el gráfico de la lámina 1.5. En realidad, para variables discretas, como la de este caso, los puntos no deberían estar unidos por una línea, pues no hay valores intermedios. Algunos autores representan esta unión escalonada. Sin embargo, hecha esta salvedad, la unión de los puntos de una u otra forma es útil pues permite visualizar más rápidamente la tendencia.

La figura B de la lámina 1.5 le indicaría al encargado del laboratorio de que si quiere estar 95% seguro de que será capaz de enfrentar la contingencia que suponen las muestras de material “C” deberá tomar las previsiones necesarias para procesar muestras de este material en cuatro de las seis perforaciones.

¿Qué significa estar 95% seguro? En este caso significaría que si la misma situación se repitiera un número significativo de veces, solamente en cinco de cada cien la demanda superaría las previsiones.

1.3.2 Variables aleatorias continuas

Supóngase que al principio de la exploración del terreno de la figura 1.1, se hubiera decidido fijar la ubicación perforaciones de un modo aleatorio¹¹, de tal forma que el punto correspondiente a cualquier par de coordenadas medidas en dos lados perpendiculares del terreno tuviera igual probabilidad de ser elegido como sitio de perforación. Es decir, cualquier punto del terreno tiene igual probabilidad que los otros de ser elegido como sitio para perforar. Las dimensiones del terreno son 2,0 Km de largo por 1,4 Km de ancho.

Supóngase además que los en cuatro lados del terreno existen carreteras desde las cuales es posible acceder al interior del terreno por cualquier punto para la logística de las perforaciones, pero una vez dentro, el terreno es boscoso y pantanoso, por lo tanto, de difícil tránsito.

¹¹ El la práctica de la ingeniería no es recomendable el uso de este procedimiento aleatorio para situar las perforaciones. Las perforaciones deben ser fijadas como consecuencia del resultado de una exhaustiva interpretación de la geología del terreno producto de visitas al campo, examen de fotografías aéreas y toda la documentación disponible. También del tipo de obra a construir. Aquí sólo se trata de un ejemplo

En estas condiciones el supervisor de campo estaría interesado en calcular la probabilidad de cuan alejada puede resultar una perforación de los bordes del terreno con el fin de estimar sus costos de operación (deforestación y acondicionamiento de las vías de acceso a las perforaciones, traslado de equipos, transporte de personal, repuestos, abastecimiento de combustibles, alimentos, etc.). La distancia es entonces una variable aleatoria continua.

En la figura A de la lámina 1.6 se muestra la condición geométrica para que una perforación resulte a una distancia igual o menor que una distancia prefijada, x . Toda perforación cuya ubicación esté dentro del área sombreada en la figura cumplirá esta condición. Dado que el área total contiene todos los puntos de muestreo, la probabilidad de que una perforación resulte a una distancia menor o igual que x de un borde del terreno vendrá dada por el cociente entre área sombreada y el área total. La inspección de la figura muestra que la mayor distancia a la que una perforación puede quedar del borde más próximo del terreno es igual a la mitad del ancho y , por lo tanto, la probabilidad de que una perforación esté ubicada a esa distancia o una menor es la del evento cierto, es decir, la unidad.

Volviendo a la figura A de la lámina 1.6, tras resolver el problema geométrico de la simple relación entre el área sombreada y el área total, la probabilidad de que una perforación quede ubicada a una distancia menor o igual que x , viene dada por la función:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{2 \cdot x \cdot (2,0 + 1,7) - 4 \cdot x^2}{(2,0 \cdot 1,7)} \quad (0 \leq x < 0,7) \quad (1.6)$$

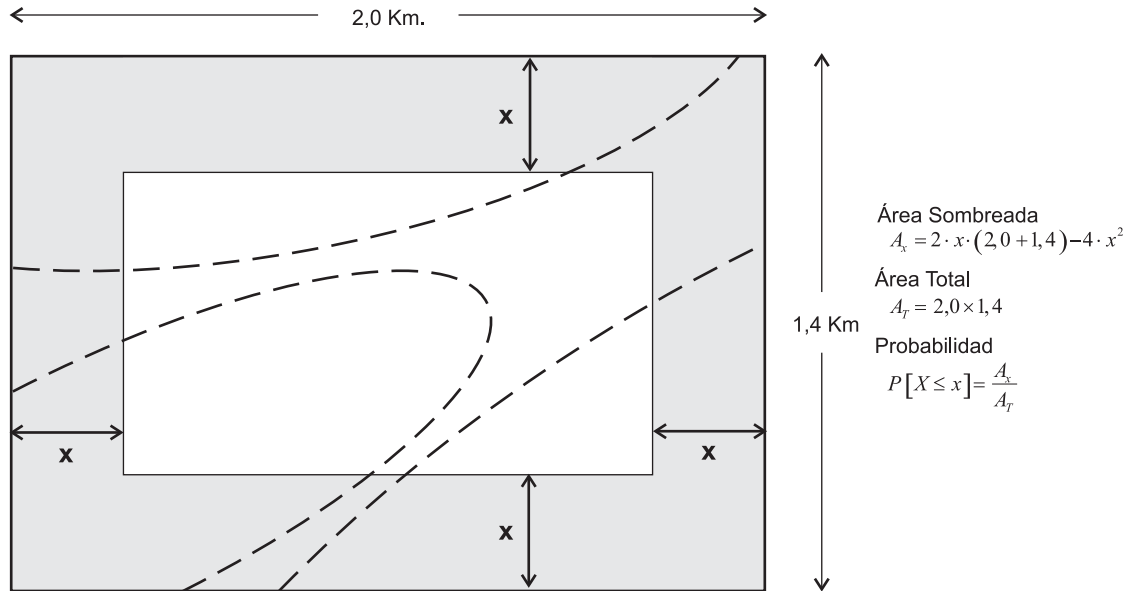
Esta función que se denota por $F_X(x)$, se denomina función de probabilidades acumuladas (FPA) y al igual que en caso de variables aleatorias discretas representa la probabilidad: $F_X(x) = P[X \leq x]$.

En este punto es conveniente interrumpir el ejemplo para describir la nomenclatura normalmente usada para las variables aleatorias en la mayor parte de los textos de teoría de probabilidades. En esta teoría las mayúsculas se utilizan para nombrar las variables aleatorias (X, Y, Z etc.) mientras que las correspondientes minúsculas (x, y, z) se emplean para designar los valores que toman dichas variables. Esta nomenclatura posee muchas ventajas, sobre todo claridad y carencia de ambigüedad, pero no podrá seguir siendo usada

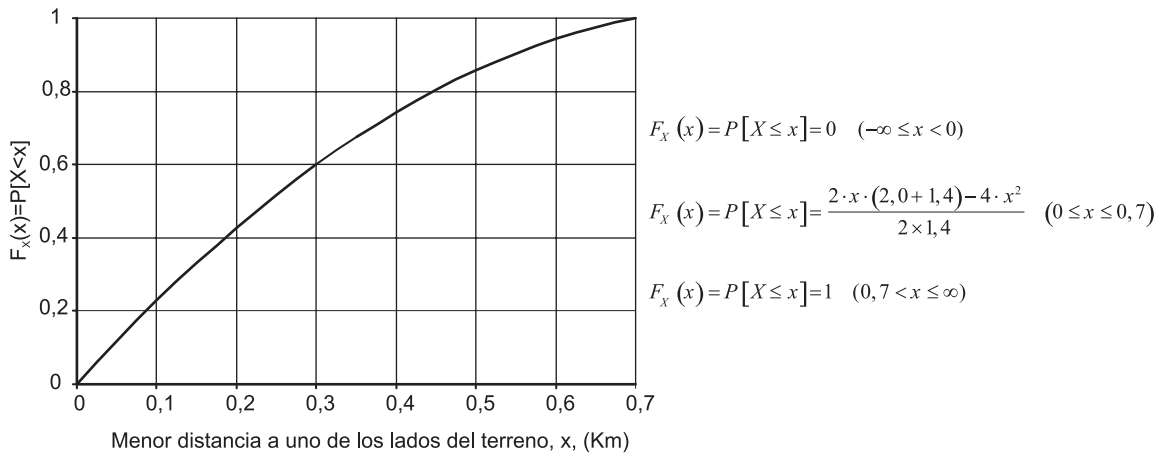
Lámina 1.6

Funciones de una Variable Aleatoria Continua

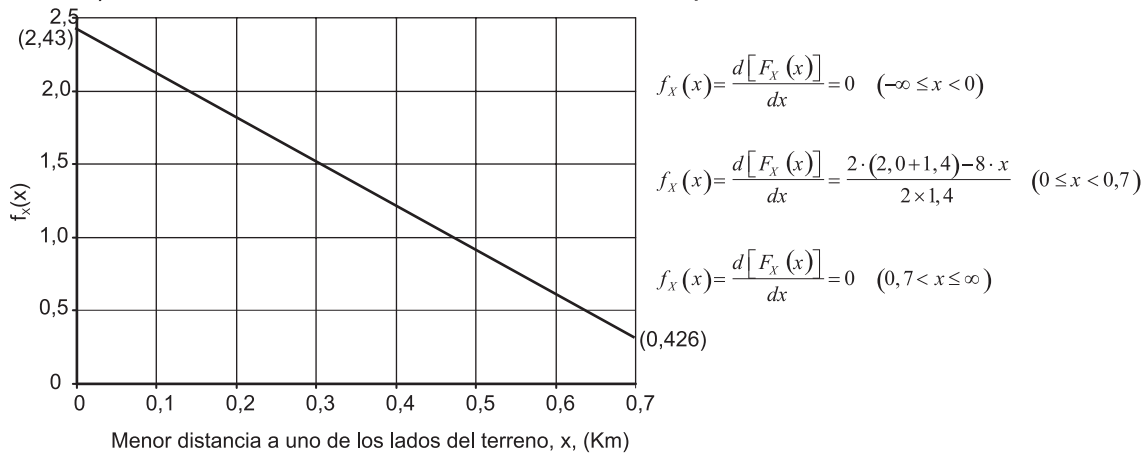
A) Planteamiento del Problema



B) Función de Probabilidades Acumuladas. FPA



C) Función Densidad de Probabilidades. fdp



en los siguientes capítulos de trabajo por la interferencia con letras que son de uso común en la nomenclatura de la Mecánica de Suelos. Por ejemplo, todo especialista sabe que E_a es la designación casi universal para designar el empuje activo, que una fuerza se designa con la letra F y rara vez con la letra f. Por lo tanto, una expresión como: $F_{Ea}(e_a) = P[E_a \leq e_a]$ puede resultar extraña y confusa a una persona más familiarizada con la de la Mecánica de Suelos que con la teoría de probabilidades. No todos los textos de probabilidades aplicadas a la Ingeniería Civil utilizan la nomenclatura descrita, véase por ejemplo Harr (1987), aunque otros si la conservan (Benjamin y Cornell, 1970).

Continuando con el ejemplo anterior, la derivada de la función de probabilidades acumulada es la denominada función de distribución de probabilidades (fdp) y se representa por $f_x(x)$. Esta función expresa la intensidad de la probabilidad en cada punto x, no la probabilidad de cada valor de x. En el ejemplo que se está considerando, la función distribución de probabilidades viene dada por:

$$f_x(x) = \frac{d[F_x(x)]}{dx} = \frac{2 \cdot (2,0 + 1,4) - 8 \cdot x}{2 \times 1,4} \quad (0 \leq x < 0,7) \quad (1.7)$$

En las dos figuras inferiores (B y C) de la lámina 1.6 se presentan gráficamente ambas funciones. Las propiedades de la FPA son similares a las indicadas para el caso de variables aleatorias discretas.

La fdp (figura C), como ya se ha dicho, representa la intensidad de la probabilidad en cada punto y no es una probabilidad en sí. En este sentido podría establecerse una analogía con lo que representa una distribución de esfuerzos. Una distribución de esfuerzos dice muy poco acerca de la fuerza total, pero su representación gráfica permite establecer conclusiones de gran importancia. Esa es también la virtud de la fdp, por eso es una función muy importante, como se verá a lo largo de este trabajo.

Por ser la derivada de la función de probabilidades acumulada, la función distribución de probabilidades, fdp, tiene una serie de propiedades importantes. Una de ellas es que el área bajo la curva desde la abcisa menos infinito¹² hasta una abcisa dada

¹² En general el dominio de un variable aleatoria continua se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En el ejemplo que se esta desarrollando la variable x toma valores significativos entre 0 y 0,7 ambos inclusive, para valores inferiores o superiores $f_x(x) = 0$

representa la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor igual o menor que dicha abscisa. Es decir:

$$\int_{-\infty}^a f_X(x) dx = P[X \leq a] = F_X(a) \quad (1.8)$$

El valor de la integral es, en consecuencia, igual al valor de la ordenada de la FPA, $F_X(x)$, en el punto a .

De igual manera:

$$\int_a^b f_X(x) dx = P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) \quad (1.9)$$

Como corolario de la expresión (1.8), el área total bajo cualquier fdp debe ser igual a la unidad. Es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (1.10)$$

Una conclusión importante de la ecuación (1.9) es que la probabilidad de un valor determinado, “ a ”, es cero.

Este último resultado, aunque sorprendente, es innegable consecuencia de (1.9), pero su significado puede comprenderse mediante la siguiente pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que una de las coordenadas de una perforación sea 0,963 Km?. Lo primero que hay que definir es: ¿Qué significa 0,963 Km? ¿Significa 0,9634 ó 0,9638? Si se acepta que 0,963 Km es cualquier valor, x , tal que $0,9625 \leq x < 0,9635$, entonces puede aplicarse la expresión (1.9) para calcular su probabilidad. Por lo tanto, en casos así habría que considerar la variable continua como discreta, establecer los intervalos y calcular la probabilidad de cada uno de ellos. Se obtendría así una función de masas como la mostrada en la lámina 1.5. Este es un recurso que siempre cabe con las funciones de variables continuas, pero, como se verá a lo largo de este trabajo, no es necesario utilizarlo con frecuencia pues la información que por sí sola suministra la fdp es muy rica. En cualquier caso, siempre una variable continua puede convertirse en discreta si sus valores se agrupan en rangos.

En el ejemplo que sirve de base a esta discusión la fdp es una función lineal de forma trapezoidal. Se trata de una función simple que responde a un caso meramente

conceptual y con fines ilustrativos. La FPA correspondiente es una parábola de segundo grado.

1.3.3 Distribución conjunta de dos variables aleatorias

La función distribución conjunta $f_{XY}(x,y)$ de dos variables aleatorias es una función que expresa la probabilidad de que dos variables aleatorias X e Y tomen dos valores determinados x e y en un mismo evento. En otras palabras:

$$f_{XY}(x,y) = P[(X=x) \cap (Y=y)] \quad (1.1)$$

Si X e Y son variables aleatorias independientes, se sabe, por la ecuación, (1.4) que:

$$P[X \cap Y] = P[X]P[Y]$$

Por ejemplo: la función distribución conjunta de los resultados de un dado lanzado dos veces es constante e igual a: $f_{XY}(x,y) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Es decir: la probabilidad de obtener un dos en el primer lanzamiento ($X=2$) y cinco en el segundo ($Y=5$) es igual a la probabilidad del primero, $1/6$, por la probabilidad del segundo, también $1/6$. Esta probabilidad es la misma cualquiera que sea el par de números que se escoja.

Si se deseara graficar esta función tendría que ser en un gráfico tridimensional, representando en el eje X los valores 1; 2; ...;6 (primer lanzamiento) los mismos valores para el eje Y (segundo lanzamiento) y valores constantes en el eje Z , iguales a $1/36$, sobre cada una de las intersecciones de los valores enteros de X e Y ¹³.

Otro ejemplo algo más complejo es el presentado en la lámina 1.7. Considérese el caso ya tratado de la presencia de muestras de material “C” en un lote aleatorio de seis perforaciones (lámina 1.5). Podría además estudiarse el problema de la distribución conjunta de las muestras que contienen material “C” y aquellas que provienen de uno dado de los dos sectores (3 ó 4) donde ello es posible, por ejemplo, el sector 4 (evento ABC).

Llámesese N_1 al evento de obtener n_1 muestras de material “C” en un lote de seis perforaciones y llámesese N_2 a la probabilidad de que n_2 de esas muestras provengan de la zona 4 ($n_2 \leq n_1$). Lo que se pide entonces es:

¹³ Ello, por supuesto, no quiere decir que la función conjunta de dos variables independientes sea siempre una constante. En este caso lo es porque sus componentes son constantes.

Lámina N° 1.7

Función Distribución Conjunta de Dos Variables Aleatorias

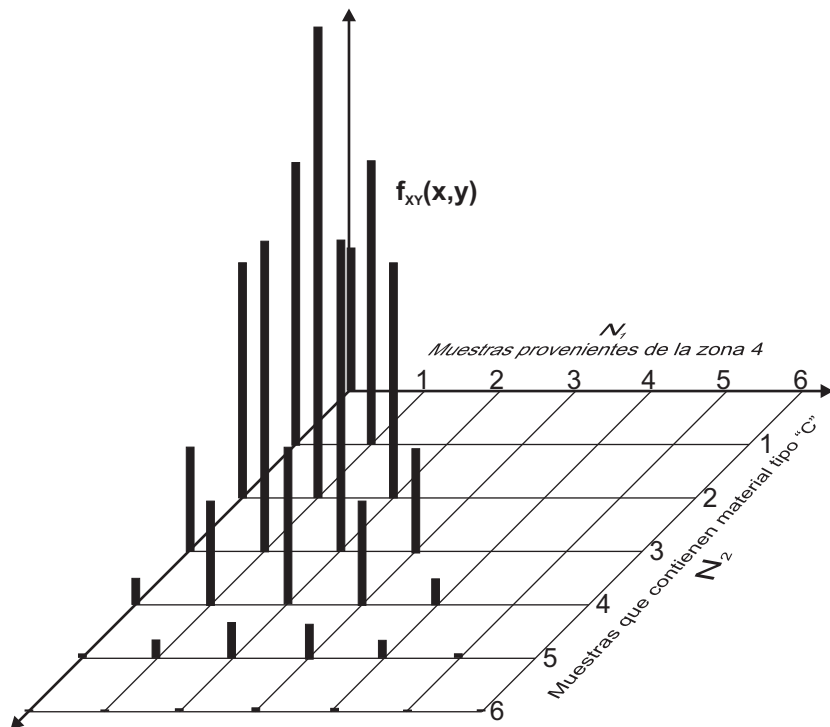
A) Valores de la función distribución conjunta de las variables

N_2 Número de muestras que provienen la zona 4 (ABC) en un lote se seis perforaciones

N_1	0	1	2	3	4	5	6	Σ
0	0,047							0,047
1	0,094	0,094						0,187
2	0,078	0,156	0,078					0,311
3	0,035	0,104	0,104	0,035				0,276
4	0,009	0,035	0,052	0,035	0,009			0,138
5	0,001	0,006	0,012	0,012	0,006	0,001		0,037
6	6,25E-05	3,75E-04	0,001	0,001	0,001	3,75E-04	6,25E-05	0,004
Σ	0,263	0,393	0,246	0,082	0,015	0,002	0,000	1,000

Número de muestras que contienen material tipo "C" en un lote de 6 perforaciones

B) Representación tridimensional de la función



$$f_{N_1 N_2}(n_1, n_2) = P[(N_1 = n_1) \cap (N_2 = n_2)]$$

Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote aleatorio de seis muestras cuatro de ellas contengan material tipo “C” y dos de éstas provengan del sector 4? Ese sería el valor particular de la función de distribución: $f_{N_1, N_2}(2; 4)$.

El cálculo de este valor particular anterior puede encontrarse a partir de la ecuación de la probabilidad condicional (ecuación (1.2)), de la siguiente forma:

$$P[N_2 = 2 | N_1 = 4] = \frac{P[N_2 = 2 \cap N_1 = 4]}{P[N_1 = 4]}$$

Por lo tanto, despejando el valor de interés:

$$P[N_2 = 2 \cap N_1 = 4] = P[N_2 = 2 | N_1 = 4] P[N_1 = 4]$$

La probabilidad $P[N_2 = 2 | N_1 = 4]$ puede calcularse mediante la distribución binómica:

$$P[N_2 = 2 | N_1 = 4] = b(2; 4; 0,50) = 0,375$$

Donde 0,50 es la probabilidad de que una muestra de material “C” provenga del sector 4 (evento ABC). Este valor de 0,50 es consecuencia de que el material “C” sólo puede provenir del sector 3 (evento CCC) o del sector 4 (evento ABC). Como ambos sectores tienen igual proporción de área en el terreno (20 % cada uno) su probabilidad de ocurrencia se reparte por igual.

La probabilidad $P[N_1 = 4]$ ya se calculó en la lámina 1.5 y es la probabilidad de en un lote de seis perforaciones cuatro contengan material tipo “C”. Nuevamente:

$$P[N_1 = 4] = b(4; 6; 0,40) = 0,138$$

Por lo tanto:

$$P[N_2 = 2 \cap N_1 = 4] = P[N_2 = 2 | N_1 = 4] P[N_1 = 4] = 0,375 \times 0,138 = 0,0518$$

Los valores restantes de la función de distribución conjunta pueden calcularse de manera similar variando los parámetros en forma acorde para calcular cada uno de los 35

casos restantes. En la figura A) de la lámina 1.7 se representan los valores calculados. Obsérvese que los casos donde $n_2 > n_1$ es imposible que ocurran y, por lo tanto su probabilidad es nula.

Todos los eventos mostrados en la tabla de la figura A) son exhaustivos y mutuamente excluyentes por lo tanto su suma debe ser la unidad, como se indica en la última celda de la tabla.

¿Qué representa la suma de los elementos de una fila dada? Representa la probabilidad de que $N_1 = n_1$, cualquiera que sea el valor de N_2 . Así el valor de esta suma correspondiente a la fila $N_1 = 2$, es igual a 0,311, es la probabilidad ya conocida (lámina 1.5) de que dos perforaciones en el lote de seis contengan material tipo “C” independiente.

¿Qué significa la suma parcial de los elementos de cualquier columna de la tabla? Representa la probabilidad de que N_2 perforaciones en un lote de seis provengan de sector 4. Así la probabilidad de que ninguna de las seis perforaciones provenga del sector 4 es de 0,263; dos: 0,246. etc. A estas sumas parciales se les denomina *función probabilidad de masa marginal*.

¿Cuál es la probabilidad que dos perforaciones provengan del sector 4 dado que tres de las seis perforaciones provienen contienen material tipo “C”? Aquí se está ante un caso de probabilidad condicional porque es un hecho que tres perforaciones contienen material tipo “C”. Por lo tanto:

$$P[N_2 = 2 | N_3 = 3] = \frac{P[N_2 = 2 \cap N_3 = 3]}{P[N_3 = 3]}$$

Sabiendo que el numerador de la expresión anterior es $f_{N_1 N_2}(3, 2)$ y el denominador es $\sum_{\text{todo } N_2} f_{N_1 N_2}(3, N_2)$, es decir una de las funciones probabilidad de masa marginal antes nombradas se tiene:

$$\frac{P[N_2 = 2 \cap N_3 = 3]}{P[N_3 = 3]} = \frac{f_{N_1 N_2}(3, 2)}{\sum_{\text{todo } N_2} f_{N_1 N_2}(3, N_2)} = \frac{0,104}{0,276} = 0,377$$

Es evidente que hay otras formas más sencillas y directas de resolver el caso anterior, pero la forma usada tiene la ventaja que sólo utiliza las propiedades de la distribución conjunta de probabilidades y es la única forma de proceder en aquellos casos

donde esta función ha sido hallada en forma empírica a través de frecuencias en observaciones.

En el próximo capítulo la función distribución conjunta se utiliza en un ejemplo más complejo.

1.3.4 Parámetros característicos de las funciones de variables aleatorias.

Las funciones distribución de probabilidades tienen una serie de parámetros que las caracterizan y que se denominan momentos.

El primero de estos momentos se denomina *valor esperado* o *promedio* y comúnmente se representa por μ o por $E[x]$. En este trabajo se utilizará la segunda forma para evitar confusiones con el coeficiente de fricción que también suele representarse por la misma letra griega. La expresión para el promedio o valor esperado de una distribución de probabilidades viene dada por:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad (1.2)$$

Como se ve, geométricamente, el valor esperado corresponde con el momento estático del área de la fdp respecto al eje de las ordenadas y, más aun, dado que el área de toda fdp es igual a la unidad, el valor esperado también corresponde a la abscisa del centro de gravedad de la fdp¹⁴.

En el ejemplo de la distancia de las perforaciones al borde más próximo del terreno:

$$E[x] = \int_{-\infty}^0 (x \cdot 0) dx + \int_0^{0,7} x \left[\frac{2 \cdot (2,0 + 1,4) - 8 \cdot x}{2 \times 1,4} \right] dx + \int_{0,7}^{\infty} (x \cdot 0) dx = 0,268$$

Si se trata de una variable discreta, la integral de (1.2) se convierte en una sumatoria. Así, el valor esperado de una variable aleatoria discreta viene dado por:

$$E[X] = \sum_{\text{Todos } X_i} x_i \cdot p_X(x_i) \quad (1.3)$$

¹⁴ Recuérdese que las coordenadas del centro de gravedad se determinan por el cociente del momento estático entre el área para los respectivos ejes.

Donde $p_X(x_i)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome el valor x_i . En el caso de la función de masas de la figura A de la lámina 1.5 el valor esperado vendría dado por:

$$E[X] = 0 \times 0,047 + 1 \times 0,187 + 2 \times 0,311 + \dots + 6 \times 0,004 = 2,398$$

El valor esperado o promedio es el valor central de la distribución de probabilidades y es valor que mejor caracteriza a la variable aleatoria. Es también el valor a partir del cual se dispersan los valores de la variable aleatoria, de forma que si obtuvieran varios valores de la variable aleatoria, respetando la distribución de probabilidades impuesta por su fdp, el promedio de estos valores estaría próximo al valor esperado y estaría más próximo cuantos más valores de la variable aleatoria se tomaran (la demostración de este enunciado se hace mediante la ley de los grandes números, que puede encontrarse en cualquier texto de probabilidades y estadística).

Por ejemplo, en el caso antes tratado sobre la probabilidad de obtener material tipo “C” en seis perforaciones provenientes del área explorada (lámina 1.5) si se recibieran muchos lotes aleatorios de seis muestras cada uno y se observara cuantas perforaciones contienen material tipo “C” en cada lote, se vería que los resultados se ajustan a la distribución binómica en la lámina, pero si se calculara el promedio el número de perforaciones con material tipo “C” por lote, en todos los lotes, el resultado estaría próximo al valor esperado calculado de 2,398 y más próximo cuantos más lotes se examinaran.

De igual forma, si el encargado de campo en el ejemplo de las perforaciones, revisara el promedio de las distancias de éstas al borde más próximo, después de haber situado unas cuantas en el terreno, observaría que este promedio estaría cercano a 268 m,. Es muy posible que este encargado, para su planificación de la logística del trabajo, hubiera calculado cuánto costaba emplazar y atender una perforación situada a 268 m de un borde y hubiera multiplicado ese costo por el número de perforaciones que se pensaban ejecutar en esa fase preliminar a fin de tener una idea del costo presupuestario de las partidas relacionadas.

Por su definición matemática, el valor esperado es un operador lineal es decir es distributivo respecto a la suma y conmutativo respecto a una constante. Estas dos propiedades son de gran aplicación como se verá en los próximos capítulos de este trabajo.

Una vez calculado el valor esperado, es conveniente tomar los siguientes momentos respecto a un eje vertical que pase por la abcisa correspondiente al valor esperado, en lugar de tomarlos respecto al origen. A tales momentos se les denomina momentos centrales. El segundo momento de una variable aleatoria es el siguiente valor en importancia para caracterizar su distribución. El segundo momento central de una distribución de probabilidades se denomina varianza y mide la dispersión de los valores de la variable respecto al promedio. Viene dado por la expresión:

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \quad (1.4)$$

Para variables aleatorias discretas la expresión correspondiente es:

$$\text{Var}[X] = \sum_{\text{Todos } X_i} (x_i - E[X])^2 \cdot p_X(x_i) \quad (1.5)$$

El valor de la varianza en el ejemplo de la menor distancia a un borde del terreno es:

$$\text{Var}[x] = \int_0^{0,7} (x - 0,268)^2 \left[\frac{2 \cdot (2,0 + 1,4) - 8 \cdot x}{2 \times 1,4} \right] dx = 0,034$$

Y en el ejemplo del número de perforaciones que contendrían muestras de Material tipo “C” en un lote de seis:

$$\text{Var}[X] = (0 - 2,398)^2 \times 0,047 + (1 - 2,398)^2 \times 0,187 + \dots + (6 - 2,398)^2 \times 0,004 = 1,442$$

Nuevamente, desde el punto de vista de la geometría, en las dos expresiones anteriores, (1.4) y (1.5), la expresión de la varianza es igual a la del momento de inercia del área de la fdp respecto a un eje que pase por su centro de gravedad (valor esperado). También, debido a que el área de cualquier fdp es igual a la unidad, la raíz cuadrada positiva de la varianza equivale al radio de giro del área geométrica de la fdp. Esta raíz cuadrada es un parámetro de gran importancia en probabilidades y estadística y se denomina *desviación estándar*. Normalmente se designa como $\sigma[X]$. Por provenir de la

varianza, la desviación estándar sigue siendo una medida de la dispersión de los valores respecto al promedio, con la ventaja adicional que está expresada las mismas unidades de la variable aleatoria.

La desviación estándar en el primero de los casos anteriores es:

$$\sigma[X] = \sqrt{0,039} = 0,184 \text{ Km}$$

Y en el segundo:

$$\sigma[X] = \sqrt{1,442} = 1,201 \text{ Muestras}$$

¿Cuál de las dos fdp posee mayor dispersión?. Ello no se puede saber hasta la que las dispersiones estándar se normalicen dividiéndolas por sus respectivos promedios. Este cociente se denomina *coeficiente de variación* y se designa por $CV[X]$.

Los coeficientes de variación son $0,184/0,268 = 0,69$ en el primer caso y $1,201 / 2,398 = 0,50$ en el segundo. Por lo tanto, la fdp correspondiente a la distancia de una perforación al borde posee más dispersión en sus valores que la otra. Realmente, un coeficiente de variación de 0,69 es elevado y el supervisor de campo haría bien en tomar en cuenta este hecho a la hora de sus previsiones. Más adelante se indicará cómo tomar en cuenta el efecto de este valor

El tercer y cuarto momentos centrales, divididos por el valor de la desviación estándar elevada a la potencia del respectivo momento (3 ó 4) se denominan sesgo y curtosis. Estos parámetros están relacionados con la asimetría de la distribución y con la forma más achatada o picuda de la fdp. Ambos momentos se mencionan más adelante en este trabajo, pero no se utilizarán. En cualquier texto de probabilidades pueden encontrarse sus propiedades y su significado.

1.3.5 Distribuciones Normal y lognormal

Cualquier función que cumpla con la condición de que el área bajo la ella es igual a la unidad (ecuación (1.10)) podría ser usada como función distribución de probabilidades, fdp. Sin embargo, en estadística¹⁵ existen varias de funciones que han probado su utilidad

¹⁵ Según el Diccionario de la Real Academia Española, estadística es la ciencia que utiliza conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.

en muchos casos debido a lo adecuado que resultan para la representación y descripción de fenómenos aleatorios físicos o sociales. (Harr,1987, pg. 75 y siguientes presenta una buena descripción de las más importantes).

La más empleada de todas las distribuciones de probabilidades es la denominada distribución normal o Gausiana y también es la que más se utiliza en este trabajo. Por esta razón, a continuación, se hará una breve descripción de sus características.

En la figura A de la lámina 1.8 se muestra la pdf característica de la distribución normal. En ese caso particular: $E[X] = 0$ y $\sigma[X] = 1$, si $E[X] \neq 0$ la curva se desplazará a la izquierda o a la derecha de forma que la cúspide coincida con el valor de $E[X]$, si $\sigma[X] < 1$, (pero siempre positiva), la curva se cerrará más alrededor de $E[X]$ (curva más aguda) y si $\sigma[X] > 1$ los puntos se dispersarán (curva más plana). La distribución Normal es una curva simétrica respecto al valor de $E[X]$ y la ecuación de su pdf se muestra en la figura antes citada.

En la figura también se indica que el 68,3% de los valores de la distribución están comprendidos en un intervalo de amplitud $2 \cdot \sigma[X]$ centrado respecto a $E[X]$, el 95,4 % en un intervalo de amplitud $4 \cdot \sigma[X]$ y el 99,7% en un intervalo de amplitud $6 \cdot \sigma[X]$. Ello quiere decir que si una variable aleatoria, por ejemplo el índice de plasticidad de una muestra de suelo, perteneciera a una distribución normal, un valor obtenido aleatoriamente de ese índice de plasticidad tendría una probabilidad de 68,3% de encontrarse a $\pm \sigma[X]$ del valor esperado de la población; 95,4% de encontrarse a $\pm 2\sigma[X]$ y 99,7% de encontrarse a $\pm 3\sigma[X]$ del valor esperado de la población de índices de plasticidad de la misma familia de materiales en ese terreno¹⁶.

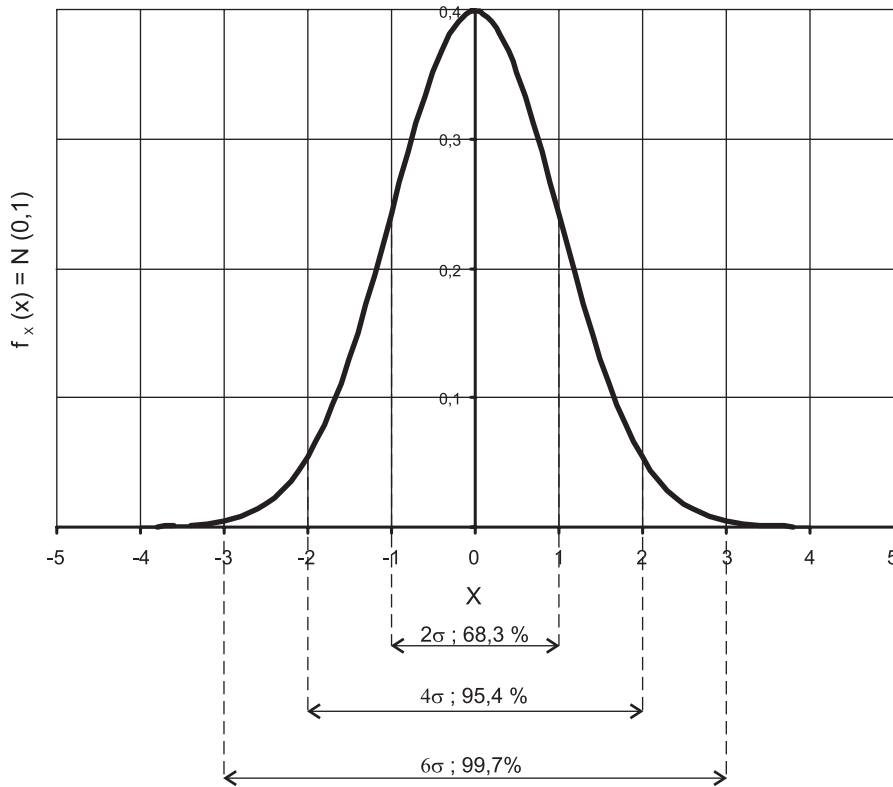
Puede demostrarse que variable aleatoria normal es consecuencia de la suma de una serie de eventos aleatorios. Por ejemplo: supóngase que se está preparando una mezcla de concreto que requiere una cierta proporción de arena. El maestro de la obra sabe que cada carretilla transportará aproximadamente unos 60 Kg de arena bajo un número establecido de paladas. El peso cada palada sería uno de los eventos aleatorios que sumados darían

¹⁶ En este caso el término población se refiere todas las muestras que tuvieran un mismo origen geológico o, al menos en una zona dada, que clasificaran en el mismo tipo de materiales: arenas arcillosas (SC), arcillas de baja plasticidad (CL) etc.

Lámina N° 1.8

Distribución Normal o Gausiana de $E[x] = 0$ y $\sigma[x] = 1$

A) Función Distribución de Probabilidades



Expresión General de la Distribución Normal

$$f_X(X) = \frac{1}{\sigma[X]\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-E[X])^2}{2(\sigma[X])^2}}$$

En este Caso : $E[X]=0$; $\sigma[X] = 1$

$$f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

B) Función de Probabilidades Acumulada

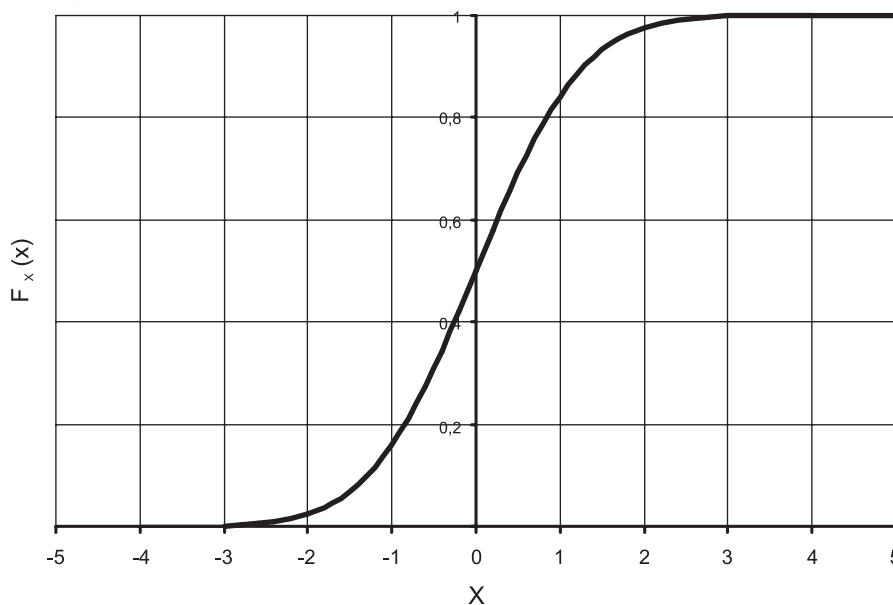


Lámina N° 1.8

origen al peso de cada carretilla y el peso final de ésta, también aleatorio, sería un valor, x , de la variable aleatoria, X , que respondería a una distribución normal. Si se pesara un número significativo de carretillas se encontraría que su valor esperado es de 60 Kg o muy próximo y la distribución de los pesos en las carretillas se ajustaría sensiblemente a una distribución normal¹⁷.

En la figura B de la lámina 1.8 se muestra la FPA de la distribución normal de $E[X]$ $= 0$ y $\sigma[X] = 1$. Para valores diferentes de $E[X]$ la curva se desplazará paralelamente hasta que el punto de inflexión ($P\{X \leq E[X]\} = 50\%$) coincida con el valor de $E[X]$ y si la desviación estándar es mayor o menor que la de la figura, la curva se separará o acercará a la vertical respectivamente.

Al igual que en cualquier otra distribución y por ser la FPA la integral de la fdp, la ordenada de cualquier punto de la FPA es igual al área bajo la fdp desde menos infinito hasta la abscisa considerada (ecuación(1.8)). Por ejemplo, por inspección de la figura A de la lámina 1.8, puede decirse que el área bajo la curva correspondiente a: $E[X] + 1,0 \sigma[X]$ es igual a: $0,5 + 0,683/2 = 0,842$ que debe ser igual a la ordenada de la FPA para $X = E[X] + 1,0 \sigma[X]$ y expresa la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que $E[X] + 1,0 \sigma[X]$.

La distribución normal posee una cualidad que la hace la más importante de las distribuciones y se deriva del “teorema del límite central” del cual se hablará más adelante.

Una distribución similar y de uso frecuente en ingeniería es la denominada distribución logarítmica normal o lognormal. Una variable aleatoria posee una distribución lognormal cuando son los logaritmos de sus valores los que poseen una distribución normal. Es decir si X es una variable aleatoria lognormal entonces $Y = \ln(X)$ posee una distribución normal. Si el origen de una variable con distribución normal es, como ya se ha dicho, la suma algebraica de eventos inciertos, es fácil comprender que el origen de una variable aleatoria lognormal es el producto (y cociente) de muchos eventos inciertos.

¹⁷ Para una demostración formal de todo lo anterior véase, por ejemplo Benjamin y Cornell, 1970, pg.249. Por otra parte el peso de la arena en las paladas, según la definición propuesta, también sería una variable normal. Pero para que la suma de eventos aleatorios conduzca a una distribución normal no es necesario que esos eventos poseen tal distribución.

La lámina 1.9 muestra la forma de la fdp y FPA de una distribución lognormal. En dicha figura, el logaritmo de la variable aleatoria X es una variable aleatoria normal con $E[\ln(X)] = 0,75$ y $\sigma[\ln(X)] = 0,6$. Los correspondientes valores $E[X]$ y $\sigma[X]$ no son simplemente $E[X] = e^{0,75} = 2,12$ y $\sigma[X] = e^{0,6} = 1,82$ (donde e es la base de los logaritmos naturales) sino que están dados por las siguientes expresiones, que también figuran en la lámina 1.8 (Nowac Y Collins, 2000):

$$\begin{aligned}\sigma^2[\ln(X)] &= \ln(CV^2[X] + 1) \\ E[\ln(X)] &= \ln(E[X]) - \frac{1}{2}\sigma^2[\ln(X)]\end{aligned}\tag{1.6}$$

Solamente cuando el coeficiente de variación $CV[X]$ es menor de 0,2, puede usarse la aproximación:

$$\begin{aligned}\sigma^2[\ln(X)] &\approx CV^2[X] \\ E[\ln(X)] &\approx \ln(E[X])\end{aligned}\tag{1.7}$$

Para la distribución lognormal mostrada en la lámina 1.9, con $E[\ln(X)] = 0,75$ y $\sigma[\ln(X)] = 0,6$ se tiene:

$$\begin{aligned}0,6^2 &= \ln(CV^2[X] + 1) \\ 0,75 &= \ln(E[X]) - \frac{1}{2}0,36^2\end{aligned}$$

La solución al sistema anterior es: $E[X] = 2,53$ y $\sigma[X] = 1,095$.

1.4 Inferencia estadística

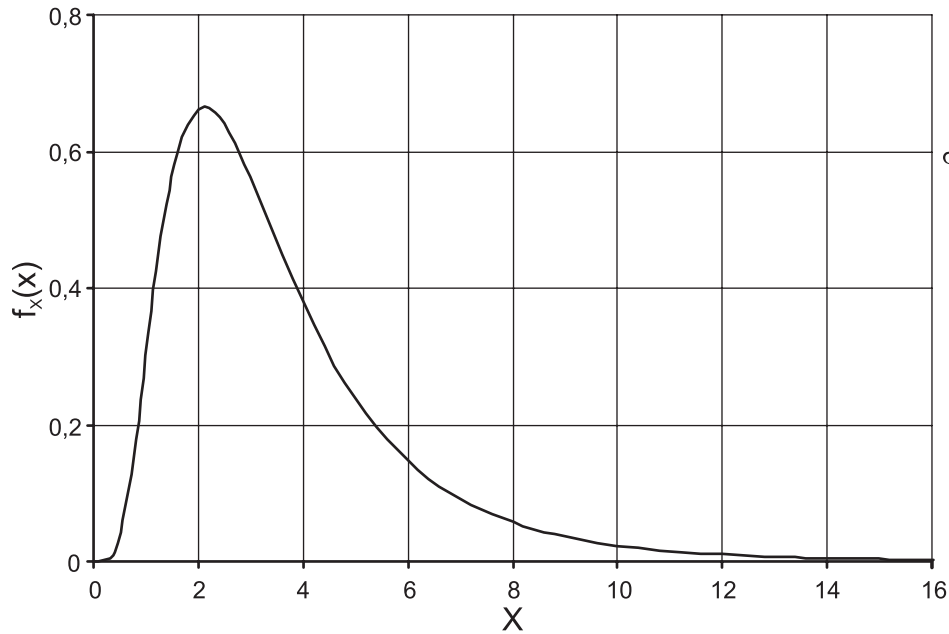
1.4.1 Población y muestra

Hasta ahora, en todos los problemas planteados, las distribuciones de probabilidades de las variables aleatorias se han encontrado en forma teórica o racional y a partir de ellas se ha estimado la probabilidad de eventos futuros asociados. Por ejemplo: organizar el laboratorio para atender a un número probable de muestras tipo “C” o conocer la

Lámina N° 1.9

Distribución lognormal

A) Función Distribución de Probabilidades



Parámetros de la dist. lognormal

$$\sigma^2 [\ln(X)] = \ln(CV^2[X] + 1)$$

$$E[\ln(X)] = \ln(E[X]) - \frac{1}{2}\sigma^2[\ln(X)]$$

Si el coeficiente de variación, CV, es menor de 0,2. Entonces:

$$\sigma^2[\ln(X)] \approx CV^2[X]$$

$$E[\ln(X)] \approx \ln(E[X])$$

B) Función de Probabilidades Acumulada

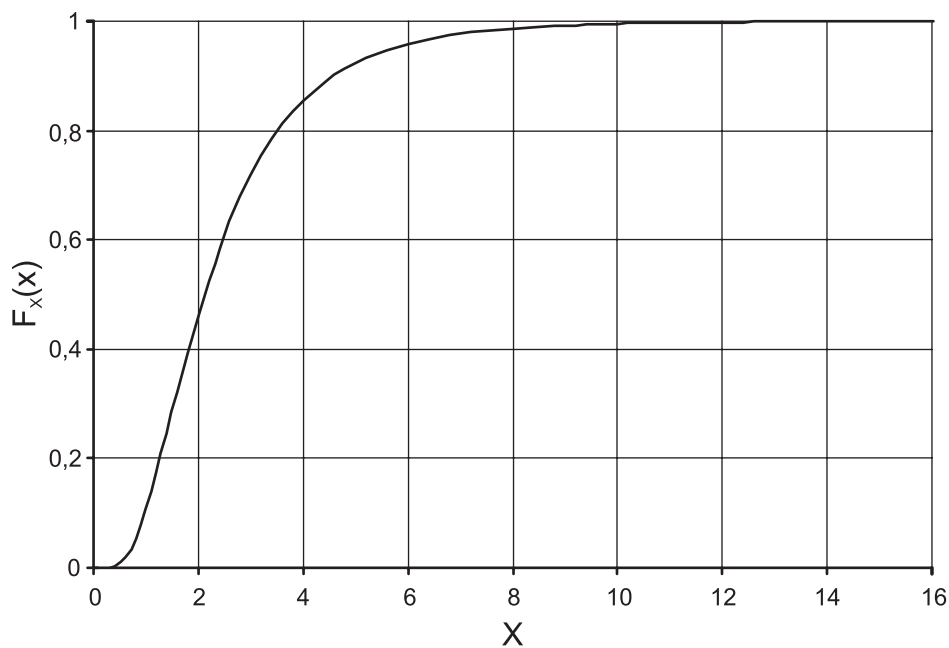


Lámina N° 1.9

distribución probabilística de perforaciones en el terreno respecto a la distancia a los bordes.

En realidad, éste no es procedimiento general en las aplicaciones de la estadística en la geotecnia. Más frecuentemente, la secuencia es inversa: se desconoce la distribución de la variable aleatoria de interés y se trata de inferir ésta a partir de una serie limitada, normalmente muy limitada, de observaciones.

Con el fin de ilustrar mejor la diferencia entre ambos procedimientos, supóngase que el supervisor de campo en el problema de estimar la distancia de las perforaciones al borde más próximo del terreno desconoce todo lo relativo a probabilidades y estadística y por lo tanto, no puede resolver el problema en la forma teórica como se resolvió anteriormente. En este caso, lo que probablemente haría es generar aleatoriamente pares de coordenadas para obtener posibles posiciones de las máquinas de perforar en el terreno. Para obtener estas coordenadas podría seguir un procedimiento similar al de las loterías. Para generar las coordenadas en el sentido longitudinal del terreno pondría en una bolsa diez fichas numeradas desde 0 hasta 9 y extrayendo una al azar obtendría las unidades (metros), regresaría la ficha y extrayendo otra al azar obtendría las decenas (decámetros) y así sucesivamente hasta obtener las unidades de mil. Como la longitud del terreno es de 2,0 Km, para obtener las unidades de mil (kilómetros) solamente colocaría dos fichas: 0 y 1 (aceptaría 1.999 m ~ 2,0 Km). Seguidamente, repetiría el mismo procedimiento para las coordenadas según el ancho con las modificaciones necesarias para ajustarse al máximo de 1,4 Km. Finalmente representaría el punto en el rectángulo y mediría la distancia hasta el borde más próximo. Repitiendo este procedimiento un número significativo de veces, obtendría y una *muestra aleatoria* de la *población estadística*.

Los conceptos de población estadística, o simplemente población, y de muestra aleatoria, o simplemente muestra, son muy importantes en estadística. La población se refiere a todos los valores que puede tomar una variable aleatoria. Así en el caso de las perforaciones conteniendo muestras de material “C” en un lote de seis obtenidas al azar la población es finita (0; 1; 2 ;...; 6) mientras que en el caso de la menor distancia de una perforación al borde del terreno la población está limitada entre 0 y 0,7 Km pero es infinita, porque hay infinitos puntos entre esos dos valores. Realmente, en casos como éste, se dice

que la población es hipotéticamente infinita (Mandel, 1964), porque realmente no lo es: el espacio que requiere una perforación (un hoyo de unos diez a veinte centímetros de diámetro) no puede solaparse con el de otra y por lo tanto el número de puntos de muestreo es finito. Por otra parte, si se usa el procedimiento de las fichas se están convirtiendo en variables discretas las distancias al calcular las coordenadas de metro en metro, aunque también podrían calcularse hasta la milésima de milímetro o más. Sin embargo, ello sería absurdo en un caso como éste. En muchos casos, suponer la población infinita facilita el tratamiento matemático del problema¹⁸.

El concepto de muestra se refiere a un conjunto de valores de la variable aleatoria seleccionados por un procedimiento aleatorio. Se entiende por proceso aleatorio aquél que excluye cualquier forma de sesgo que favorezca la escogencia de unos valores respecto a otros. De esta forma la muestra es una imagen de la población, imagen que será tanto menos distorsionada cuantos más elementos contenga la muestra. El número de elementos es la propiedad más importante en una muestra aleatoria.

Volviendo al caso de la ubicación de las perforaciones en el terreno y la menor distancia al borde más próximo, en la figura A de la lámina 1.10 se presenta una muestra de treinta elementos, es decir: la ubicación de treinta sitios de perforación obtenida por un proceso aleatorio, en otros problemas podría ser mediante observaciones reales (contenidos de humedad, dirección de las discontinuidades en un macizo rocoso etc.) y en la figura B de la misma lámina se muestra el *histograma*¹⁹ de la distancia de esas perforaciones al borde más cercano (barras blancas). El histograma se presenta para intervalos de 50 m. De la figura se desprende, entre otras cosas, que seis de las perforaciones están a una distancia comprendida entre 150 y 200 m de su borde más próximo. Si la muestra de treinta perforaciones fuera fiel reflejo de la población, el histograma correspondiente debería ser como el indicado en la misma figura mediante barras sombreadas. Este segundo histograma

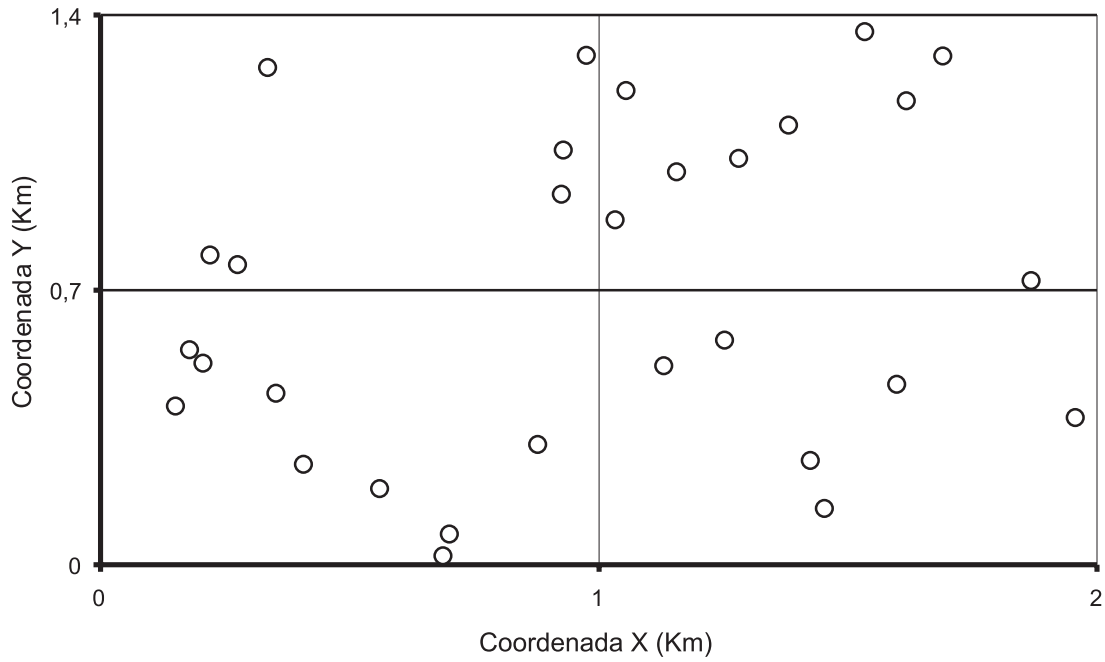
¹⁸ Al igual que lo facilita en el estudio mecánico de los materiales cuando se supone que los sólidos son un medio continuo y en realidad no es así. O, en otros casos, puede que lo facilite suponer que no son continuos (elementos finitos). Sin embargo, en estos últimos, la discontinuidad real y la supuesta en el modelo matemático rara vez coinciden. Cada problema marca pues su tratamiento.

¹⁹ Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española un histograma es: “la representación gráfica de una distribución de frecuencias por medio de rectángulos, cuyas anchuras representan intervalos de la clasificación y cuyas alturas representan las correspondientes frecuencias.”

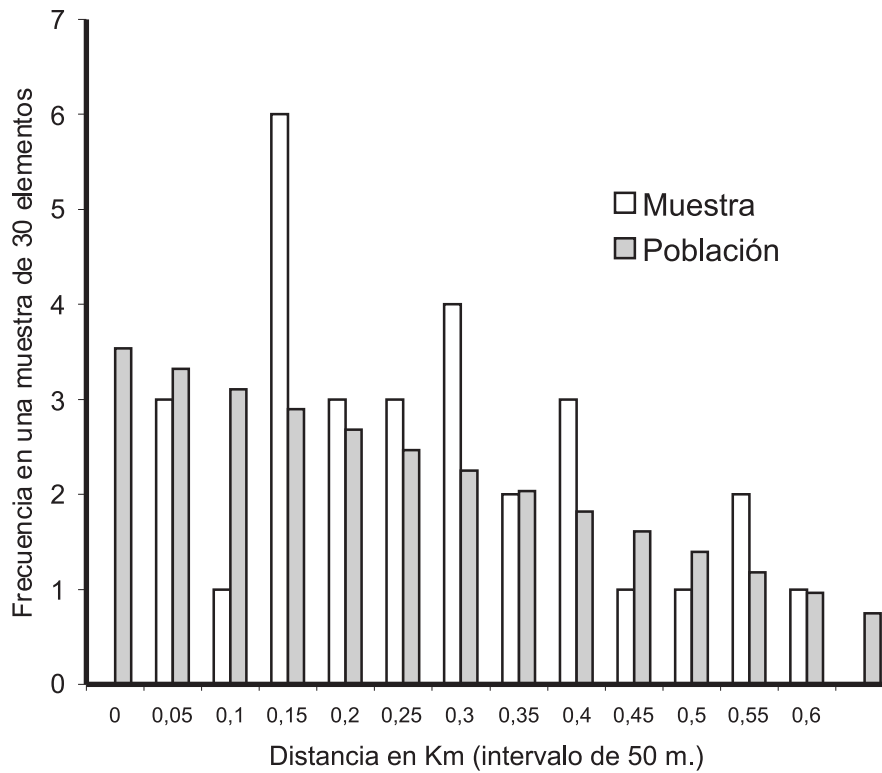
Lámina 1.10

Resultado de la Ubicación Aleatoria de 30 Perforaciones

A) Distribución Espacial de las Perforaciones en una Muestra Aleatoria



B) Histograma de la muestra e Histograma Teórico de la Población



está construido sobre la base de discretizar la pdf mostrada en la lámina 1.6 y distribuyendo las probabilidades en treinta elementos.

No disponiendo de otra información, el encargado de campo calcularía el promedio o valor esperado, m_x , de la muestra y su desviación estándar, s_x , mediante las siguientes expresiones:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1.8)$$

$$s = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)}{N - 1}$$

Donde x_i representa las observaciones y N es el número de ellas o tamaño de la muestra. Estos serían los mejores estimados²⁰ que el encargado de campo podría tener del valor esperado $E[X]$ y $\sigma[X]$ de la población. Obsérvese que la nomenclatura m_x y s_x se refiere a una muestra mientras que $E[X]$ y $\sigma[X]$ se refieren a la población.

En este caso, los valores obtenidos para la muestra de la lámina 1.10 son $m_x = 0,248$, ($E[X] = 0,268$) y $s_x = 0,148$ ($\sigma[X] = 0,184$). Se ve que la aproximación de los parámetros de la muestra a los parámetros de la distribución de la población es razonablemente buena, aun cuando ambos histogramas difieren, pero también el tamaño de la muestra es inusualmente grande, al menos para geotecnia. En este caso el costo de la muestra es casi despreciable (la generación de treinta puntos aleatorios de perforación), pero en otros casos, como suele suceder en geotecnia, la obtención de un solo valor de una propiedad del terreno puede variar de costosa a muy costosa, dependiendo de la propiedad que se trate. Por lo tanto, la obtención de una muestra que contenga un número estadísticamente razonable de valores de una propiedad es normalmente prohibitivo.

²⁰ El usar $N-1$ en lugar de N en la expresión de la desviación estándar de una muestra tiene su fundamento en los llamados “grados de libertad”. En términos sencillos, esto se refiere a que en la fórmula sólo hay $N-1$ valores independientes porque ya uno de ellos está presente en el promedio. Es decir, si se conoce el promedio y $N-1$ valores de x_i , el valor x_n ya está determinado.

1.4.2 Teorema del límite central

El teorema del límite central es extremadamente importante y es uno de los teoremas más famosos de las matemáticas (Hoel, 1971). En términos simples establece que si se tiene una serie de promedios de muestras provenientes de una distribución de probabilidades cualquiera y cada una de estas muestras está compuesta por la misma cantidad de elementos, cada uno de estos promedios es a su vez una variable aleatoria cuya distribución se aproximaría a una distribución normal que tiene por valor esperado el mismo de la distribución de donde provienen las muestras y por desviación estándar la misma de dicha distribución dividida por la raíz cuadrada del número de elementos que conforman las muestras. Para un número de muestras dado, la aproximación a una distribución normal será tanto más exacta cuantos más elementos contengan las muestras y cuanto más se parezca la distribución original a una distribución normal.

Con referencia al caso de la distribución trapezoidal antes calculada para la distancias de las perforaciones al borde más cercano del terreno, cuyos parámetros eran: $E[X] = 0,268$ y $\sigma[X] = 0,184$, puede decirse que el promedio de la muestra aleatoria de 30 elementos antes obtenido ($m_x = 0,248$) es un valor de la variable aleatoria, X' , cuya distribución se aproxima a una distribución normal de valor esperado $E[X'] = 0,268$ y de desviación estándar $\sigma[X'] = 0,184 / \sqrt{30} = 0,034$.

¿Qué utilidad tiene para el encargado de campo de las perforaciones este teorema?

Para el encargado de campo es importante conocer con la mayor exactitud el promedio de la distancia de las perforaciones al borde más cercano porque ese valor lo multiplicará por el número de perforaciones y por el costo por kilómetro de accesos, deforestación, transporte, servicios etc. para obtener el costo total de las partidas de movilización y asistencia en el terreno. Todo esto bajo la suposición de que por lo accidentado del terreno (pantanoso, boscoso, etc.,) siempre es más conveniente para ir de una perforación a otra salirse del terreno, tomar las vías perimetrales y volver a entrar al terreno por el punto más próximo a la siguiente perforación, en lugar de crear una vía interna para ir de una perforación a otra directamente.

En principio, el encargado de campo podría dar por suficientemente aproximado el promedio de su muestra, $m_x = 0,248$ Km y seguir adelante con ese valor o puede intrigarle

el saber cuán próximo estará ese promedio del verdadero. Eso no lo podrá saber en forma absoluta sino a través de un intervalo de confianza que el mismo establezca y, para ello, sí debe hacer uso del teorema del valor central como se explica a continuación.

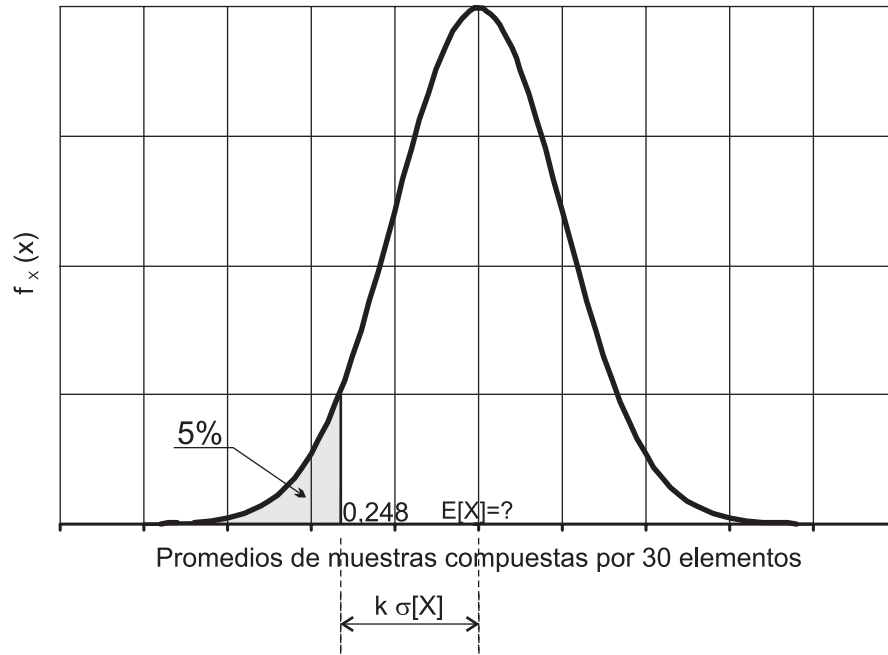
Al describir las propiedades de la distribución normal quedó establecido en la lámina 1.8 y en 1.3.5 que para un valor cualquiera de la variable, elegido al azar, existe una probabilidad de 68,3 % de que dicho valor pertenezca al intervalo $\pm\sigma[X]$ centrado en el valor esperado. Por lo tanto, el promedio de la muestra de 30 distancias, $m_x = 0,248$, tiene esa misma probabilidad en la distribución normal a la que supone que pertenece, es decir aquella con $E[X] = 0,268$ y $\sigma[X] = 0,184/\sqrt{30} = 0,034$ ²¹. El problema es que el encargado de campo desconoce estos dos últimos parámetros. El sólo conoce las aproximaciones a ellos provenientes de su muestra (0,248 y 0,148). Sin embargo, puede plantearse la siguiente pregunta: ¿Con 95% de confianza, cuál es la máxima distancia a la cual el valor $m_x = 0,248$ puede encontrarse por debajo del promedio de la distribución normal? En la lámina 1.11 se muestra la solución al problema. Básicamente se trata de tener en cuenta los siguientes aspectos:

- 1) El encargado tiene que suponer que su valor, $m_x = 0,248$, es inferior al valor esperado. No sería conservador, en este caso particular, suponer que es mayor.
- 2) Si establece un límite de confianza de 95 % quiere decir que acepta que su valor de m_x no será menor que el correspondiente a una probabilidad (o área) menor de 5 % en la distribución normal como se muestra en la figura. Este valor, en la distribución normal, corresponde a una abscisa de -1.6448 veces la desviación estándar medida desde el valor esperado. Por lo tanto, con 95% de confianza (el área restante) esa debe ser la máxima distancia que debe existir entre el valor $m_x = 0,248$ y el valor esperado buscado. Para finalizar el problema tendría que conocer el valor de $\sigma[X]$.

²¹ Obsérvese que en este caso esta probabilidad se cumple: $(0,248-0,268)/0,0234=-0,588$. Es decir, el promedio de las treinta muestras queda a la izquierda del valor esperado y a una distancia de 0,588 veces la desviación estándar

Lámina N° 1.11

Cálculo del máximo del valor esperado con 95% de confianza a partir del promedio de una muestra



$$P(E[X] - k \cdot \sigma[X] \leq 0,248) = \alpha$$

Mediante transformaciones algebraicas simples se tiene:

$$P\left(\frac{0,248 - E[X]}{\frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}}} \leq -k\right) = \alpha$$

Si $\alpha = 0,95$ (área no sombreada): $k = -1,6448$ y por lo tanto:

$$P\left(\frac{0,248 - E[X]}{\frac{\sigma[X]}{\sqrt{N}}} \leq -(-1,6448)\right) = 0,95$$

Si se acepta que $s_x = 0,148 \sim \sigma[X]$

$$\frac{0,248 - E[X]}{\frac{0,148}{\sqrt{30}}} \leq -(-1,6448)$$

Despejando $E[X]$ de la ecuación anterior

$$E[X] \leq 0,292$$

- 3) Dado que desconoce este valor, hay que dar por bueno el único de que se dispone, es decir, el obtenido en la muestra: $s_x = 0,148$.
- 4) El teorema del valor límite establece que la desviación estándar de la distribución normal a la cual pertenecen los promedios de las muestras integradas por igual número de elementos cada una es igual a la de la distribución original entre la raíz cuadrada del número de elementos en la muestra. La aproximación $\sigma[X'] \sim 0,148/\sqrt{30} = 0,02702$ es necesaria para resolver el problema.

El resultado es que, con 95 % de confianza, el promedio es inferior a 0,292 Km y este sería un valor más apropiado para que el encargado usara en sus cálculos, dado el elevado coeficiente de variación (0,68), que si bien él desconoce puede aproximar a partir de los parámetros de la muestra, es decir $CV \sim s_x / m_x = 0,148/0,248 = 0,60$.

Lo desarrollado en este ejemplo es una aplicación muy elemental de los llamados *límites de confianza* que se pueden encontrar extensamente desarrollados en cualquier texto general de estadística.

Dos cosas es conveniente aclarar:

En primer lugar, hay que tomar en cuenta que se utilizó la aproximación $s_x = 0,148$ en lugar del valor verdadero $\sigma[X] = 0,184$. Para aminorar el efecto de esta aproximación, que parece obligada en todos los casos donde se desean estimar los parámetros de una distribución a partir de los parámetros de una muestra, es más recomendable utilizar la distribución conocida como *t* de *Student*, creada con este propósito, en lugar la distribución normal. La distribución de Student es tanto más adecuada cuanto más pequeño es el número de elementos en la muestra. Para 30 elementos ambas distribuciones ya son casi idénticas y los resultados muy similares²².

²² La forma de la distribución de Student es una campana similar a la distribución normal, pero depende de un parámetro adicional denominado grados de libertad el cual normalmente es igual al número de elementos en la muestra menos uno (N-1). Cuantos menos grados de libertad la campana de Student es más “amplia” (dispersa) respecto a la distribución normal. A medida que aumentan los grados de libertad la campana se aproxima a la normal. La distribución de Student se encuentra en cualquier libro de estadística (Berk y Carey, 2000, por ejemplo, contiene un logicial donde se observan los cambios de la distribución con el número de grados de libertad)

En segundo lugar el valor esperado de una población es un valor fijo y no una variable aleatoria. Así el hablar de 95% de confianza no se refiere al valor esperado sino al lugar que ocupa el promedio de la muestra, m_x , en la distribución. Es decir, la variable aleatoria en este caso es m_x o, si se quiere, la longitud del intervalo que separa a este valor del valor fijo $E[X]$.

Para aclarar este segundo punto en la figura A de la lámina 1.12 se muestran los promedios m_x y desviaciones estándar, s_x , para diez muestras similares que incluyen a la hasta ahora utilizada (la última de las diez). Se calculan también los valores correspondientes de $E[X]$ con 95% de confianza y lo mismo para una muestra de 300 elementos que en realidad es el conjunto de todas las muestras anteriores. En la Figura B de la misma lámina se representan estos valores y el del intervalo de 95% de confianza para “capturar” al valor de $E[X]$. Respecto a la figura, pueden hacerse las siguientes observaciones :

- 1) Como se quiere hacer notar, el valor esperado es constante e independiente de las muestras.
- 2) En los análisis de confiabilidad el intervalo suele ser doble, es decir hay un intervalo superior, que es el único representado en la figura, y un intervalo inferior el cual, por ser la distribución normal simétrica, es de la misma longitud del superior. En este caso no se presenta así porque al encargado de las perforaciones no le interesa el intervalo inferior. El sólo quiere saber cuán lejos puede estar el valor esperado por encima del promedio de su muestra.
- 3) A pesar de que se estableció un 95 % de confianza, las muestras N° 2 y N° 6 “fallan” en “capturar” el promedio: se quedan por debajo. Esto parece indicar que la probabilidad está más cerca del 80% que del 95%. La realidad es que la distribución original trapezoidal difiere bastante de la forma de la distribución normal y la desviación estándar utilizada en todos los casos no es la de la distribución original y estas son dos condiciones necesarias para que la aproximación del teorema del valor límite se cumpla.

Lámina N° 1.12

Cálculo del máximo del valor esperado con 95% de confianza a partir del promedio de diez muestras

A) Parámetros de diez muestras aleatorias de 30 elementos cada una

Muestra N°	Promedio Muestra	Desv Est. Muestra	Promedio 95% Conf.
1	0,311	0,183	0,366
2	0,208	0,172	0,260
3	0,281	0,178	0,334
4	0,268	0,200	0,328
5	0,217	0,183	0,272
6	0,208	0,175	0,260
7	0,256	0,194	0,314
8	0,277	0,195	0,336
9	0,293	0,202	0,353
10	0,248	0,148	0,292
Valores para muestra 300 elementos			
Total	0,257	0,184	0,274

Valor esperado verdadero = 0,268

B) Representación gráfica de los promedios de las muestras y del intervalo de 95% de confianza.

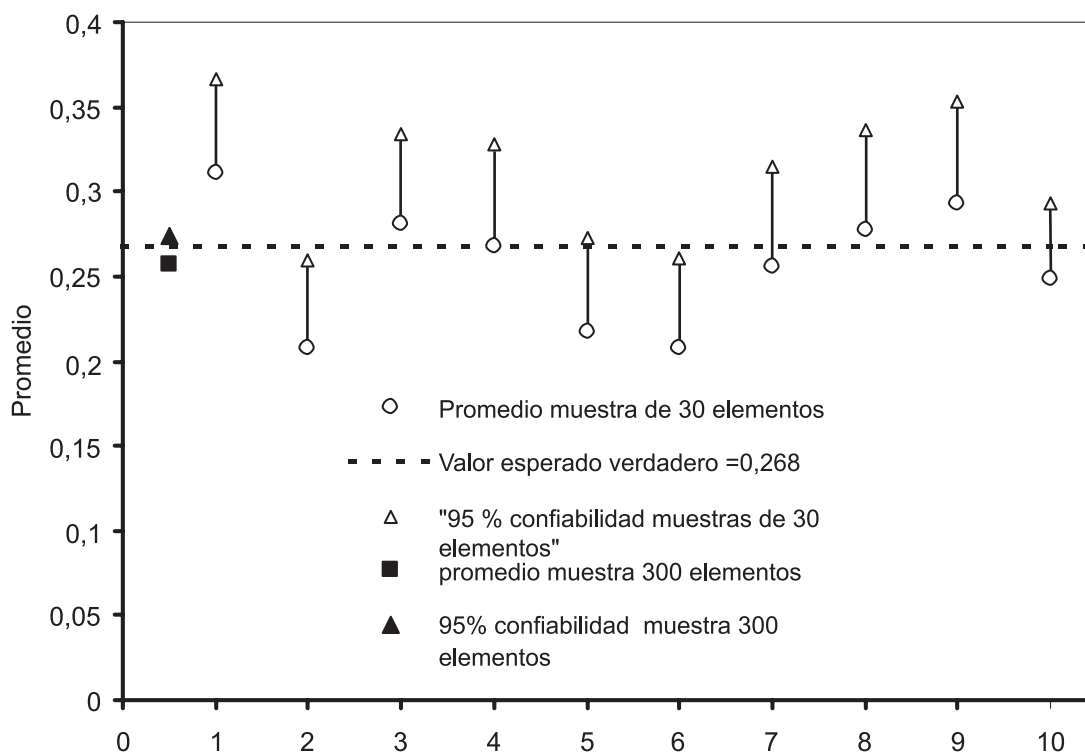


Lámina N° 1.12

- 4) Se observa que cuando la muestra es de 300 elementos los resultados son mucho más cerrados y precisos.

1.5 Correlación

1.5.1 Conceptos generales sobre la correlación de dos variables aleatorias

En geotecnia, al igual que en casi todas las disciplinas científicas o sociales, es común estudiar de forma empírica el cambio de una variable aleatoria ante el correspondiente cambio de otra variable, esta última aleatoria o no. Ello no necesariamente implica causalidad de la segunda variable sobre la primera, puede también significar que ambas responden a una causa común. El grado en que los cambios de la primera variable se tornen predecibles a los cambios en la segunda variable, al menos cualitativamente, implica el grado de *correlación* que hay entre ellas. Por ejemplo: es de esperar que las estaturas en un grupo de niños varones entre cuatro y catorce años varíen acorde con las edades.

Si se toma una muestra aleatoria de dos mil niños de igual condición social, de las edades antes citadas, se puede crear una función distribución conjunta tridimensional edad-estatura-frecuencia relativa, similar a la mostrada en la figura 1.7. También se puede crear otro gráfico donde la edad y la estatura de cada niño sean las coordenadas de múltiples puntos (2.000 en este caso). Este segundo gráfico describe la variación relativa de la estatura con la edad. Se trata de una correlación gráfica que normalmente se asocia a una función matemática empírica de ambas variables.

Como se ve, hay dos maneras de enfocar el problema: como distribución conjunta y como correlación matemática. También hay una interrelación entre ambos enfoques.

En ingeniería es mucho más frecuente trabajar con el segundo enfoque (la correlación gráfica) y rara vez se considera que hay un efecto probabilista subyacente. Ambos enfoques se unifican más adelante.

En geotecnia es frecuente el caso en que es razonable pensar que dos propiedades dadas del terreno sean consecuencia de un factor común, que puede o no ser fácilmente cuantificable: mineralogía, granulometría, historia geológica, etc. Y sucede también que muchas veces una de estas propiedades es de rápida y barata obtención mientras la

obtención de la otra toma más tiempo y se requiere de ensayos más laboriosos y costosos. En casos así, es práctica frecuente correlacionar los resultados de pares de ensayos, sobre las mismas muestras, en un gráfico donde se representa la variación de una propiedad respecto a la otra. Normalmente, dicho gráfico se acompaña con una relación matemática correspondiente o *regresión*, la cual se utiliza para predecir el valor de la variable “costosa” para un valor o valores establecidos de la variable “barata”. Cuando la regresión es una curva de primer grado, es decir una recta, se dice que se trata de una *regresión lineal*.

Si un autor estima que una regresión no está afectada sensiblemente por la geología del sitio donde fue obtenida o cuando las observaciones que la componen provienen de distintos lugares y la correlación aun así se mantiene, ésta y su expresión matemática asociada se publica internacionalmente. Por otra parte, cuando la correlación parece muy atada a condiciones locales se utiliza solamente en el proyecto para el cual fue desarrollada.

En la lámina 1.13 se muestra una correlación local típica desarrollada para una red de vías internas a construirse en un complejo petrolero del sur del país. La correlación relaciona los valores de una propiedad muy económica de obtener (contenido de finos) con dos propiedades obtenibles mediante el ensayo de compactación²³ mucho más costoso (humedad óptima de compactación, figura A y densidad seca máxima de compactación, figura B).

En el caso mostrado en la figura resultó razonable pensar que, sobre la base de la mineralogía de las arcillas, a medida que aumenta el número de finos aumenta también el contenido de humedad óptimo de compactación y disminuye la densidad máxima seca. Los gráficos de la lámina 1.13 muestran el alcance de esta presunción

1.5.2 Coeficiente de correlación

La fuerza de la relación empírica entre dos variables aleatorias se mide a través de un parámetro denominado *covarianza*. La covarianza entre las poblaciones de dos variables aleatorias (X e Y) se define por la siguiente expresión:

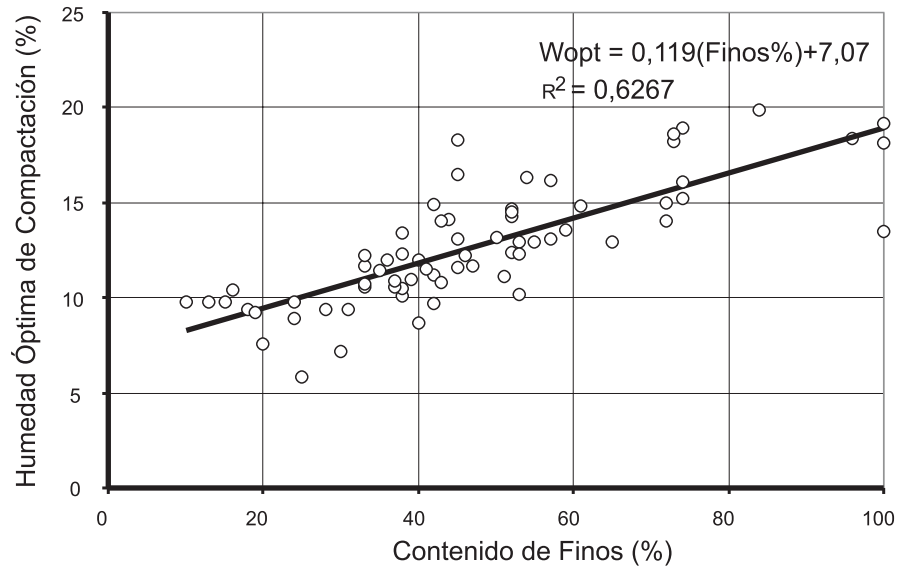
$$CoV[X, Y] = E\{(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])\} \quad (1.9)$$

²³ Ensayo de Proctor modificado

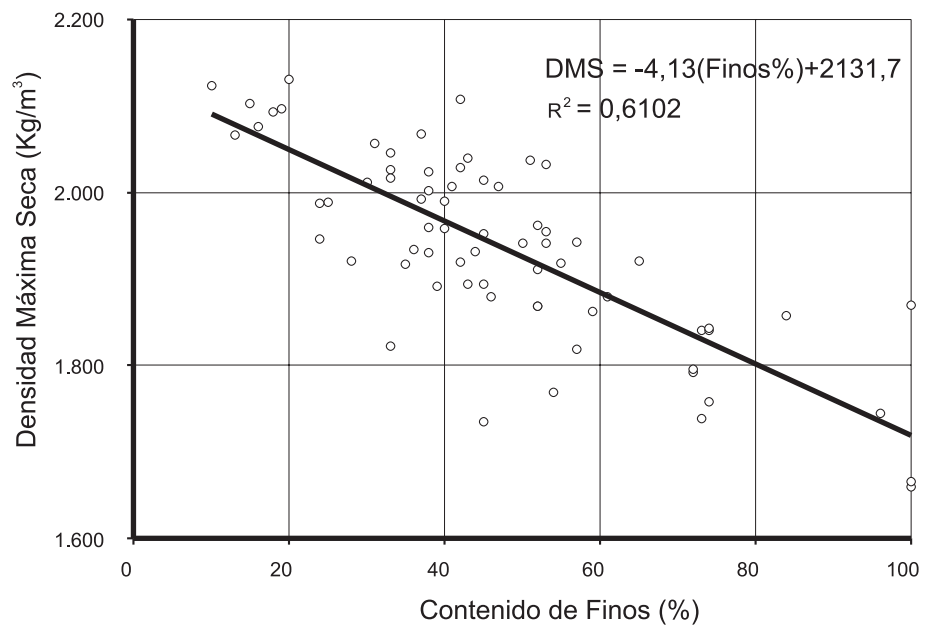
Lámina N° 1.13

Ejemplos de Correlaciones y Regresiones Lineales

A) Correlación Positiva



B) Correlación Negativa



El caso más frecuente y también el correspondiente a las figuras de la lámina 1.13, se refiere a la comparación no de poblaciones sino a la comparación de muestras de ambas poblaciones. En estos casos la covarianza es la *covarianza muestral* y viene dada por:

$$CoV[x, y] = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x) \cdot (y_i - m_y)}{N - 1} \quad (1.10)$$

Si existe algún tipo de relación entre los valores de x e y, por ejemplo: si los valores de y crecen cuando x crece, el valor de la covarianza será un número grande. Si la relación es inversa será un número grande, pero negativo. Finalmente, cuando no haya una tendencia definida, el valor de la covarianza será intermedio. Esta es la idea detrás de este parámetro, sin embargo, al carecer de referencia, a través de la fórmula de la covarianza por sí sola no se puede establecer que significa grande o intermedio, porque dependerá de lo que x e y representen en cada caso (por ejemplo: la densidad máxima seca normalmente ronda los dos mil kilos por metro cúbico (1.650-2.100) mientras el contenido de finos es un porcentaje). Para obviar este problema, la covarianza se normaliza dividiéndola entre el producto de las desviaciones estándar de las muestras y a dicho cociente se le denomina *coeficiente de correlación muestral*. Por lo tanto, el coeficiente de correlación muestral, R, viene dado por:

$$R[x, y] = \frac{CoV[x, y]}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x) \cdot (y_i - m_y)}{N - 1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2}{N - 1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - m_y)^2}{N - 1}}} \quad (1.11)$$

Puede demostrarse que el coeficiente de correlación varía entre +1 y -1. Un coeficiente de correlación igual a la unidad implica una relación lineal absoluta (determinista) de pendiente positiva, un coeficiente de correlación de -1 implica lo mismo, pero con pendiente negativa. Los valores intermedios miden el grado de correlación entre las variables. Cuando el coeficiente de correlación es nulo se dice que las variables no están correlacionadas, pero ello no debe interpretarse como una garantía de que las variables son

independientes. Lo contrario, sin embargo, es cierto: dos variables independientes entre sí tienen un coeficiente de correlación nulo.

En la figura A de la lámina 1.14 se muestran los parámetros característicos de las muestras utilizadas en las correlaciones presentadas en la lámina 1.13, incluyendo covarianzas y coeficientes de correlación muestrales

1.5.3 Modelos lineales

En muchos casos, especialmente cuando existen razones para suponerlo o cuando la tendencia de los puntos en un gráfico parece indicarlo, es común suponer que hay una relación lineal entre las dos variables consideradas. Ello significa que los valores de una de las variables (variable dependiente) puede ser razonablemente estimado suponiendo una relación de primer grado con la otra (variable independiente).

En las figuras de la lámina 1.13 se ha supuesto tal relación y en cada figura se muestra la recta correspondiente y su ecuación analítica.

Ambas ecuaciones analíticas fueron obtenida por el método denominado de los *mínimos cuadrados*. Mediante este método se calculan los parámetros (pendiente y ordenada en el origen) de la recta para la cual se verifica que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los puntos muestrales y los correspondientes puntos de la recta es la mínima. Esta diferencia (o distancia vertical) entre un punto de la muestra y el punto de igual abscisa de la recta se denomina residuo. Por lo tanto, en el método de los mínimos cuadrados, la suma de los cuadrados de los residuos es menor que en cualquier otra recta. Bajo este criterio se acepta que la recta obtenida por este método es la que mejor se ajusta a la relación entre las variables.

Los valores de la pendiente, m , y la ordenada en el origen, b , obtenidos por el método de los mínimos cuadrados, para una muestra de n observaciones de X e Y son los dados a continuación. En cualquier texto de estadística puede encontrarse la demostración:

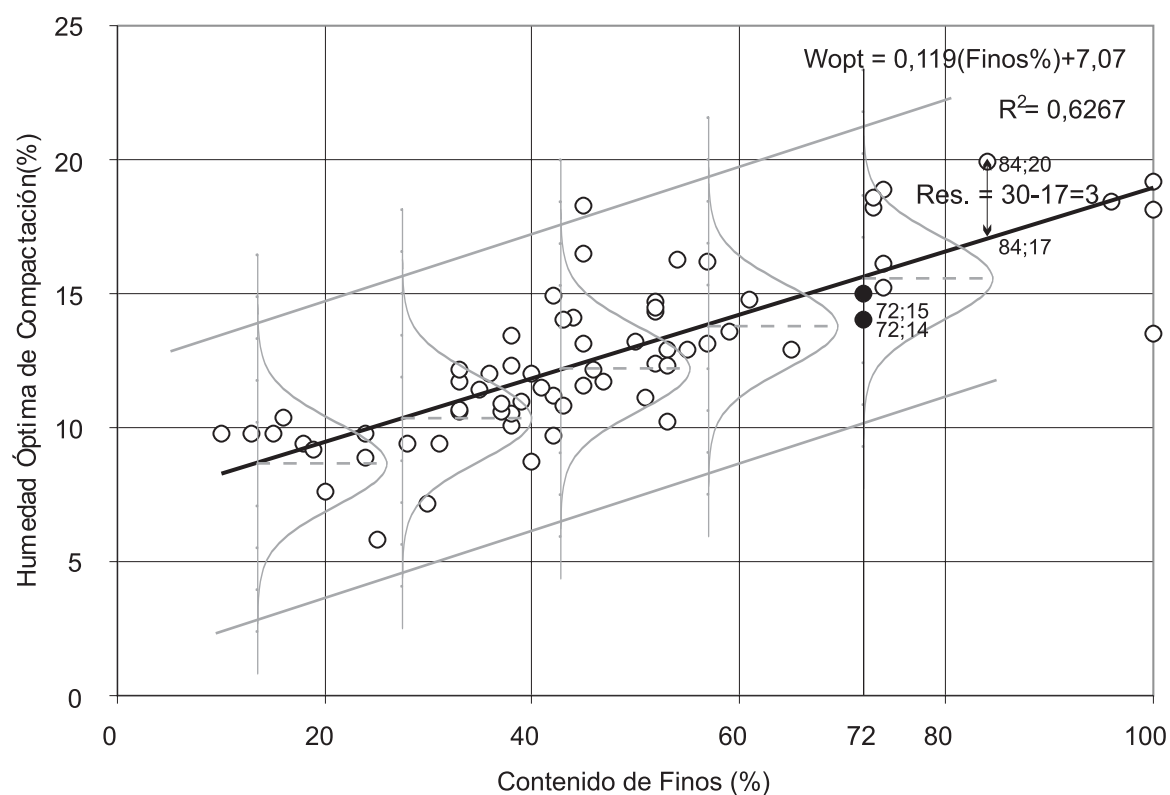
Lámina N° 1.14

Parámetros Estadísticos, Histograma y Distribución Normal de Mejor Ajuste

A) Parámetros Estadísticos de las Muestras del Contenido de Finos, Humedad Óptima(ω opt.) y Densidad Máxima seca (DMS)

Propiedad	Finos (%)	ω . Opt (%)	D.M.S. Kg/m ³
Promedio	47,23	12,68	1.936,54
Desviación Estándar	20,80	3,12	110,00
Coefficiente de Variación	44,03	24,59	5,68
Valor Mínimo	10,00	5,80	1.659,00
Valor Máximo	100,00	19,90	2.131,00
Covarianza		50,58	-1.761,01
Coefficiente de Correlación M.		0,79	-0,78

B) Interpretación de una regresión lineal



$$m = \frac{\sum_{i=1}^n y \sum_{i=1}^n x^2 - \sum_{i=1}^n x \sum_{i=1}^n xy}{n \cdot \sum_{i=1}^n x^2 - \left(\sum_{i=1}^n x \right)^2}$$

$$b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n xy - \sum_{i=1}^n x \sum_{i=1}^n y}{n \cdot \sum_{i=1}^n x^2 - \left(\sum_{i=1}^n x \right)^2} \circ$$

Las calculadoras de mano algo avanzadas y las hojas de cálculo más comunes traen incorporadas subrutinas para el cálculo de estos parámetros.

La calidad de la hipótesis de correlación lineal entre dos²⁴ variables aleatorias se mide a través del cuadrado del coeficiente de correlación muestral, R , (ecuación(1.11)) . Así el valor de R^2 explica qué porcentaje del cambio en la variable dependiente es explicable por el cambio en la variable independiente (Berk y Carey, 2000). Por esta razón, es frecuente ver el cuadrado del coeficiente de correlación muestral en los gráficos de regresiones lineales, tal como se hace en las figuras de la lámina 1.13.

Normalmente esta es la forma que tales regresiones se utilizan en ingeniería, otorgándole un carácter casi determinista a la ecuación obtenida. Aunque sólo se le atribuya este carácter a la ecuación lineal, dos cosas son importantes de tener en cuenta:

En primer lugar y a menos que el coeficiente de correlación sea igual a la unidad (positiva o negativa) el método de los mínimos cuadrados conducirá a distintas rectas según se trate de $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Es decir, los parámetros m y b son diferentes según la variable que se trate como dependiente.

En segundo lugar, de existir una correlación lineal, la única verdadera es la que se obtendría al comparar las poblaciones de las variables. Las obtenidas a partir de muestras, como las de la lámina 1.13, son aproximaciones a aquellas y sus parámetros variarán según las muestras de que se trate.

²⁴ El modelo lineal se extiende a cualquier número de variables independientes, no solamente a una.

Desde el punto de vista estadístico, hay una función de distribución de probabilidades conjunta asociada a toda correlación. Para un valor, x , de la variable dependiente, X , puede suponerse que el valor de la variable dependiente, Y , viene dado por una distribución cuyo valor esperado, $E[Y]$, es el valor obtenido mediante la regresión lineal. Además de esto es frecuente suponer que la distribución es normal y de varianza constante e independiente del valor elegido, x .

En un sentido estricto, si X e Y son variables aleatorias de distribución normal puede demostrarse (Crow, 1960) que para cada valor fijo: $X = x$, la distribución de Y es normal con un valor esperado que varía linealmente con x , y que todas las distribuciones de Y tienen igual varianza. Muchas veces, en ausencia de pruebas de que ambas variables poseen una distribución normal se utiliza esta condición como una aproximación.

Tal es el caso mostrado en la figura B) de la lámina 1.14. Así por ejemplo, los puntos negros señalados en la figura, de coordenadas: 72 ;15 y 72; 14 pertenecen a una distribución normal cuyo valor esperado, en el punto: $finos\% = 72$, es el valor de la recta:

$$W_{opt} = 0,119(finos\%) + 7,07$$

Es decir $E[W_{opt} | finos\%=72] = 0,119 \cdot 72 + 7,07 = 15,64$. Obsérvese como se ha utilizado la notación de valor condicional (la barra vertical) en la expresión del valor esperado.

Por lo tanto, en términos probabilistas puede decirse que toda correlación lineal de dos variables aleatorias, X e Y , puede interpretarse como:

$$\left[Y | X = x \right] = m \cdot x + b + Z [0; \sigma] \quad (1.12)$$

Donde m y b son los parámetros de la regresión lineal y $Z [0; \sigma]$ es una variable aleatoria de valor esperado nulo y desviación estándar constante e igual a σ . Como ya se dijo, es usual suponer que ambas variables X e Y están normalmente distribuidas y que la desviación estándar es la muestral, s , calculada para los residuos de la muestra, aplicando la segunda de las ecuaciones (1.8):

$$s = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m)}{N - 1}$$

De esta manera una regresión lineal se puede tratar de forma probabilista y cuantificar así su incertidumbre (establecer límites de confianza etc.) tal como se hace en el capítulo 5 de este trabajo.

Capítulo 2

Transformaciones de una Sola Variable Aleatoria

2.1 Introducción

Una de las aplicaciones de la teoría de probabilidades en el campo de la geotecnia, es la de poder estimar la distribución de probabilidades de la variable calculada (asentamiento, capacidad de soporte, estabilidad, etc.) conocidas las distribuciones de probabilidades de las variables utilizadas en su cálculo. Dicho en otros términos: ¿Cómo repercute la incertidumbre presente en las variables que intervienen en un cálculo en la incertidumbre de su resultado?

En este capítulo se tratará el caso simple de la función de una sola variable aleatoria independiente y en el capítulo 4 el problema se generalizará a un número cualquiera de variables independientes.

Como ejemplo considérese el factor de capacidad portante de Terzaghi, N_q . Como se sabe, N_q es uno de los factores que se utiliza en la determinación de la capacidad última de fundaciones superficiales y también, por extensión, en la capacidad última por punta de pilotes. Es conocido que N_q es función únicamente del ángulo de fricción interna, ϕ , del terreno. Si en un cálculo dado ϕ se trata como una variable aleatoria con una cierta función de distribución de probabilidades, $f_\phi(\phi)$, entonces N_q será también una variable aleatoria dependiente con su correspondiente fdp: $f_{N_q}(N_q)$. En la figura A de la Lámina 2.1 se esquematiza esta situación²⁵.

Dadas una variable aleatoria dependiente, Y , relacionada con una variable aleatoria, X , a través de la función monótona creciente²⁶ $y = g(x)$ y conocida la distribución de probabilidades, $f_x(x)$, de la variable independiente, el concepto básico que relaciona las distribuciones de ambas variables es:

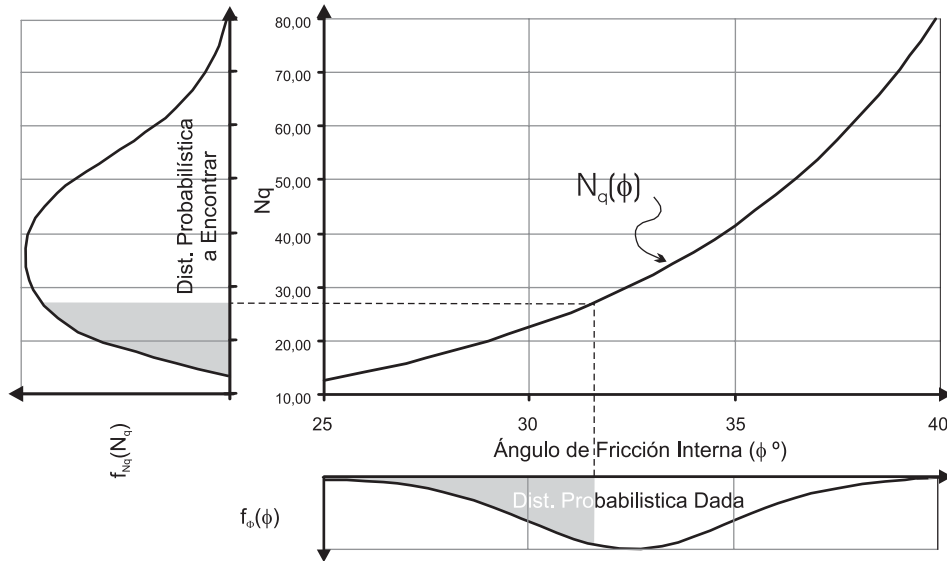
²⁵De aquí en adelante se abandonará la nomenclatura propia de la estadística referente al uso de mayúsculas y minúsculas utilizada en el capítulo 1 por las razones explicadas en ese mismo capítulo. Así N_q se escribe tradicionalmente con N mayúscula y resultaría confuso para un especialista en geotecnia diferenciar entre N_q y la variable aleatoria. Es decir, no se utilizará la minúscula n_q para describir los valores de N_q .

²⁶El caso de las funciones monótonamente decrecientes se analiza más adelante

Lámina 2.1

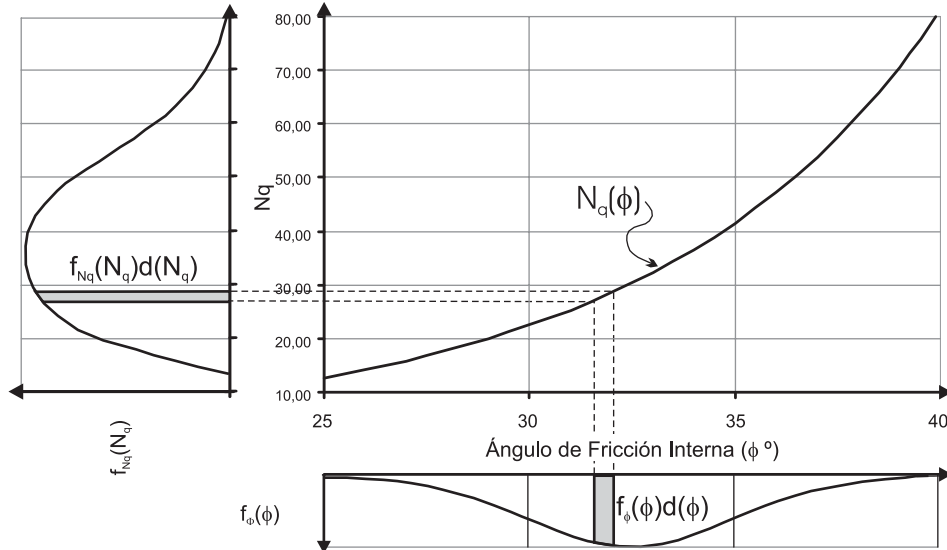
Planteamiento General del Problema de Transformaciones de una Variable

A) Ejemplo de Función de una Sola Variable Independiente.
Planteamiento del Problema



B) Condición de que áreas diferenciales correspondientes bajo ambas distribuciones de probabilidades deben ser iguales

$$f_{N_q}(N_q)dN_q = f_\phi(\phi)d\phi$$



$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[x \leq g^{-1}(y)] \quad (2.1)$$

Donde $g^{-1}(x)$ es la función inversa²⁷ de $g(x)$. En palabras, lo que esto quiere decir es que la probabilidad de ocurrencia de un valor menor o igual que un valor determinado de Y es igual que la probabilidad de ocurrencia del correspondiente valor menor o igual de X . Por ejemplo, en la función $y = 5 \cdot x$ lo que la ecuación(2.1) quiere decir es que: $P[Y \leq 10] = P[X \leq 10/5]$. Lo anterior también puede interpretarse diciendo que el área bajo la distribución desconocida, $f_Y(y)$, para un valor determinado de y debe ser igual al área bajo la distribución conocida, $f_X(x)$, para el valor correspondiente de x . En la figura A de la lámina 2.1 se muestra gráficamente la relación anterior para el caso de $N_q(\phi)$. Dado que tales áreas son las ordenadas de las respectivas funciones de probabilidades acumuladas puede escribirse que²⁸:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) \quad (2.2)$$

Para obtener $f_X(x)$ es necesario derivar ambos miembros de esta expresión (Benjamin y Cornell, 1970 pg. 105 y ss):

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x) dy \quad (2.3)$$

Pudiendo demostrarse que:

$$f_Y(y) = \frac{d(g^{-1}(y))}{dx} f_X(g^{-1}(y)) \quad (2.4)$$

Sustituyendo $g^{-1}(y)$ por x , se obtienen las siguientes expresiones más simples:

$$f_Y(y) = \frac{dx}{dy} f_X(x) \quad (2.5)$$

o también:

$$f_Y(y) dy = f_X(x) dx \quad (2.6)$$

²⁷ Así si $g(x) = \sin(x)$, entonces: $g^{-1}(x) = \arcsin(x)$ y no $1/\sin(x)$.

²⁸ Obsérvese que $g^{-1}(y) = x$

Lo que esta última ecuación diferencial expresa es que las áreas bajo ambas funciones de distribución de probabilidades deben ser iguales en intervalos diferenciales correspondientes. En la Figura B de la Lámina 2.1 se muestra la relación de las áreas diferenciales en forma gráfica. La solución de (2.5) o (2.6) permite resolver el problema.

En el próximo capítulo se presentará el cálculo de la distribución de probabilidades de N_q como parte de un caso más general. En este capítulo, con el fin de dar prioridad a lo conceptual sobre lo numérico, se resolverá un ejemplo con funciones simples que permitirán vislumbrar los alcances del proceso y otras variantes de utilidad que surgirán durante su desarrollo.

2.2 Caso de un muro de gravedad simple

2.2.1 General

A continuación se presenta un ejemplo del cálculo, por procedimientos probabilistas, de la estabilidad al deslizamiento de un muro de gravedad sometido solamente a cuatro fuerzas: su peso, la reacción normal del terreno, el empuje lateral del terreno, y la fuerza de fricción entre el terreno de fundación y la base del muro. De estas cuatro fuerzas, las dos últimas se tratarán como variables aleatorias dependientes, cada una de ellas, de una sola variable aleatoria independiente. Se establecerán las funciones fdp y FPA para las variables independientes y a partir de ellas se calcularán las correspondientes distribuciones de probabilidades de las fuerzas actuantes sobre el muro. Posteriormente, se calculará la función de la distribución de probabilidades conjunta de la fuerza de fricción y el empuje lateral del terreno así como las funciones de probabilidades de la función diferencia de estas dos fuerzas, diferencia que está directamente relacionada con la probabilidad de falla por deslizamiento del muro sobre su fundación.

2.2.2 Funciones Estadísticas de las variables independientes

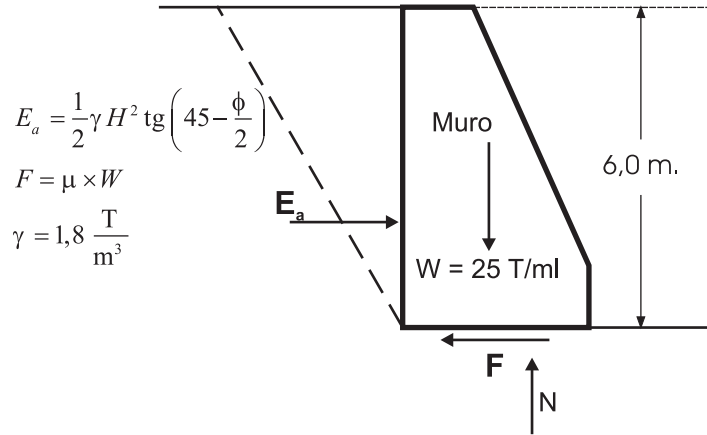
Considérese el caso del muro de gravedad de concreto de seis metros de altura mostrado en la Lámina 2.2 y sometido solamente a tres fuerzas:

- a) el empuje lateral activo de Rankine, E_a ,
- b) la fricción terreno-base del muro, F

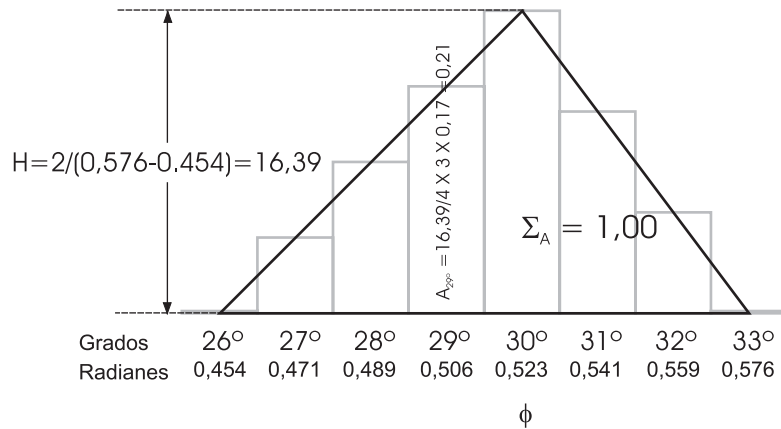
Lámina 2.2

Muro de Gravedad: Fuerzas y Distribuciones de Prbabilidades de las Variables Aleatorias Independientes ϕ y μ

A) Muro de Gravedad



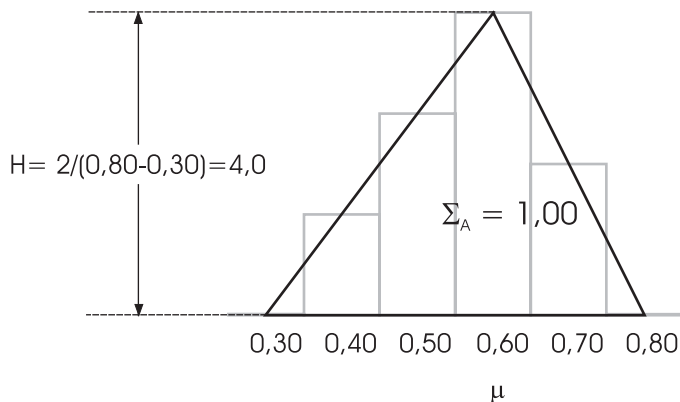
B) Distribución de Probabilidades Supuesta para el Ángulo de Fricción Interna, ϕ



$P(\phi=26^\circ)=A_{26}/1,00=$	0,000
$P(\phi=27^\circ)=A_{27}/1,00=$	0,071
$P(\phi=28^\circ)=A_{28}/1,00=$	0,143
$P(\phi=29^\circ)=A_{29}/1,00=$	0,214
$P(\phi=30^\circ)=A_{30}/1,00=$	0,286
$P(\phi=31^\circ)=A_{31}/1,00=$	0,190
$P(\phi=32^\circ)=A_{32}/1,00=$	0,095
$P(\phi=33^\circ)=A_{33}/1,00=$	0,000

$$\Sigma P[\phi] = 1,00$$

C) Distribución de Probabilidades Supuesta para el Corficiente de Fricción Base de Muro-Terreno, μ



$P(\mu=0,30)=$	0,000
$P(\mu=0,40)=$	0,133
$P(\mu=0,50)=$	0,267
$P(\mu=0,60)=$	0,400
$P(\mu=0,70)=$	0,200
$P(\mu=0,80)=$	0,000

$$\Sigma P[\mu] = 1,00$$

c) el peso del muro W .

Todas estas fuerzas se expresarán en toneladas métricas por metro lineal de muro²⁹. Casi siempre el peso puede predecirse con razonable precisión y por lo tanto se considerará una variable determinista, mientras que las fuerzas E_a y F tienen un carácter más disperso y se tratarán como variables aleatorias. No se considerará en este ejemplo la componente vertical del empuje lateral sobre el muro ni la posible resistencia pasiva del terreno al frente del mismo. Se supondrá además que el material de relleno tras el muro es granular con un peso unitario de $1,8 \text{ T/m}^3$, el cual también será considerado como una variable determinista.

La expresión de Rankine para el cálculo del empuje lateral activo es bien conocida en geotecnia y viene dada por:

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.7)$$

Donde E_a es el empuje activo del terreno tras el muro; γ es el peso unitario del relleno; H es la altura del muro y ϕ es el ángulo de fricción interna del relleno.

La única variable independiente de carácter aleatorio en la fórmula de Rankine sería el ángulo de fricción interna del relleno, ϕ , las demás variables pueden determinarse con bastante precisión.

Para el cálculo de la fricción base del muro-terreno, F , se utilizará la fórmula de la fricción pura (Peck y coautores, 1973, Pg 426):

$$F = W \times \mu \quad (2.8)$$

Aquí la única variable aleatoria es el valor del coeficiente de fricción base del muro-terreno, μ .

Supóngase que el relleno en el trasdós del muro provendrá de material de corte en rocas blandas esquistosas típicas de las laderas del Sudeste de Caracas y que el ingeniero a cargo del diseño del muro ha examinado este material y realizado algunos ensayos de corte

²⁹ Fuerza por unidad de longitud es una unidad usual en el caso de estructuras de gran longitud con relación a las dimensiones de su sección transversal.

directo con la fracción menor que arena gruesa. Presuponiendo una pobre a mediana compactación en el relleno tras el muro, como es común en estos casos³⁰, el ingeniero estima que el ángulo de fricción interna será superior a 26° , pero inferior a 33° , con un valor probable cercano a 30° . Gráficamente el ingeniero expresa estas convicciones adoptando, por simplicidad y en ausencia de mejores datos, la función distribución de probabilidades (fdp) triangular mostrada en la Lámina N° 2.2

De igual forma, habiendo examinado el terreno de fundación, considera que el coeficiente de fricción, μ , será mayor que 0,3, pero menor de 0,8, estimando que su valor más probable estará cercano a 0,6. Adopta también para μ la fdp triangular mostrada en la Lámina N° 2.2. La altura del triángulo en ambas distribuciones triangulares viene dada por la condición de que el área bajo la función sea igual a la unidad, como corresponde a toda fdp (capítulo 1).

El uso de formas triangulares para la función distribución de probabilidades no es frecuente en los modelos estadísticos³¹, entre otras cosas, porque no son funciones continuas y, en consecuencia, su tratamiento es más laborioso. Sin embargo, se usarán en este ejemplo porque son simples de visualizar, casi intuitivas para un ingeniero que desee expresar gráficamente su percepción de las variables. Las distribuciones triangulares son fáciles de manejar geométricamente mediante centros de gravedad, momentos de inercia etc. También la función triangular recuerda un poco la distribución normal de Gauss (capítulo 1) y podría considerarse como una simplificación de ésta. En ejemplos posteriores se utilizarán otras funciones de uso más frecuente en cálculos estadísticos.

En la lámina N° 2.2 se presentan los histogramas con las correspondientes probabilidades condensadas para los “números redondos” de las variables, es decir, la discretización de las distribuciones triangulares de probabilidades de ϕ y de μ en torno a valores particulares de éstos. Por ejemplo, la discretización de la función triangular sería aproximadamente equivalente a decir que la probabilidad de que ϕ sea igual a 27° es 0,071, la probabilidad de que sea igual a 28° : 0,143, etc. La suma de las probabilidades en las

³⁰ La compactación intensa en el trasdós de muros rara vez se justifica (Lambe pg 185)

³¹ Aunque tampoco es inusual, véase por ejemplo Benjamin y Cornell, 1970 pg 154

distribuciones discretas (función de masa de probabilidad, capítulo 1) debe ser también igual a la unidad³². Esta discretización no será necesaria para la solución del problema.

La lámina N° 2.3 muestra las expresiones para determinar los parámetros estadísticos de la función densidad de probabilidad triangular adoptada para el ángulo de fricción interna, ϕ . El promedio o valor esperado se calculó como el momento estático de triángulo respecto al eje vertical en el origen y la varianza se calculó como el momento de inercia respecto al eje vertical que pasa por el centro de gravedad del triángulo. Para ello se calcularon los momentos de inercia de los triángulos parciales a la izquierda y derecha del eje vertical MM ($I_{1\text{ MM}}$ e $I_{2\text{ MM}}$) y luego se añadió el producto del área total (1,00) por el cuadrado de la distancia horizontal entre el eje MM y el centro de gravedad del triángulo total (teorema de los ejes paralelos, ver, por ejemplo, Beer y Jonhston, 1962 pg. 317). La desviación estándar y el coeficiente de variación se calculan en la forma ya indicada en el capítulo 1.

Para evitar repeticiones no se presentan los cálculos correspondientes a la variable aleatoria μ , pero en la lámina N° 2.4 se resumen los resultados para ambas variables, ϕ y μ .

Dos aspectos resaltan en el análisis de esta tabla:

En primer lugar, los promedios o valores esperados no coinciden con los valores a los cuales el ingeniero dio el mayor peso al expresar su criterio en las funciones triangulares, así: $E[\phi] = 29,65^\circ$ y $E[\mu] = 0,567$ en lugar de 30° y $0,6$ respectivamente. Ello es debido a que ninguno de los dos modelos triangulares es simétrico y, por lo tanto, el centro de gravedad no está sobre la vertical que pasa por el vértice superior del triángulo.

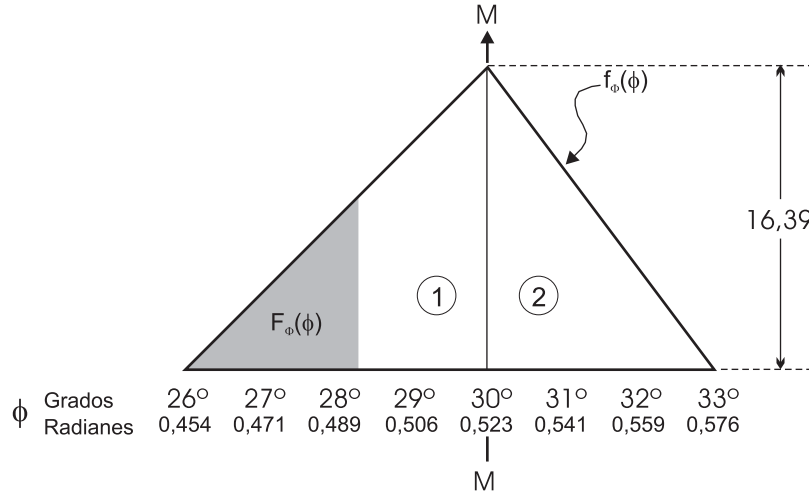
En segundo lugar, al revisar los coeficientes de variación debería sonar una primera alarma debido a que el coeficiente de variación de ϕ es de sólo 5 % mientras que el mismo valor para la variable μ es de 20%, indicando una notable discrepancia en la calidad de la estimación de las dos variables y haciendo la recomendación implícita de que el ingeniero debe afinar su estimación de μ . Como se verá más adelante, esta discrepancia incidirá de manera importante en el resultado final.

³² En su fdp y en todo lo sucesivo relacionado con el ángulo de fricción interna se trabajará en radianes.

Lámina N° 2.3

Parámetros estadísticos de la Función de Densidad de Probabilidades triangular $f_{\phi}(\phi)$

A) Función Distribución de Probabilidades



B) Función Densidad $f_{\phi}(\phi)$, y Función Distribución, $F_{\phi}(\phi)$,

$$f_{\phi}(\phi) = 237,54(\phi - 0,454)$$

$$f_{\phi}(\phi) = -309,35(\phi - 0,523) + 16,39$$

$$F_{\phi}(\phi) = 237,54 \frac{(\phi - 0,454)^2}{2}$$

$$F_{\phi}(\phi) = 0,565 + 309,35 \frac{(\phi - 0,523)^2}{2}$$

$$0,454 < \phi < 0,523$$

$$0,523 < \phi < 0,576$$

C) Valor Esperado $E[\phi]$ Calculado como Distancia al Centro de Gravedad del triángulo

$$M_1 = \frac{(0,523-0,454) \times 16,39}{2} \times \left[0,454 + \frac{2 \times (0,523-0,454)}{3} \right] = 0,28273$$

$$M_2 = \frac{(0,576-0,523) \times 16,39}{2} \times \left[0,523 + \frac{1 \times (0,576-0,523)}{3} \right] = 0,23483$$

$$M_1 + M_2 = 0,51576$$

$$E[\phi] = 0,51826 \text{ rad.}$$

$$E[\phi] = 29,65^\circ$$

D) Varianza, Desviación Estándar y Coeficiente de Variación Calculados a Partir Momento de Inercia Alrededor de M-M más el Área por la Distancia al cdg al Cuadrado

$$I_{1MM} = \frac{(0,523-0,454)^3 \times 16,39}{12} = 0,00045$$

$$I_{2MM} = \frac{(0,576-0,523)^3 \times 16,39}{12} = 0,00020$$

$$A \times d_{cg}^2 = 1,00 \times (0,51826 - 0,52360)^2 = 0,00003$$

$$I_{MM} = \text{Var}[\phi] = 0,00068 \text{ rad.}^2$$

$$\sigma[\phi] = 0,02605 \text{ rad.}$$

$$cv[\phi] = \frac{0,02605}{0,51826} = 0,05026 = 5,03\%$$

Lámina N° 2.4

**Función Densidad de Probabilidad (fdp), Función Distribución de Probabilidades Acumulada (FDA)
y Parámetros Estadísticos de las variables ϕ y μ**

Variable	Rango	fdp / FDA	Valor Esperado E []	Varianza Var []	Desv. Est. σ []	Coef. Var. CV []
ϕ	$0,454 < \phi < 0,523$	$237,54(\phi - 0,454)$ $237,54(\phi - 0,454)^2/2$	0,518 (29,65°)	0,00068	0,02605	0,0502 (5 %)
	$0,423 < \phi < 0,576$	$-309,35(\phi - 0,523) + 16,39$ $0,565 + 309,35(\phi - 0,523)^2/2$				
μ	$0,30 < \mu < 0,60$	$13,33(\mu - 0,30)$ $13,33(\mu - 0,30)^2/2$	0,567	0,01278	0,11305	0,1995 (20%)
	$0,60 < \mu < 0,80$	$-20(\mu - 0,60) + 4$ $0,60 + 20,0(\mu - 0,60)^2/2$				

2.2.3 Aplicación de la Ecuación de Transformación

2.2.3 a) Coeficiente de Fricción

Una vez establecidas las distribuciones de probabilidades (fdp) de las variables independientes, puede calcularse entonces la distribución de probabilidades de las variables dependientes, en este caso $f_{E_a}(E_a)$ y $f_F(F)$ a partir de $f_\phi(\phi)$ y $f_\mu(\mu)$.

Para ello, hay que hacer uso de la ecuación (2.5) particularizada a las variables E_a y F :

$$f_{E_a}(E_a) = \frac{d\phi}{dE_a} f_\phi(\phi)$$

$$f_F(F) = \frac{d\mu}{dF} f_\mu(\mu)$$

Debido a que el cálculo de $f_F(F)$ es mucho más sencillo algebraicamente que el de $f_{E_a}(E_a)$ se comenzará por aquella variable. En ese caso, dado que $\frac{d\mu}{dF} = \frac{1}{W}$:

$$f_F(F) = \frac{1}{W} f_\mu(\mu)$$

Si $W = 25$ T/ml, entonces $1/W = 1/25 = 0,04$. La fdp, $f_\mu(\mu)$, se muestra en la lámina N° 2.2.

En la lámina 2.5 se muestran los cálculos correspondientes y los valores de la $f_F(F)$ conjuntamente los parámetros estadísticos derivados: valor esperado, $E[F] = 14,167$ T/ml; varianza, $V[F] = 9,198$, (T/ml)²; desviación estándar, $\sigma[F] = 3,033$ y coeficiente de variación, $CV[F] = 0,214$.

Cuando se trata de una función lineal del tipo $y = Ax + B$, e independientemente de la forma de la fdp adoptada para la variable x , puede demostrarse que (Benjamin y Cornell, 1970; Harr, 1987; Nowac y Collins 2000) que:

$$E[Y] = A \cdot E[X] + B \quad (2.9)$$

Dado que $f_\mu(\mu)$ responde a este tipo de funciones y sabiendo que $E[\mu] = 0,567$ (ver lámina 2.4), el valor esperado de F :

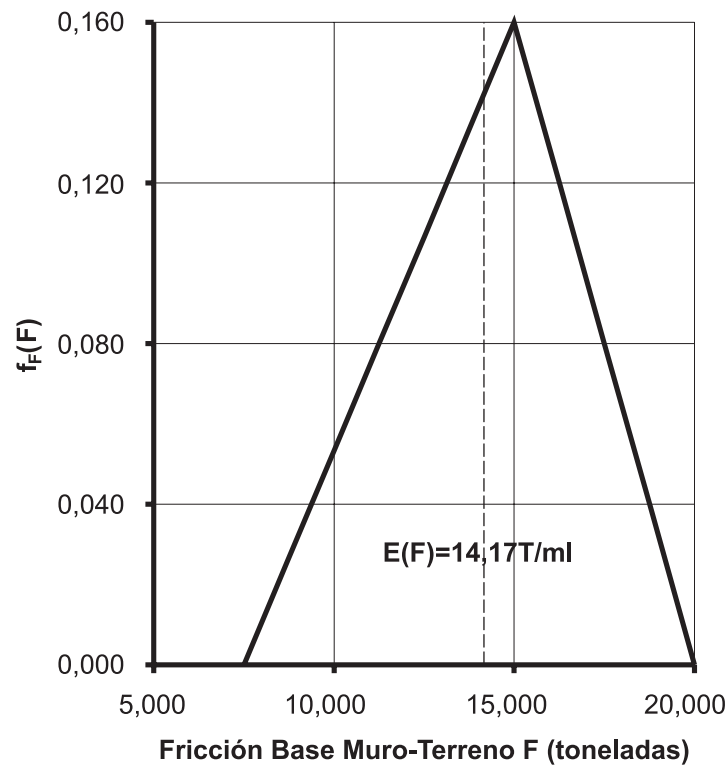
Lámina N° 2.5

Obtención de la fdp de F y de sus parámetros Probabilísticos

A) Cálculos

μ	F	$f_{\mu}(\mu)$	$dF/d\mu$	$f_F(F)$	Area	Promedio	Varianza
0,30	7,500	0,000	0,040	0,000	0,017	0,135	0,383
0,35	8,750	0,667	0,040	0,027	0,050	0,469	0,627
0,40	10,000	1,333	0,040	0,053	0,083	0,885	0,438
0,45	11,250	2,000	0,040	0,080	0,117	1,385	0,127
0,50	12,500	2,667	0,040	0,107	0,150	1,969	0,007
0,55	13,750	3,333	0,040	0,133	0,183	2,635	0,390
0,60	15,000	4,000	0,040	0,160	0,175	2,734	1,284
0,65	16,250	3,000	0,040	0,120	0,125	2,109	1,959
0,70	17,500	2,000	0,040	0,080	0,075	1,359	2,035
0,75	18,750	1,000	0,040	0,040	0,025	0,484	1,043
0,80	20,000	0,000	0,040	0,000	0,000	0,000	0,000
Σ					1,000	14,167	8,290
						$\sigma[F]=$	2,879
						$CV[F]=$	0,203

B) Distribución Probabilística de F



$$E[F] = 0,567 \times 25 + 0,00 = 14,17 \text{ T/ml}$$

Como en efecto así resultó, a partir de la fdp, $f_F(f)$.

De igual forma y también sólo para funciones lineales (Benjamin y Cornell, 1970; Nowac y Collins, 2000):

$$\text{Var}[AX + B] = A^2 \text{Var}[X] \quad (2.10)$$

Por lo tanto, en la caso de F:

$$\text{Var}(F) = W^2 \times \text{Var}[\mu] = 25^2 \times 0,01278 = 7,99$$

Aquí se observa cierta discrepancia respecto al valor de $\text{Var}[F]$ obtenido en la lámina 2.5 que fue de 8,42. La discrepancia se debe al método aproximado de integración usado en la tabla superior de la lámina. A este respecto, es conveniente decir que se integró sumando las áreas elementales (trapecios) y multiplicándolas por el cuadrado de la distancia de su eje medio al eje que pasa por el centro de gravedad ($E[F]=14,17$) del triángulo³³.

Respecto al Coeficiente de Variación, un simple análisis demuestra que en si $Y=AX$, $\text{CV}[Y] = \text{CV}[X]$. En efecto:

$$\text{CV}[Y] = \frac{\sigma[Y]}{E[Y]} = \frac{\sqrt{A^2 \text{Var}[X]}}{A \times E[X]} = \frac{A \times \sigma[X]}{A \times E[X]} = \frac{\sigma[X]}{E[X]} = \text{CV}[X] \quad (2.11)$$

Pero, en el caso general de funciones no lineales, ninguna de las reglas anteriores aplica. En general, si $y=f(x)$ es una función no lineal: $E[f(x)] \neq f(E[X])$. Por ejemplo: $E[\text{sen}(x)] \neq \text{sen}(E[X])$.

2.2.3 b) Función Empuje Lateral de Rankine

En el caso del empuje de Rankine, E_a , para calcular $f_{Ea}(E_a)$ habría que calcular primero $d\phi/dE_a$, lo cual podría hacerse derivando implícitamente la expresión de Rankine: $E_a(\phi) = \frac{1}{2} \gamma H^2 \text{tg}^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right)$ (ec.(2.7)) o bien hallando en forma explícita $\phi(E_a)$ y

³³ Como se puede deducir del método usado para calcular $f_F(F)$, ésta es también una función triangular dado que $d\mu/dF = \text{cte}$.

luego derivando. Este último método resulta más sencillo para este caso y es el que se sigue a continuación. Despejando ϕ de la expresión de Rankine:

$$\phi = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \sqrt{\frac{2E_a}{\gamma H^2}} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{-\sqrt{2}}{\left(\frac{E_a}{\gamma H^2} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma H^2 \left(1 + \frac{2E_a}{\gamma H^2} \right)} \quad (2.13)$$

Aquí surge una situación interesante que no había sido contemplada en el desarrollo original de la ecuación (2.5) y se refiere al caso de una función monótona decreciente. En efecto, como la ecuación de Rankine implica, a medida que ϕ aumenta, E_a disminuye. Si $(E_a)_1$ y ϕ_1 son dos valores correspondientes cualesquiera de E_a y ϕ , no se cumplirá que: $P[E_a \leq (E_a)_1] = P[\phi \leq \phi_1]$, sino que, por el contrario, $P[E_a \leq (E_a)_1] = P[\phi \geq \phi_1]$.

Dado que $P[\phi \geq \phi_1] = 1 - P[\phi \leq \phi_1]$ (eventos complementarios, capítulo 1), entonces se verificará que $P[E_a \leq (E_a)_1] = 1 - P[\phi \leq \phi_1]$.

Como ejemplo de lo anterior, para el par de valores: $\phi = 30^\circ$ y $E_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \tan^2(45 - 30/2) = 10,80 \text{ T/ml}$, sucede que:

$$P[E_a \leq 10,80] = P[\phi \geq 30^\circ] = 1 - P[\phi \leq 30^\circ]$$

En el caso general $y = g(x)$ y retomando la ecuación (2.2): $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$, esta ahora se transforma en:

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) \quad (2.14)$$

En consecuencia:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} [1 - F_X(g^{-1}(y))] = -\frac{d}{dy} \left[\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x) dx \right] \quad (2.15)$$

Por lo tanto, para la obtención de $f_Y(y)$ puede seguirse el mismo procedimiento establecido tomando el valor absoluto de dx/dy , pero para el cálculo de $F_Y(y)$ deben tomarse los valores complementarios de las probabilidades, es decir:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = 1 - \int_{-\infty}^y f_y(y) dy \quad (2.16)$$

En la lamina 2.6 se muestra la fdp del empuje de Rankine E_a y sus parámetros estadísticos asociados. Como en este caso $E_a(\phi)$ no es lineal, no valen las consideraciones sobre linealidad hechas para $f_\mu(\mu)$. Sin embargo, debido a que $d\phi/dE_a$ varía poco en el intervalo estudiado (ver lámina 2.6), la función $f_{E_a}(E_a)$ no se aparta mucho de la forma triangular.

Nuevamente resalta la diferencia entre los coeficientes de variación de las variables aleatorias E_a y F como consecuencia de la diferencia entre esos mismos parámetros en sus respectivas variables independientes. Así $CV[E_a] = 5,9\%$ versus $CV[F] = 20,3\%$

En la lámina 2.7 se muestra la función distribución de probabilidades acumulada (FPA) de las variables aleatorias E_a y F y la tabla con los cálculos correspondientes. Por las razones antes explicadas (ecuación (2.16)), la integración de la fdp de E_a , conduce a la probabilidad de que $E_a \geq (E_a)_1$ cuando lo que interesa es lo contrario. Por lo tanto, la probabilidad de que E_a sea menor que un valor $(E_a)_1$ dado es:

$$P[E_a \leq (E_a)_1] = 1 - \int_{-\infty}^{(E_a)_1} f_{E_a}(E_a) dE_a \quad (2.17)$$

2.2.4 Probabilidad conjunta

Si todas las fuerzas que concurren en el cálculo de la estabilidad del muro se reducen a las tres aquí consideradas (E_a , F y W) entonces la resistencia al deslizamiento viene dada por la función diferencia $F - E_a$, la cual es a todas luces una función aleatoria de ϕ y μ . Cuando: $F - E_a \leq 0$, es decir, cuando $E_a \geq F$ el muro desliza, en caso contrario el muro es estable.

Por lo tanto, una vez obtenidas las fdp de F y E_a (láminas 2.5 y 2.6) ¿Qué puede decirse acerca de la estabilidad del muro? ¿Cómo puede saberse cual es la probabilidad de que éste falle por deslizamiento? En síntesis: ¿Cuál es el valor de: $P[E_a \geq F]$?

Lámina N° 2.6

Obtención de la fdp de E_a y de sus parámetros Probabilísticos

A) Cálculos

ϕ°	ϕ (rad)	E_a	$f_\phi(\phi)$	$d\phi/d(E_a)$	$f_{E_a}(E_a)$	Area	Promedio	Varianza
26,00	0,454	12,651	0,000	0,036	0,000	0,009	0,113	0,019
26,50	0,463	12,407	2,046	0,036	0,074	0,027	0,330	0,039
27,00	0,471	12,167	4,092	0,037	0,150	0,045	0,539	0,042
27,50	0,480	11,930	6,139	0,037	0,228	0,063	0,739	0,034
28,00	0,489	11,697	8,185	0,038	0,309	0,080	0,932	0,020
28,50	0,497	11,468	10,231	0,038	0,392	0,098	1,116	0,008
29,00	0,506	11,242	12,277	0,039	0,478	0,116	1,293	0,000
29,50	0,515	11,019	14,324	0,039	0,566	0,134	1,462	0,003
30,00	0,524	10,800	16,370	0,040	0,656	0,131	1,399	0,018
30,50	0,532	10,584	13,642	0,041	0,555	0,107	1,122	0,036
31,00	0,541	10,371	10,913	0,041	0,451	0,083	0,855	0,052
31,50	0,550	10,162	8,185	0,042	0,343	0,059	0,598	0,059
32,00	0,559	9,955	5,457	0,043	0,232	0,036	0,351	0,051
32,50	0,567	9,752	2,728	0,043	0,118	0,012	0,114	0,023
33,00	0,576	9,552	0,000	0,044	0,000	0,000	0,000	0,000
Σ						0,991	10,848	0,404
							$\sigma[E_a]=$	0,636
							CV $[E_a]=$	0,059

B) Distribución Probabilística de F

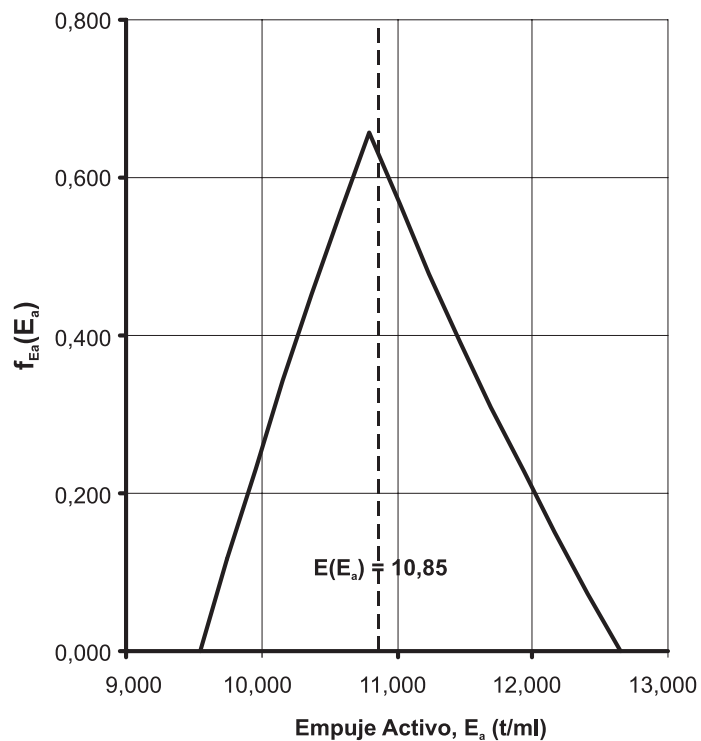


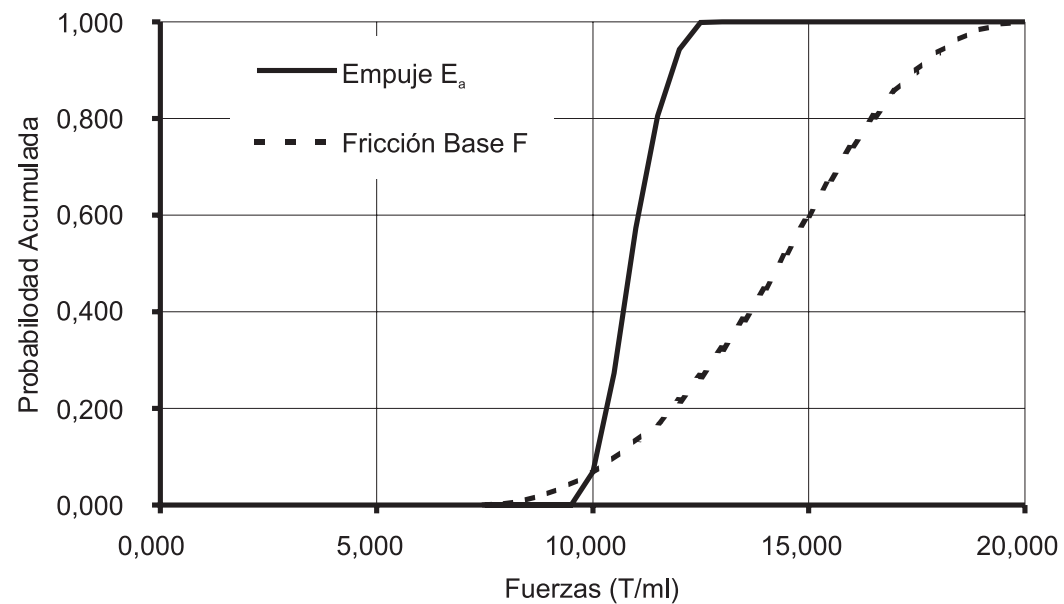
Lámina 2.7

Funciones de Probabilidad Acumulada de F y E_a. Valores y Gráficos

A) Probabilidades Acumuladas de E_a y F

E _a	Prob acc E _a ≥	Prob acc E _a ≤	F	Prob acc F ≤
7,500	1,000	0,000	7,500	0,000
8,000	1,000	0,000	8,000	0,003
8,500	1,000	0,000	8,500	0,011
9,000	1,000	0,000	9,000	0,024
9,500	1,000	0,000	9,500	0,043
10,000	0,932	0,068	10,000	0,067
10,500	0,727	0,273	10,500	0,096
11,000	0,426	0,574	11,000	0,131
11,500	0,195	0,805	11,500	0,171
12,000	0,057	0,943	12,000	0,216
12,500	0,002	0,998	12,500	0,267
13,000	0,000	1,000	13,000	0,323
13,500	0,000	1,000	13,500	0,384
14,000	0,000	1,000	14,000	0,451
14,500	0,000	1,000	14,500	0,523
15,000	0,000	1,000	15,000	0,600
15,500	0,000	1,000	15,500	0,676
16,000	0,000	1,000	16,000	0,744
16,500	0,000	1,000	16,500	0,804
17,000	0,000	1,000	17,000	0,856
17,500	0,000	1,000	17,500	0,900
18,000	0,000	1,000	18,000	0,936
18,500	0,000	1,000	18,500	0,964
19,000	0,000	1,000	19,000	0,984
19,500	0,000	1,000	19,500	0,996
20,000	0,000	1,000	20,000	1,000

B) FPA de F y E_a



Para responder a esa pregunta no existen muchos métodos a menos que se hagan algunas simplificaciones, algunos de estos métodos se tratarán más adelante. Una forma directa (más bien pedagógica), pero laboriosa de visualizar la situación es a través del análisis de la probabilidad conjunta de E_a y F , más concretamente: la distribución conjunta de probabilidades de E_a y F : $f_{E_a,F}(E_a,F)$ (capítulo 1).

La tabla de la lámina 2.8 es consecuencia de los valores obtenidos en la lámina 2.7. Como se observa, los valores en las dos filas que encabezan la tabla son los de E_a y su correspondiente probabilidad acumulada, $F_{E_a}(E_a)$, tal como se calcularon en la lámina 2.7. A título de ejemplo y resaltado en la tabla: $P(E_a \leq 11) = 0,574$. Lo mismo sucede, esta vez con relación a F , en las dos columnas de la derecha, por ejemplo $P(F \leq 11) = 0,267$. Una pregunta interesante podría ser: ¿Cuál es la probabilidad de que simultáneamente $E_a \leq 11$ y $F \leq 12,50$? Es decir: $P[E_a \leq 11 \cap F \leq 12,50]$ (Capítulo 1).

Si se considera que E_a y F son variables aleatorias estadísticamente independientes, la probabilidad de que ocurran en un mismo evento es el producto de sus probabilidades individuales. Así:

$$P[E_a \leq 11 \cap F \leq 12,50] = P[E_a \leq 11] \times P[F \leq 12,50] = 0,805 \times 0,267 = 0,153$$

Las celdas de la tabla contienen precisamente los valores de la probabilidad de ocurrencia conjunta de los valores de E_a y F que figuran en la primera fila y columna de la tabla respectivamente.

Por lo tanto la tabla contiene la distribución conjunta de probabilidades acumuladas de E_a y F ³⁴.

Siguiendo con el razonamiento, si $P[E_a \leq 11] = 0,574$ y en la columna inmediatamente anterior se nota que $P(E_a \leq 10,50) = 0,273$ entonces $P[10,50 \leq E_a \leq 11] = 0,574 - 0,273 = 0,301$. Esta es la probabilidad de que E_a pertenezca al intervalo 10,50-11,00. Si, por simplicidad, se condensa el intervalo en su valor extremo, puede decirse que $P[E_a=11,0] \approx 0,273$.

Esta aproximación es la que se ha usado en la lámina 2.9 construida en forma similar a la tabla de la lámina 2.8, pero con las probabilidades adjudicadas a los valores puntuales

³⁴ En la tabla varias columnas repetitivas al comienzo y al final se han eliminado por razones de espacio.

Lámina 2.8

Función Conjunta de Probabilidades Acumuladas de F y E_a

		E _a											
(T/ml)		7,50	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	20,00
		0,000	0,000	0,068	0,273	0,574	0,805	0,943	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000
F	7,50	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	8,00	0,003	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002	0,003	0,003	0,035	0,003	0,003	0,003
	8,50	0,011	0,000	0,000	0,001	0,003	0,006	0,009	0,010	0,011	0,000	0,011	0,011
	9,00	0,024	0,000	0,000	0,002	0,007	0,014	0,019	0,023	0,024	0,001	0,024	0,024
	9,50	0,043	0,000	0,000	0,003	0,012	0,024	0,034	0,040	0,043	0,000	0,043	0,043
	10,00	0,067	0,000	0,000	0,005	0,018	0,038	0,054	0,063	0,067	0,000	0,067	0,067
	10,50	0,096	0,000	0,000	0,007	0,026	0,055	0,077	0,091	0,096	0,000	0,096	0,096
	11,00	0,131	0,000	0,000	0,009	0,036	0,075	0,105	0,123	0,130	0,000	0,131	0,131
	11,50	0,171	0,000	0,000	0,012	0,047	0,098	0,137	0,161	0,170	0,000	0,171	0,171
	12,00	0,216	0,000	0,000	0,015	0,059	0,124	0,174	0,204	0,216	0,000	0,216	0,216
	12,50	0,267	0,000	0,000	0,018	0,073	0,153	0,215	0,252	0,266	0,000	0,267	0,267
	13,00	0,323	0,000	0,000	0,022	0,088	0,185	0,260	0,304	0,322	0,000	0,323	0,323
	13,50	0,384	0,000	0,000	0,026	0,105	0,220	0,309	0,362	0,383	0,000	0,384	0,384
	14,00	0,451	0,000	0,000	0,031	0,123	0,259	0,363	0,425	0,450	0,000	0,451	0,451
	14,50	0,523	0,000	0,000	0,036	0,142	0,300	0,421	0,493	0,522	0,000	0,523	0,523
	15,00	0,600	0,000	0,000	0,041	0,164	0,344	0,483	0,566	0,599	0,000	0,600	0,600
	15,50	0,676	0,000	0,000	0,046	0,184	0,388	0,544	0,638	0,675	0,000	0,676	0,676
	16,00	0,744	0,000	0,000	0,051	0,203	0,427	0,599	0,702	0,743	0,000	0,744	0,744
	16,50	0,804	0,000	0,000	0,055	0,219	0,462	0,647	0,758	0,803	0,000	0,804	0,804
	17,00	0,856	0,000	0,000	0,058	0,233	0,491	0,689	0,807	0,855	0,000	0,856	0,856
	17,50	0,900	0,000	0,000	0,061	0,245	0,517	0,724	0,849	0,899	0,000	0,900	0,900
	18,00	0,936	0,000	0,000	0,064	0,255	0,537	0,753	0,883	0,934	0,000	0,936	0,936
	18,50	0,964	0,000	0,000	0,066	0,263	0,553	0,776	0,909	0,962	0,000	0,964	0,964
	19,00	0,984	0,000	0,000	0,067	0,268	0,565	0,792	0,928	0,982	0,000	0,984	0,984
	19,50	0,996	0,000	0,000	0,068	0,272	0,572	0,801	0,940	0,994	0,000	0,996	0,996
	20,00	1,000	0,000	0,000	0,068	0,273	0,574	0,805	0,943	0,998	0,000	1,000	1,000

Notas: Los números en *itálicas* representan la probabilidad de que F o E_a sean iguales o menores que en valor correspondiente en **negritas**. Así $P(E_a < 11) = 0,574$ (Ver Lámina 2,6)

Los valores en la *retícula* representan la probabilidad conjunta de que E_a y F sean, a la vez, menores o iguales que sus correspondientes valores en **negritas**. Así $P(E_a < 11 \text{ y } F < 12,50) = 0,153$ y es el producto de $0,574 \times 0,267$

Lámina 2.9

Función Conjunta de Distribución de Probabilidades de F y E_a

		E _a												Σ=1,00
(T/ml)		7,50	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	20,00	
		0,000	0,000	0,068	0,204	0,301	0,231	0,139	0,055	0,002	0,000	0,000	0,000	Σ=1,00
F	7,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
	8,000	0,003	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
	8,500	0,008	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	
	9,000	0,013	0,000	0,000	0,001	0,003	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	
	9,500	0,019	0,000	0,000	0,001	0,004	0,006	0,004	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	
	10,000	0,024	0,000	0,000	0,002	0,005	0,007	0,006	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	
	10,500	0,029	0,000	0,000	0,002	0,006	0,009	0,007	0,004	0,002	0,000	0,000	0,000	
	11,000	0,035	0,000	0,000	0,002	0,007	0,010	0,008	0,005	0,002	0,000	0,000	0,000	
	11,500	0,040	0,000	0,000	0,003	0,008	0,012	0,009	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	
	12,000	0,045	0,000	0,000	0,003	0,009	0,014	0,010	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	
	12,50	0,051	0,000	0,000	0,003	0,010	0,015	0,012	0,007	0,003	0,000	0,000	0,000	
	13,000	0,056	0,000	0,000	0,004	0,011	0,017	0,013	0,008	0,003	0,000	0,000	0,000	
	13,500	0,061	0,000	0,000	0,004	0,013	0,018	0,014	0,009	0,003	0,000	0,000	0,000	
	14,000	0,067	0,000	0,000	0,005	0,014	0,020	0,015	0,009	0,004	0,000	0,000	0,000	
	14,500	0,072	0,000	0,000	0,005	0,015	0,022	0,017	0,010	0,004	0,000	0,000	0,000	
	15,000	0,077	0,000	0,000	0,005	0,016	0,023	0,018	0,011	0,004	0,000	0,000	0,000	
	15,500	0,076	0,000	0,000	0,005	0,016	0,023	0,018	0,011	0,004	0,000	0,000	0,000	
	16,000	0,068	0,000	0,000	0,005	0,014	0,020	0,016	0,009	0,004	0,000	0,000	0,000	
	16,500	0,060	0,000	0,000	0,004	0,012	0,018	0,014	0,008	0,003	0,000	0,000	0,000	
	17,000	0,052	0,000	0,000	0,004	0,011	0,016	0,012	0,007	0,003	0,000	0,000	0,000	
	17,500	0,044	0,000	0,000	0,003	0,009	0,013	0,010	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	
	18,000	0,036	0,000	0,000	0,002	0,007	0,011	0,008	0,005	0,002	0,000	0,000	0,000	
	18,500	0,028	0,000	0,000	0,002	0,006	0,008	0,006	0,004	0,002	0,000	0,000	0,000	
	19,000	0,020	0,000	0,000	0,001	0,004	0,006	0,005	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	
	19,500	0,012	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	
	20,000	0,004	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	
	Σ=1,0		0,000	0,000	0,068	0,204	0,301	0,231	0,139	0,055	0,002	0,000	0,000	0,000
P. Falla		0,005	0,020	0,039	0,039	0,030	0,015	Σ = 0,148						

de las variables (discretización). Nuevamente, si $P[E_a=11,0] \approx 0,301$ y $P[F=12,50] \approx 0,051$, entonces $P[E_a=11 \cap F=12,50] = 0,301 \times 0,051 \approx 0,015$, como se indica en la tabla, pues nuevamente se trata de variables aleatorias consideradas estadísticamente independientes.

La lámina 2.9, por lo tanto, contiene la función de distribución conjunta de probabilidades de E_a y F : $P_{EaF}(E_a, F) = P[E_a = (E_a)_1 \cap F = F_1]$. Como puede observarse esta es una función tridimensional donde, como es de esperar, la suma de las probabilidades es igual a la unidad (capítulo 1).

Si se eligen todas las combinaciones donde $F \leq E_a$ y se suman las probabilidades correspondientes se obtiene la probabilidad de falla del muro al deslizamiento³⁵. En la lámina 2.9, los casos donde $E_a \geq F$ están resaltados en letra itálica y separados del resto mediante divisiones horizontales en cada columna. En la parte inferior de la tabla se presenta la suma por columnas de la probabilidad de falla y al final de la línea todos estos resultados parciales se suman. La probabilidad de una falla por deslizamiento del muro sería de 0,148, es decir 14,8 %.

2.2.5 Probabilidad Condicional

El procedimiento seguido hasta ahora es laborioso e inusual, pero permite explorar otras posibilidades. Supóngase que el ingeniero proyectista del muro, preocupado por la diferencia entre los coeficientes de variación de ϕ y μ decide emprender un plan de investigación para mejorar su apreciación de μ . Por ejemplo, decide construir sobre un terreno similar al de la futura fundación del muro un monolito de concreto de un metro de largo sesenta centímetros de ancho y veinte centímetros de alto y medir mediante gatos hidráulicos la fuerza necesaria para su desplazamiento. Tras una serie de ensayos concluye con toda certeza que el coeficiente de fricción μ no será inferior a 0,48, pero tampoco será superior a 0,54. Por lo tanto, la fuerza de fricción en la base del muro, F , de 25 toneladas de peso no será inferior a $25 \times 0,48 = 12,0$ T/ml, ni tampoco será superior a $25 \times 0,54 = 13,5$ T/ml. ¿Cuál será la probabilidad de falla por deslizamiento del muro bajo estas nuevas condiciones? De acuerdo al concepto de probabilidad condicional mencionado en el capítulo 1, se tiene:

³⁵ Esta suma de probabilidades es lícita porque los eventos son mutuamente excluyentes entre sí (capítulo 1).

$$P[F - E_a \leq 0 | 12 \leq F \leq 13,5] = \frac{P[F - E_a \leq 0 \cap 12 \leq F \leq 13,5]}{P[12 \leq F \leq 13,5]} \quad (2.18)$$

Analizando la lámina 2.9:

$$P[F - E_a \leq 0 | 12 \leq F \leq 13,5] = \frac{\sum_{12 \leq F_j \leq 13,5} f_{E_a, F}(E_a, F_j)}{\sum_{12 \leq F_j \leq 13,5} f_{E_a, F}(F_j)} \quad (2.19)$$

En la tabla de la lámina 2.10 se muestran las celdas involucradas en la expresión anterior, la suma de las celdas de sombreado más oscuro forma el numerador mientras que la suma de todas las celdas sombreadas forma el denominador.

La probabilidad de falla es entonces:

$$P[F - E_a \leq 0 | 12 \leq F \leq 13,5] = \frac{0,006 + 0,002 + 0,003}{0,046 + 0,051 + 0,056 + 0,062} = \frac{0,011}{0,215} = 2,2\%$$

Como característica de toda distribución conjunta de probabilidades es conveniente observar que la suma de las celdas de cualquier fila o columna es igual a la probabilidad particular del valor que encabeza dicha fila o columna. Así la suma en la fila correspondiente a $F = 12$ T/ml es igual a 0,046 que es el valor de $P[F = 12]$. La pequeña discrepancia observada en algunos valores de la tabla se debe a problemas de redondeo. Este tipo de probabilidades, ya nombradas en el capítulo 1, en distribuciones conjuntas se denomina probabilidad marginal y se expresaría en este caso como (Benjamin y Cornell, 1970, Pg 86)

$$\sum_{\text{Todas las } (E_a)_i} p_{F, (E_a)_i}(F_1, (E_a)_i) = P[F = F_1] \quad (2.20)$$

Como se observa, tablas como las láminas 2.8 y 2.9 de distribuciones conjuntas pueden suministrar importante información si se manejan adecuadamente.

Lámina 2.10

Función Distribución de Probabilidad Condicional de F-E dado que $12,0 \leq F \leq 13,5$

	(T/ml)	E _a												Σ
		7,50	9,50	10,00	10,50	11,00	11,50	12,00	12,50	13,00	13,50	14,00	20,00	
		0,000	0,000	0,068	0,204	0,301	0,231	0,139	0,055	0,002	0,000	0,000	0,000	
	7,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	8,000	0,003	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003
	8,500	0,008	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,008
	9,000	0,013	0,000	0,000	0,001	0,003	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,013
	9,500	0,019	0,000	0,000	0,001	0,004	0,006	0,004	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,019
	10,000	0,024	0,000	0,000	0,002	0,005	0,007	0,006	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,024
	10,500	0,029	0,000	0,000	0,002	0,006	0,009	0,007	0,004	0,002	0,000	0,000	0,000	0,029
	11,000	0,035	0,000	0,000	0,002	0,007	0,010	0,008	0,005	0,002	0,000	0,000	0,000	0,035
	11,500	0,040	0,000	0,000	0,003	0,008	0,012	0,009	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	0,040
	12,000	0,045	0,000	0,000	0,003	0,009	0,014	0,010	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	0,046
	12,500	0,051	0,000	0,000	0,003	0,010	0,015	0,012	0,007	0,003	0,000	0,000	0,000	0,051
	13,000	0,056	0,000	0,000	0,004	0,011	0,017	0,013	0,008	0,003	0,000	0,000	0,000	0,056
	13,500	0,061	0,000	0,000	0,004	0,013	0,018	0,014	0,009	0,003	0,000	0,000	0,000	0,062
	14,000	0,067	0,000	0,000	0,005	0,014	0,020	0,015	0,009	0,004	0,000	0,000	0,000	0,067
	14,500	0,072	0,000	0,000	0,005	0,015	0,022	0,017	0,010	0,004	0,000	0,000	0,000	0,072
	15,000	0,077	0,000	0,000	0,005	0,016	0,023	0,018	0,011	0,004	0,000	0,000	0,000	0,078
	15,500	0,076	0,000	0,000	0,005	0,016	0,023	0,018	0,011	0,004	0,000	0,000	0,000	0,076
	16,000	0,068	0,000	0,000	0,005	0,014	0,020	0,016	0,009	0,004	0,000	0,000	0,000	0,068
	16,500	0,060	0,000	0,000	0,004	0,012	0,018	0,014	0,008	0,003	0,000	0,000	0,000	0,060
	17,000	0,052	0,000	0,000	0,004	0,011	0,016	0,012	0,007	0,003	0,000	0,000	0,000	0,052
	17,500	0,044	0,000	0,000	0,003	0,009	0,013	0,010	0,006	0,002	0,000	0,000	0,000	0,044
	18,000	0,036	0,000	0,000	0,002	0,007	0,011	0,008	0,005	0,002	0,000	0,000	0,000	0,036
	18,500	0,028	0,000	0,000	0,002	0,006	0,008	0,006	0,004	0,002	0,000	0,000	0,000	0,028
	19,000	0,020	0,000	0,000	0,001	0,004	0,006	0,005	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,020
	19,500	0,012	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,012
	20,000	0,004	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004

2.2.6 Cálculo de la pdf y PDA de la función F- E_a

Independientemente de los modelos que se supongan para la distribución de dos variables aleatorias X e Y puede demostrarse que (Novak y Collins, 2000):

$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y] \quad (2.21)$$

Además, si X e Y son variables estadísticamente independientes³⁶:

$$\text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \quad (2.22)$$

En el caso de la diferencia F-E_a, la condición de independencia hasta ahora supuesta puede ser objetable en ciertos casos y ello se discutirá suficientemente más adelante. Por ahora, se aceptará la independencia con el fin de mantener este caso en sus términos más simples. En consecuencia, y retomando la distribución inicial adoptada para μ : ($0,3 \leq \mu \leq 0,8$), se tiene:

$$E[F - E_a] = E[F] - E[E_a] = 14,167 - 10,848 = 3,319 \text{ T/ml}$$

$$\text{Var}[F - E_a] = \text{Var}[F] + \text{Var}[E_a] = 8,29 + 0,404 = 8,69$$

Por lo tanto:

$$\sigma[F - E_a] = \sqrt{8,69} = 2,65$$

y:

$$\text{CV}[F - E_a] = \frac{2,948}{3,319} = 0,888 = 88,8\%$$

Como se deduce de todos los resultados anteriores la probabilidad de falla del muro es elevada (inadmisible³⁷): 14,8 % (esto quiere decir que si se construyeran un número significativo de muros en iguales condiciones a las aquí descritas, en promedio, uno de cada siete fallaría por deslizamiento) y además la confiabilidad de los resultados es bastante precaria dado un coeficiente de variación en la función indicativa de la estabilidad (F-E_a) de 89%. No puede pasar desapercibido el hecho de que el elevado valor del coeficiente de

³⁶ Estos son casos particulares del caso general de funciones lineales de varias variables aleatorias. Este caso general se discutirá en el próximo capítulo.

³⁷ La razón de ello es que, hasta ahora, se está trabajando sin factor de seguridad. En es proximo capítulo se tratará este aspecto desde el punto de vista probbilista.

variación es en gran parte consecuencia de la incertidumbre en la estimación inicial del valor del coeficiente de fricción μ .

Excepto en los casos de suma de funciones normales gaussianas, no existen métodos expeditos que permitan conocer más allá del valor esperado y la varianza de una función suma de variables aleatorias. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el valor esperado y la varianza son suficientes para tener importantes conclusiones respecto al comportamiento de la variable dependiente.

Sin embargo en este caso se podrá avanzar hasta el final porque se han convertido en variables discretas las variables continuas establecidas al comienzo (lámina 2.9).

En efecto, en dicha lámina puede hallarse la suma de todas las probabilidades para las cuales la diferencia $F-E_a$ es un valor constante. Los valores en la lámina que corresponden a diferencias de $F-E_a$ constantes se alinean según las diagonales de la tabla, así la probabilidad de $F-E_a = 0$ es la suma de: $0,002+0,006+0,010+0,009+0,006+0,003 = 0,036$ (3,6 %). De esta manera se construyó la tabla de la lámina 2.11 de la función de distribución de probabilidades de $F-E_a$, cuya gráfica de barras se muestra en la misma lámina. Por tratarse de una función discreta, la suma de todas las ordenadas debe ser igual a la unidad. Si se acumulan las probabilidades (última columna de la tabla) se obtiene la Función de Probabilidades acumulada (FPA) también mostrada en la lámina. Se observa que esta última corta al eje de las ordenadas en el valor 0,149 que es el valor acumulado de la probabilidad $P(F-E_a \leq 0)$ o probabilidad de falla.

Por tratarse de una función discreta proveniente de la aproximación de variables continuas los resultados son aproximados así $E[F-E_a] = 3,26$ y $Var[F-E_a] = 7,07$, en lugar de los antes calculados: 3,32 y 8,69 respectivamente.

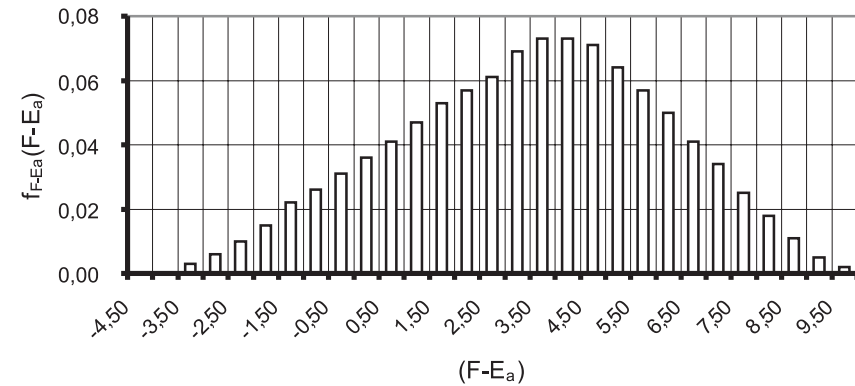
Un aspecto interesante de la fdp de $F-E_a$ es que a pesar de ser la suma algebraica de sólo dos variables aleatorias, ya comienza a “acampanarse” mostrándose consistente con una de las interpretaciones del “Teorema de Valor Central”. Según Nowak y Collins, 2000: “Si Y es la suma de n variables aleatorias X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y tales variables son estadísticamente independientes, el “Teorema del Valor Central” establece que a medida que $n \rightarrow \infty$ la suma de esas variables aleatorias se aproxima a la distribución normal, si ninguna de las variables domina en la suma”. En este ejemplo el proceso indudablemente se

Lámina 2.11

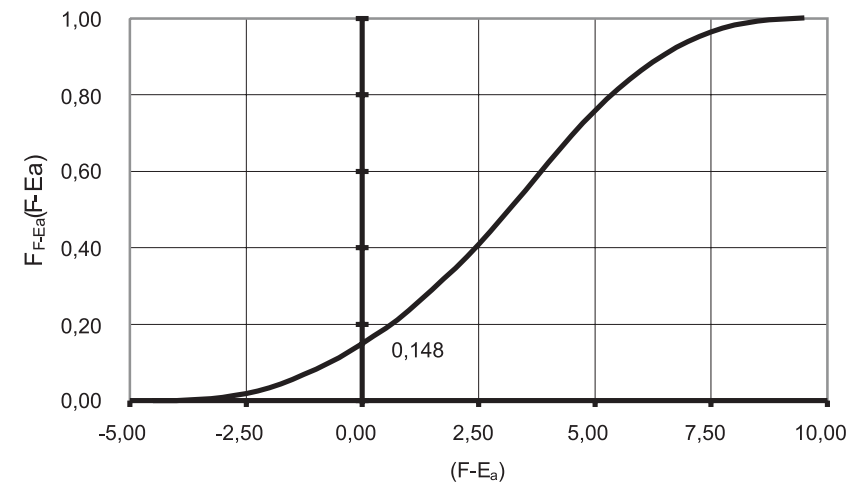
Cálculo y Representación Gráfica de $f_{F-E_a}(F-E_a)$ y $F_{F-E_a}(F-E_a)$

$F-E_a$	$f_{F-E_a}(F-E_a)$	$E[F-E_a]$	$VAR[F-E_a]$	$F_{F-E_a}(F-E_a)$
-4,50	0,000	0,000	0,000	0,000
-4,00	0,000	0,000	0,000	0,000
-3,50	0,003	-0,011	0,137	0,003
-3,00	0,006	-0,018	0,235	0,009
-2,50	0,010	-0,025	0,331	0,019
-2,00	0,015	-0,030	0,414	0,034
-1,50	0,022	-0,033	0,498	0,056
-1,00	0,026	-0,026	0,471	0,082
-0,50	0,031	-0,016	0,437	0,113
0,00	0,036	0,000	0,382	0,149
0,50	0,041	0,021	0,312	0,190
1,00	0,047	0,047	0,239	0,237
1,50	0,053	0,080	0,164	0,290
2,00	0,057	0,114	0,090	0,347
2,50	0,061	0,153	0,035	0,408
3,00	0,069	0,207	0,005	0,477
3,50	0,073	0,256	0,004	0,550
4,00	0,073	0,292	0,040	0,623
4,50	0,071	0,320	0,110	0,694
5,00	0,064	0,320	0,195	0,758
5,50	0,057	0,314	0,287	0,815
6,00	0,050	0,300	0,376	0,865
6,50	0,041	0,267	0,431	0,906
7,00	0,034	0,238	0,476	0,940
7,50	0,025	0,188	0,450	0,965
8,00	0,018	0,144	0,405	0,983
8,50	0,011	0,094	0,302	0,994
9,00	0,005	0,045	0,165	0,999
9,50	0,002	0,019	0,078	1,001
10,00	0,000	0,000	0,000	1,001
Totales	1,001	3,257	7,070	

B) Función de Masa de Probabilidades de $F-E_a$



C) Función de Probabilidades Acumuladas de $F-E_a$



acelera por la similitud geométrica entre la campana de Gauss y las distribuciones triangulares y quasi-triangulares involucradas.

Si, con el fin de agilizar el problema, se utiliza la hipótesis simplificadora, de que la función $F-E_a$ posee una distribución normal, evitando así el tedio de tener que calcular todos los valores de las láminas 2.7 y 2.8, entonces la probabilidad de falla podría calcularse rápidamente suponiendo $F-E_a \approx N(3,32 ; 2,95)^{38}$ y utilizando las tablas de la función normal, presentes en cualquier texto de estadística o cualquier logicial de esta disciplina (Berk y Carey 2000) que nos dé los valores de la distribución normal directamente, se obtiene que $P(F-E_a \leq 0) = 13\%$ valor que resulta cercano al de 14,8 antes calculado. Este valor corresponde al de la ordenada en el origen de la distribución normal acumulada, en forma similar al de la FDA mostrada en la lamina 2.11.

En la lámina 2.12 se muestra la comparación de los resultados antes obtenidos para las funciones de probabilidades de $F-E_a$ (lámina 2.11) con los obtenidos suponiendo una distribución normal para $F-E_a$.

2.2.7 Independencia de los valores de E_a y F

Para todo lo anterior, se ha supuesto que las variables aleatorias E_a y F son estadísticamente independientes. Como se desprende de la lámina 2.9, ello quiere decir que cualquier valor de F , puede coexistir con cualquier valor de E_a con una probabilidad igual al producto de sus probabilidades particulares. Esta misma coexistencia tiene que ser válida para los valores de las variables independientes ϕ y μ . El uso del concepto de independencia permitió que en la lámina 2.9 se pudieran combinar valores elevados de F con valores bajos de E_a y viceversa sin ninguna corrección adicional a la del producto de sus probabilidades. Por ejemplo, en la tabla 2.9:

$$P[E_a \leq 10 \cap F \leq 18] = 0,068 \times 0,036 = 0,002$$

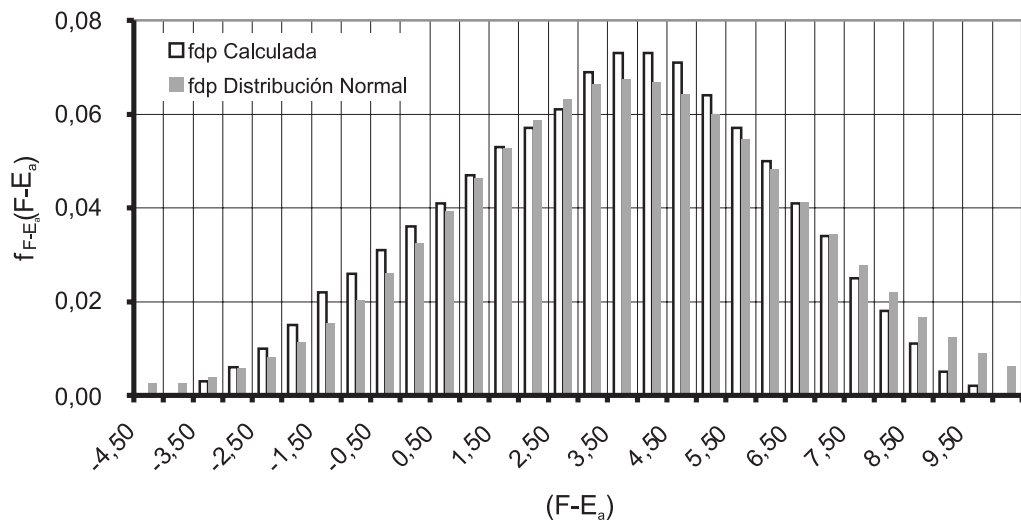
Sin embargo, cuando se construye un muro, normalmente el relleno proviene de muy cerca. En consecuencia, relleno y fundación pueden tener un mismo origen geológico. Esto no quiere decir que tengan las mismas propiedades, porque el relleno es un material triturado, transportado y colocado, mientras que fundación es un material que permanece en

³⁸ Distribución normal con valor esperado: 3,32 y desviación estándar: 2,95.

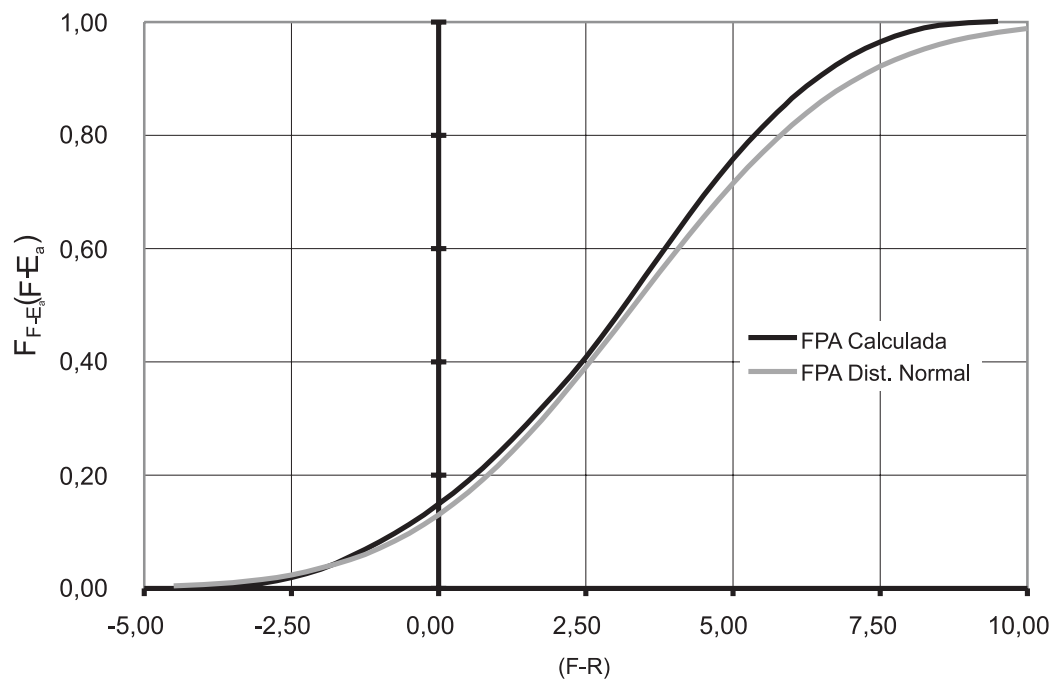
Lámina 2.12

Comparación de resultados con una Distribución Normal para $F - E_a$

A) Función de Masa de Probabilidades



B) Función de Probabilidades Acumulada



sitio con sus propiedades intactas. Pero si el material del sitio es un esquisto duro, el valor de μ será alto y el valor de ϕ también tenderá a ser alto si el relleno proviene de la misma formación. Si el esquisto es blando ocurrirá lo contrario. Es decir, puede no existir independencia entre ϕ y μ . Si no existe independencia debe haber una correlación (buena o mala) entre ambos valores. Esta correlación sería negativa porque cuando la fuerza F es elevada E_a tendría que ser baja debido a que ambos, ϕ y μ , son altos, o viceversa. Por lo tanto, en caso de no haber independencia entre esas variables el método utilizado no es del todo exacto. Por otra parte, el aceptar dependencia estadística entre las variables puede conducir a situaciones difíciles de manejar tanto en el aspecto matemático como en el experimental. Muchas veces es necesario suponer independencia entre las variables aunque ello no sea del todo cierto para mantener el problema dentro de límites manejables (Whitman, 1984).

A continuación, se analiza cualitativamente el efecto de la dependencia:

En general, para una función suma de n variables aleatorias:

$$Y = A_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n$$

cuando estas variables no son estadísticamente independientes, la desviación estándar de la variable Y viene dada por (Benjamin y Cornell 1970)³⁹:

$$\sigma^2[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j \sigma[X_i] \sigma[X_j] \rho[X_i X_j] \quad (2.23)$$

Si se trata de variables estadísticamente independientes el coeficiente de correlación es nulo en todos los casos y la ecuación anterior se transforma en:

$$\sigma^2[Y] = \sum_{i=1}^n \sigma^2[X_i] \quad (2.24)$$

La cual para el caso de dos variables conduce directamente a la ecuación (2.22). En el caso de dos variables y coeficiente de correlación no nulo (2.23) se transforma en:

$$\sigma^2[Y] = A_1^2 \sigma^2[X_1] + A_2^2 \sigma^2[X_2] + 2A_1 A_2 \sigma[X_1] \sigma[X_2] \rho[X_1 X_2] \quad (2.25)$$

³⁹ En la cuarta parte de este trabajo se tratará este aspecto más en detalle

A partir de la ecuación anterior se puede deducir como influiría en la dispersión de Y el hecho de que las variables X_1 y X_2 sean o no estadísticamente independientes.

Si la correlación es positiva, es decir $\rho[X_1, X_2] > 0$ y el tercer término de la ecuación anterior se añade a los dos anteriores, en consecuencia, la dispersión es mayor que si ambas variables fuesen independientes. Ello proviene de que al haber una correlación positiva es más probable que los valores altos de X_1 coincidan con los valores altos de X_2 y los valores bajos de X_1 coincidan con los bajos de X_2 con más frecuencia que el que los valores altos o bajos de X_1 coincidan con los valores medios de X_2 y viceversa. Esto hace que los sumandos parciales ($X_1 + X_2$) tiendan a agruparse más frecuentemente hacia los extremos, es decir alejados del valor esperado y en consecuencia la dispersión de los valores de Y es mayor que si X_1 y X_2 fuesen independientes.

Si la correlación es negativa, $\rho[X_1, X_2] < 0$, entonces los valores altos de X_1 tienden a asociarse más frecuentemente con los valores bajos de X_2 y viceversa, lo cual hace que las sumas individuales se acerquen al promedio o valor esperado y la dispersión de Y sea menor que si X_1 y X_2 fuesen variables independientes.

En el caso de la variable F- E_a la correlación, en caso de existir, sería negativa por lo antes explicado. En este caso, la aplicación de la ecuación (2.25) presenta la cancelación de dos efectos opuestos. Así:

$$\sigma^2[F - E_a] = (+1)^2 \cdot \sigma^2[F] + (-1)^2 \sigma^2[E_a] + 2(+1) \cdot (-1) \sigma[F] \sigma[E_a] \rho[F, E_a] \quad (2.26)$$

Es decir, debido a que el término equivalente a A_2 es negativo la dispersión parece reducirse, pero dado que $\rho[F, E_a]$ es también negativo, el tercer término, si no es nulo ($\rho[F, E_a] \neq 0$), debe sumarse a los dos anteriores. En consecuencia, la dispersión o desviación estándar de la variable F- E_a es mayor si existe dependencia entre F y E_a que en el caso contrario y por lo tanto, la desviación estándar real de F- E_a sería mayor que el valor de 2,65 obtenido anteriormente cuando se supuso independencia estadística.

Capítulo 3

Confiabilidad

3.1 Introducción

En el capítulo anterior se analizó el caso del efecto de la incertidumbre de un resultado dada la incertidumbre de las variables que intervienen en su cálculo. En este capítulo se analizará el significado de esos efectos. Más específicamente: ¿Cómo debe interpretarse el coeficiente de variación? ¿Qué significa que el coeficiente de variación de la variable $F-E_a$ del capítulo anterior sea de 89 %?

Para ello se hará uso de los conceptos de factor de seguridad e índice de confiabilidad aplicados a dos ejemplos: el primero de ellos se refiere al muro tratado en el capítulo anterior y el segundo al cálculo probabilista de la capacidad última de una fundación superficial cuadrada sobre arena densa. El concepto de factor de seguridad es de uso tradicional en el método determinista usual de la geotecnia, mientras que el índice de confiabilidad fue introducido en 1974 por Hasofer y Lind (1974) como una medida de la confiabilidad de un sistema estructural

3.2 Factor de seguridad

En el método determinista, el parámetro que expresa la condición de riesgo o seguridad de una estructura es el denominado factor de seguridad (FS). En su acepción más general, el factor de seguridad se define como el cociente de la resistencia de una estructura o de un elemento estructural a un conjunto de fuerzas o efectos (momentos, esfuerzos, etc.) dividido por el valor calculado o medido de esas fuerzas o efectos para una determinada condición de estabilidad (deslizamiento, volcamiento, hundimiento etc.)

$$\text{Factor de Seguridad} = \frac{\text{Resistencia}}{\text{Fuerzas Actuales}} \quad (3.1)$$

Whitman (1984) presenta una definición precisa de factor de seguridad: es la relación entre el valor permisible de una cantidad (capacidad) y el valor calculado o medido de esa cantidad (demanda).

Particularmente, en los cálculos de estabilidad de taludes, el factor de seguridad responde al mismo concepto, pero se expresa como el cociente de la resistencia al corte promedio dividida entre el esfuerzo cortante promedio a lo largo de la superficie de deslizamiento considerada. Expresado en función de esfuerzos efectivos, el factor de seguridad viene dado por:

$$FS = \frac{s}{\tau} = \frac{c' + \sigma' \times \operatorname{tg}(\phi')}{\tau} \quad (3.2)$$

Donde s es resistencia al corte, c' es la cohesión efectiva, ϕ' el ángulo efectivo de fricción interna y τ es el esfuerzo de corte actuante.

En ambas expresiones del factor de seguridad, (3.1) y (3.2), éste puede interpretarse como aquella fracción de la capacidad que es necesario movilizar para contrarrestar exactamente las fuerzas o esfuerzos actuantes. A dicha fracción, en el caso de taludes, algunos autores (Janbu, 1972; Abramson y coautores, 1996; Graham, 1984) la denominan resistencia al corte movilizada (o requerida) y se obtiene transformando la ecuación (3.2) de la siguiente forma:

$$\tau = \frac{s}{FS} = \frac{c'}{FS} + \sigma' \times \frac{\operatorname{tg}(\phi')}{FS} = c'_m + \sigma' \times \operatorname{tg}(\phi'_m) \quad (3.3)$$

Donde c'_m = cohesión efectiva movilizada y ϕ'_m ángulo efectivo de fricción interna movilizado.

Aunque la interpretación de la resistencia al corte movilizada es antigua, ciertos autores (Dawson y coautores, 2000; Lechman y Griffiths, 2000) recientemente la han utilizado con el método de elementos finitos mediante el procedimiento de ir reduciendo en etapas los parámetros de resistencia al corte hasta obtener una superficie continua de fluencia plástica en el interior del talud. El cociente entre la resistencia al corte nominal y la vigente en ese momento es el factor de seguridad del talud. Este método tendría, entre otras, las siguientes ventajas (Lechman y Griffiths, 2000):

- a) No necesita ni la definición geométrica ni el análisis de las muchas superficies de falla empleadas en los cálculos, porque la superficie de falla aparece de forma natural durante el desarrollo del problema.

- b) Como no es necesario dividir la masa potencial de deslizamiento en las habituales tajadas o dovelas comunes a todos los métodos, tampoco son necesarias las suposiciones acerca de la orientación de las fuerzas entre ellas.

Estas suposiciones respecto a la orientación de las fuerzas, como se sabe, establecen las principales diferencias entre muchos de los métodos para el cálculo de estabilidad de taludes.

De la definición de factor de seguridad se desprende que si éste es igual o menor que la unidad la estructura colapsa. En el caso del muro del capítulo anterior, el factor de seguridad al deslizamiento sería el cociente $FS = F / E_a$. En muros, tradicionalmente se ha exigido $F.S = 1,5$, como factor de seguridad al deslizamiento, es decir, la capacidad de resistir el deslizamiento debe ser 50% mayor que la fuerza que tiende a hacer que el muro deslice (normalmente el empuje del relleno tras el muro).

Con el factor de seguridad se intenta cubrir la incertidumbre en la estimación de la capacidad de una estructura, pero también, y con igual importancia, se intenta mantener en niveles tolerables los desplazamientos y las deformaciones de la estructura los cuales se tornan excesivos cuando el factor de seguridad se aproxima a la unidad. Por lo tanto, aunque el calculista conociera con absoluta certeza la capacidad y demanda en una estructura, todavía se requeriría del uso de algún factor similar al de seguridad para mantener desplazamientos y deformaciones dentro de valores estética y operativamente razonables. En cierto tipo de problemas, por ejemplo la capacidad portante de fundaciones, el factor de seguridad a la falla y los asentamientos bajo distintas cargas de trabajo pueden calcularse separadamente y al final compararse con fin de seleccionar una carga de trabajo que cumpla con ambos requerimientos: suficiente capacidad del terreno de fundación y asentamientos tolerables por la estructura, pero en el caso de estabilidad de taludes, estructuras de retención, etc., las deformaciones son difíciles de calcular con precisión y por lo tanto el factor de seguridad debe cubrir ambos aspectos: falla y deformaciones.

Una limitación del factor de seguridad radica en el hecho de no tener en cuenta la certeza con la que se calculó la capacidad y la demanda, ni la calidad del método de cálculo (Whitman, 1984; Low y coautores, 1998; Ashford y coautores, 1992).

Es comprensible que el ingeniero utilice factores de seguridad mayores cuanto más inseguro está de los valores de las variables presentes en sus cálculos, pero no tiene otro camino que hacerlo en una forma intuitiva. En el caso del muro tratado en el capítulo anterior oportunamente se destacó el hecho de que la incertidumbre en la fuerza de fricción, F , era cuatro veces superior a la del empuje, E_a , por lo tanto, el que ambos valores intervengan en un mismo cálculo no parece muy sensato. En el método determinista, este hecho no se toma en cuenta y, en consecuencia, no tiene cabida en los cálculos. Para el cálculo determinista del muro tratado, el ingeniero habría hecho su mejor estimación de la fuerzas de fricción y empuje del terreno y habría obtenido el factor de seguridad al deslizamiento de acuerdo a la expresión (3.1). En un sentido estricto, para este muro el factor de seguridad debería calcularse como $F.S. = E[F] / E[E_a] = 14,17 / 10,85 = 1,31$, el cual⁴⁰ resulta inferior al valor de 1,50 normalmente requerido.

Acto seguido, el ingeniero habría decidido aumentar las dimensiones del muro a fin de aumentar el peso y por ende la fricción en la base del muro. Con el fin de obtener un factor de seguridad de 1,50, la fricción muro terreno por unidad de longitud debería ser de:

$$F = FS \times E_a$$

$$F = 1,50 \times 10,85 = 16,28 \frac{\text{t}}{\text{ml}}$$

Aceptando que el coeficiente de fricción μ será el valor esperado de la distribución triangular supuesta en el capítulo anterior: $\mu = 0,567$ (ver lámina 2.3), el peso del muro para $FS = 1,50$ viene dado por:

$$W = \frac{F}{\mu} = \frac{16,28}{0,567} = 28,7 \approx 29,0 \frac{\text{t}}{\text{ml}}$$

Tras modificar la geometría del muro para alcanzar este peso, se daría por terminado el diseño según el método determinista.

⁴⁰ En el cálculo probabilista el factor de seguridad calculado a partir de los valores esperados se denomina: factor de seguridad central (Harr, 1987).

Es interesante revisar cómo cambia la situación probabilista del muro con los cambios en el diseño. Ello puede hacerse utilizando el índice de confiabilidad, β , tal como se discute el próximo aparte.

3.3 Índice de Confiabilidad

3.3.1 Definición

El índice de confiabilidad, β , es la contraparte del factor de seguridad en el análisis probabilista y se define por la expresión (Hasofer y Lind, 1974):

$$\beta = \frac{E[\mathcal{R} - \mathcal{Q}]}{\sigma[\mathcal{R} - \mathcal{Q}]} \quad (3.4)$$

Donde: $\mathcal{R}$ = Resistencia o capacidad de una estructura a un cierto efecto o carga y $\mathcal{Q}$ = efecto o carga sobre la estructura. El índice de confiabilidad muestra la diferencia entre la resistencia y la carga, o sus efectos, utilizando a la desviación estándar de tal diferencia como unidad de medida. También puede interpretarse como el inverso del coeficiente de variación de la variable aleatoria $(\mathcal{R} - \mathcal{Q})$.

Visto que la variable $\mathcal{R} - \mathcal{Q}$ es la suma algebraica de dos variables aleatorias, el índice de confiabilidad puede expresarse de acuerdo a lo tratado en el capítulo anterior (ecuación (2.24)) como:

$$\beta = \frac{E[\mathcal{R}] - E[\mathcal{Q}]}{\sqrt{\sigma^2[\mathcal{R}] + \sigma^2[\mathcal{Q}]}} \quad (3.5)$$

La ecuación anterior es válida cualquiera que sea la distribución de probabilidades de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ y siempre que se trate de variables estadísticamente independientes. Sin embargo, es obvio que los parámetros (E y σ) que intervienen en esta ecuación dependen del modelo probabilista adoptado y, en consecuencia, β también.

En el caso del muro del capítulo anterior, las fuerzas $\mathcal{R}$ y $\mathcal{Q}$ se reducen a F y E_a respectivamente⁴¹.

En la lámina N° 3.1 se muestran las distribuciones de probabilidades de la variable aleatoria $F - E_a$ para los cuatro casos tratados a lo largo del ejemplo del muro en capítulo anterior. Estos casos se resumen a continuación. Todas las distribuciones se han supuesto distribuciones normales o gaussianas vista la aceptable aproximación a esta distribución obtenida en el capítulo anterior a partir de las distribuciones triangulares inicialmente adoptadas:

El caso N° 1 corresponde al planteamiento inicial del muro, con un peso de 25 T/ml y gran dispersión en los valores del coeficiente de fricción. El factor de seguridad para este caso ya se calculó y resultó de 1,31

El caso N° 2 corresponde al incremento del peso del muro a 29 T/ml a fin de lograr un factor de seguridad de 1,50. Todos los restantes valores son iguales a los del caso N° 1. El incremento del peso incrementa el valor esperado de la variable $F - E_a$ debido al aumento de F , pero también incrementa⁴² el valor de $\sigma[F]$ que pasa de 2,83 a 3,28. La distribución de $F - E_a$ es parecida a la del caso N° 1 sólo que se traslada hacia la derecha como consecuencia del aumento de $E[F - R]$ y se torna un poco más dispersa (achata⁴³) por el aumento de $\sigma[F]$. El efecto neto sobre el índice de confiabilidad, β , es un aumento de 1,14 (caso N° 1) a 1,62 (caso N° 2) y la probabilidad de falla (P.F.) disminuye de 12,6 % a 5,22% .

El Caso N° 3 corresponde al caso tratado en el capítulo anterior (aparte 2.2.6) en el cual el ingeniero a cargo del diseño decide mejorar su conocimiento del coeficiente de fricción muro terreno mediante investigaciones en sitio. Tras esta investigación, la desviación estándar de la variable F se logró reducir de 2,83 a 0,02 y la probabilidad de

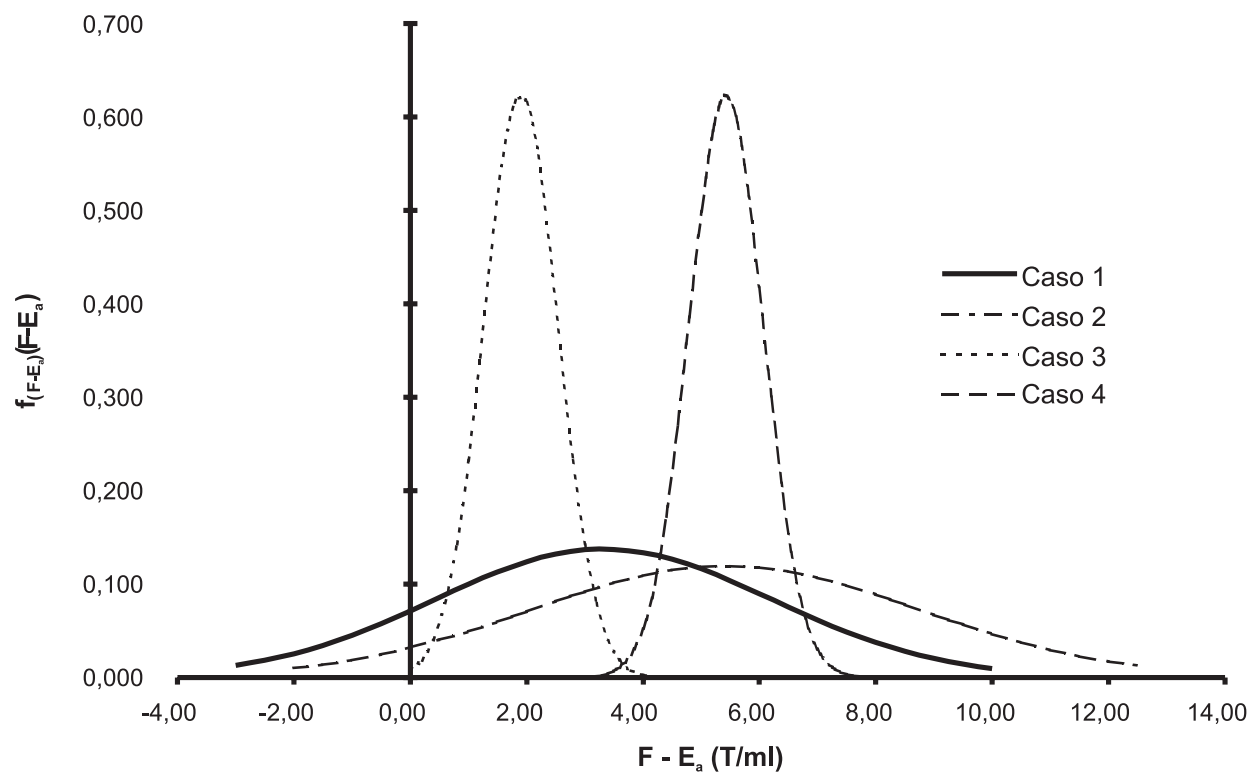
⁴¹ En el caso general de un muro de gravedad $\mathcal{Q}$ incluiría también el empuje debido a sobrecargas, sismos etc. y $\mathcal{R}$ incluiría la resistencia debida al empuje pasivo al frente del muro, el aumento en la fricción base de muro-terreno debido a la componente vertical del empuje del terreno etc.

⁴² Recuérdese que $\sigma[F] = W \times \sigma[\mu]$ por tratarse de la función lineal $F = W \times \mu$. Por lo tanto al aumentar W aumenta la dispersión en la distribución de probabilidades de F .

⁴³ En estadística ese achatamiento se mide a través del cuarto momento de la función distribución de probabilidades respecto al valor esperado y se denomina curtosis. El promedio (valor esperado), es el primer momento, la varianza el segundo, el sesgo el tercero y la curtosis el cuarto.

Lámina 3.1

Función Distribución de Probabilidades para Cuatro Casos Referentes al Muro de Contención



Caso	$E[F]$	$E[E_a]$	$E[F-E_a]$	$\sigma[F]$	$\sigma[E_a]$	$\sigma[F-E_a]$	P.F.	F.S.	β
1	14,17	10,85	3,32	2,83	0,64	2,90	1,26E-01	1,31	1,14
2	16,28	10,85	5,43	3,28	0,64	3,34	5,22E-02	1,50	1,62
3	12,75	10,85	1,90	0,02	0,64	0,64	1,50E-03	1,18	2,97
4	16,28	10,85	5,43	0,03	0,64	0,64	0,00E+00	1,50	8,47

falla disminuyó de 12,6 % en el caso N° 1 a 0,15 %. Como es de esperar, hay un aumento del índice de confiabilidad a 2,97. Sin embargo, es conveniente observar que este caso es el que presenta el menor valor esperado de la variable $F-E_a$ porque la investigación en sitio demostró que el valor esperado del coeficiente de fricción $E[\mu] = 0,52$ era menor que el supuesto originalmente (0,567, véase capítulo anterior). Por esta misma razón, el factor de seguridad es el menor de todos los casos e igual a 1,18.

El caso N° 4 es el mismo caso N° 3 con la diferencia de que se decide aumentar el peso del muro a 31,30 T/ml a fin de lograr un factor de seguridad⁴⁴ de 1,50. En este caso β aumenta a 8,47 y la probabilidad de falla desaparece a efectos prácticos. Sin embargo, la función distribución de probabilidades es la misma de caso N° 3 con la diferencia que se ha corrido a la derecha como consecuencia del aumento en el valor esperado $E[F-E_a]$ ⁴⁵.

El estudio de los casos anteriores hace evidente la relación, o más bien la falta de ella, entre el factor de seguridad, el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla. Por ejemplo: el caso N° 2 tiene el mismo factor de seguridad que el caso N° 4: 1,50; sin embargo, el caso N° 4 tiene una probabilidad de falla prácticamente nula mientras que en el caso N° 2 la probabilidad de falla es de 5,22%, considerada una probabilidad de falla muy alta. Por su parte, el índice de confiabilidad del caso N° 4 es 5,23 veces mayor que el del caso N° 2 ($8,47 / 1,62$).

La comparación entre los casos N° 2 y N° 3 indica que el factor de seguridad del caso N° 3 (1,18) es inferior al del caso N° 2 (1,50), pero la probabilidad de falla de aquél es 34,8 veces menor que la de este último ($5,22 \times 10^{-2} / 1,50 \times 10^{-3}$).

El análisis de estos cuatro casos parece poner de manifiesto que ninguno de los dos parámetros FS y β por si solo es suficiente para determinar la seguridad de una estructura. Es necesario el conocimiento de ambos porque el primero se ocupa de la relación entre capacidad y demanda a la vez que mantiene tolerables las deformaciones, mientras el segundo se interesa más en la precisión con que esos factores fueron calculados. Así por

⁴⁴ Nuevamente, la disminución en el valor esperado de m en el caso N° 3 respecto a los casos N° 1 y N° 2 de 0,567 a 0,52 obliga a que el peso del muro sea mayor en el caso N° 3 (31,30 T/ml) que en el caso N° 2 (29 T/ml) para lograr el mismo factor de seguridad de 1,50.

⁴⁵ En este caso al igual que en el caso N°1 hay un ligero aumento en la desviación estándar de F de 0,02 a 0,025 como consecuencia del aumento en el peso del muro. Sin embargo este aumento no tiene incidencia en los resultados finales.

ejemplo, el caso N° 2 es uno de los dos casos con el factor de seguridad más alto, pero es el segundo con la probabilidad de falla más alta, mientras que el caso N° 3 posee el menor factor de seguridad y una de las probabilidades de falla más bajas de los casos estudiados. En cierto modo podría decirse que el índice de confiabilidad define el grado de confianza que un determinado factor de seguridad merece.

Podría pensarse, con razón, que el conocimiento de la probabilidad de falla es más importante que el conocimiento del índice de confiabilidad y que por lo tanto cálculo de del índice de confiabilidad es innecesario o redundante. Es cierto que el concepto de probabilidad de falla es mucho más explícito que el de índice de confiabilidad, lo que sucede es que para calcular la probabilidad de falla es necesario el conocimiento preciso de la distribución de probabilidades de $\mathcal{R}$ - $\mathcal{Q}$ y ello no siempre es posible en cálculos de cierta complejidad a menos que se hagan hipótesis simplificadoras tales como que la distribución es gaussiana. Así se hizo en los cálculos anteriores y puede ser una hipótesis aproximada o no⁴⁶. Para el cálculo del índice de confiabilidad sólo son necesarios valores esperados y desviaciones estándar, los cuales son más fáciles de obtener sin tener que conocer la distribución de probabilidades de las variables.

3.3.2 Interpretación geométrica del índice de confiabilidad.

Si se analiza la tabla de la lámina 2.9 del capítulo anterior donde se presenta la distribución de probabilidades conjunta de F y E_a se observará, como se indicó en su momento, que se trata de una función tridimensional que podría representarse en el plano horizontal por las variables F y E_a , y en el eje vertical por los valores de la distribución conjunta. La diagonal que separa los casos donde de $F \leq E_a$ de aquellos donde sucede lo contrario, es una línea a 45° en el plano horizontal. En la lámina 2.9, las celdas subrayadas con doble línea serían los valores correspondientes a esta diagonal que suele denominarse función de estado límite. El plano vertical cuya traza con el plano horizontal es la línea de estado límite separa los volúmenes correspondientes de la función tridimensional de los casos de falla de aquellos donde la estructura es estable.

⁴⁶ Si $\beta < 2,5$ y las desviaciones estándar involucradas no son altas, la relación entre β y la probabilidad de falla no es muy sensible a la distribución de probabilidades (Whitman, 1984) pudiendo usarse la relación entre β y la probabilidad de falla a través de la distribución gaussiana

En Figura A de la lámina N° 3.2 se esquematiza esta situación. Si se vuelve al caso de las distribuciones triangulares para F y Ea mostradas en las láminas 2.5 y 2.6 del capítulo anterior, es de esperar que la distribución de probabilidades conjunta de F y Ea tenga una forma similar a la mostrada en la figura nombrada. Allí la función tridimensional se esquematiza mediante curvas de nivel. En dicha figura también se muestra la función de estado límite como la traza del plano vertical que separa los volúmenes probabilistas de estabilidad e inestabilidad del muro.

Para la interpretación geométrica del índice de confiabilidad es necesario introducir el concepto de variables reducidas, lo cual se hará a continuación.

Es común que en cálculos estadísticos la distribución de variables aleatorias se normalice a funciones unitarias adimensionales de valor esperado cero y desviación estándar igual a la unidad. Una de las principales razones para la normalización es que los valores unitarios de cualquier tipo de distribución pueden ser tabulados y utilizados universalmente tras una simple conversión lineal. En todos los textos de estadística es común encontrar tablas correspondientes a los valores normalizados de las distribuciones de probabilidades más comunes.

Si $f_X(x)$ es una función de distribución de probabilidades de valor esperado $E[X]$ y desviación estándar $\sigma[X]$ entonces la variable reducida o normalizada, Z_X , viene dada por:

$$Z_X = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} \quad (3.6)$$

La función de distribución de probabilidades correspondiente: $\Phi_{Z_X}(z_x)$, puede calcularse mediante transformación descrita en el capítulo anterior:

$$f_Y(y) = \frac{dx}{dy} f_X(x)$$

En este caso la función $Z_X(X)$ es lineal y $dx / dZ_X = \sigma(X)$, por lo tanto:

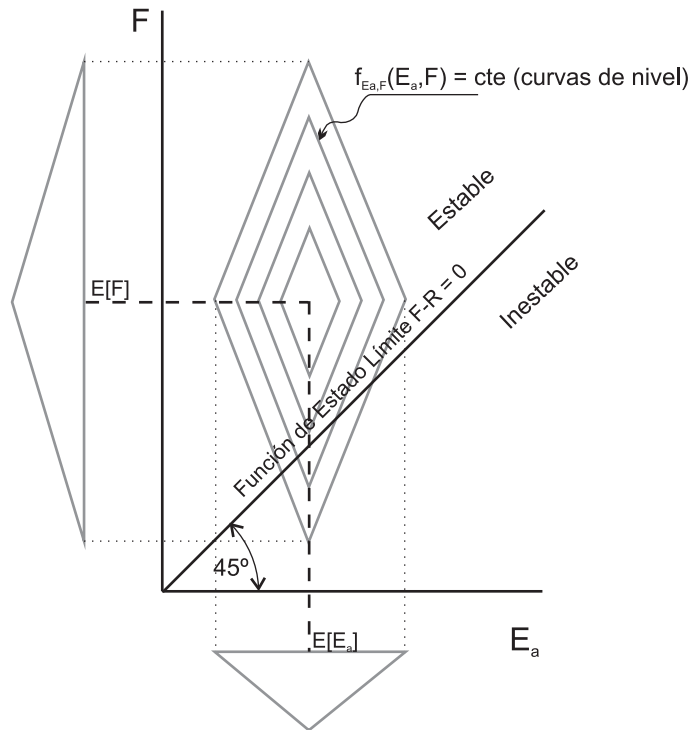
$$\Phi_{z_x} = \sigma[X] \cdot f_X(x) \quad (3.7)$$

También, de acuerdo a las ecuaciones del capítulo anterior, para transformaciones lineales:

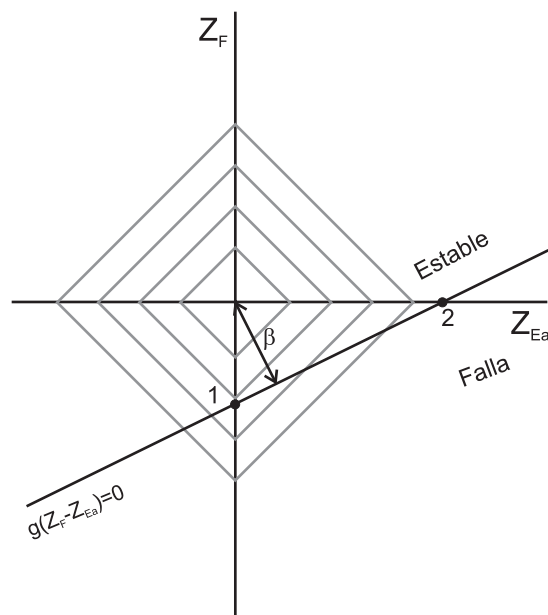
Lámina 3.2

Interpretación Gráfica del Índice de Confiabilidad

A) Función de Distribución Conjunta de las Variables F y E_a



B) Transformación de F y E_a a variables reducidas Z_F y Z_{Ea}



Ecuaciones de transformación

$$Z_F = \frac{F - E[F]}{\sigma[F]}$$

$$Z_{E_a} = \frac{R - E[E_a]}{\sigma[E_a]}$$

Coordenadas de los Puntos 1 y 2

Pto1 $\left(0; -\frac{E[F] - E[E_a]}{\sigma[F]} \right)$

Pto2 $\left(\frac{E[F] - E[E_a]}{\sigma[E_a]}; 0 \right)$

$$E[Z_x] = \frac{E[X] - E[X]}{\sigma[X]} = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{Var}[Z_x] = \frac{1}{(\sigma[X])^2} \cdot \text{Var}(X) = 1,0$$

En la figura B de la lámina 3.2 se muestra un esquema de la transformación de las variables F y E_a a sus correspondientes variables reducidas Z_F y Z_{Ea}, al igual que la función de estado límite en este nuevo sistema de coordenadas reducidas. Esta función sigue siendo una recta, pero ya no es la recta simple F - E_a = 0 (45°). En el plano de variables reducidas: Z_F; Z_R, la ecuación de la función de estado límite viene dada por la ecuación:

$$Z_F = \frac{\sigma[E_a]}{\sigma[F]} Z_R - \frac{E[F] - E[E_a]}{\sigma[F]} \quad (3.9)$$

A partir de la ecuación (3.5) puede demostrarse que el índice de confiabilidad β es la menor distancia (perpendicular) del origen del sistema de coordenadas reducidas a la recta función de estado límite. Esta distancia se muestra en la figura B de la lámina 3.2.

En la lámina 3.3 se muestran las cuatro rectas de estado límite correspondientes a los cuatro casos antes discutidos para el muro de contención.

3.3.3 Factores que afectan el índice de confiabilidad

A partir de la definición de β, ecuación(3.5)

$$\beta = \frac{E[\mathcal{R}] - E[\mathcal{Q}]}{\sqrt{\sigma^2[\mathcal{R}] + \sigma^2[\mathcal{Q}]}}$$

Se infiere que β aumenta si:

- a) E[$\mathcal{R}$] aumenta
- b) E[$\mathcal{Q}$] disminuye
- c) $\sigma[\mathcal{R}]$ y/o $\sigma[\mathcal{Q}]$ disminuyen

Lámina 3.3

Representación Gráfica de las Funciones de Estado Límite $F-E_a = 0$ en el Espacio de Variables Reducidas (normalizadas) Z_F y Z_{Ea} para los Cuatro Casos Considerados

Caso	$E[F]$	$E[R]$	$E[F-R]$	$\sigma[F]$	$\sigma[R]$	$\sigma[F-R]$	P.F.	F.S.	β
1	14,17	10,85	3,32	2,83	0,64	2,90	1,26E-01	1,31	1,14
2	16,28	10,85	5,43	3,28	0,64	3,34	5,22E-02	1,50	1,62
3	12,75	10,85	1,90	0,02	0,64	0,64	1,50E-03	1,18	2,97
4	16,28	10,85	5,43	0,02	0,64	0,64	0,00E+00	1,50	8,47

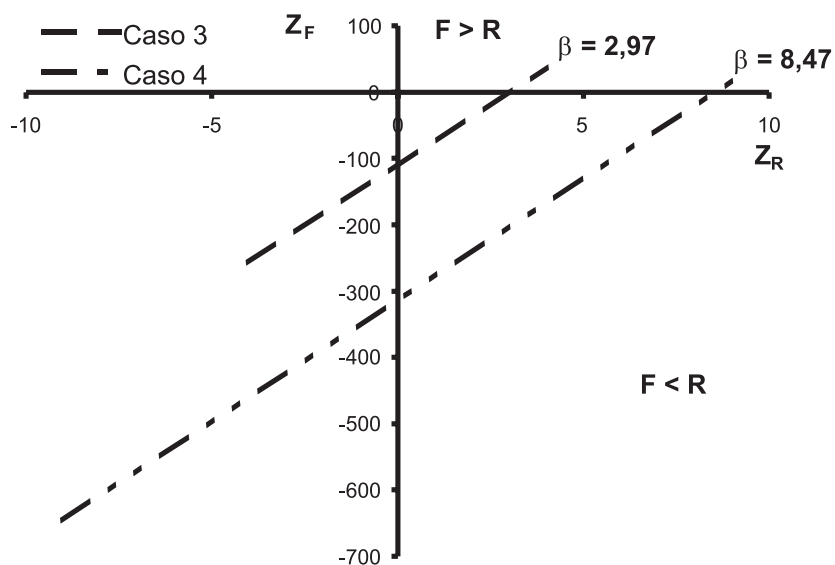
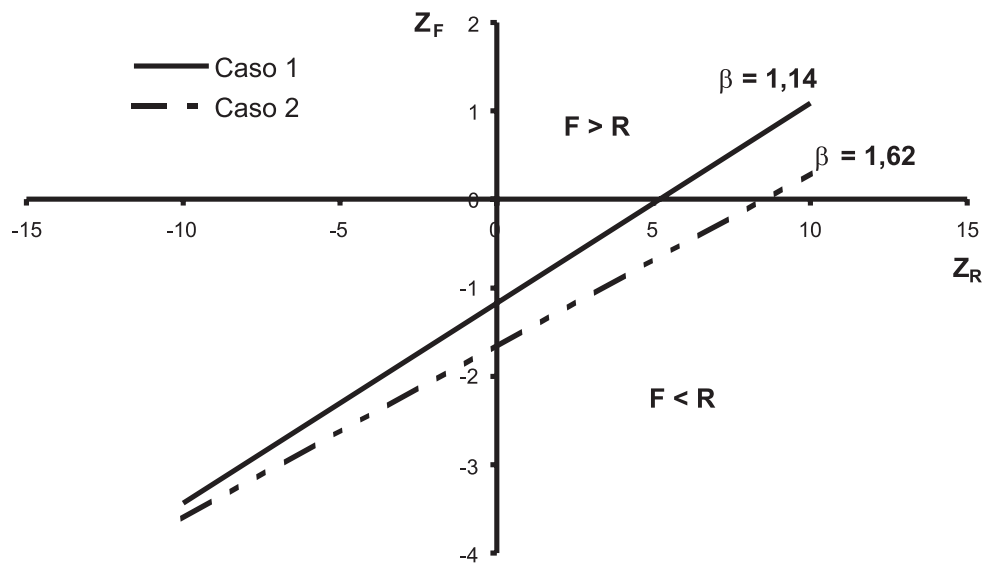


Lámina 3.3

El aumento de $\mathcal{R}$ casi siempre está asociado a un aumento en el costo de la obra: muros más masivos, fundaciones más grandes, taludes menos inclinados, anclajes más resistentes etc. La demanda, $\mathcal{Q}$, generalmente está impuesta por causas naturales (empujes, pesos, cargas sísmicas etc.) o tipificada en códigos o normas y, por lo tanto, es difícil de modificar. Por su parte, respecto a la situación c): disminuir $\sigma[\mathcal{R}]$ y $\sigma[\mathcal{Q}]$, esto normalmente puede hacerse mediante una investigación más exhaustiva de las variables involucradas. Normalmente implica un mayor número de ensayos y mejor investigación, pero casi siempre esto resulta más económico que el aumento en el costo de la obra a que conlleva la situación A), pues el ingeniero es propenso instintivamente a ser conservador y a utilizar los valores de diseño más bajos cuando no está seguro de ellos o cuando observa mucha dispersión⁴⁷.

Cuando se exige un índice de confiabilidad dado, las situaciones a) y c) anteriores son casi siempre las más fáciles de intervenir y el modificar la situación c) normalmente resulta lo más económico.

Respecto a este último punto debe tenerse en cuenta dos cosas: en primer lugar, una investigación más completa de las variables no necesariamente conduce a un ahorro, pero, en las oportunidades en que no lo haga, conducirá a un proyecto más seguro. En segundo lugar, los valores de $\sigma[\mathcal{R}]$ y $\sigma[\mathcal{Q}]$ deben mantenerse cercanos: nada se gana disminuyendo drásticamente uno respecto al otro, porque el más alto será el que domine la ecuación (3.5). Por ejemplo, si $\sigma[\mathcal{R}] = 4,00$ y $\sigma[\mathcal{Q}] = 2,00$, disminuir $\sigma[\mathcal{Q}]$ en una unidad hará variar el denominador de β en 8 % mientras que la misma variación en $\sigma[\mathcal{R}]$ disminuirá el denominador en 19 %. Un ejemplo claro del dominio de la variable con mayor dispersión es el cuarto caso de los antes tratados para el muro de contención (lámina 3.1) allí la desviación estándar de la fuerza de fricción, F , aumentó 25 % respecto al tercer caso. Sin embargo, tal aumento no incidió en los cálculos porque la dispersión dominante era la de la variable E_a ($\sigma[E_a] = 0,64$ vs. $\sigma[F] = 0,025$).

⁴⁷ Whitman (1984) comenta la situación de muchas obras aparentemente propensas a la falla por sus bajos factores de seguridad y bajos índices de confiabilidad que en realidad no lo están debido a lo conservador en la elección de los parámetros de cálculo.

3.4 Caso de una fundación directa.

3.4.1 Conceptos Generales

Al principio del capítulo anterior se planteó como ejemplo de una función geotécnica de una variable el caso del factor de capacidad portante N_q de Terzaghi.

El cálculo de la distribución de probabilidades de N_q se dejó pendiente en aquel capítulo para comenzar por funciones más simples tales como el empuje activo de Rankine o la fricción en la base de un muro. Conocida ya la metodología, se procederá a estudiar el caso, algo más complejo numéricamente, de la capacidad última de una fundación directa por métodos de probabilidades..

Sobre la base de la teoría de plasticidad y adaptando la teoría de Prandtl de 1920, concerniente a la penetración de un metal en otro, Terzaghi desarrolló la ecuación teórica para el cálculo de la capacidad última del terreno bajo una fundación infinitamente larga y de ancho finito. El problema es por lo tanto bidimensional y el resultado es bien conocido en el campo de la mecánica de suelos. En su forma original, se expresó como:

$$q_{su} = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma d N_q + c N_c \quad (3.10)$$

Donde q_{su} es la presión unitaria última, conocida también como capacidad última, y es la presión que debe aplicarse al terreno para ocasionar su fluencia lateral por corte según un mecanismo de cuñas pasivas y radiales (Terzaghi, 1943); γ es el peso unitario del terreno, B es el ancho de la tira infinita de fundación, d es la profundidad de asiento de la fundación y c es la cohesión del terreno. N_γ , N_q y N_c , son los denominados factores de capacidad portante y son funciones únicamente del ángulo de fricción interna ϕ .

En la práctica, la ecuación (3.10) debe aplicarse solamente cuando la relación largo a ancho en una fundación real es superior a 10 y con cierta precaución cuando esta relación está comprendida entre 5 y 10. También, en rigor, la ecuación (3.10) debe aplicarse a suelos densos o rígidos donde la falla por corte no esté precedida por deformaciones (asentamientos) importantes (Terzaghi, 1943). En este caso se habla de una “falla general por corte” del terreno, mientras que el caso en que la falla está precedida por asentamientos importantes se conoce como “falla local” y los factores de capacidad de carga para este

segundo caso provienen de la modificación empírica de los primeros, los cuales, como ya se ha dicho, son de origen completamente teórico.

Los factores de capacidad portante, en especial el primero de ellos: N_γ , son sensibles a la geometría del mecanismo de falla adoptado. De allí que posteriormente hayan surgido otros autores: Meyerhof, 1955; Cacuot y Kerisel, 1966; Vesic, 1973; Hansen, 1970; que proponen valores distintos a los originales de Terzaghi sobre la base de geometrías de falla algo diferentes. El tema ha sido tratado extensamente y puede encontrarse en muchos textos de fundaciones (véase por ejemplo, además de los ya citados, Das, 1999; Bowles, 1996).

Otro aspecto de la capacidad última de fundaciones que ha recibido mucha y necesaria atención es la adecuación de la ecuación (3.10) al caso de fundaciones distintas de la fundación en tira, es decir a las fundaciones más usuales de forma rectangular, cuadrada o circular. El paso del problema bidimensional (fundación en tira) al tridimensional (fundación de longitud finita) no ha sido resuelto todavía en forma exacta. Lo que se hace es utilizar coeficientes de origen semiempírico que modifican a los factores de capacidad portante hallados para la fundación en tira de acuerdo a la forma y relación largo-ancho de la fundación. Al igual que con los factores de capacidad portante, muchos autores también han presentado sus coeficientes de forma⁴⁸ (ver las mismas referencias anteriores) que multiplican a los factores de capacidad portante originales. Los primeros coeficientes de forma son también debidos a Terzaghi.

3.4.2 Influencia del método de cálculo

De todo lo anterior se desprende que se obtendrán distintos resultados de la capacidad de soporte según los factores de capacidad portante del autor que se siga y los coeficientes de corrección que se usen (forma, profundidad etc.). Por ejemplo, para una fundación cuadrada de 2,0 m de lado, colocada a 1,50 m de profundidad, en un terreno sin cohesión ni nivel freático cercano, la capacidad última del terreno según Hansen (1970) es de 14,5 Kg/cm² y según Terzaghi (1943) de 10,7 Kg/cm² (aproximadamente 30 % menor respecto a la primera).

⁴⁸ No sólo existen coeficientes de forma sino muchos otros que toman en cuenta otros aspectos tales como inclinación de la carga, profundidad de la fundación etc. y modifican a los factores de capacidad portante.

Lo antes expuesto pone en evidencia un aspecto crítico del uso de la teoría de probabilidades en geotecnia. Para poder hablar en forma absoluta de confiabilidad, probabilidad de falla etc., no sólo basta conocer la precisión de las variables que intervienen en el cálculo sino también es necesario conocer la precisión probabilista del método que se emplee. De otra manera, los índices de confiabilidad, factores de seguridad, probabilidades de falla, sólo serán relativos al método de diseño utilizado y sólo servirán para comparar el riesgo de varios diseños alternativos sobre la base de un mismo método o procedimiento de cálculo. Los cuatro casos estudiados para el muro anterior son un buen ejemplo de ello. Se comparan riesgos, y por lo tanto costos, pero siempre bajo el mismo método de determinación de las fuerzas E_a y F .

3.4.3 Método a seguir y parámetros de cálculo

Una vez hecha la aclaratoria anterior, el método a seguir en este trabajo para el estudio probabilista de una fundación directa es el propuesto en la publicación: Soil Mechanics in Engineering Practice (Terzaghi y coautores, 1996). En el capítulo referente a fundaciones superficiales cuadradas, se propone la siguiente expresión para la capacidad última:

$$q_{su} = 0,8 \times \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma d N_q + 1,2 \times c N_c \quad (3.11)$$

De esta ecuación se desprende que 0,8; 1,0 y 1,2 son los coeficientes de forma que afectan a los tres factores de carga de la expresión original. La misma publicación también recomienda que se usen estos coeficientes conjuntamente con los factores de capacidad portante propuestos por Meyerhof (1955).

Los factores de capacidad portante de Meyerhof vienen dados por las siguientes expresiones⁴⁹:

$$N_q = e^{\pi \tan(\phi)} \tan^2 \left(45 + \frac{\phi}{2} \right) \quad (3.12)$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1,4\phi) \quad (3.13)$$

⁴⁹ El desarrollo completo puede verse además de en el artículo original de Meyerhof en Das (1999) "Shallow Foundations. Bearing Capacity and Settlement"

$$N_c = (N_q - 1) \text{ctg } \phi \quad (3.14)$$

En la lámina N° 3.4 se esquematiza una fundación cuadrada, de ancho B, colocada a 2,00 m de profundidad, en arena densa. Se supondrá que el nivel freático está lo suficientemente profundo para no afectar la capacidad portante del terreno y que las tensiones capilares entre las partículas de arena son lo suficientemente pequeñas como para no generar una “cohesión aparente” en el terreno. El peso unitario del terreno γ , se supone una variable determinista de valor 1,8 T/m³ y el ángulo de fricción interna se tomará como una variable aleatoria de distribución normal con valor esperado $E[\phi] = 36^\circ$ y desviación estándar $\sigma[\phi] = 2^\circ$. En la lámina N° 3.4 también se muestra la gráfica de esta distribución supuesta para ϕ : $f_\phi(\phi)$.

Dado que no existe valor de la cohesión, ni real ni aparente, la ecuación (3.11) se reduce a sus dos primeros términos:

$$q_{su} = 0,8 \times \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma d N_q \quad (3.15)$$

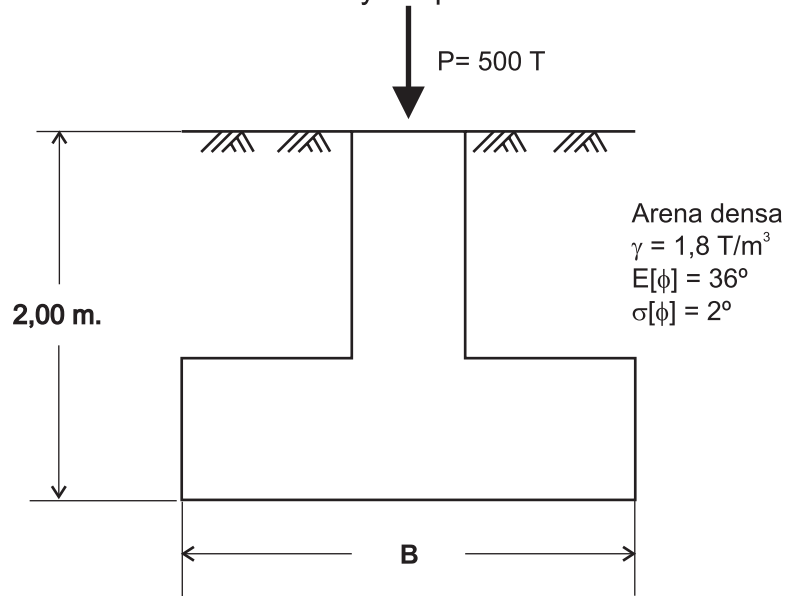
La carga de trabajo (demanda) de esta fundación será de 500 toneladas métricas y se exige un factor de seguridad de 5,00 como mínimo respecto a la capacidad última del terreno⁵⁰. En geotecnia, las cargas sobre fundaciones generalmente vienen dadas por el cálculo de la estructura que deben soportar. Estas cargas, como se sabe, son la suma del peso de los componentes de la estructura (carga muerta); el peso de las personas, maquinarias, muebles, etc. (carga viva) y otras cargas accidentales como las debidas a vientos, sismos etc., y aunque tales cargas son el resultado de análisis estadísticos, se encuentran tipificadas en códigos y normas en casi todos los países. Por lo tanto, sus valores son rígidos y obligatorios, debiendo tratarse como variables deterministas en la mayoría de los casos.

⁵⁰ En este tipo de problemas no es de extrañarse que el factor de seguridad esté mayormente comprendido entre 5,0 y 10,0 debido a que son los asentamientos (no contemplados en la fórmula de Terzaghi) los que suelen dominar en la elección de las cargas de trabajo. En este caso se ha optado por el límite inferior del rango porque en arenas densas la influencia de los asentamientos es menor.

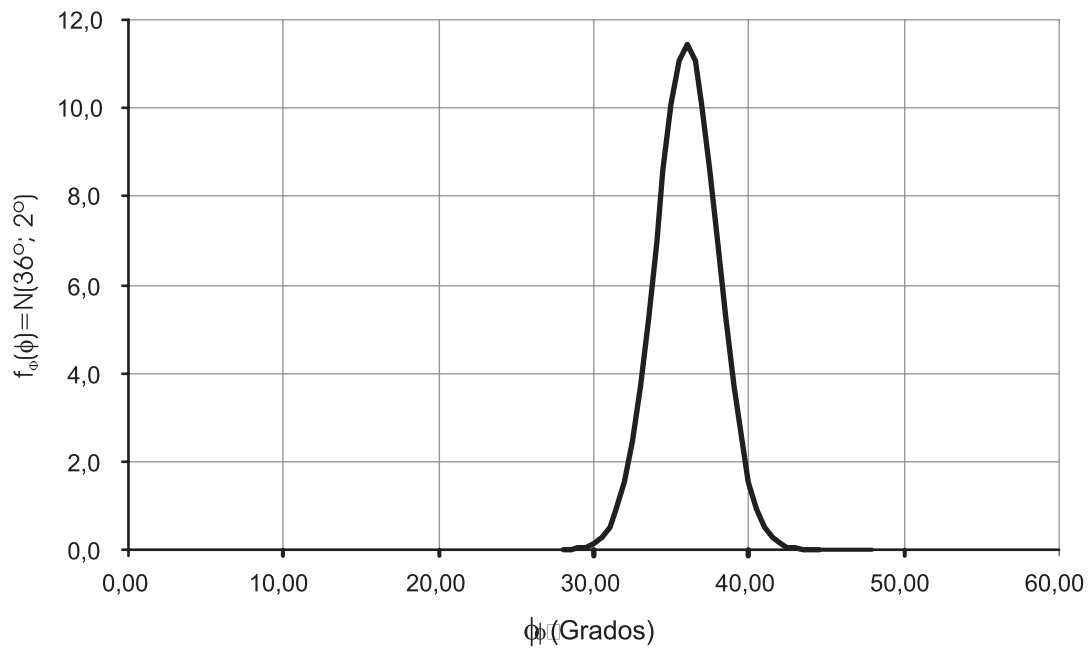
Lámina 3.4

Estudio Probabilístico de la Capacidad Última de una Fundación Directa

A) Esquema de la Fundación Directa y Propiedades del terreno



B) Distribución Probabilística de ϕ



3.4.4 Cálculo de las distribuciones de probabilidades de N_q y N_γ

Dado que la expresión de q_{su} solamente depende de ϕ , el procedimiento desarrollado en el capítulo 2 es perfectamente aplicable aquí y eso es lo que se hará, pero se procederá en dos etapas: en primer lugar se calculará la función de distribución de probabilidades de N_q : $f_{N_q}(N_q)$ y luego la de N_γ : $f_{N_\gamma}(N_\gamma)$. Posteriormente se tratará a q_{su} como la suma de dos variables aleatorias representadas cada una de ellas por el correspondiente sumando en la ecuación (3.11). Este procedimiento es en cierto modo innecesario, pues todo lo anterior podría hacerse en una sola etapa, calculando directamente la función de probabilidades de q_{su} , ya que los dos términos de la ecuación dependen de la misma variable y por lo tanto la ecuación (3.11) es función de una sola variable: ϕ . Sin embargo, el proceder en dos etapas permite comparar la influencia probabilista de N_q y N_γ en el resultado final y también estudiar un poco más el caso variables estadísticas no independientes como, a todas luces, son N_q y N_γ . Posteriormente, se presentarán los cálculos en una sola etapa para comparar resultados y tener una mejor visión del problema general.

En las láminas 3.5 y 3.6 se presenta el cálculo de la distribución de probabilidades de N_γ y N_q utilizando las ecuaciones (3.12) y (3.13) como ecuaciones de transformación en cada caso y suponiendo la distribución normal mencionada $N(36^\circ ; 2^\circ)$ para la variable independiente ϕ . El método utilizado es el mismo que se empleó en el caso de las fuerzas F y E_a conocidas las distribuciones de ϕ y μ .

En la Figura A de la lámina 3.7 se muestra la forma de las distribuciones resultantes para N_γ y N_q . En las figuras se observa que no son distribuciones simétricas sino que tienen sesgo hacia la derecha y también que la distribución de N_γ es más dispersa que la de N_q , esto se refleja en los coeficientes de variación calculados para cada una de ellas: 41 % vs. 27 %⁵¹.

3.4.5 Cálculo del ancho de la fundación.

La aplicación de la ecuación (3.15) para el cálculo de la capacidad última del terreno:

⁵¹ Obsérvese que el coeficiente de variación de ϕ es $CV[\phi] = 2^\circ/34^\circ = 5,88 \%$.

Lámina 3.5

Cálculo de $f_{N_\gamma}(N_\gamma)$ Suponiendo una Distribución Normal para ϕ

ϕ°	ϕ (rad)	N_γ	$\Delta\phi$ (rad)	ΔN_γ	$f_\phi(\phi)$ N(0,628;0,061)	$\Delta\text{Area}\phi$ = $\Delta\text{Area } N_\gamma$	$\Delta\text{area}\phi/\Delta N_\gamma$ $f_{N_\gamma}(N_\gamma)$	N_γ Promedio	$f_{N_\gamma}(N_\gamma)$ Promedio	Varianza
28,00	0,4887	11,19	0,0087	0,980	0,0038	6,10E-05	6,23E-05	11,68	0,0007	0,0704
28,50	0,4974	12,17	0,0087	1,067	0,0101	1,54E-04	1,44E-04	12,70	0,0019	0,1667
29,00	0,5061	13,24	0,0087	1,163	0,0251	3,64E-04	3,13E-04	13,82	0,0048	0,3684
29,50	0,5149	14,40	0,0087	1,268	0,0583	8,10E-04	6,38E-04	15,03	0,0117	0,7585
30,00	0,5236	15,67	0,0087	1,384	0,1273	1,69E-03	1,22E-03	16,36	0,0265	1,4528
30,50	0,5323	17,05	0,0087	1,512	0,2611	3,33E-03	2,21E-03	17,81	0,0569	2,5831
31,00	0,5411	18,56	0,0087	1,652	0,5031	6,17E-03	3,73E-03	19,39	0,1145	4,2515
31,50	0,5498	20,22	0,0087	1,807	0,9107	1,07E-02	5,94E-03	21,12	0,2170	6,4540
32,00	0,5585	22,02	0,0087	1,977	1,5488	1,76E-02	8,88E-03	23,01	0,3866	8,9911
32,50	0,5672	24,00	0,0087	2,166	2,4745	2,70E-02	1,25E-02	25,08	0,6480	11,4134
33,00	0,5760	26,17	0,0087	2,374	3,7138	3,91E-02	1,64E-02	27,35	1,0218	13,0630
33,50	0,5847	28,54	0,0087	2,605	5,2363	5,31E-02	2,04E-02	29,84	1,5158	13,2575
34,00	0,5934	31,15	0,0087	2,861	6,9356	6,79E-02	2,37E-02	32,58	2,1153	11,5952
34,50	0,6021	34,01	0,0087	3,145	8,6300	8,17E-02	2,60E-02	35,58	2,7774	8,2699
35,00	0,6109	37,15	0,0087	3,461	10,0879	9,24E-02	2,67E-02	38,88	3,4311	4,2194
35,50	0,6196	40,61	0,0087	3,813	11,0777	9,82E-02	2,58E-02	42,52	3,9882	0,9574
36,00	0,6283	44,43	0,0087	4,204	11,4277	9,82E-02	2,34E-02	46,53	4,3620	0,0770
36,50	0,6370	48,63	0,0087	4,641	11,0747	9,23E-02	1,99E-02	50,95	4,4893	2,6010
37,00	0,6458	53,27	0,0087	5,129	10,0825	8,16E-02	1,59E-02	55,83	4,3479	8,4793
37,50	0,6545	58,40	0,0087	5,674	8,6231	6,79E-02	1,20E-02	61,24	3,9627	16,5010
38,00	0,6632	64,07	0,0087	6,286	6,9283	5,30E-02	8,44E-03	67,22	3,3990	24,6913
38,50	0,6720	70,36	0,0087	6,973	5,2293	3,90E-02	5,59E-03	73,85	2,7438	31,0198
39,00	0,6807	77,33	0,0087	7,745	3,7079	2,70E-02	3,48E-03	81,20	2,0845	34,0907
39,50	0,6894	85,08	0,0087	8,614	2,4699	1,75E-02	2,03E-03	89,38	1,4906	33,5225
40,00	0,6981	93,69	0,0087	9,594	1,5455	1,07E-02	1,12E-03	98,49	1,0032	29,9033
40,50	0,7069	103,28	0,0087	10,701	0,9085	6,15E-03	5,75E-04	108,64	0,6356	24,4178
41,00	0,7156	113,99	0,0087	11,955	0,5017	3,33E-03	2,78E-04	119,96	0,3790	18,3660
41,50	0,7243	125,94	0,0087	13,377	0,2603	1,69E-03	1,26E-04	132,63	0,2128	12,7824
42,00	0,7330	139,32	0,0087	14,993	0,1269	8,07E-04	5,38E-05	146,81	0,1124	8,2598
42,50	0,7418	154,31	0,0087	16,833	0,0581	3,62E-04	2,15E-05	162,73	0,0559	4,9685
43,00	0,7505	171,14	0,0087	18,932	0,0250	1,53E-04	8,08E-06	180,61	0,0262	2,7879
43,50	0,7592	190,07	0,0087	21,333	0,0101	6,08E-05	2,85E-06	200,74	0,0115	1,4616
44,00	0,7679	211,41	0,0087	24,086	0,0038	2,27E-05	9,42E-07	223,45	0,0048	0,7170
44,50	0,7767	235,49	0,0087	27,248	0,0014	7,96E-06	2,92E-07	249,12	0,0019	0,3295
45,00	0,7854	262,74	0,0087	30,891	0,0005	2,63E-06	8,50E-08	278,19	0,0007	0,1420
45,50	0,7941	293,63	0,0087	35,098	0,0001	8,14E-07	2,32E-08	311,18	0,0002	0,0574
46,00	0,8029	328,73	0,0087	39,969	0,0000	2,37E-07	5,94E-09	348,72	0,0001	0,0218
46,50	0,8116	368,70	0,0087	45,626	0,0000	6,51E-08	1,43E-09	391,51	0,0000	0,0078
47,00	0,8203	414,33	0,0087	52,214	0,0000	1,68E-08	3,21E-10	440,43	0,0000	0,0026
47,50	0,8290	466,54	0,0087	59,910	0,0000	4,06E-09	6,78E-11	496,50	0,0000	0,0008
48,00	0,8378	526,45	0,0087	68,930	0,0000	7,60E-10	1,10E-11	560,92	0,0000	0,0002
48,50	0,8465	595,38				0,00E+00	0,00E+00	297,69	0,0000	0,0000

$\Sigma=$

1,000

45,64
Desv Est
CV

343,08
18,52
0,4058

Lámina 3.6

Cálculo de $f_{N_q}(N_q)$ Suponiendo una Distribución Normal para ϕ

ϕ°	ϕ (rad)	Nq	$\Delta\phi$ (rad)	ΔNq	$f_\phi(\phi)$ N(0,628;0,035)	$\Delta Area\phi$ = $\Delta Area Nq$	$\Delta area\phi/\Delta Nq$ $f_{N_q}(N_q)$	Nq Promedio	$f_{N_q}(N_q)$ Promedio	Varianza
28,00	0,4887	14,72	0,0087	0,8345	0,0038	6,09E-05	7,29E-05	15,14	0,0009	0,0318
28,50	0,4974	15,55	0,0087	0,8889	0,0101	1,53E-04	1,72E-04	16,00	0,0024	0,0742
29,00	0,5061	16,44	0,0087	0,9474	0,0250	3,63E-04	3,83E-04	16,92	0,0060	0,1614
29,50	0,5149	17,39	0,0087	1,0104	0,0582	8,08E-04	8,00E-04	17,90	0,0141	0,3268
30,00	0,5236	18,40	0,0087	1,0783	0,1270	1,69E-03	1,57E-03	18,94	0,0311	0,6148
30,50	0,5323	19,48	0,0087	1,1514	0,2606	3,33E-03	2,89E-03	20,06	0,0649	1,0727
31,00	0,5411	20,63	0,0087	1,2304	0,5024	6,16E-03	5,01E-03	21,25	0,1271	1,7303
31,50	0,5498	21,86	0,0087	1,3156	0,9095	1,07E-02	8,15E-03	22,52	0,2343	2,5705
32,00	0,5585	23,18	0,0087	1,4078	1,5471	1,75E-02	1,25E-02	23,88	0,4064	3,4984
32,50	0,5672	24,58	0,0087	1,5075	2,4720	2,70E-02	1,79E-02	25,34	0,6632	4,3282
33,00	0,5760	26,09	0,0087	1,6154	3,7106	3,90E-02	2,42E-02	26,90	1,0182	4,8123
33,50	0,5847	27,71	0,0087	1,7324	5,2325	5,31E-02	3,06E-02	28,57	1,4706	4,7210
34,00	0,5934	29,44	0,0087	1,8593	6,9317	6,79E-02	3,65E-02	30,37	1,9985	3,9576
34,50	0,6021	31,30	0,0087	1,9970	8,6263	8,16E-02	4,09E-02	32,30	2,5554	2,6593
35,00	0,6109	33,30	0,0087	2,1468	10,0850	9,23E-02	4,30E-02	34,37	3,0743	1,2202
35,50	0,6196	35,44	0,0087	2,3096	11,0761	9,82E-02	4,25E-02	36,60	3,4802	0,1944
36,00	0,6283	37,75	0,0087	2,4870	11,4277	9,82E-02	3,95E-02	39,00	3,7070	0,0965
36,50	0,6370	40,24	0,0087	2,6804	11,0763	9,23E-02	3,44E-02	41,58	3,7155	1,1800
37,00	0,6458	42,92	0,0087	2,8914	10,0854	8,16E-02	2,82E-02	44,37	3,5043	3,3034
37,50	0,6545	45,81	0,0087	3,1219	8,6269	6,79E-02	2,17E-02	47,37	3,1101	5,9573
38,00	0,6632	48,93	0,0087	3,3741	6,9322	5,31E-02	1,57E-02	50,62	2,5974	8,4479
38,50	0,6720	52,31	0,0087	3,6501	5,2331	3,90E-02	1,07E-02	54,13	2,0414	10,1507
39,00	0,6807	55,96	0,0087	3,9528	3,7111	2,70E-02	6,83E-03	57,93	1,5098	10,7157
39,50	0,6894	59,91	0,0087	4,2850	2,4723	1,75E-02	4,09E-03	62,05	1,0508	10,1429
40,00	0,6981	64,20	0,0087	4,6500	1,5473	1,07E-02	2,31E-03	66,52	0,6882	8,7174
40,50	0,7069	68,85	0,0087	5,0517	0,9097	6,16E-03	1,22E-03	71,37	0,4242	6,8600
41,00	0,7156	73,90	0,0087	5,4942	0,5025	3,33E-03	6,06E-04	76,64	0,2461	4,9716
41,50	0,7243	79,39	0,0087	5,9825	0,2607	1,69E-03	2,83E-04	82,38	0,1343	3,3323
42,00	0,7330	85,37	0,0087	6,5219	0,1271	8,08E-04	1,24E-04	88,63	0,0690	2,0722
42,50	0,7418	91,90	0,0087	7,1187	0,0582	3,63E-04	5,10E-05	95,45	0,0334	1,1985
43,00	0,7505	99,01	0,0087	7,7800	0,0250	1,53E-04	1,97E-05	102,90	0,0152	0,6459
43,50	0,7592	106,79	0,0087	8,5137	0,0101	6,09E-05	7,15E-06	111,05	0,0065	0,3249
44,00	0,7679	115,31	0,0087	9,3291	0,0038	2,27E-05	2,44E-06	119,97	0,0026	0,1527
44,50	0,7767	124,64	0,0087	10,2368	0,0014	7,98E-06	7,79E-07	129,76	0,0010	0,0672
45,00	0,7854	134,87	0,0087	11,2488	0,0005	2,63E-06	2,34E-07	140,50	0,0004	0,0277
45,50	0,7941	146,12	0,0087	12,3791	0,0001	8,16E-07	6,60E-08	152,31	0,0001	0,0107
46,00	0,8029	158,50	0,0087	13,6435	0,0000	2,38E-07	1,74E-08	165,32	0,0000	0,0039
46,50	0,8116	172,15	0,0087	15,0606	0,0000	6,53E-08	4,33E-09	179,68	0,0000	0,0013
47,00	0,8203	187,21	0,0087	16,6518	0,0000	1,68E-08	1,01E-09	195,53	0,0000	0,0004
47,50	0,8290	203,86	0,0087	18,4419	0,0000	4,07E-09	2,21E-10	213,08	0,0000	0,0001
48,00	0,8378	222,30	0,0087	20,4595	0,0000	9,27E-10	4,53E-11	232,53	0,0000	0,0000
48,50	0,8465	242,76	0,0087	22,7383	0,0000	1,65E-10	7,25E-12	254,13	0,0000	0,0000
49,00	0,8552	265,50								

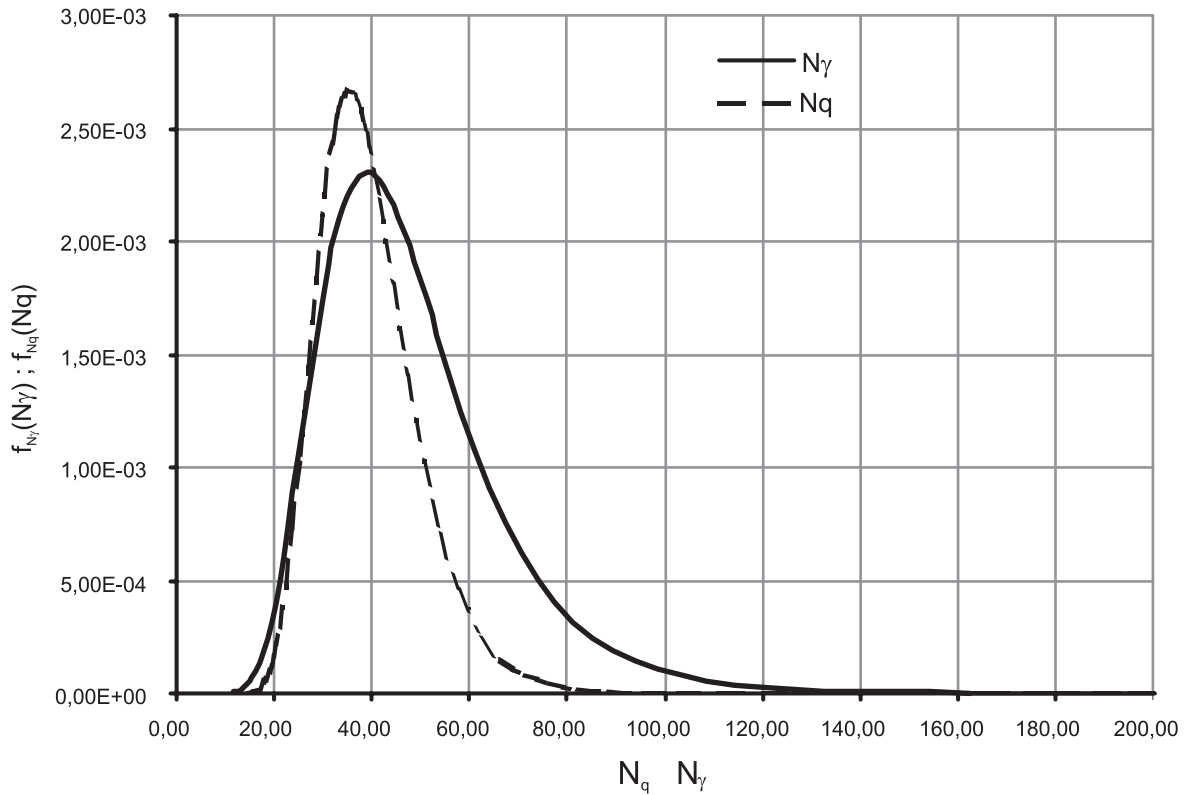
$\Sigma =$ **1,000**

38,00 **110,35**
Desv Est 10,50
CV 0,2764

Lámina 3.7

Funciones de Probabilidades para una Fundación Directa Sobre Arena e Índice de Confiabilidad

A) Distribución de Probabilidades de las variables N_γ y N_q



B) Representación Gráfica de β y de la Línea de Estado Límite

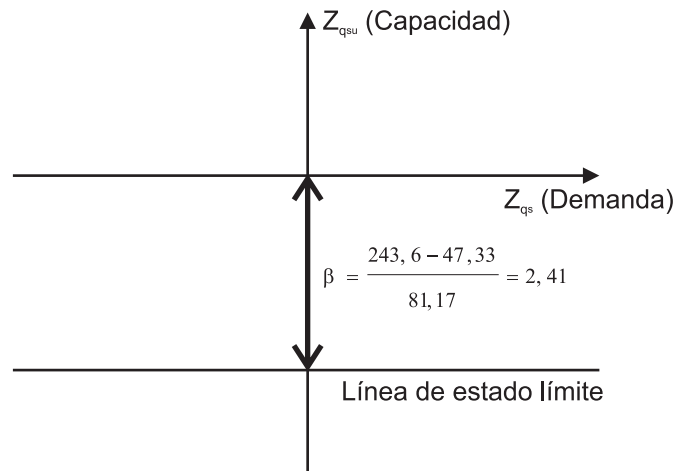


Lámina 3.7

$$q_{su} = 0,8 \times \frac{1}{2} \gamma B N_{\gamma} + \gamma d N_q$$

requiere del conocimiento del ancho, B, de la fundación⁵². Para el cálculo del ancho deberá procederse en forma determinista con el valor de q_{su} y los valores esperados de N_{γ} y N_q provenientes de las distribuciones de probabilidades calculadas en las láminas 3.5 y 3.6. Sabiendo que $q_{su} = 500 \times 5 / B^2$ la ecuación (3.15) puede particularizarse como⁵³:

$$q_{su} = \frac{500 \times 5}{B^2} = 0,8 \times \frac{1}{2} 1,8 \times B \times 45,64 + 1,8 \times 2,0 \times 38,00 \quad (3.16)$$

Despejando el valor de B de la ecuación anterior; $B = 3,21 \text{ m} \approx 3,25 \text{ m}$. Con lo cual $q_{su} = 243,6 \text{ T/m}^2 = 24,4 \text{ Kg/cm}^2$. Aplicando el factor de seguridad exigido de 5,00, la presión admisible en el terreno o presión de trabajo viene dada por $q_{sadm} = 24,4/5,0 = 4,87 \text{ Kg/cm}^2$.

3.4.6 Consideraciones acerca del asentamiento

La presión admisible de $4,87 \text{ Kg/cm}^2$, es sólo para satisfacer el requerimiento de un factor de seguridad igual o mayor de 5,00 respecto a la presión última de $24,4 \text{ Kg/cm}^2$. Habría que calcular el asentamiento de la fundación bajo esta presión admisible y decidir si el asentamiento resultante es tolerable o no por la estructura⁵⁴. En caso de no serlo, habría que disminuir la presión en el terreno mediante el aumento de las dimensiones de la fundación hasta lograr aquella presión que conduzca a un asentamiento tolerable. No es la intención de este capítulo continuar por esa vía sino, más bien, continuar con el aspecto probabilista de la carga última en la fundación. La metodología probabilista para el caso del asentamiento sería la misma que en cualquier otro problema y similar a la desarrollada hasta ahora:

- a) Elegir un método para el cálculo del asentamiento en material granular
- b) Decidir una distribución de probabilidades para las variables independientes que intervengan en el cálculo. En el caso de arenas, como no es posible

⁵² En el caso de fundaciones rectangulares la dimensión B se refiere al ancho o menor dimensión de la fundación. En el caso de fundaciones cuadradas es indiferente dado que ambas dimensiones son iguales.

⁵³ Obsérvese que 500 T es la carga de trabajo de la fundación, por lo tanto, si se exige un factor de seguridad de 5,0 la carga total última que debe estar en capacidad de soportar la fundación es de $500 \times 5 = 2500 \text{ T}$ y la presión última en el terreno, q_{su} , sería de $2500/B^2$

⁵⁴ En una arena densa los asentamientos normalmente son pequeños, pero deben calcularse de todos modos.

obtener muestras inalteradas del terreno, casi todos los métodos de cálculo son semiempíricos y se basan pruebas en sitio: ensayo de penetración estándar (SPT), cono estático y los más recientes en el presiómetro o en el dilatómetro.

- c) Calcular la distribución de probabilidades del asentamiento, o al menos sus parámetros más relevantes (valor esperado y desviación estándar) mediante la metodología desarrollada en el capítulo 2, o la que se presentará en el próximo capítulo para funciones de más de una variable aleatoria, y estimar el índice de confiabilidad o, de ser posible, la probabilidad de que el asentamiento real de la fundación sea superior al admisible. En caso de que esta probabilidad sea elevada se modificarían los parámetros necesarios y se efectuarían nuevos cálculos.

Aquí nuevamente surgirá y de manera más contundente, la influencia del método de cálculo tanto en los resultados deterministas como en los probabilistas. Por tratarse de métodos semiempíricos, la diferencia en el resultado del asentamiento obtenido por los distintos métodos existentes puede llegar a ser alarmante. Esto pone de manifiesto una vez más que, a menos que se conozca la precisión del método, los resultados del análisis probabilista están condicionados al método que se use, son relativos a él y no absolutos como sería de desear. En el caso de fundaciones sobre materiales granulares existe un trabajo que tiene el mérito de comparar la confiabilidad estadística de los métodos más usuales para el cálculo del asentamiento. Véase Tan y Duncan (1991).

En el próximo capítulo se desarrollará un ejemplo completo del cálculo probabilista de un asentamiento real.

3.4.7 Distribución de probabilidades de q_{su}

Una vez calculadas las distribuciones de probabilidades de N_γ y N_q , la variable aleatoria $q_{su} = 0,8 \times \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + \gamma d N_q$ se comporta como una función lineal del tipo $Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2$, específicamente: $A_0 = 0$; $A_1 = 0,4 \gamma B$; $A_2 = \gamma d$; $X_1 = N_\gamma$ y $X_2 = N_q$.

La particularidad en este caso proviene de que N_γ y N_q son variables aleatorias, pero no independientes. Por el contrario: al ser cada una de ellas funciones exclusivas del ángulo

de fricción interna ϕ , están en correspondencia biunívoca y por lo tanto su coeficiente de correlación es igual a la unidad: $\rho_{N_q, N_\gamma} = 1,00$.

En este contexto, la desviación estándar de q_{su} puede calcularse mediante la ecuación correspondiente del capítulo anterior (2.25), relativa a la desviación estándar de una función lineal, Y , de dos variables aleatorias, X_1 y X_2 :

$$\sigma^2[Y] = A_1^2 \sigma^2[X_1] + A_2^2 \sigma^2[X_2] + 2A_1A_2\sigma[X_1]\sigma[X_2]\rho[X_1X_2]$$

Cuando $\rho_{[X_1, X_2]} = 1,00$, la expresión anterior es un cuadrado perfecto y por lo tanto:

$$\sigma[Y] = A_1\sigma[X_1] + A_2\sigma[X_2] \quad (3.17)$$

En este caso:

$$\sigma[q_{su}] = 0,4\gamma B\sigma[N_\gamma] + \gamma d\sigma[N_q] = 0,4 \times 1,8 \times 3,25 \times 18,52 + 1,8 \times 2,0 \times 10,51 \quad (3.18)$$

$$\sigma[q_{su}] = 81,17 \frac{T}{m^2}$$

En cuanto al valor esperado, este ya fue calculado anteriormente y resultó ser de: $E[q_{su}] = 243,6 \text{ T/m}^2$. Para estos valores, el coeficiente de variación resulta de: $CV[q_{su}] = 81,17 / 243,6 = 0,333$.

Para calcular la probabilidad de falla debe conocerse la distribución probabilista de q_{su} . La probabilidad de falla, en este caso, viene expresada por la probabilidad de que la presión de trabajo, q_s , supere a la carga última, q_{su} . Es decir: $q_{su} \leq 47,33 \text{ T/m}^2$. Expresada como probabilidad: $P[q_{su} \leq 47,33 \text{ T/m}^2]$.

Dado que en este caso particular la carga es determinista y la resistencia última del suelo sólo depende de una variable, el cálculo de la probabilidad de falla puede simplificarse grandemente recurriendo a la ecuación (2.1) del capítulo anterior:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[x \leq g^{-1}(y)]$$

Particularizada a q_{su} , la ecuación anterior se convierte en:

$$F_{q_{su}}(47,33) = P[q_{su} \leq 47,33] = P[\phi \leq q_{su}^{-1}(47,33)] \quad (3.19)$$

Donde $q_{su}^{-1}(47,33)$ es el valor de ϕ para que $q_{su} = 47,33 \text{ T/m}^2$. Despejando el correspondiente valor de ϕ de la ecuación de la capacidad última (ecuación (3.15)) se obtiene: $\phi = 23,89^\circ$. Con este valor ya puede verse que la probabilidad de falla es inexistente porque no se conoce de ninguna arena densa que tenga un valor de ϕ tan bajo. De todas formas, como la distribución de ϕ se supuso normal, es fácil calcular la probabilidad matemática (no física) de que $\phi \leq 23,89^\circ$. $P[\phi \leq 23,89] = P[N(36;2) \leq 23,89] = 7,047 \times 10^{-10}$. Como se deduce del resultado esta probabilidad es prácticamente inexistente. Es obvio el papel que juega el factor de seguridad determinista de 5,00 empleado en este caso.

El índice de confiabilidad, β , para este problema puede calcularse en la forma habitual, según la ecuación: (3.5):

$$\beta = \frac{E[\mathcal{R}] - E[\mathcal{Q}]}{\sqrt{\sigma^2[\mathcal{R}] + \sigma^2[\mathcal{Q}]}}$$

Teniendo en cuenta que en este caso $\mathcal{Q}$ es una constante y por lo tanto $E[\mathcal{Q}] = 47,33 \text{ T/m}^2$ y $\sigma[\mathcal{Q}] = 0$, la ecuación se convierte en:

$$\beta = \frac{E[q_{su}] - 47,33}{\sqrt{\sigma^2[q_{su}] + 0}} = \frac{243,6 - 47,33}{\sqrt{81,17^2}} = 2,41 \quad (3.20)$$

En la figura B de la lámina 3.7 se muestra la representación gráfica de β y de la función de estado límite. Si se analiza la ecuación de la función de estado límite en variables reducidas (Ecuación (3.9))

$$Z_F = \frac{\sigma[E_a]}{\sigma[F]} Z_{E_a} - \frac{E[F] - E[E_a]}{\sigma[F]}$$

y se identifica Z_F con Z_{qsu} y Z_{Ea} con $Z_{qs} = \text{cte}$; $\sigma[\mathcal{R}] = 0$; se deduce que $Z_{qsu} = -\beta = -2,41$.

Por lo tanto la recta de estado límite es una línea horizontal que dista $-\beta$ del eje Z_{qs} .

Todo lo anterior ilustra la posibilidad de conocer los parámetros probabilistas de una variable sin que sea necesario conocer su distribución. Sin embargo, en este caso

tampoco es muy difícil ese conocimiento. En la lámina N° 3.8 se muestra el cálculo de la distribución de probabilidades de q_{su} y en la lámina N° 3.9 la representación gráfica de la fdp y FPA respectivamente calculadas en una sola etapa. Como era de esperar, los parámetros estadísticos son los mismos que los obtenidos en el cálculo por etapas.

Lámina 3.8

Cálculo de $f_{qsu}(q_{su})$ Suponiendo una Distribución Normal para ϕ

ϕ°	ϕ (rad)	q_{su}	$\Delta\phi$ (rad)	Δq_{su}	$f_\phi(\phi)$ N(0,628;0,035)	$\Delta Area_\phi$ = $\Delta Area_{qsu}$	$\Delta area_\phi / \Delta q_{su}$ $f_{qsu}(q_{su})$	q_{su} Promedio	$f_{qsu}(q_{su})$ Promedio	Varianza
28,00	0,4887	79,18	0,0087	5,2968	0,0038	6,09E-05	1,15E-05	81,82	0,0048	1,5940
28,50	0,4974	84,47	0,0087	5,6972	0,0101	1,53E-04	2,69E-05	87,32	0,0130	3,7464
29,00	0,5061	90,17	0,0087	6,1323	0,0250	3,63E-04	5,92E-05	93,24	0,0327	8,2124
29,50	0,5149	96,30	0,0087	6,6056	0,0582	8,08E-04	1,22E-04	99,60	0,0778	16,7673
30,00	0,5236	102,91	0,0087	7,1208	0,1270	1,69E-03	2,38E-04	106,47	0,1741	31,8316
30,50	0,5323	110,03	0,0087	7,6823	0,2606	3,33E-03	4,33E-04	113,87	0,3663	56,0680
31,00	0,5411	117,71	0,0087	8,2949	0,5024	6,16E-03	7,43E-04	121,86	0,7252	91,3712
31,50	0,5498	126,01	0,0087	8,9637	0,9095	1,07E-02	1,20E-03	130,49	1,3506	137,2473
32,00	0,5585	134,97	0,0087	9,6949	1,5471	1,75E-02	1,81E-03	139,82	2,3669	189,0398
32,50	0,5672	144,66	0,0087	10,4951	2,4720	2,70E-02	2,57E-03	149,91	3,9026	237,0053
33,00	0,5760	155,16	0,0087	11,3717	3,7106	3,90E-02	3,43E-03	160,84	6,0546	267,5141
33,50	0,5847	166,53	0,0087	12,3332	5,2325	5,31E-02	4,30E-03	172,70	8,8388	267,1468
34,00	0,5934	178,86	0,0087	13,3890	6,9317	6,79E-02	5,07E-03	185,56	12,1421	229,0287
34,50	0,6021	192,25	0,0087	14,5498	8,6263	8,16E-02	5,61E-03	199,53	15,6962	158,8895
35,00	0,6109	206,80	0,0087	15,8276	10,0850	9,23E-02	5,83E-03	214,72	19,0946	77,2581
35,50	0,6196	222,63	0,0087	17,2360	11,0761	9,82E-02	5,70E-03	231,25	21,8604	15,0848
36,00	0,6283	239,87	0,0087	18,7905	11,4277	9,82E-02	5,23E-03	249,26	23,5531	3,0999
36,50	0,6370	258,66	0,0087	20,5085	11,0763	9,23E-02	4,50E-03	268,91	23,8832	58,9542
37,00	0,6458	279,17	0,0087	22,4098	10,0854	8,16E-02	3,64E-03	290,37	22,7932	178,2727
37,50	0,6545	301,57	0,0087	24,5172	8,6269	6,79E-02	2,77E-03	313,83	20,4737	334,4740
38,00	0,6632	326,09	0,0087	26,8563	6,9322	5,31E-02	1,98E-03	339,52	17,3094	487,9496
38,50	0,6720	352,95	0,0087	29,4568	5,2331	3,90E-02	1,32E-03	367,68	13,7743	600,3987
39,00	0,6807	382,41	0,0087	32,3522	3,7111	2,70E-02	8,34E-04	398,58	10,3174	647,6895
39,50	0,6894	414,76	0,0087	35,5816	2,4723	1,75E-02	4,93E-04	432,55	7,2745	625,8866
40,00	0,6981	450,34	0,0087	39,1893	1,5473	1,07E-02	2,74E-04	469,93	4,8280	548,9881
40,50	0,7069	489,53	0,0087	43,2269	0,9097	6,16E-03	1,43E-04	511,14	3,0164	440,9126
41,00	0,7156	532,76	0,0087	47,7538	0,5025	3,33E-03	6,97E-05	556,63	1,7740	326,2100
41,50	0,7243	580,51	0,0087	52,8387	0,2607	1,69E-03	3,20E-05	606,93	0,9822	223,3097
42,00	0,7330	633,35	0,0087	58,5616	0,1271	8,08E-04	1,38E-05	662,63	0,5120	141,9118
42,50	0,7418	691,91	0,0087	65,0155	0,0582	3,63E-04	5,59E-06	724,42	0,2512	83,9341
43,00	0,7505	756,92	0,0087	72,3090	0,0250	1,53E-04	2,12E-06	793,08	0,1161	46,2962
43,50	0,7592	829,23	0,0087	80,5693	0,0101	6,09E-05	7,56E-07	869,52	0,0505	23,8534
44,00	0,7679	909,80	0,0087	89,9456	0,0038	2,27E-05	2,53E-07	954,78	0,0207	11,4958
44,50	0,7767	999,75	0,0087	100,6137	0,0014	7,98E-06	7,93E-08	1,050,06	0,0080	5,1881
45,00	0,7854	1,100,36	0,0087	112,7811	0,0005	2,63E-06	2,33E-08	1,156,75	0,0029	2,1947
45,50	0,7941	1,213,14	0,0087	126,6940	0,0001	8,16E-07	6,44E-09	1,276,49	0,0010	0,8710
46,00	0,8029	1,339,84	0,0087	142,6450	0,0000	2,38E-07	1,67E-09	1,411,16	0,0003	0,3245
46,50	0,8116	1,482,48	0,0087	160,9832	0,0000	6,53E-08	4,05E-10	1,562,97	0,0001	0,1136
47,00	0,8203	1,643,47	0,0087	182,1272	0,0000	1,68E-08	9,23E-11	1,734,53	0,0000	0,0374
47,50	0,8290	1,825,59	0,0087	206,5803	0,0000	4,07E-09	1,97E-11	1,928,88	0,0000	0,0116
48,00	0,8378	2,032,17	0,0087	234,9501	0,0000	9,27E-10	3,95E-12	2,149,65	0,0000	0,0034
48,50	0,8465	2,267,12	0,0087		0,0000	1,65E-10		1,611,46	0,0000	0,0003
49,00	0,8552	955,79								

$\Sigma=$

1,000

243,64

6.580,19

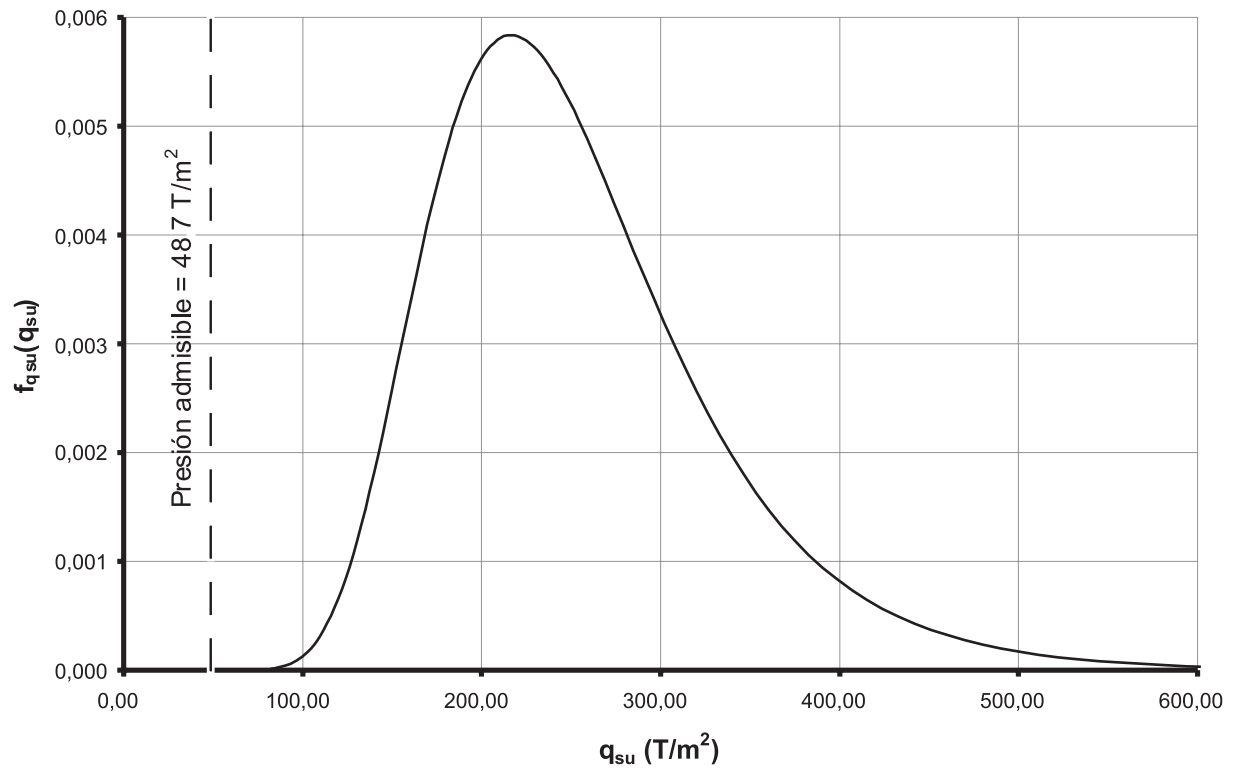
Desv Est
CV

81,12
0,33

Lámina 3.9

Función Distribución y Función de Probabilidad acumulada de q_{su}

A) Función Distribución de Probabilidades



B) Función de Probabilidad Acumulada

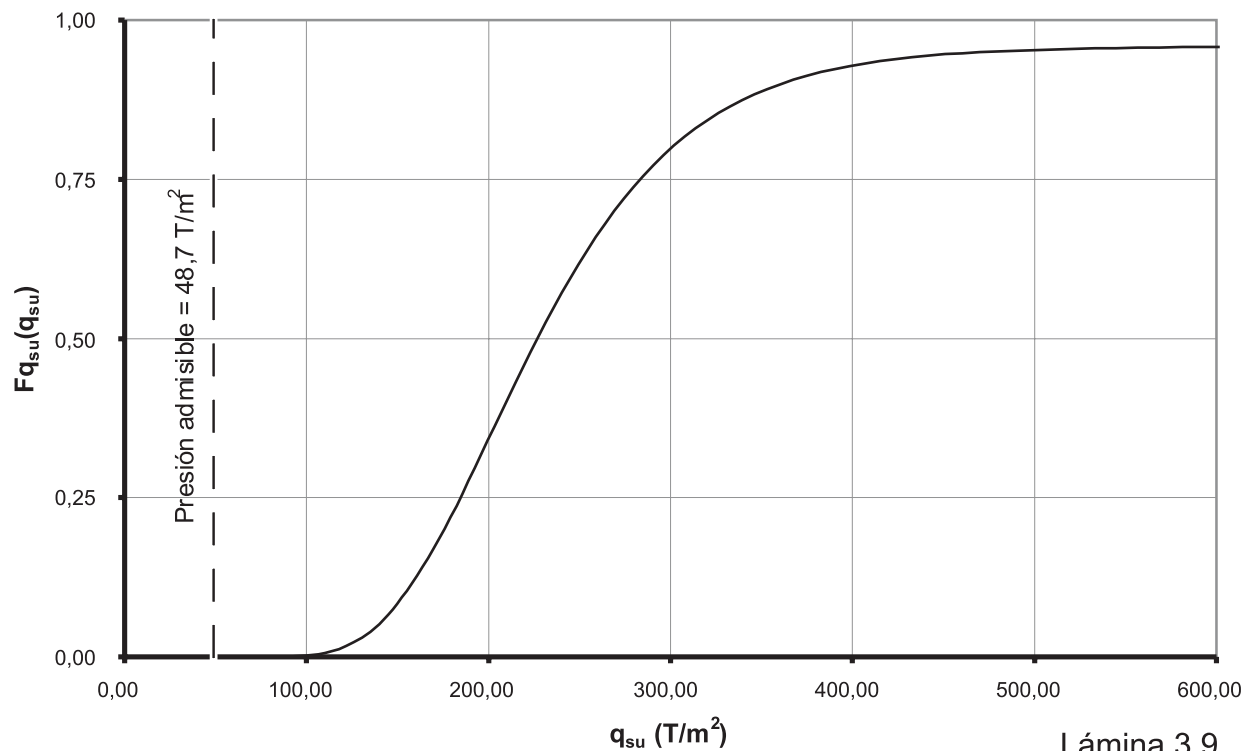


Lámina 3.9

Capítulo 4

Transformación de funciones con más de una variable aleatoria

4.1 Introducción

En el segundo capítulo de este trabajo se trató el tema de la transformación de funciones de una sola variable aleatoria. La idea era calcular la distribución de probabilidades de la variable dependiente conocida la distribución de probabilidades de la variable independiente.

En este capítulo se tratará el caso más general de una función de varias variables aleatorias.

Como ejemplo se estudiará el caso del asentamiento de un estrato de arcilla blanda bajo el peso de un terraplén. Los datos de este ejemplo provienen de un caso real bien documentado (Ladd, 1972b), cuyos datos y resultados fueron medidos con precisión. El caso fue estudiado originalmente mediante cálculos deterministas y por lo tanto presenta una interesante oportunidad de comparar los procedimientos determinista y probabilista.

4.2 Función Lineal de Variables Aleatorias

En cuanto a funciones de más de una variable aleatoria, el caso más simple es el referente a funciones lineales de n variables aleatorias. Este caso ya se ha tratado sucintamente en las ecuaciones (2.21) a (2.25) del capítulo 2. En general, si Y es una variable aleatoria del tipo:

$$Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_n X_n \quad (4.1)$$

Donde $X_1; X_2; \dots; X_n$ son variables aleatorias con distribuciones de probabilidades cualesquiera y $A_1; A_2; \dots; A_n$, son constantes, entonces el valor esperado de Y viene dado por:

$$E[Y] = A_0 + A_1 \cdot E[X_1] + A_2 \cdot E[X_2] + \dots + A_n \cdot E[X_n] \quad (4.2)$$

La ecuación anterior es fácil de deducir sabiendo que el valor esperado es una integral y que la integral es distributiva respecto a la suma y conmutativa respecto a las constantes.

La desviación estándar para este caso ya se planteó en el aparte 2.2.7 del capítulo 2 (ecuación (2.23)):

$$\sigma^2[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_i A_j \sigma[X_i] \sigma[X_j] \rho[X_i X_j] \quad (4.3)$$

Los casos hasta ahora estudiados del muro sometido a las fuerzas F y R (capítulo 2), así como el de la capacidad última de una fundación cuadrada (capítulo 3) son ejemplos simples del uso de las fórmulas anteriores, como se indicó en su momento. A continuación se tratará el caso más general donde la relación entre la variable dependiente y las independientes no es lineal

4.3 Método del Primer Orden Segundo Momento

Este método debe su nombre a la aplicación del desarrollo de una función en series de Taylor, truncándola a partir de los términos lineales (primer orden), con el fin de calcular el valor esperado y la varianza de la función (segundo momento de la distribución de probabilidades, ver capítulo 1).

Como introducción al método, considérese en primer lugar el caso de una función aleatoria de dos variables: $F(X, Y)$. Esta función puede aproximarse a una función lineal mediante la expresión:

$$F(X, Y) = F(X_0, Y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0} (X - X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial Y} \right|_{Y_0} (Y - Y_0) \quad (4.4)$$

Donde X_0, Y_0 es un punto elegido de la función sobre el cual se evalúan también las derivadas. Una vez evaluados todos los valores en X_0 e Y_0 se obtiene una función lineal del tipo $F(X, Y) = A_0 + A_1 X + A_2 Y$

Sobre esta aproximación a la función pueden aplicarse ahora las reglas para funciones lineales, ecuaciones (4.2) y (4.3). Escogiendo $X_0 = E[X]$ e $Y_0 = E[Y]$ se tiene⁵⁵:

$$E[F(X, Y)] = F(E[X], E[Y]) \quad (4.5)$$

$$\sigma^2[F] = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{E[X]E[Y]}^2 V[X] + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_{E[X]E[Y]}^2 V[Y] + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{E[X]} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)_{E[Y]} \sigma[X] \sigma[Y] \rho_{X,Y}[X, Y] \quad (4.6)$$

Donde el subíndice $E[X]$ o $E[Y]$ indica que la derivada debe ser evaluada en ese valor. Si X e Y son variables independientes sólo existen los dos primeros términos de la ecuación anterior, dado que $\rho_{XY}[X, Y] = 0$.

Las ecuaciones generalizadas para más de dos variables son:

$$E[Y] = F(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n]) \quad (4.7)$$

$$\sigma^2[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial X_i} \right|_{E[X_i]} \left. \frac{\partial F}{\partial X_j} \right|_{E[X_j]} \sigma[X_i] \sigma[X_j] \rho_{X,Y}[X_i X_j]$$

Si las variables X_i de la ecuación anterior son estadísticamente independientes entonces la varianza viene dada por la expresión más simple:

$$\sigma^2[F] = \sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial F}{\partial X_i} \right|_{E[X_i]} \right)^2 \cdot \sigma^2[X_i] \quad (4.8)$$

De esta forma pueden conocerse el valor esperado y la desviación estándar de una función aleatoria no lineal de varias variables. Debe recalcarse lo aproximado del método como consecuencia de la aproximación realizada para transformar la función F en una función lineal.

Existen otros métodos con este mismo propósito. Uno de ellos, denominado método de Monte Carlo se describirá y utilizará más adelante⁵⁶.

⁵⁵ Nótese que las derivadas parciales hacen el papel de los coeficientes. Así pues al ser evaluadas en los valores correspondientes al valor esperado se convierten en constantes.

⁵⁶ Otro método reconocido es el denominado “Point estimate method” en Inglés. El método es debido a Rosembueht y su aplicación es sencilla cuando la distribución de las variables es simétrica. Este método no

4.4 Caso de asentamiento sobre arcilla Blanda

4.4.1 Teoría General

Como aplicación de la utilización del método de primer orden segundo momento se desarrollará un ejemplo basado en un caso real de asentamiento. A continuación se presentará una breve introducción a la teoría de asentamientos con el fin de establecer los criterios y la metodología a seguir, tal como se hizo en el caso de la fundación superficial cuadrada del capítulo anterior.

El cálculo de asentamientos es uno de los dos tipos de cálculos más importantes en geotecnia, el otro tipo lo constituyen los cálculos de estabilidad (Lambe,1964).Para la mayoría de los autores el la publicación de la teoría de la consolidación por Terzaghi en 1925, directamente relacionada con el asentamiento en arcillas blandas, marca el comienzo de la mecánica de suelos moderna.

La teoría de la consolidación permite el cálculo del componente del asentamiento denominado asentamiento por consolidación, el cual constituye uno de los dos componentes del asentamiento total en arcillas. El otro componente es el llamado asentamiento elástico.

El asentamiento por consolidación (Terzaghi, 1943) es propio de los suelos finos saturados, ocurre gradualmente en el tiempo y es consecuencia de la disminución del volumen de huecos o vacíos en el suelo cuando se expulsa el agua de su interior a medida que el incremento de esfuerzos totales es transferido de la fase de poros al esqueleto mineral. Esta transferencia es lenta porque el movimiento del agua en el interior del suelo es también lento como consecuencia de la baja permeabilidad de los suelos finos.

El asentamiento elástico, también denominado asentamiento inmediato, es consecuencia de la deformación del terreno bajo el efecto de la aplicación de la carga en la superficie a masa constante, es decir, antes de que comience la expulsión de agua. Se denomina así porque se calcula mediante la teoría elástica, al igual que cualquier otra

se utilizará aquí. Harr (1960), Nowac (2000) y Christian (1992), entre otros, contienen la descripción de este método.

deformación en un sólido que pueda considerarse elástico. En el caso de los suelos debe usarse el módulo de elasticidad no drenado en los cálculos del asentamiento inmediato.

Cada uno de estos dos componentes del asentamiento se calcula por separado y posteriormente se suman. Existe un tercer tipo de asentamiento, el asentamiento secundario, propio de suelos muy plásticos u orgánicos, que ocurre, en teoría, a esfuerzo efectivo constante, una vez finalizado el asentamiento por consolidación.

Cuando la extensión de la carga en la superficie del terreno es grande o al menos comparable con el espesor del estrato compresible, las deformaciones laterales de los elementos ubicados cercanos al centro de la carga son pequeñas en este estrato. El estado de esfuerzos y deformaciones en esta zona del terreno es similar al de la prueba edométrica (Craig, 1978). Bajo estas condiciones, el asentamiento inmediato es despreciable respecto al asentamiento por consolidación y éste es el único que se calcula. Tal es el caso del terraplén que se presentará en este capítulo. Por esta razón, la teoría a continuación se refiere sólo al asentamiento por consolidación. Las dos referencias antes citadas (Craig, 1968; Lambe 1964) al igual que cualquier texto reconocido de mecánica de suelos (entre ellos Terzaghi y coautores, 1996; Lambe y Whitman, 1972) contienen excelentes desarrollos de la teoría general de asentamientos. Un gran avance en esta teoría es debido a la introducción del concepto de parámetros de presión de poros por A.W. Skempton, en 1954.

4.4.2 Asentamiento por consolidación, unidimensional o edométrico.

El asentamiento por consolidación se calcula estableciendo un paralelismo con el ensayo de consolidación unidimensional⁵⁷, a través de ciertos parámetros obtenidos en este ensayo. En el ensayo de consolidación unidimensional se coloca una muestra del terreno en un anillo de paredes rígidas y de dos pulgadas de diámetro por una de altura, como mínimo. Este anillo rígido impide las deformaciones laterales de la muestra cuando se aplican cargas verticales (procedimiento ASTM D 2435-96) y por lo tanto la única deformación en la muestra es vertical. Mediante este ensayo se puede estimar la duración del proceso de consolidación en el terreno a través del coeficiente de consolidación, C_v (Terzaghi, 1943), así como la magnitud de del asentamiento utilizando parámetros extraídos del ensayo. Estos

⁵⁷ También conocido como consolidómetro o edómetro.

parámetros, conceptualmente similares entre sí, pueden ser expresados en formas diferentes dependiendo del método de cálculo del asentamiento que se desee utilizar. Un resumen bastante completo de estos parámetros puede verse en la tabla 12.2 de Lambe y Whitman (1970)

En la lámina N° 4.1 se presenta un ejemplo de una curva típica esfuerzo-deformación unidimensional⁵⁸ obtenida mediante este ensayo. En ella se relaciona la deformación vertical, ε_z , o la relación de vacíos, e , de la muestra (eje vertical) con el logaritmo del esfuerzo efectivo vertical σ'_v aplicado⁵⁹ (eje horizontal).

La curva obtenida en la prueba edométrica no suele usarse directamente para estimar los parámetros antedichos debido a la alteración que sufre la muestra durante su extracción del terreno. Por lo tanto, es necesario manipular la curva de laboratorio con el fin de obtener la que se supone que será la curva del comportamiento esperado de campo (Schmertmann, 1955).

El método más común para el cálculo del asentamiento unidimensional y que se usará aquí, requiere de la obtención de tres valores:

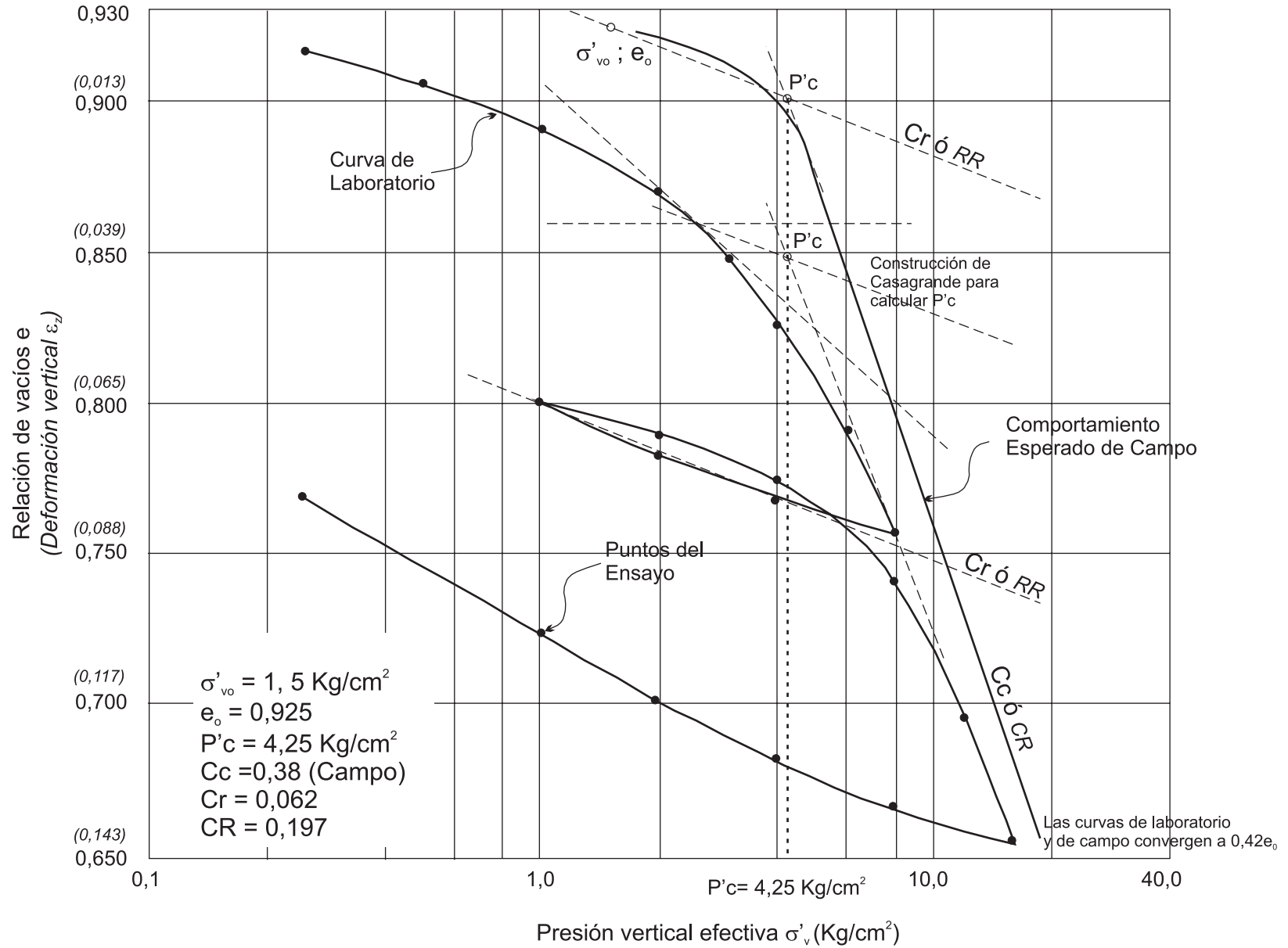
- 1) Presión crítica. P'_c Es la presión vertical para la cual la compresibilidad de la muestra cambia drásticamente, separando la denominada rama sobre consolidada de la normalmente consolidada. El procedimiento básico para encontrar este valor (opacado por la alteración de la muestra) es la construcción de Casagrande que data de 1936 y puede encontrarse en cualquier texto reconocido de mecánica de suelos (véase Lambe Fig. 20.6). Existen ajustes, que pueden ser usados o no, como ayuda a este procedimiento (Schmertmann, 1955).
- 2) Índice de compresibilidad C_c e índice de recompresión C_r . Estos índices corresponden a las pendientes de las ramas de compresión (virgen) y de recompresión respectivamente (ver lámina 4.1). La forma más fácil de

⁵⁸ Los datos provienen de una prueba edométrica de la arcilla azul de Boston y la curva proviene de ejercicios de clase del autor de este trabajo.

⁵⁹ El uso de escala logarítmica en lugar de la escala natural es una forma usual porque así la curva se asemeja más a segmentos de recta, pero también puede presentarse en escala natural.

Lámina 4.1

Ejemplo de Curva Edométrica



calcularlos es midiendo la disminución en la relación de vacíos por ciclo de papel logarítmico en la rama correspondiente de la curva edométrica.

- 3) Relación de compresión CR y relación de recompresión RR. Conceptualmente son lo mismo que C_c y C_r , sólo que son las pendientes de las ramas de la curva esfuerzo-deformación unidimensional referida a la deformación vertical, ε_z , en lugar de la relación de vacíos, e . CR y RR corresponden al cambio en la deformación vertical por ciclo del papel logarítmico.

El paso de C_c a CR y de C_r a RR es sencillo si se tiene en cuenta que en la deformación unidimensional vertical se verifica la relación:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_z = \frac{\Delta e}{1 + e_0} \quad (4.9)$$

Donde ΔV es el cambio de volumen, V_0 el volumen inicial de la muestra Δe el cambio en la relación de vacíos y e_0 la relación de vacíos inicial de la muestra. Dado que:

$$C_c = \frac{\Delta e}{\Delta \log(\sigma'_v)} \quad (4.10)$$

y

$$CR = \frac{\Delta \varepsilon_z}{\Delta \log(\sigma'_v)} \quad (4.11)$$

Se deduce, a partir de la ecuación (4.9), que:

$$CR = \frac{C_c}{1 + e_0} \quad (4.12)$$

El mismo procedimiento puede aplicarse en la rama sobre consolidada de la curva esfuerzo-deformación unidimensional, para demostrar que:

$$RR = \frac{C_r}{1 + e_0} \quad (4.13)$$

Por lo tanto, si se supone que estos coeficientes regirán en el terreno para un incremento entre los esfuerzos efectivos final, σ'_{vf} , e inicial, σ'_{v0} : $\Delta\sigma'_v = \sigma'_{vf} - \sigma'_{v0}$, el cambio en la relación de vacíos vendrá dado por⁶⁰:

$$\begin{aligned}\Delta e &= C_r \times \log(\Delta\sigma'_v) \quad \text{si } \sigma'_{vf} < P'_c \\ \Delta e &= C_c \times \log(\Delta\sigma'_v) \quad \text{si } \sigma'_{v0} \geq P'_c \\ \Delta e &= C_r \times \log \frac{P'_c}{\sigma'_{v0}} + C_c \times \log \frac{\sigma'_{vf}}{P'_c} \quad \text{si } \sigma'_{v0} \leq P'_c \text{ y } \sigma'_{vf} > P'_c\end{aligned}\tag{4.14}$$

Si se desea calcular $\Delta\epsilon_z$ en lugar de Δe , las expresiones son las mismas sólo que habría que usar CR y RR en lugar de C_c y C_r .

4.4.3 Procedimiento de Cálculo del Asentamiento por Consolidación.

La expresión formal para el cálculo del asentamiento, aplicada al asentamiento por consolidación, es:

$$\rho_c = \int_0^\infty \epsilon_{zc}(z) \cdot dz\tag{4.15}$$

Donde $\epsilon_{zc}(z)$ es la función deformación vertical debida a la consolidación. Esta función es casi imposible de obtener por múltiples razones, especialmente por que es muy difícil encontrar la función de la variación de los parámetros esfuerzo deformación con la profundidad. En consecuencia, cuando el cálculo se basa en la prueba edométrica, el terreno se divide convenientemente en n estratos o capas ideales, de condiciones similares, y de espesor ΔH_i . Así, la expresión (4.15) se aproxima mediante:

$$\rho = \sum \Delta\rho = \sum_{i=1}^n \Delta H_i \cdot (\Delta\epsilon_z)_i\tag{4.16}$$

Donde $\Delta\rho$ es la contribución de cada capa al asentamiento total y ϵ_{zi} se calcula mediante las ecuaciones (4.14) de acuerdo a las condiciones particulares de cada capa.

⁶⁰ Nótese que, en virtud de que el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos, $\log(\Delta\sigma'_v) = \log(\sigma'_{vf}/\sigma'_{v0}) = \log(\sigma'_{vf}) - \log(\sigma'_{v0})$

En la lámina 4.2 se presenta una síntesis del método para un terreno cuya parte superior ha sido sobre consolidado por desecación. La desecación de la parte superior de un terreno arcilloso es una de las causas más comunes de sobre consolidación (otras causas son erosión, remoción de estructuras anteriores, variaciones del nivel freático, glaciación, etc.). En la figura superior de la lámina se presenta el terreno dividido en capas elegidas de tal forma que para cada una de ellas solamente aplica una de las tres condiciones establecidas en las ecuaciones (4.14). La curva de σ'_{vf} en la lámina puede provenir de una carga aplicada en la superficie del terreno.

En la figura inferior de la misma lámina 4.2 se presenta la interpretación geométrica de las ecuaciones (4.14) a partir de la curva de campo obtenida a partir ensayo edométrico.

4.5 Cálculo del asentamiento por métodos probabilistas

4.5.1 Descripción del caso

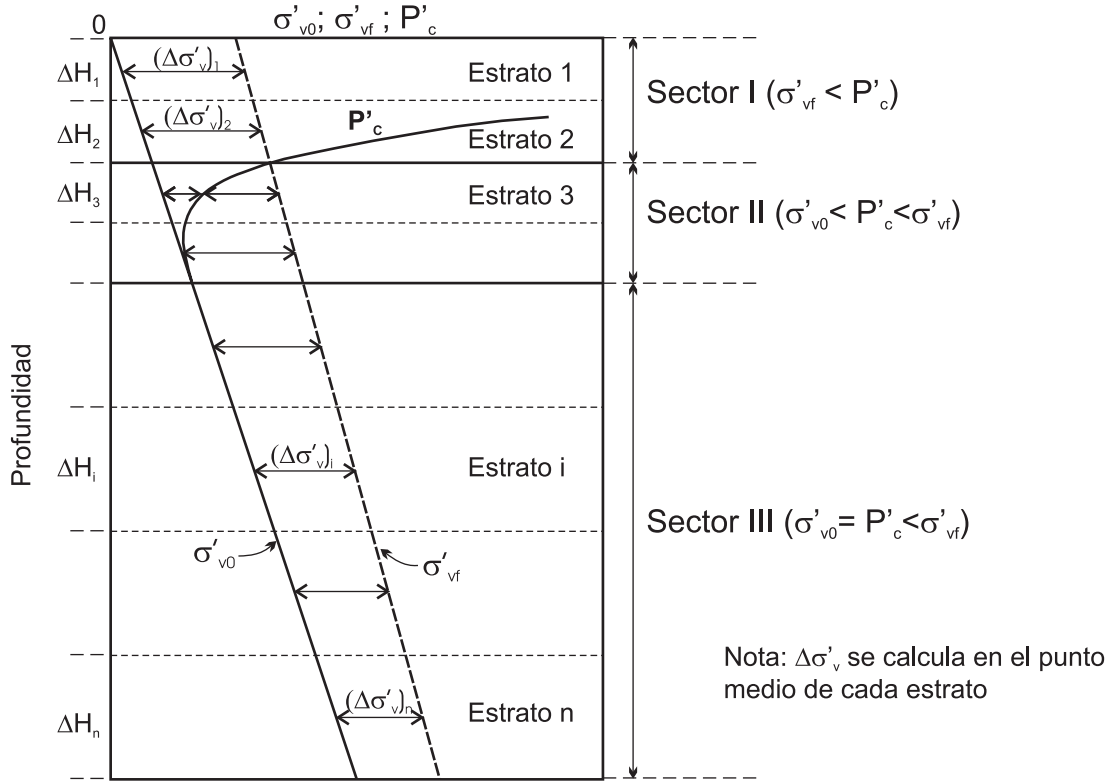
El asentamiento que por vía probabilista se calculará en este capítulo, se refiere al de un estrato arcilloso, bajo el peso del terraplén de un distribuidor de tránsito en la ciudad de Portsmouth, estado de New Hampshire, en el noreste de los Estados Unidos. La arcilla es blanda, sensible y sobre consolidada por desecación en su superficie.

Los datos del terreno están tomados de tres artículos de C.C. Ladd en: Ladd (1972a), “Test Embankment on Sensitive Clay”, Ladd y coautores (1972b): “Performance of Embankment with Sand Drains on Sensitive Clay” y Simon, Christian y Ladd (1974): “Analysis of Undrained Behavior of Loads on Clay”.

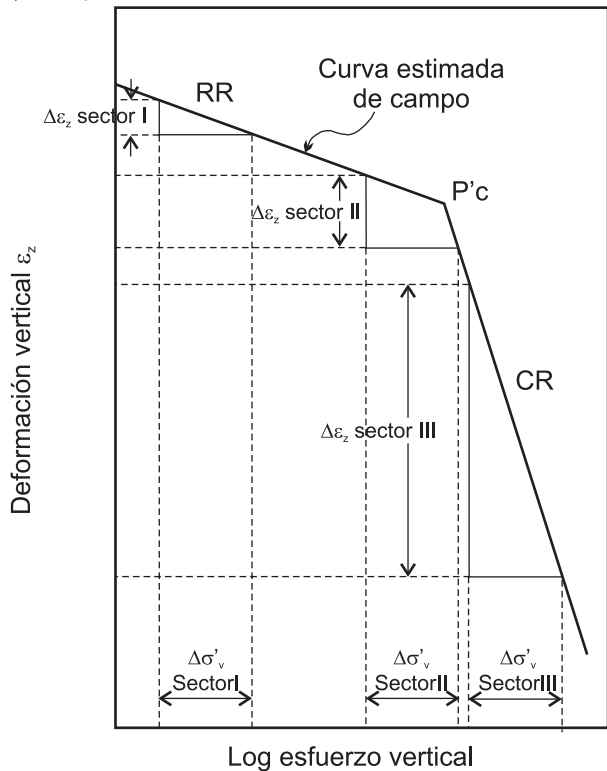
En la figura A de la lámina 4.3 se presentan las características pertinentes a la compresibilidad del terreno en cuestión. Estas características provienen de pruebas edométricas realizadas en muestras obtenidas a distintas profundidades. En 1972, durante la construcción del distribuidor de tránsito, se hicieron estudios a escala natural del comportamiento de los terraplenes. Las dos primeras referencias citadas contienen toda la información correspondiente.

Cálculo del Asentamiento por Consolidación

A) Idealización del terreno para el cálculo



B) Interpretación Geométrica de la Curva Edométrica



Secuencia de Cálculo:

$$\Delta\varepsilon_z = RR \times \log(\Delta\sigma'_v) \quad \text{Sector I}$$

$$\Delta\varepsilon_z = CR \times \log \frac{P'_c}{\sigma'_{v0}} + RR \times \log \frac{\sigma'_{vf}}{P'_c} \quad \text{Sector II}$$

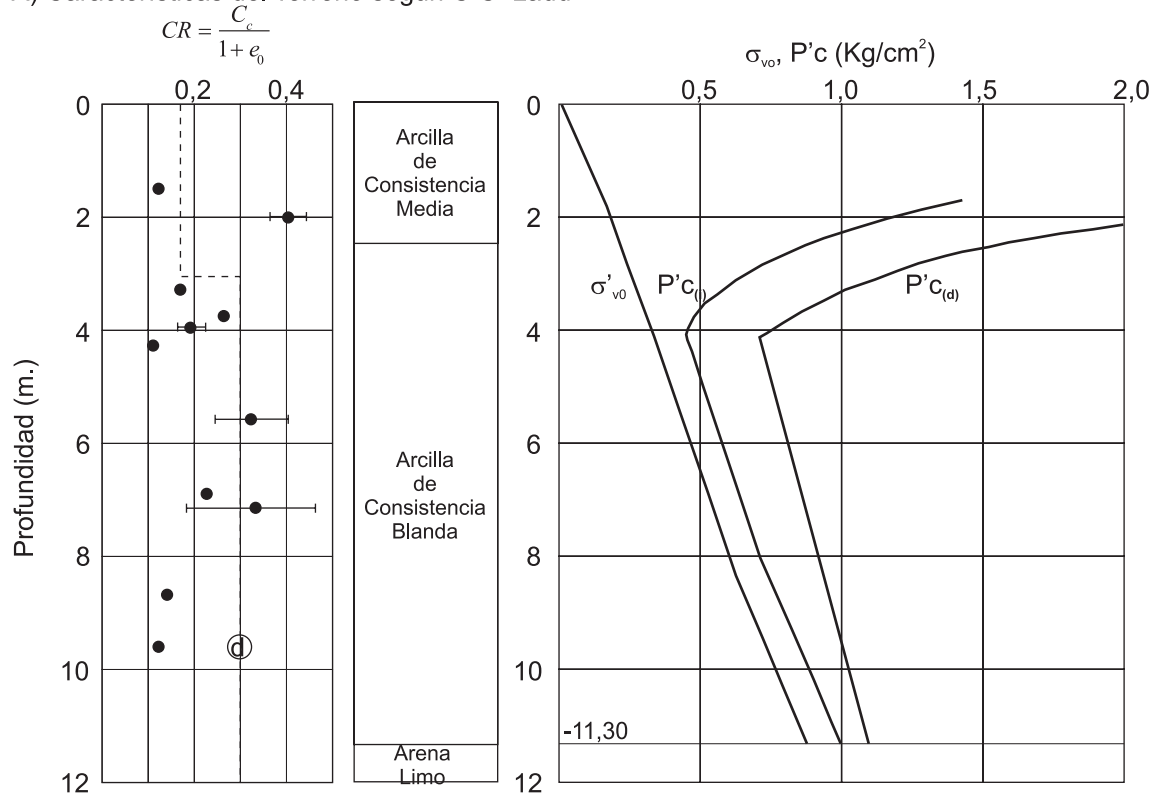
$$\Delta\varepsilon_z = CR \times \log(\Delta\sigma'_v) \quad \text{Sector III}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^n \Delta\rho = \sum_{i=1}^n \Delta H_i \times (\Delta\varepsilon_z)_i$$

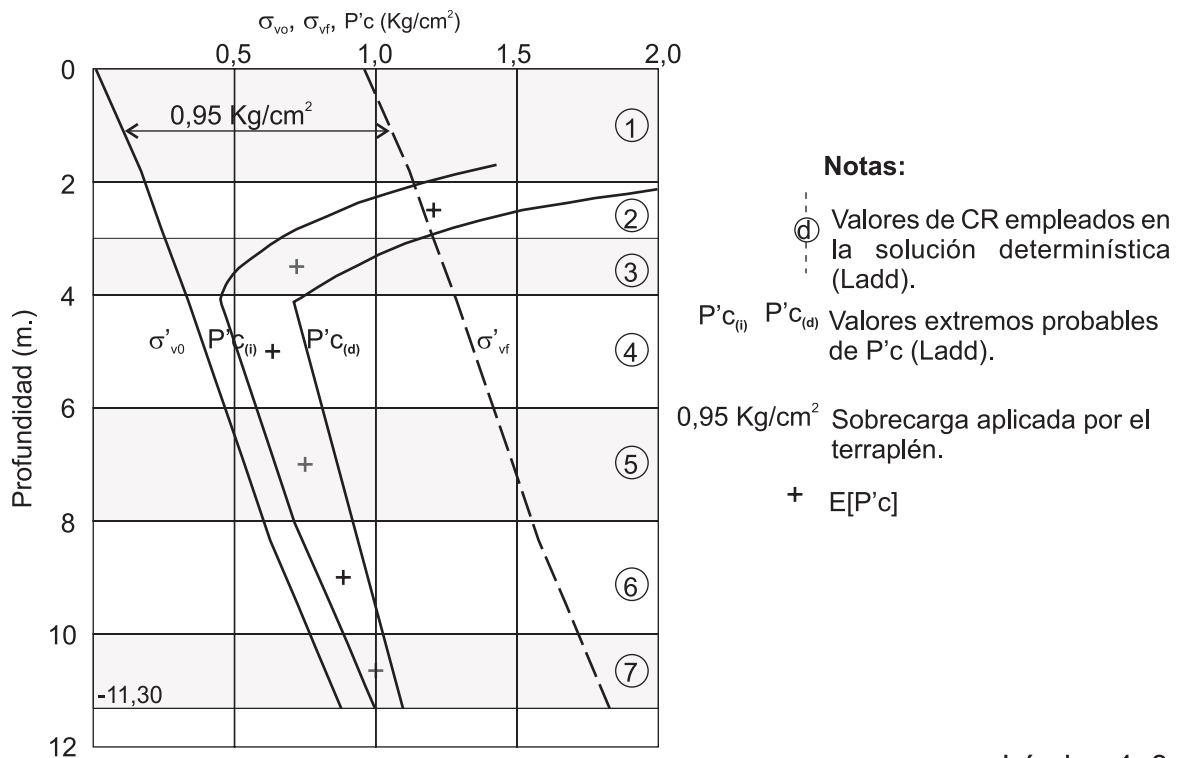
Lámina 4.3

Ruta Interestatal I-95 Portsmouth, New Hampshire

A) Características del Terreno según C.C. Ladd



B) Idealización del Terreno para el Cálculo del Asentamiento



Como se desprende de la lámina 4.3 el estrato compresible es de 11,30 m. de espesor. Este espesor es muy inferior a la extensión en planta del distribuidor y en consecuencia puede aplicarse la teoría unidimensional para el cálculo del asentamiento. En la figura se muestran los valores de la relación de compresión y las curvas que delimitan el rango de la presión crítica.

La línea punteada de la gráfica superior izquierda de lámina 4.3, indica los valores de la relación de compresibilidad, CR, que se adoptaron en el cálculo determinista original (Ladd, 1972b). Los valores que se usaron en dicho cálculo para la presión crítica pueden encontrarse en las referencias indicadas y no se muestran aquí.

En los trabajos originales (Ladd, 1972 a y b) se deseaba estudiar el efecto en la reducción del tiempo de consolidación en relación con el espaciamiento en la colocación de drenes verticales de arena. Por esta razón, se midieron tiempos y magnitudes del asentamiento en varias zonas experimentales con distintos espaciamientos entre los drenes. Como esta situación no es la que quiere estudiar aquí y los drenes verticales pueden alterar la compresibilidad del terreno, se utilizará, como elemento de comparación con los cálculos del presente trabajo, la estación C-6 del trabajo original (Ladd, 1972b), donde no se colocaron drenes. En esta estación, la altura del terraplén fue de 4,88 m. (16 pies), equivalente a una carga sobre el terreno de aproximadamente $0,95 \text{ Kg/cm}^2$. El asentamiento calculado por el método determinista para esta estación fue de 64,00 cm mientras que el asentamiento real ocurrido fue de 90,00 cm (Ladd, 1972b)

4.5.2 Determinación de los parámetros a utilizar en el método probabilista

Tanto en el método determinista como en el probabilista, el criterio del ingeniero es insustituible en la elección de los parámetros a utilizar en los cálculos. Este criterio tiene su fundamento, obviamente, en la experiencia, pero también y con igual importancia, en el seguimiento que el ingeniero haya hecho del proyecto desde sus comienzos. Si el ingeniero visitó el sitio varias veces; estudió su geología y eligió el lugar de las perforaciones; revisó cuidadosamente todas las muestras que se obtuvieron y decidió los ensayos que habrían de hacerse; se encuentra en una posición de incomparable ventaja a la hora de definir los parámetros de cálculo respecto a quien no haya procedido así.

En este caso, el autor del presente trabajo no tuvo esa oportunidad y, por lo tanto, se atenderá a métodos convencionales para la determinación de los parámetros requeridos.

En la elección de los parámetros a usar en el método probabilista se seguirán los siguientes criterios.

- 1) Se supondrán como únicas variables aleatorias los valores de la relación de compresión, CR, y de la presión crítica, P'c. Estas variables se supondrán normalmente distribuidas.
- 2) En el caso de CR, se demostrará que no existe correlación de sus valores con la profundidad y su distribución de probabilidades se ajustará a la mejor distribución normal posible mediante el uso del papel de probabilidades.
- 3) En cuanto a P'c, se supondrá una distribución normal con el 95 % de sus valores dentro del rango establecido por Ladd (1972b) (lámina 4.3). De acuerdo a las propiedades de la distribución normal, ello significa que el valor esperado de P'c es el valor correspondiente a la mitad del intervalo en cada profundidad y que la desviación estándar es igual la cuarta parte de la longitud del intervalo⁶¹. Así por ejemplo, a la profundidad de 7,0 m. el rango de P'c está limitado⁶² por los valores P'c(i) = 0,64; P'c(d) = 0,86, por lo tanto, de acuerdo a lo anterior, los parámetros de la distribución normal de P'c para esta profundidad serán: $E[P'c] = (0,64 + 0,86) / 2 = 0,75 \text{ Kg/cm}^2$ y $\sigma[P'c] = (0,86 - 0,64) / 4 = 0,055 \approx 0,06 \text{ Kg/cm}^2$.
- 4) La relación de recompresión, RR, se tomará como una variable determinista, pues en los artículos originales (Ladd, 1972b) se utiliza el mismo valor $RR = 0,014$ en todas las profundidades lo cual parece indicar que su variación en los ensayos fue pequeña.

En la parte inferior de la lámina 4.3 se muestra la división del terreno en las capas o estratos ideales que serán utilizados para el cálculo de los asentamientos parciales

⁶¹ Recuérdese que en una distribución normal el intervalo $\pm 2\sigma$, respecto al valor esperado, contiene el 95,4 % de los valores de la variable aleatoria.

⁶² Los índices (i) y (d) significan extremo izquierdo y extremo derecho del rango.

(incrementos del asentamiento) $\Delta\rho$. La figura superior derecha de la lámina 4.3 se refiere a los valores de la relación de compresión. En ella se muestran los valores de CR a distintas profundidades. En la figura superior de la lámina 4.4 se muestra la relación de los valores de CR con la profundidad y la regresión lineal que mejor relaciona ambas variables. A simple vista se observa que la correlación con la profundidad es muy deficiente. El cuadrado del coeficiente de correlación muestral, R^2 , es 0,04.

En una regresión lineal el cuadrado del coeficiente de correlación muestral puede interpretarse como aquella parte del cambio de la variable a predecir que es atribuible a los cambios en la variable independiente (Crow,1960; Spiegel,1975). En este caso, sólo el 4% de la variación de CR se explicaría por la profundidad. Por lo tanto, dado que la metodología del problema implica utilizar la profundidad como la variable de cálculo, se supondrán valores aleatorios para CR, agrupados según una distribución normal sin ninguna relación con la profundidad.

En la figura inferior de la lámina 4.4 se muestran los valores de CR graficados en papel de probabilidades. En el papel de probabilidades correspondiente a una distribución normal, la escala vertical ha sido deformada de tal forma que cualquier variable aleatoria de distribución normal grafica como una línea recta⁶³. Al igual que el papel logarítmico, el papel de probabilidades antiguamente venía impreso, pero actualmente puede generarse con el computador (ver, por ejemplo, Berk, 2000). Si a un conjunto de valores graficados en papel de probabilidades se le ajusta, por mínimos cuadrados, una línea recta, se podrá encontrar la distribución de probabilidades que mejor representaría ese conjunto de valores. En este caso, la recta de la figura B de la lámina N° 4.4 representa la distribución normal que mejor se ajusta a los valores de CR. El cuadrado del coeficiente de correlación muestral, R^2 , en este caso es 0,9281. La correlación no es excelente, pero tampoco es demasiado mala. Si se supone una distribución lognormal para los valores de CR la correlación sería algo mejor, pero no lo suficiente para justificar mayores complicaciones en el tratamiento de este caso.

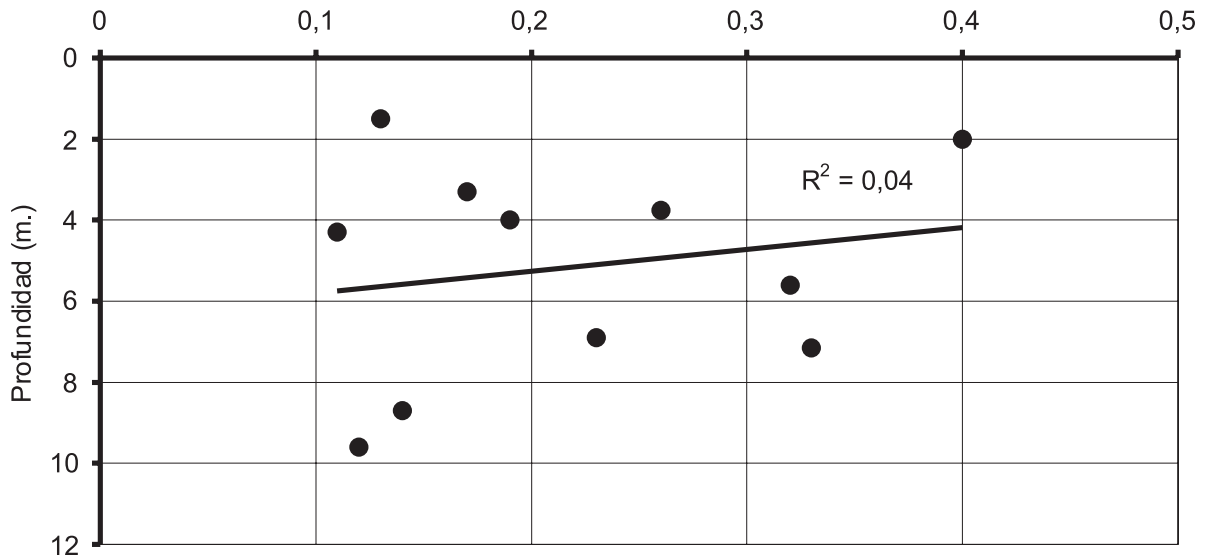
A partir de la regresión lineal en el papel de probabilidades se pueden obtener los parámetros de la distribución normal. El valor esperado de esta distribución es aquel que

⁶³ Cada distribución probabilística tiene su propio papel de probabilidades.

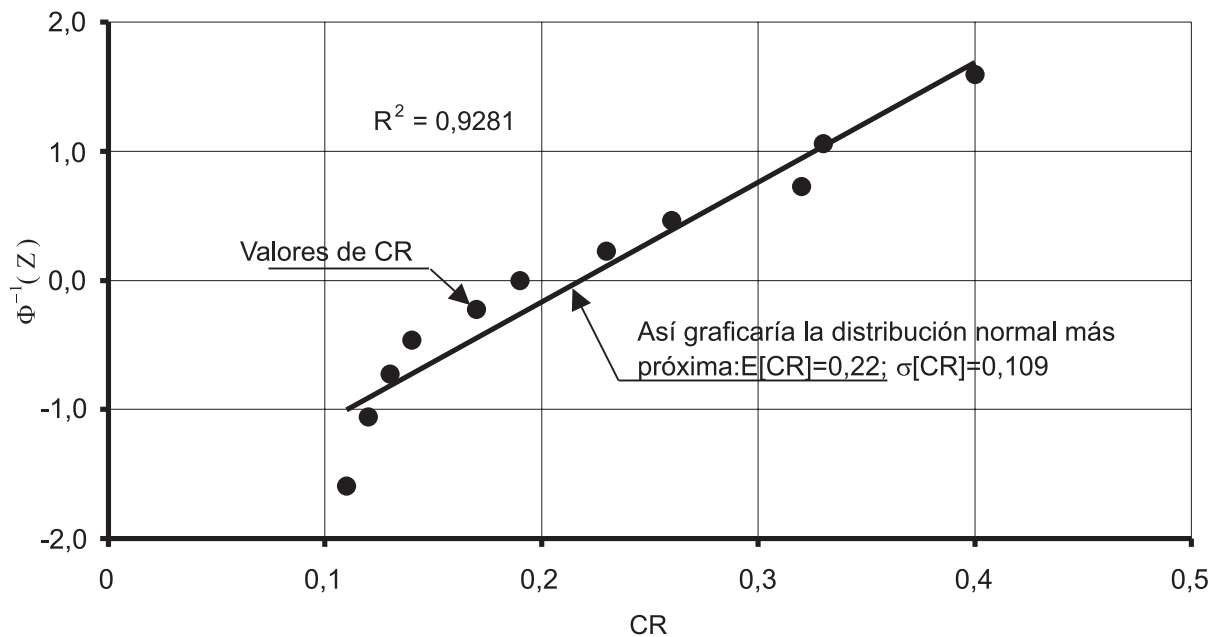
Lámina 4.4

Distribución de los valores de la relación de Compresión, CR

A) Correlación con la Profundidad



B) Aproximación a una Distribución Normal



corresponde a $\Phi^{-1}(Z) = 0,00$ ($\Phi(Z) = 0,50$) y la desviación estándar es igual al inverso de la pendiente de la recta (Berk, 2000). En este caso el promedio de los valores de la muestra presentada en la lámina 4.3 es $m[CR] = 0,218$ y su desviación estándar $s[CR] = 0,098$. Los valores de ambos parámetros extraídos de la recta de ajuste (lámina 4.4) y que pretenden aproximar los de la población son $E[CR] = 0,22$ y $\sigma[CR] = 0,109$.

Los valores esperados de la presión crítica $E[P'_c]$ están señalados en la lámina 4.3 mediante cruces en el centro del intervalo de la presión crítica.

4.5.3 Cálculo del asentamiento.

El asentamiento se calculará con el terreno dividido en las capas ideales mostradas en la lámina 4.3 y utilizando las ecuaciones (4.14) para el cálculo de la deformación vertical media, $\Delta\varepsilon_z$, en cada capa. Como ya se ha dicho, la relación de compresión CR y la presión crítica P'_c se considerarán las únicas variables aleatorias. Expresadas en función de $\Delta\varepsilon_z$, CR y RR las ecuaciones (4.14) se transforman en:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_z &= RR \times \log(\Delta\sigma_v) \quad \text{si } \sigma'_{vf} < P'_c \\ \Delta\varepsilon_z &= CR \times \log(\Delta\sigma_v) \quad \text{si } \sigma'_{vo} \geq P'_c \\ \Delta\varepsilon_z &= RR \times \log \frac{P'_c}{\sigma'_{vo}} + CR \times \log \frac{\sigma'_{vf}}{P'_c} \quad \text{si } \sigma'_{vo} \leq P'_c \text{ y } \sigma'_{vf} > P'_c\end{aligned}\tag{4.17}$$

El asentamiento parcial en cada capa se obtiene multiplicando la deformación vertical media por el espesor de la capa y el asentamiento total es la suma de los asentamientos parciales (ecuación (4.16)).

El cálculo de probabilidades por el método de primer orden segundo momento permite, mediante las ecuaciones (4.7), calcular los asentamientos parciales $\Delta\rho$. Estas ecuaciones particularizadas al caso de dos variables aleatorias solamente (ecuaciones (4.5) y (4.6)) y específicamente aplicadas a este caso, se transforman en:

$$E[\Delta\rho(CR, P'c)] = \Delta\rho(E[CR], E[P'c])$$

$$\sigma^2[\Delta\rho] = \left(\frac{\delta(\Delta\rho)}{\delta(CR)} \right)_{E[CR]}^2 \cdot V[CR] + \left(\frac{\delta(\Delta\rho)}{\delta(P'c)} \right)_{E[P'c]}^2 \cdot V[P'c] \quad (4.18)$$

Las ecuaciones anteriores suponen que Cr y P'c son variables aleatorias independientes. En principio, no parece haber objeción a este punto, porque es un hecho conocido que, durante el ensayo de consolidación, independientemente de donde se comience un ciclo de descarga-carga, cuando éste finaliza siempre se vuelve a la misma rama de compresión virgen que se traía anterior al ciclo. El punto comienzo de un ciclo de descarga carga equivale a una nueva presión crítica. Si siempre se regresa a la misma rama de compresión ello prueba que, al menos en el laboratorio, hay independencia entre P'c y CR.

El asentamiento parcial en cada capa se obtiene multiplicando la deformación vertical media por el espesor de la capa. El asentamiento total es la suma de los asentamientos parciales, tal como se indicó en la ecuación (4.16).

$$\rho = \sum \Delta\rho = \sum_{i=1}^n \Delta H_i \cdot (\Delta\varepsilon_z)_i$$

Como se desprende de la ecuación anterior ρ es entonces una variable aleatoria que proviene de la combinación lineal de variables aleatorias $(\Delta\varepsilon_z)$. Por lo tanto, la determinación de sus parámetros estadísticos puede hacerse mediante las expresiones propias para las funciones lineales introducidas al comienzo de este capítulo (ecuaciones(4.2) y (4.3)). Particularizadas a este caso, las expresiones son:

$$E[\rho] = \Delta H_1 \cdot RR \cdot \log\left(\frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}}\right) + E[\rho_2] + E[\rho_3] + \dots + E[\rho_n]$$

$$\sigma^2[\rho] = \sum_{i=2}^n (\sigma[\Delta\rho])^2 \quad (4.19)$$

Donde $\Delta H_1 \cdot RR \cdot \log(\sigma'_{vf}/\sigma'_{v0})$ es el asentamiento de la primera capa, en la cual por ser $\sigma_{vf} < P'c$ está regido por la variable determinista RR. Este primer término, por lo tanto,

corresponde al término independiente (A_0) de la expresión general de una función lineal⁶⁴ (ecuación(4.2)).

Debido a que el asentamiento es la suma de una serie de variables aleatorias donde ninguna de ellas prevalece sobre las otras, puede suponerse, de acuerdo al teorema del valor central, que la distribución de probabilidades del asentamiento, fdp, puede asimilarse a una distribución normal. Esta interpretación del teorema del valor central ya se mencionó en el capítulo N° 2.

En la lámina 4.5 se presentan todos los cálculos de acuerdo al procedimiento antes descrito. Las derivadas necesarias: $\delta(\Delta\rho)/\delta(CR)$ y $\delta(\Delta\rho)/\delta(P'c)$, son las derivadas de la tercera de las ecuaciones (4.17) y están dadas por las expresiones:

$$\frac{\delta(\Delta\rho)}{\delta(CR)} = \Delta H \cdot \log\left(\frac{\sigma'_{vf}}{P'c}\right) \quad (4.20)$$

$$\frac{\delta(\Delta\rho)}{\delta(P'c)} = \frac{\Delta H}{P'c \cdot \ln(10)} (RR - CR)$$

Las columnas en la parte superior de la lámina 4.5 se refieren al cálculo del valor esperado del asentamiento $E[\rho]$ y las de la parte inferior a las de su varianza y desviación estándar $Var[\rho]$ y $\sigma[\rho]$. El valor esperado del asentamiento resultó de 61,56 cm notablemente próximo al calculado originalmente por Ladd (1972b) mediante el cálculo determinista en los cuales hizo uso de su propio criterio para establecer valores únicos de cada una de las variables. Obsérvese que los dos primeros estratos del terreno contribuyen muy poco al asentamiento por ser el esfuerzo vertical final inferior a la presión crítica y por lo tanto el cambio de esfuerzos ocurre en la rama sobre consolidada. En consecuencia, no hubiera tenido mucho sentido en la práctica tratar a la relación de recompresión RR como una variable aleatoria.

Respecto a la varianza del asentamiento, esta fue de 171,35 cm² y la consiguiente desviación estándar de 13,09 cm. El coeficiente de variación fue de 21% y el índice de confiabilidad β , igual al inverso del coeficiente de variación, de 4,70. La distribución como

⁶⁴ Por esta misma razón la sumatoria en la segunda de las ecuaciones (4.19) comienza con $i = 2$.

Lamina 4.5

Cálculo Probabilista del Asentamiento por Consolidación. Estación C-6 de la Interestatal I-95 Portsmouth U.S.A.

A) Valor Esperado

CR= 0,22
RR= 0,014
 $\sigma[\text{CR}]$ = 0,109
 $\sigma[\text{RR}]$ = 0,00

Cotas estrato		z (m.)	σ'_{vo}	σ'_{vf}	P'c (izq.)	P'c (der.)	E[P'c]	σ [P'c]	CV[P'c]	ε_z	ΔH	Δp	
Superior	Inferior	Kg/cm ²									(cm.)		
0,00	2,00	1,00	0,07	1,02	Estrato Sobreconsolidado						1,60E-02	200,00	3,19
2,00	3,00	2,50	0,21	1,16							1,04E-02	100,00	1,04
3,00	4,00	3,50	0,28	1,23	0,51	0,93	0,72	0,11	0,15	5,69E-02	100,00	5,69	
4,00	6,00	5,00	0,40	1,35	0,51	0,76	0,64	0,06	0,10	7,49E-02	200,00	14,97	
6,00	8,00	7,00	0,54	1,49	0,64	0,86	0,75	0,06	0,07	6,76E-02	200,00	13,52	
8,00	10,00	9,00	0,68	1,63	0,80	0,97	0,89	0,04	0,05	6,00E-02	200,00	11,99	
10,00	11,30	10,65	0,82	1,77	0,94	1,06	1,00	0,03	0,03	5,58E-02	200,00	11,15	

Asentamiento total esperado: 61,56

B) Dispersión

Cotas estrato		Componente de CR			Componente de P'c			Total
Superior	Inferior	$\delta(\Delta p) / \delta(\text{CR})$	cuadrado	x Var[CR]	$\delta(\Delta p) / \delta(\text{P'c})$	cuadrado	x Var[P'c]	Var Δp
0,00	2,00	Estrato sobreconsolidado Calculo Determinístico						0
2,00	3,00							0
3,00	4,00	23,26	540,90	6,43	-12,43	154,40	1,70	8,13
4,00	6,00	65,51	4.291,82	50,99	-28,18	793,99	3,10	54,09
6,00	8,00	59,63	3.555,14	42,24	-23,86	569,17	1,72	43,96
8,00	10,00	53,05	2.814,18	33,44	-20,22	408,77	0,74	34,17
10,00	11,30	49,59	2.459,63	29,22	-17,89	320,16	0,29	29,51

Var[ρ] = 171,35

$\sigma[\rho]$ = 13,09

CV[ρ] = 21,13

$\beta[\rho]$ = 4,70

Nota: ρ = Asentamiento (cm)

ya se dijo puede asimilarse a una distribución normal. A continuación se compararán estos resultados con el valor real del asentamiento medido en el sitio.

4.5.4 Análisis de los resultados.

El valor del asentamiento real medido en el sitio (Ladd, 1972b) fue de 90 cm (3,0 pies). Debe decirse que este asentamiento en realidad fue extrapolado a partir de datos de campo, pues la consolidación no había finalizado al escribirse el artículo en 1972. Por carecer de drenes, es de esperar que en la estación C-6, mencionada anteriormente, la consolidación tomara más tiempo que en las otras. Aceptando este valor de 90 cm. puede verse que supera aproximadamente en 50% el asentamiento esperado. En los cálculos de asentamiento, esta relación de 1,5 entre el asentamiento medido y el calculado no es, en modo alguno, insólita.

Una aspecto interesante de este problema es calcular la probabilidad de que el asentamiento fuese igual o menor de 90 cm sobre la base de los cálculos de probabilidades antes descritos. Se sabe que la función distribución de probabilidades del asentamiento puede suponerse como normal, con un valor esperado de 62 cm y una desviación estándar de 13 cm. Planteada en términos de probabilidades la pregunta es: ¿ $P[N(62 ; 13)] \leq 90$? La respuesta es: 98,4 %. Esta respuesta no es muy alentadora pues se encuentra fuera del rango de confiabilidad que suele ser de 95%. En cierto modo, podría interpretarse como que el asentamiento medido no pertenece a la familia de valores del asentamiento calculado.

Ello no es en modo alguno un fracaso del método probabilista. El método probabilista no garantiza mejores resultados que el determinista. No es una teoría nueva, más exacta, que ofrece resultados más precisos. En realidad, lo que hace es dar un uso adicional a los datos, con el fin de asignar una probabilidad a cada uno de los posibles resultados.

Aunque el utilizar límites de confianza de 95 % en obras de tierra ha sido objetado por razones de costo, la necesidad este límite queda demostrada en este caso. Si se aplica este criterio, se encuentra que el asentamiento para un límite de confiabilidad de 95% debería ser menor que valor esperado más dos veces la desviación estándar (aproximadamente y por tratarse de una distribución normal), es decir $\rho_{95\%} \approx 62 + 2 \times 13 = 88$ cm., suficientemente cercano al medido en campo.

Es conveniente tener en cuenta que este es un caso excepcional en geotecnia por el cuidado con que fue realizado, pues se trataba de un trabajo de investigación aplicada que fue seguido por investigadores y profesionales de la más alta calificación. Aún así el resultado sale fuera de los límites de confiabilidad normalmente utilizados (95%). Este límite, que es admitido rutinariamente en el control de la calidad de muchos productos, con mucha más razón debe ser aceptado en las obras de tierra donde los costos y los riesgos son grandes (incluyendo vidas humanas) y donde se trabaja con materiales de propiedades muy variables, aplicando métodos de cálculo aproximados.

Analizando los resultados en sí mismos, en el capítulo N° 2, al tratar la influencia de del ángulo de fricción interna y del coeficiente de fricción base del muro-terreno, se puso de manifiesto la necesidad de mejorar la determinación de este último debido a las diferencias en los coeficientes de variación de ambas variables. Una de las cualidades de los métodos de probabilidades es poner de manifiesto la jerarquía de las variables que intervienen en un cálculo, tanto por su influencia en el resultado como la necesidad de una mayor precisión en su determinación. Esta situación se repite en este caso, como consta en el análisis que sigue:

En los cálculos de la lámina 4.5, la varianza de los incrementos del asentamiento $\text{Var}[\Delta p]$, (segunda de las ecuaciones (4.19)) es la suma de una componente debida a la relación de compresión, $[\delta(\Delta p)/\delta(CR)]^2 \cdot \text{Var}[CR]$, más una segunda componente debida a la presión crítica $[\delta(\Delta p)/\delta(P'c)]^2 \cdot \text{Var}[P'c]$. Si se analizan los valores de $\text{Var}[\Delta p]$ se verá que la influencia de la segunda componente es despreciable respecto a la de la primera. Esto es debido a dos efectos: el primero de ellos es que el coeficiente de dispersión de CR es de 50%, mientras que el de $P'c$, que varía en cada estrato, oscila entre 3% y 13%. El segundo efecto es que el cuadrado de la derivada respecto a CR es entre 3,5 y 7,0 veces mayor que el cuadrado de la derivada respecto a $P'c$. Esto hace que la influencia de la dispersión de los valores de CR sea aproximadamente treinta veces mayor que la de la dispersión de $P'c$. Por lo tanto, el análisis probabilista expresa de una manera clara y tajante que el calculista debe concentrarse en una mejor definición de CR y que, inclusive, puede dejar de considerar a $P'c$ como una variable aleatoria, ya que la influencia de la dispersión de esta variable en la dispersión total es insignificante. Finalmente, quizás pueda atribuirse la

diferencia entre el valor medido y el valor calculado del asentamiento al incumplimiento de las hipótesis del método unidimensional de cálculo empleado ya descrito en 4.4.2.

4.5.5 Comparación con el análisis de sensibilidad

Como alternativa al cálculo de probabilista se ha empleado el análisis de sensibilidad. El análisis de sensibilidad es mucho más limitado que el cálculo probabilista debido a que, como puede verse a continuación, sólo toca parte del problema.

Como ejemplo de análisis de sensibilidad y para comparación con el método probabilista, se considerará el incremento del asentamiento entre 6,00 y 8,00 m. cuyo punto representativo está a 7,00 m. Si se denomina $\delta(\Delta\rho)$ al error absoluto en $\Delta\rho$ y $\delta(\Delta\rho)/\Delta\rho$ al error relativo, la expresión para la función error relativo de $\Delta\rho$ puede calcularse a través del diferencial total, $\delta(\Delta\rho)$:

$$\frac{\delta(\Delta\rho)}{\Delta\rho} = \frac{\frac{\delta(\Delta\rho)}{\delta(CR)} \cdot \Delta(CR)}{\Delta\rho} + \frac{\frac{\delta(\Delta\rho)}{\delta(P'c)} \cdot \Delta(P'c)}{\Delta\rho} \quad (4.21)$$

Donde $\Delta(CR)$ y $\Delta(P'c)$ son los respectivos errores o imprecisiones en CR y en $P'c$. Sustituyendo por las correspondientes derivadas (ecuaciones (4.20)) se tiene:

$$\frac{\delta(\Delta\rho)}{\Delta\rho} = \frac{\frac{\Delta H \cdot \log\left(\frac{\sigma'_{vf}}{P'c}\right) \cdot \Delta(CR)}{\Delta\rho}}{\Delta\rho} + \frac{\frac{\Delta H}{P'c \cdot \ln(10)} \cdot (RR - CR) \cdot \Delta(CR)}{\Delta\rho} \quad (4.22)$$

En los cálculos de la lámina 4.5 se encuentran todos los valores que se necesitan (derivadas e incremento del asentamiento, $\Delta\rho$, para la capa entre 6,00 y 8,00 m.). Utilizando estos valores, la ecuación anterior queda:

$$\frac{\delta(\Delta\rho)}{\Delta\rho} = \frac{59,63}{13,52} \Delta(CR) + \frac{23,86}{13,52} \Delta(P'c) = 4,38 \cdot \Delta(CR) + 1,76 \cdot \Delta(P'c) \quad (4.23)$$

Como se ve, el análisis de sensibilidad destaca también el mayor peso de CR en la expresión del asentamiento, pero el análisis de sensibilidad sólo llega hasta allí, no dice nada respecto a la precisión y la influencia de la forma como se obtuvieron las variables que participarán en el cálculo, CR y $P'c$ en este caso particular.

Muchas veces los análisis de sensibilidad se hacen por el simple procedimiento calcular repetidamente el valor buscado variando más o menos uniformemente y en ambas direcciones las variables de las cuales éste depende. Este procedimiento puede destacar la importancia relativa de las variables en el cálculo, pero puede resultar engañoso porque cada combinación de variables está regida por una probabilidad conjunta (véase lámina N° 2.9 del capítulo 2) y por lo tanto la comparación entre los resultados de estas combinaciones no puede hacerse directamente sin atender a sus probabilidades de ocurrencia.

4.6 Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es otra forma de analizar como se propaga la incertidumbre de las variables de una función en los valores de esa función. El método⁶⁵ parte del concepto básico de probabilidad: si se desea conocer la probabilidad de cierto evento, resultado de un experimento, se realiza el experimento un número suficiente de veces y se calcula el cociente del número de ocurrencias del resultado deseado entre el número de veces que se repitió el experimento. Así, si en una caja hay cinco bolas rojas, dos negras, dos amarillas y una blanca, y se desea saber cual es la probabilidad de que al extraer cuatro bolas se obtenga una de cada color, se puede repetir el experimento unas dos mil veces y dividir el número de veces en que se obtuvieron cuatro bolas de distinto color entre el número de veces que se repitió el experimento. Con ello se obtendría una aproximación bastante exacta de la probabilidad real por muestreo. El método de Monte Carlo normalmente no se sigue tal como se ha descrito, lo normal es que se simule matemáticamente adjudicando probabilidades a los eventos básicos.

Este método se recomienda en aquellos casos donde las soluciones analíticas son imposibles o muy difíciles de obtener. También puede emplearse como complemento o verificación de los resultados obtenidos por otros métodos (Nowak y Collins, 2000). La razón es que el método (o técnica de simulación, como también se le llama) presenta un

⁶⁵ Aunque el método es muy antiguo, pues existen referencias de la metodología desde 1777 (Harr, 1987), el nombre Monte Carlo se atribuye a John von Neumann y a Enrico Fermi quienes lo usarían conjuntamente con uno de los primeros computadores llamado ENIAC para estudiar las probabilidades de colisión de los neutrones (Ekeland, 1998)

gran conjunto de resultados donde no suele ser fácil diferenciar los componentes importantes del problema de aquellos que no lo son (Christian y coautores,1992).

En la lámina N° 4.6 se muestra el diagrama de flujo del método referido al incremento del asentamiento para el estrato entre 6,00 y 8,00 m. de profundidad del ejemplo de consolidación que se ha venido tratando a lo largo de este capítulo.

Como se desprende de la lámina, el primer paso es la generación de dos números aleatorios, comprendidos entre 0 y 1, ambos inclusive, provenientes de una distribución uniforme en la cual cualquier número tiene igual probabilidad de ser elegido (pdf rectangular). A continuación cada uno de estos números se confronta con la función de probabilidades acumuladas, FPA, de las variables (en este caso CR y P'c). En respuesta se obtiene un valor de cada una de estas variables con una probabilidad de ocurrencia menor o igual que el número aleatorio correspondiente. Con estos pares de valores de CR y P'c se puede calcular un valor de $\Delta\rho$. Si el ciclo se repite un número suficiente de veces se puede generar una muestra suficientemente grande de valores de $\Delta\rho$ a partir de la cual se pueden extraer con suficiente precisión los parámetros estadísticos de esta función. En la lamina 4.6 se presentan los valores obtenidos en uno de estos ciclos para el estrato mencionado.

En la figura superior de la lámina N° 4.7 se muestra el histograma del asentamiento obtenido tras una repetición de 2000 ciclos para la capa entre 6,00 y 8,00 m. de profundidad. El promedio de esta muestra de 2000 valores fue de 13,65 cm que compara bien con el valor esperado de 13,52 obtenido en los cálculos de la lámina 4.5 para la misma capa. La desviación estándar de la muestra fue de 6,60 que también compara bien con el valor de 6,63 obtenido en los cálculos (raíz cuadrada de 43,96). Tal vez se hubieran obtenido relaciones mejores con un mayor número de ciclos, pero hay que tener en cuenta que ambos métodos (primer orden segundo momento y Monte Carlo) son aproximados.

Una de las ventajas de método de Monte Carlo es que permite conocer la forma de la distribución resultante tal como se muestra en la figura superior de la lámina 4.7. En la figura inferior de esta lámina se muestra la función de probabilidades acumulada, FPA, del incremento del asentamiento entre 6,00 y 8,00 m. de profundidad y se compara con la FPA de una distribución normal con los mismos parámetros estadísticos. La concordancia causa sorpresa a primera vista. Aunque las variables independientes respondan a una distribución

Lámina 4.6

Diagrama de flujo representativo de la aplicación del Método de Monte Carlo para el cálculo de los parámetros estadísticos de cualquier componente del asentamiento $\Delta\rho$

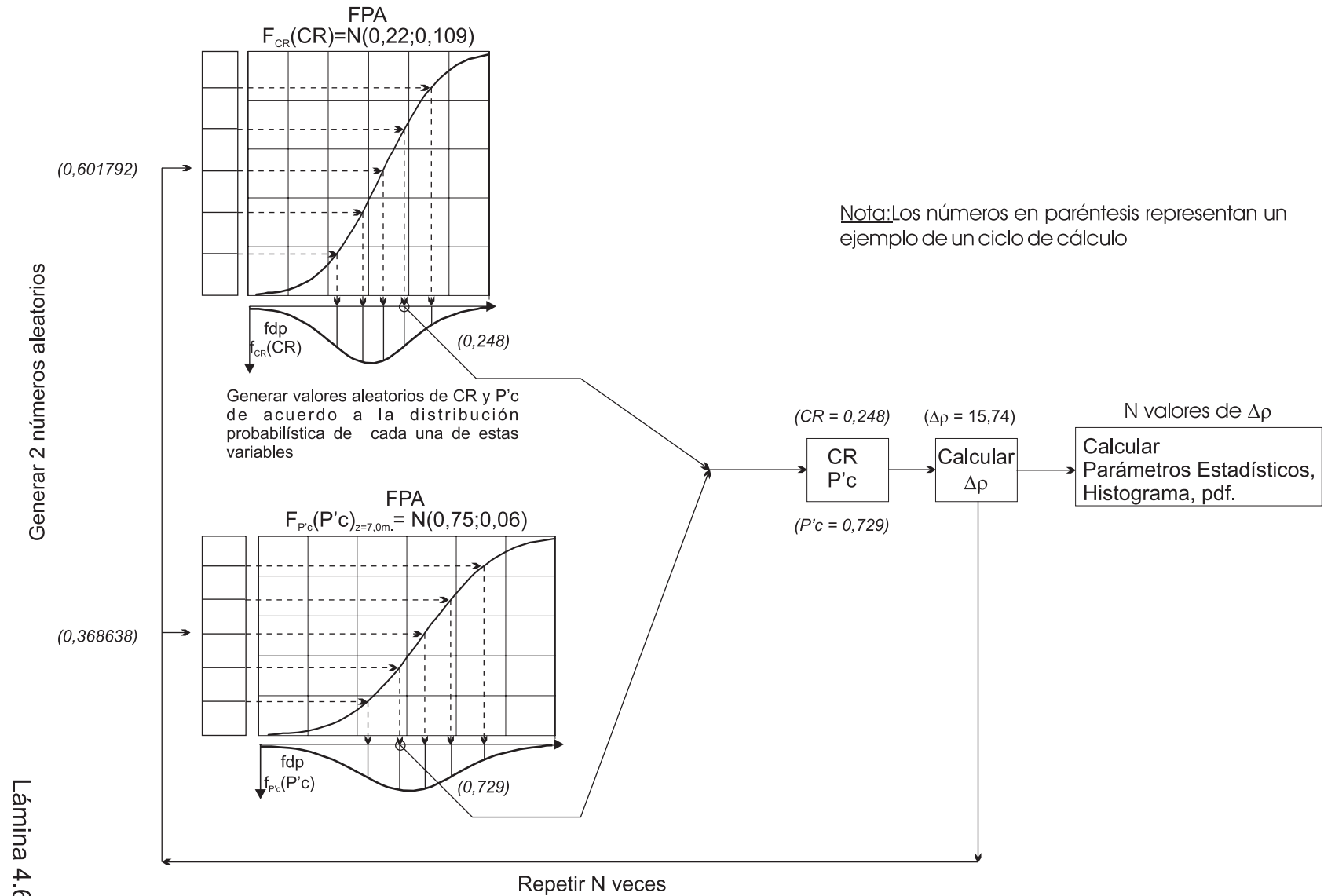
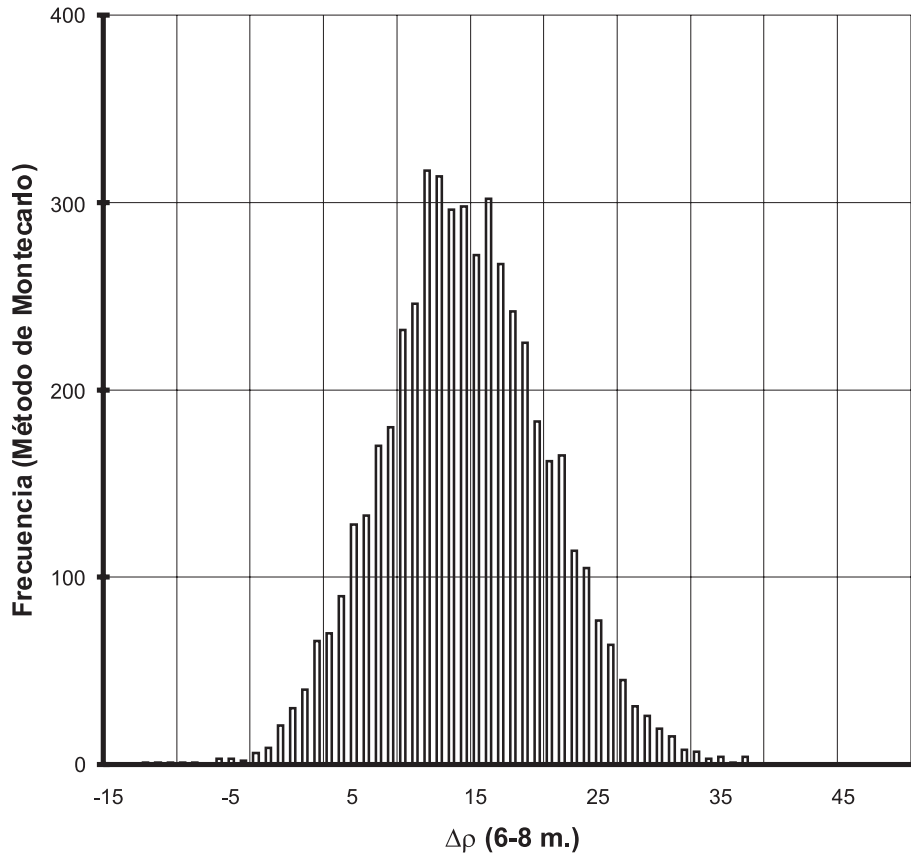


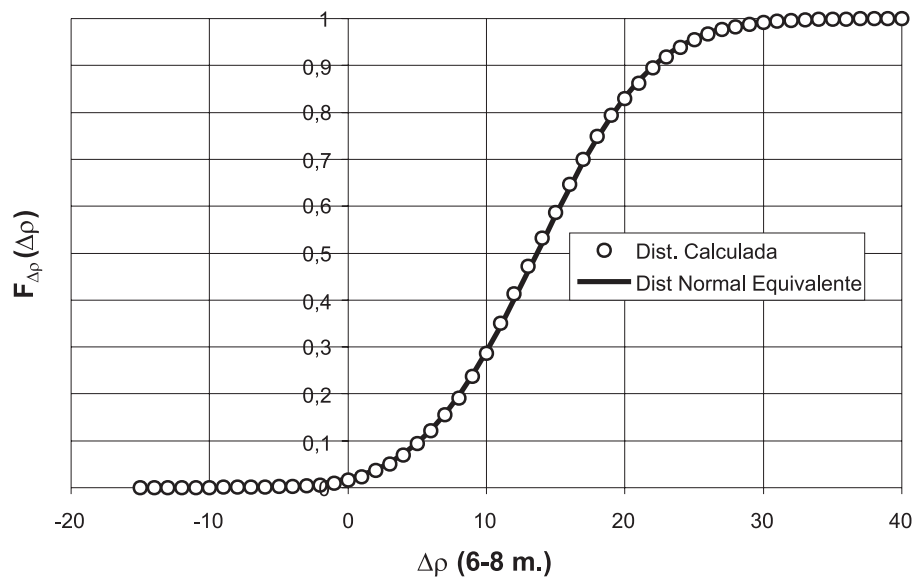
Lámina 4.7

Incremento del Asentamiento entre 6,00 y 8,00 m. de Profundidad por el Método de Monte Carlo

A) Histograma del Incremento del Asentamiento



B) Comparación entre la distribución calculada y la distribución normal



normal, resulta difícil comprender por qué la transformación de una función relativamente compleja (tercera de las ecuaciones (4.17)) resulte también en una distribución normal. La respuesta debe buscarse en los cálculos de la lámina 4.5. Como ya se ha dicho la influencia de la variación aleatoria de P_c es insignificante en la dispersión de la función y esta variable es la incluida en el término de mayor complejidad de la expresión (el logaritmo). Por lo tanto la variable que domina la dispersión de los valores del asentamiento es CR y éste es una función lineal de CR, porque el primer término de la tercera de las ecuaciones (4.14) es determinista. La transformación lineal de una variable aleatoria conserva el tipo de distribución de probabilidades de la variable independiente y de allí proviene la casi perfecta concordancia entre las distribuciones de la figura B de la lámina 4.7.

Por la misma razón, ahora puede decirse con mayor confianza, que la distribución del asentamiento total posee una distribución normal. Para el cálculo del asentamiento total por el método de Monte Carlo, se seguiría el mismo procedimiento de calcular los asentamientos parciales ($\Delta\rho$) y luego sumarlos, pero hay que tener en cuenta que deben usarse los mismos números aleatorios para todos los estratos en cada ciclo. Si se utilizan números aleatorios diferentes en cada estrato se cometería el error, al menos conceptual, de calcular los asentamientos parciales con parámetros diferentes en cada estrato.

Independientemente de todo lo anterior es conveniente recordar que los números aleatorios generados por los lógicos de computadora no son realmente aleatorios ya que cada uno de ellos depende del valor del anterior. Cuando se repite uno de ellos todo un ciclo se repite (Ekeland, 1998): “Los generadores aritméticos de uso corriente hacen intervenir divisiones mucho más finas y ciclos mucho más largos ($M \sim 2^{32}$). Sin embargo esos ciclos existen y pueden conducir a desagradables sorpresas”.

Capítulo 5

Funciones que Dependen de una Regresión Lineal

5.1 Introducción

En este capítulo se estudia el caso de la distribución probabilística de una variable aleatoria obtenida mediante el uso de una regresión lineal.

En geotecnia es común el caso en que ciertas propiedades del terreno, ciertos parámetros o ciertos métodos de cálculo tienen un origen empírico y deben tratarse mediante regresiones, generalmente lineales.

A esta clase pertenecen multitud de correlaciones con ensayos de campo, tales como el ensayo de penetración estándar SPT, cono estático, veleta etc. Estas correlaciones permiten estimar valores de la resistencia al corte, capacidad de soporte de fundaciones directas y profundas, asentamientos, etc.

Para saber el grado de confianza que se puede tener en los valores obtenidos mediante estas correlaciones es necesario conocer la distribución probabilística de los resultados provenientes de ellas. Las distribuciones probabilísticas de tales resultados deben reflejar tanto la incertidumbre de la variable con la cual se entra en la correlación como la incertidumbre de la propia correlación. De esta forma, se pueden determinar probabilidades de falla, índices de confiabilidad etc.

El caso que se utilizará aquí como ejemplo es el análisis probabilista de la capacidad por fricción lateral o fuste de un pilote en arcilla por el denominado método alfa. Este método hace uso de un parámetro experimental, conocido como factor de adhesión, α , para cuya determinación existen varias correlaciones experimentales de diversos autores. En este ejemplo se utilizará una de las más recientes (Kulhawy y Phoon, 1993).

Esta correlación, en forma de regresión lineal, se aplicará a un caso muy bien documentado de una prueba de carga efectuada en un pilote excavado en arcilla (O'Neill y Reese, 1972). El pilote fue instrumentado en toda su longitud con lo cual se tiene una determinación muy precisa de su resistencia por fricción lateral.

Debido a que en el terreno donde se realizó la prueba de carga mencionada se efectuaron más de treinta ensayos de la resistencia al corte no drenada, este ejemplo permite caracterizar la distribución de probabilidades (fdp) de la resistencia al corte del terreno con una abundancia de datos muy poco frecuente en geotecnia.

Tal como se explicó en el capítulo 1, el manejo de los pares de puntos, S_u , α , que integran la correlación de Kulhawy y Phoon permite tratarla como una variable aleatoria con una distribución probabilística de varianza constante y con valor esperado variable dado por dicha regresión para cada valor predeterminado de S_u .

De esta manera fue posible calcular la distribución probabilística de la resistencia unitaria lateral última, f_{su} , y estudiar su relación con el valor real obtenido en la prueba de carga.

A continuación se presenta una síntesis de la teoría del comportamiento general de los pilotes sometidos a cargas verticales con el fin revisar los conceptos que servirán de base al método probabilista.

5.2 Comportamiento de un pilote sometido a carga vertical

5.2.1 Teoría General

Los pilotes son elementos de fundación alargados que se utilizan cuando el subsuelo inmediatamente bajo la estructura a fundar no tiene suficiente capacidad portante o cuando una estimación de costos favorece a este tipo de fundación (Terzaghi y coautores 1996). También se utilizan para soportar cargas verticales de tracción u horizontales.

Existen varios tipos de pilotes y por ende varias maneras de clasificarlos (materiales que los componen, formas de instalación, patentes, método de instalación etc.). Desde el punto de vista geotécnico las más apropiadas son aquellas que se basan, bien en su forma de instalación, o bien en su forma de trabajo.

Por su forma de instalación los pilotes se dividen en: pilotes con desplazamiento y pilotes sin desplazamiento (Whitaker, 1976; Fleming y coautores, 1985).

Los primeros, también llamados pilotes hincados, corresponden a aquellos que se hincan en el terreno desplazando lateral y verticalmente al suelo para ocupar su volumen. Normalmente, en terrenos granulares, este desplazamiento se traduce en una densificación de suelo alrededor del pilote y, en consecuencia, en una mejora de sus propiedades. Los pilotes con desplazamiento se subdividen en: pilotes de bajo desplazamiento, como perfiles hache o tubos abiertos, y pilotes de gran desplazamiento, como los prefabricados de concreto o los tubos cerrados en su punta⁶⁶.

En los pilotes sin desplazamiento⁶⁷, por su parte, la excavación del terreno previa al vaciado del pilote, puede producir la relajación de los esfuerzos horizontales o radiales del terreno, especialmente en aquellos de sección oblonga o circular de gran diámetro y tal relajación puede ser causa de una disminución en la fricción lateral del futuro pilote con el terreno.

Por lo tanto, el método constructivo es de gran influencia en la capacidad posterior del pilote, ya sea por el efecto de densificación que tiende a aumentar la fricción del terreno (pilotes hincados) o por el efecto de relajación de esfuerzos horizontales o radiales que tiende a disminuirla (pilotes excavados).

Por su forma de trabajo, los pilotes se clasifican en pilotes de fricción y pilotes de punta. En los primeros la mayor parte de la carga impuesta al pilote se transmite por fricción con el terreno a lo largo del fuste. Por el contrario, en los pilotes de punta la mayor parte de la carga es transmitida al terreno en el contacto con la base del pilote. Ello generalmente sucede cuando ésta se apoya en un estrato más resistente que el del fuste o cuando la punta es de mayor diámetro que el fuste (acampanada), o bien cuando se dan ambas causas.

Esta última clasificación es relativa, porque siempre la superficie lateral del pilote y el área de su punta interactúan en mayor o menor grado con el terreno, además la relación entre las fracciones de la carga transmitidas al terreno por fuste y por punta cambia al aumentar dicha carga exterior. Esto se verá en los gráficos que se muestran más adelante. Para efectos de cálculo ambas cantidades, fuste y punta se computan separadamente.

⁶⁶ Los pilotes tipo Franki también constituyen una categoría particular de pilotes de gran desplazamiento.

⁶⁷ También conocidos como pilotes excavados y vaciados en sitio.

Las modernas técnicas de instrumentación en pilotes han modificado radicalmente la forma de pensar que anteriormente se tenía respecto a cómo trabajan los pilotes. En terrenos más o menos homogéneos, a partir de pruebas de carga en pilotes instrumentados y de pruebas con pilotes miniatura, se ha encontrado que:

- 1) Contrariamente a lo que se creía, la capacidad de los pilotes, tanto por punta como por fricción lateral, no aumenta indefinida y proporcionalmente con la longitud del pilote sino que tiene un límite. Este límite se va alcanzando asintóticamente una vez superada cierta longitud, denominada longitud (o profundidad) crítica. Esta longitud crítica es aquella a partir de la cual deja de producirse un aumento aproximadamente proporcional de la capacidad de soporte al seguir aumentando la longitud del pilote (Meyerhof 1976).
- 2) La resistencia por fricción lateral se desarrolla mucho más rápidamente que la resistencia por punta y alcanza su máximo bajo una carga más baja que la necesaria para alcanzar la resistencia máxima por punta⁶⁸. La resistencia máxima por fricción lateral se alcanza bajo la carga que produce un asentamiento comprendido entre el 0,5 % y el 2,0 % de diámetro del pilote, mientras que la resistencia por punta se alcanza para cargas que producen un asentamiento del orden del 5% al 10% del diámetro (Fleming y coautores, 1985).

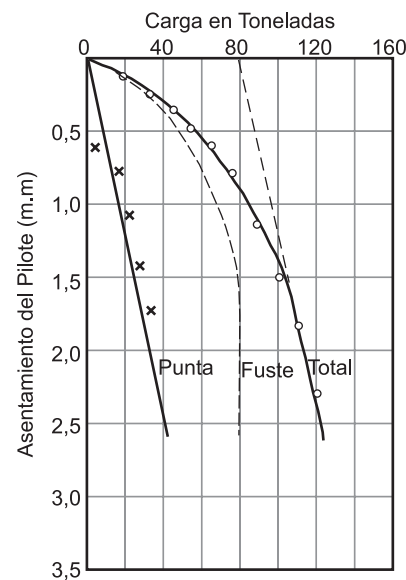
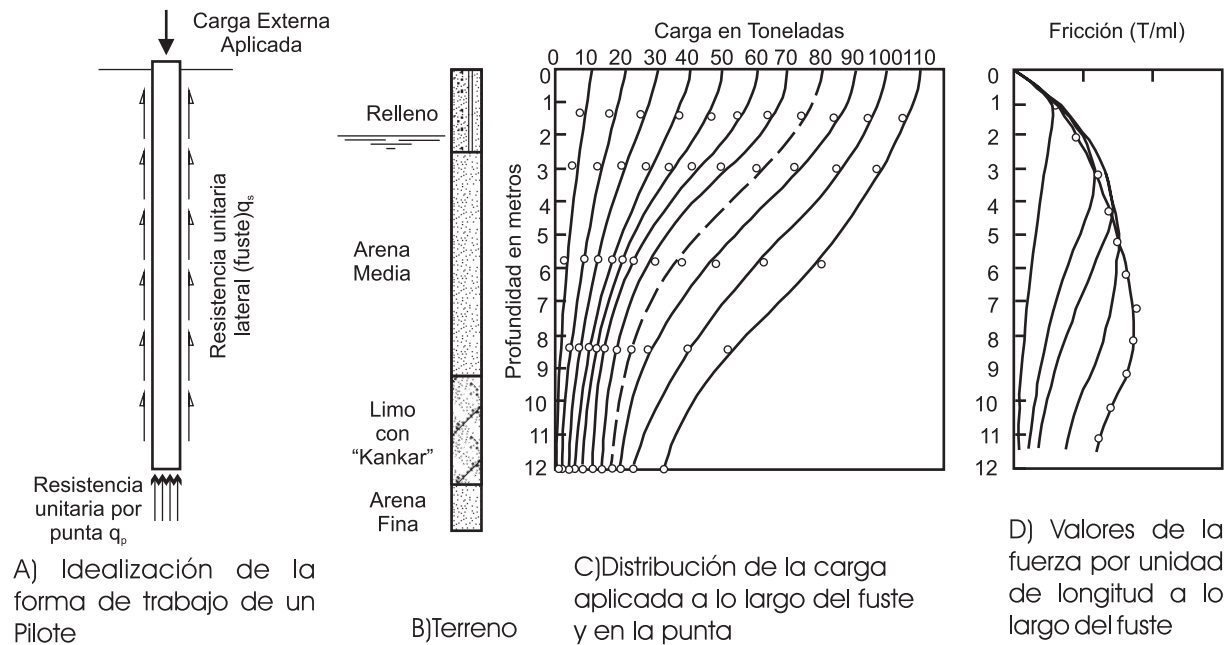
En la Lámina 5.1 se muestran los resultados de un pilote de 11,3 m. de longitud y 33 cm de diámetro, instrumentado e hincado por vibración en arena (Mohan y coautores 1963). La figura C de dicha lámina es ilustrativa de la forma en que la carga aplicada al pilote se transfiere al terreno.

Una de las primeras cosas que destaca en la figura C es la relación entre la carga aplicada (ordenadas superiores de la figura) y la carga transmitida al terreno por la punta (ordenadas inferiores). Así se observa que para carga a la cual se detuvo la prueba: 110 toneladas, la carga transmitida por la punta al terreno era de 35 toneladas, equivalente al 32 % de la carga aplicada.

⁶⁸La resistencia máxima por fricción lateral es claramente identificable en la mayoría de las pruebas de carga en pilotes instrumentados, pero la resistencia final por punta no lo es.

Lámina 5.1

Resultados de las mediciones en un pilote instrumentado de 33 cm de diámetro y 11,3 m. de longitud excavado por vibración y vaciado en sitio



E) Curva Carga-Asentamiento

Notas: Todas las figuras excepto la A) Fueron tomadas de "Load-Bearing Capacity of Piles" por Dinesh Mohan y Virendra Kumar, Geotechnique, Marzo de 1963, Volumen XIII N°1
La curva referente al fuste en la figura E) no aparece en el artículo citado.

Otro aspecto interesante es la forma en la cual la fricción lateral se distribuye a lo largo del fuste. Para quien no está acostumbrado a este tipo de gráficos, ahora frecuentes en la literatura, obsérvese que en la curva correspondiente a una carga exterior de 80 toneladas, el valor de la ordenada a seis metros de profundidad es de unas 39 toneladas y la carga en la punta es de 16 toneladas. Ello significa que en el tramo comprendido entre el tope del pilote y seis metros de profundidad se han entregado al terreno: $80 - 39 = 41$ toneladas y desde allí hasta la punta: $39 - 16 = 23$ toneladas.

En estas curvas la mayor transferencia de carga al terreno por unidad de longitud del fuste ocurre en aquellos tramos donde la curva tiende a acercarse a la horizontal. Por el contrario, en aquellos tramos donde las curvas se acercan a la vertical es donde existe menos transferencia de carga desde el fuste al terreno. De hecho, en los tramos donde la curva es vertical no hay transferencia de carga al terreno. En las curvas de la figura, los tramos donde éstas se acercan a la vertical son: cerca del tope del pilote y cerca de la punta. En el primer caso podría explicarse porque se trata de un relleno de menor resistencia que el material inferior y en el segundo porque la actuación de la punta reduce la fricción lateral en la parte inferior del fuste por razones que suelen atribuirse a la aparición de esfuerzos tensión, tal como lo predice la teoría elástica⁶⁹ con la posible formación de grietas en el terreno en la zona cercana a la punta. Este fenómeno reduciría o anularía la fricción lateral en el área del fuste cercana a la punta (O'Neill y Reese, 1972; Ellison y coautores, 1971). Este es otro de los avances que se han conseguido en el conocimiento del comportamiento de los pilotes mediante el análisis de los resultados de pruebas de carga con pilotes instrumentados.

La distribución de la fricción lateral unitaria (por metro de longitud) se muestra en la figura D de la lámina 5.1 y corresponde a la derivada matemática de las curvas anteriores. A medida que la carga aplicada aumenta el máximo de las curvas se desplaza gradualmente hacia abajo, pero siempre hay una disminución cerca de la punta, casi seguramente por la interacción con ésta⁷⁰.

⁶⁹ Véase, por ejemplo, Jiménez Salas y coautores, 1984, pg. 194

⁷⁰ La forma tradicional de calcular los pilotes implicaba suponer una variación lineal de la fricción lateral con la profundidad.

En la figura E se muestran las curvas carga-asentamiento del pilote La indicada como “total” en la figura corresponde a la suma de la fricción lateral y la punta. Cuando el pilote está instrumentado pueden separarse ambos efectos⁷¹. En la figura E se ha hecho esto restando a los valores de la carga total los correspondientes valores de la punta. Esta diferencia, que corresponde a la carga por fuste, se presenta mediante la curva punteada intermedia. En la figura se ve que la fricción lateral alcanza un máximo cercano a 80 toneladas cuando la carga total es algo superior a 90 toneladas y de allí en adelante el fuste no aumenta su participación en la resistencia, razón por la cual la curva de la carga total y la carga por punta comienzan a ser paralelas. Es interesante observar que mientras la resistencia por fuste se alcanza con la carga correspondiente a un asentamiento del orden de 0,45 % del diámetro, la resistencia por punta no muestra ningún síntoma de recesión a ese nivel.

Las lecciones aprendidas en pruebas de carga especialmente en aquellas con pilotes instrumentados sobre el comportamiento real de estos elementos todavía no se traducen en métodos racionales de cálculo que sustituyan a los antiguos, aunque sí los modifican. Sin embargo, existen avances en esa dirección (ver, por ejemplo Fleming y coautores, 1985, Pg 98 y ss.).

Además de arrojar mucha luz sobre el comportamiento real de los pilotes, las pruebas de carga y la instrumentación han servido para generar bases de datos a partir de las cuales se ha correlacionado empíricamente la capacidad de los pilotes con ciertas propiedades del terreno relativamente simples de encontrar (SPT, compresión sin confinar, etc.). Estas correlaciones recogen intrínsecamente el comportamiento real de los pilotes y permiten calcular su capacidad de acuerdo con las nuevas observaciones (Coyle y Castello, 1981; Reese y O'Neill, 1989; Neely, 1990a; Neely, 1990b).

5.2.2 Métodos de Cálculo de la Resistencia por Fuste

Existen tres métodos para el cálculo de la resistencia por fricción lateral de un pilote en arcilla: el método alfa (Tolimson 1977), el método beta (Burland, 1973; Kulhawy y

⁷¹ Cuando el pilote no está instrumentado puede estimarse la resistencia total por fricción lateral haciendo una prueba de tracción una vez finalizada la prueba normal por compresión.

Jackson, 1989) y el método lambda (Vijayvergia y Fotch, 1972). De éstos, el de uso más frecuente, con mucho, es el método alfa y es el que se utilizará en el presente trabajo.

El método alfa supone que la resistencia unitaria lateral del pilote, f_{su} , (cociente entre la resistencia lateral total y el área perimetral del pilote) es una fracción de la resistencia al corte no drenada de la arcilla, S_u . El método alfa es empírico, no tiene una explicación teórica o semiteórica formal como la tienen los otros dos métodos nombrados. Esta fracción, o factor, que relaciona la resistencia al corte no drenada con la fricción lateral unitaria en el pilote se supone constante en toda la longitud del pilote⁷² y se denomina factor de adhesión, alfa (α).

La obtención del valor de alfa tras una prueba de carga es teóricamente simple, basta con medir la fricción lateral unitaria del pilote y dividirla por el promedio estimado de la resistencia no drenada, obtenida a partir de ensayos de campo o de laboratorio, a lo largo de la longitud del pilote⁷³. A la inversa, si se conoce el valor de alfa por alguna correlación válida con la resistencia al corte:

$$f_{su} = \alpha \cdot S_u \quad (5.1)$$

Donde f_{su} es la resistencia por fricción unitaria en el fuste, como ya se indicó. La resistencia total lateral viene dada por:

$$F_{su} = f_{su} \times \text{Area Lateral del Pilote} \quad (5.2)$$

En el caso particular, pero muy común, de pilotes rectos cilíndricos:

$$F_{su} = f_{su} \times \pi \times D \times L \quad (5.3)$$

Donde D y L son el diámetro y la longitud del pilote respectivamente.

Existen gráficos, de varios investigadores, que correlacionan los valores de α y S_u . En cualquier texto acreditado de fundaciones pueden encontrarse muchos de ellos

⁷² Las mediciones de pilotes instrumentados demuestran que esto no es cierto (O'Neill, 1972), pero en realidad lo que se hace es trabajar con el valor promedio.

⁷³ Algunas correlaciones se hacen con el valor de S_u dividido entre la presión vertical media en la profundidad del pilote. Ver, por ejemplo, Fleming y coautores, 1985. Cuando el pilote no está instrumentado, a la resistencia total medida se le resta la resistencia por punta estimada como $9 \times S_u \times \text{área de la punta}$. Esta expresión no es del todo exacta, aunque es aceptable y además la resistencia por punta suele ser comparativamente pequeña en los pilotes en arcilla.

(Tolimson, 1977; Fleming y coautores, 1985; Coduto, 1993). La relación que se usará aquí es una de las más recientes.

En la lámina 5.2 se muestra la relación debida a Kulhawy y Phoon (1993). Esta relación es válida solamente para pilotes excavados. En realidad, en las figuras de la lámina se muestra sólo parte de la relación, porque la figura original incluye otra relación para la fricción lateral de pilotes en rocas blandas en el mismo gráfico.

La figura superior (figura A) muestra la relación entre α y S_u en papel logarítmico y en ella se muestran dos regresiones. La primera, en línea fina discontinua, es la propuesta por Kulhawy y Phoon, para usos prácticos, con el fin de redondear los coeficientes de la expresión real, pero ésta expresión no corresponde exactamente a la recta de mínimos cuadrados (capítulo 1). Dicha expresión de redondeo es:

$$\alpha = 0,5 \cdot \left(\frac{S_u}{Pa} \right)^{-0,5} \quad (5.4)$$

Donde Pa es la presión atmosférica y está colocada allí con el solo propósito de hacer que la expresión sea adimensional y pueda ser usada en cualquier sistema de medición sin necesidad de transformación de unidades. En el sistema métrico $Pa \approx 1,0 \text{ Kg/cm}^2$.

La línea gruesa representa la recta de mínimos cuadrados y es la que se usará en este trabajo a fin de mantener consistencia con el método estadístico. De todas formas, puede haber alguna inexactitud en el traslado de los puntos de gráfico desde el artículo original al presente trabajo. La expresión para α es:

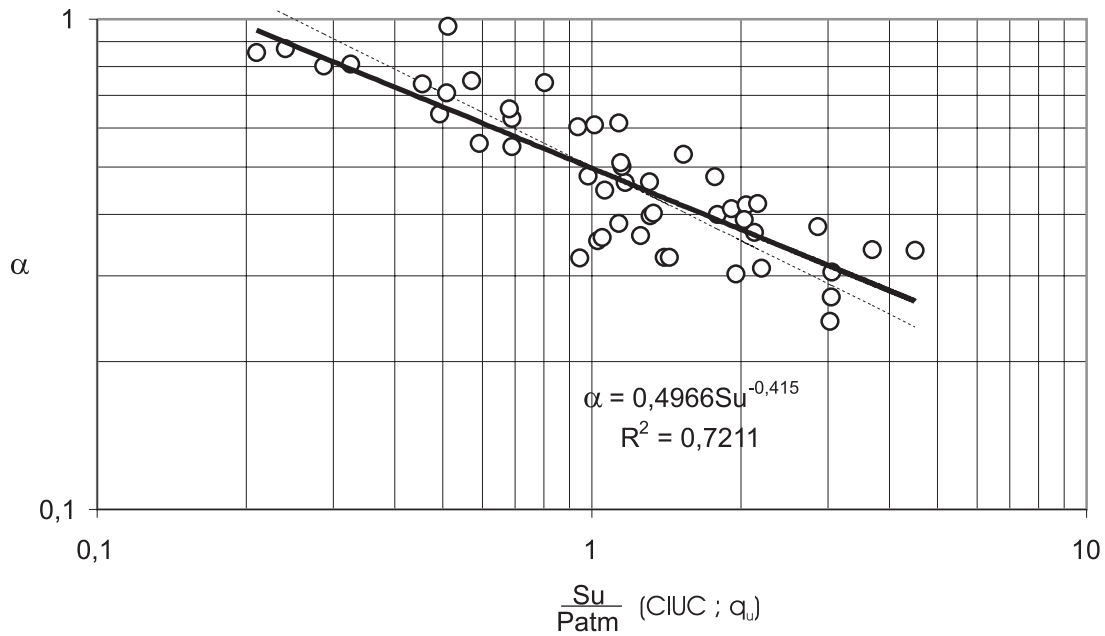
$$\alpha = 0,4966 \cdot \left(\frac{S_u}{Pa} \right)^{-0,415} \quad (5.5)$$

En la figura inferior de la lámina se muestra la misma relación de los logaritmos en escala natural. Este tipo de figura, que no es usual (lo usual es el papel logarítmico), se emplea en este caso porque en los cálculos se supondrá, tras la consiguiente prueba, que S_u puede asimilarse a una variable aleatoria de distribución lognormal (capítulo 1).

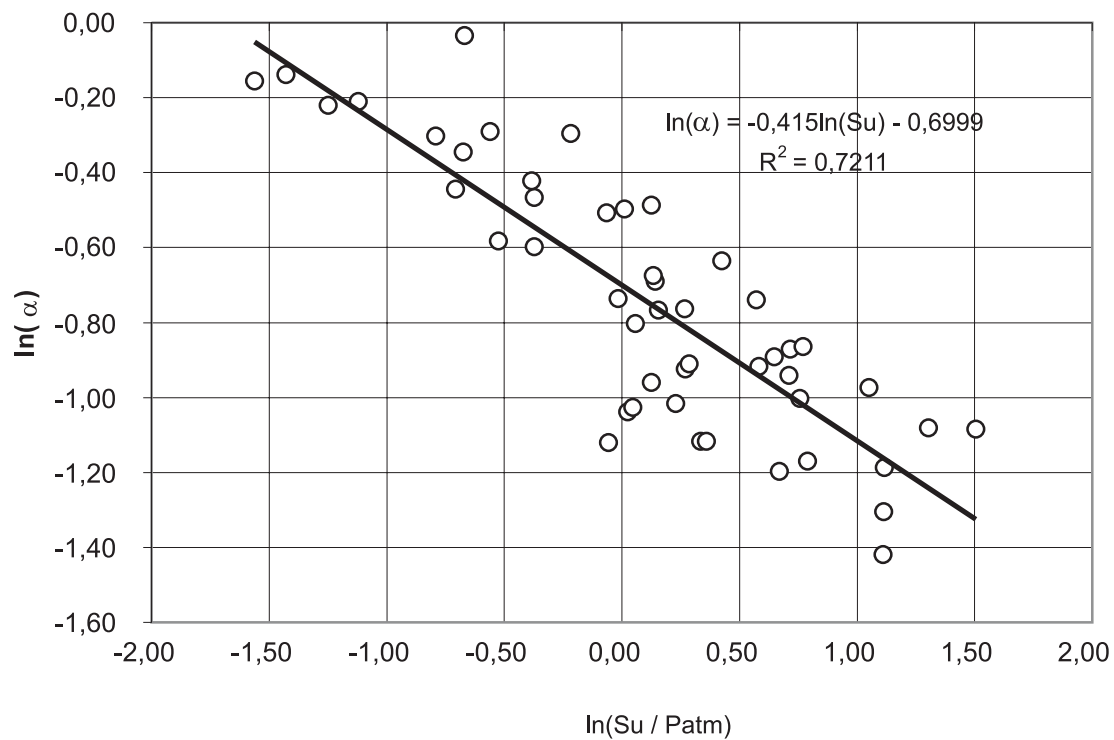
Lámina 5.2

Relación entre α y S_u de Acuerdo a Kulhawy y Phoon

A) En Papel Logarítmico



B) Relación entre los Logaritmos en Escala Natural



5.3 Cálculo de la Resistencia lateral de un pilote sometido a Carga Vertical por Métodos Probabilistas

5.3.1 Presentación del Caso

Uno de los casos mejor documentados sobre pruebas de carga en pilotes instrumentados es el presentado por O'Neill y Reese (1972) en la Arcilla de Beaumont en Houston, Texas EEUU. En este terreno se ejecutaron cuatro pruebas de carga en cuatro pilotes excavados de características diferentes. De estas cuatro pruebas, una de ellas se es estudiará por métodos probabilistas en este capítulo.

El pilote elegido (denominado S1 en el artículo original) tiene 7,0 m. de longitud, 76 cm de diámetro y se encuentra inmerso en su totalidad en una arcilla de alta compresibilidad (CH) fisurada. En la figura A de la lámina N° 5.3 se muestran las condiciones del terreno y del pilote y en la figura B de la misma lámina se muestran los resultados de la prueba de carga de del pilote.

Los resultados de los ensayos de resistencia al corte no drenada mostrados en la figura A de esta lámina provienen de ensayos triaxiales CIUC⁷⁴ realizados en muestras de 36 mm. de diámetro y 71 m.m. de altura, talladas a partir de muestras de 76 mm. de diámetro, recuperadas con muestreadores de pared delgada. Los autores atribuyen la dispersión de los valores de la resistencia al corte a la fisuración de la arcilla. La dirección de la fisuración es totalmente errática.

La razón de elegir solamente la primera prueba, S1, y no las cuatro se debe a que las condiciones de instalación los cuatro pilotes son diferentes y cada una conduce a un criterio de cálculo distinto y, por lo tanto, los resultados no son comparables entre sí. En efecto: aunque los cuatro pilotes eran del mismo diámetro: 76 cm; el segundo, S2, tiene la misma longitud y diámetro de S1, pero su base es acampanada de 2,28 m. de diámetro. El tercer pilote, S3, tiene las mismas dimensiones de los anteriores, pero se dejó un vacío ventilado de 30 cm entre su punta y el terreno de forma de que no actuase la resistencia por punta y el cuarto pilote, S4, tenía una longitud de 14,0 m y fue excavado con lodo bentonítico.

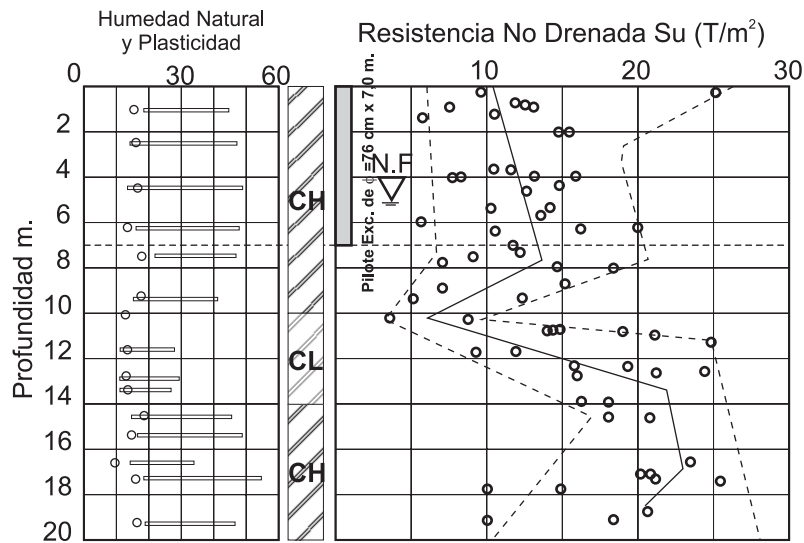
⁷⁴ Consolidado, isotrópicamente, no drenado, en compresión.

Lámina 5.3

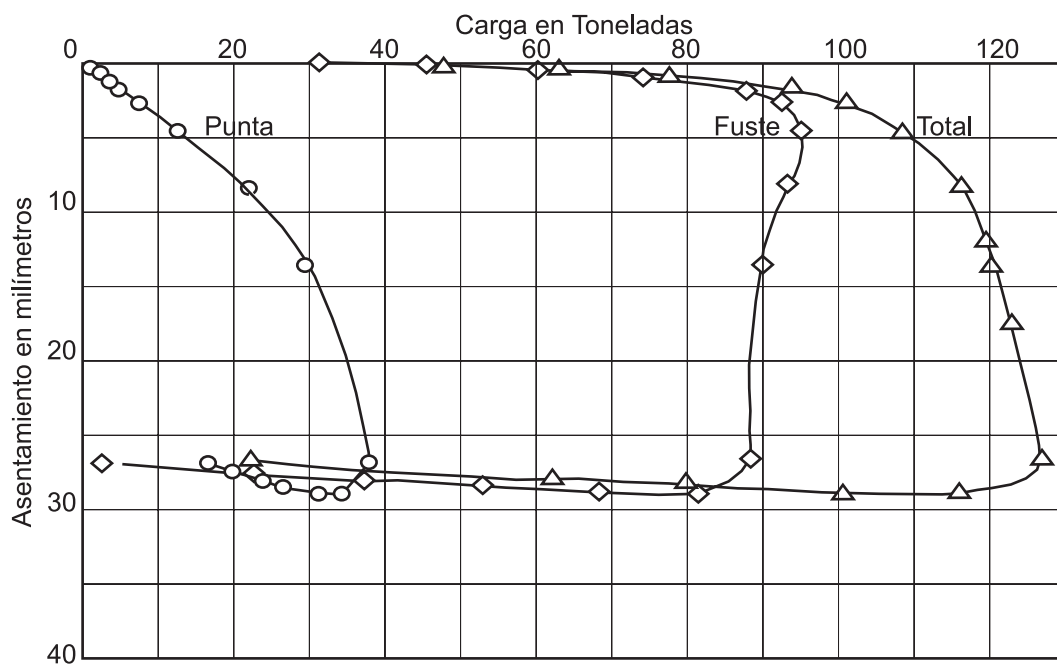
Pilote Excavado en Arcilla

Tomado de : Behavior of Bored Piles In Beaumont Clay,
por Michael W. O'Neill y Lymon C. Reese. Febrero de
1972 Journal of the Soil Mechanics and Foundations

A) Características del Terreno y del Pilote



B) Curvas Carga-Asentamiento



Por lo tanto, la comparación estadística del comportamiento de todos los pilotes no tiene mucho sentido. Los pilotes S1 y S2 pudieran ser comparables porque en el presente trabajo sólo se analizará la resistencia por fricción. Es conveniente observar, de todas formas, que a pesar de que el pilote S2 poseía una base mucho mayor que la de S1, los resultados de la resistencia lateral fueron casi idénticos en ambos pilotes⁷⁵.

El pilote S3, por su parte, es similar geométricamente a S1 excepto por el hecho de que no pudo ofrecer resistencia por punta al haberse dejado ésta separada del fondo de la excavación. Ya se ha mencionado que la interacción que existe entre la punta y la parte inferior del fuste reduce la fricción lateral en ese sector, y en el artículo en referencia (O'Neill y Reese 1972) se hace hincapié en ello. Al no existir interacción con la punta, es de esperar una mayor resistencia lateral por desaparecer la interacción punta-fuste, como de hecho ocurrió. Por esta razón, el resultado de la resistencia por fuste en S3 es algo mayor que la de S1. Sin embargo, el pilote S3 no es un pilote convencional sino experimental. Todos los pilotes que se construyen comercialmente trabajan por fuste y punta y por lo tanto sufren esa interacción.

El pilote S4 fue excavado con la ayuda de lodo bentonítico, procedimiento común en pilotes bajo el nivel freático y ello parece haber reducido notablemente su resistencia lateral durante la prueba, tal como se indica en el artículo. No existen métodos de cálculo que tomen específicamente en cuenta el efecto de la bentonita y por esta razón este pilote no se considera en el presente trabajo. Esta prueba de carga, sin embargo, tiene un valor en la vieja disputa sobre si el uso de lodo bentonítico durante la construcción del pilote disminuye su resistencia lateral.

5.3.2 Análisis de los valores de S_u

En este caso se tratará a α y a S_u como variables aleatorias. La primera, α , proviene de la correlación con S_u (lámina 5.2) y la segunda, S_u , es la variable aleatoria que representa la población la resistencia no drenada del sitio de muestreo. En geotecnia son comunes los casos como éste donde se trabaja con valores provenientes de ensayos y a la vez debe usarse una correlación empírica proveniente de la literatura para obtener un

⁷⁵ También es interesante observar que en ambos casos el asentamiento del requerido para el máximo desarrollo de la fricción lateral fue muy similar.

segundo valor. Cuando se calcula en forma determinista, es problema se resuelve eligiendo un valor de la propiedad del terreno obtenida en los ensayos y el valor buscado dado por la correlación, pero se desconoce el grado de confianza que tiene el resultado .

De allí la utilidad de tratar estadísticamente estos casos con el fin de estimar la dispersión del tercer valor conocida la de los dos primeros. En este caso: los parámetros estadísticos de la distribución de f_{su} conocidos los de S_u y α .

Para interpretar estadísticamente los valores de S_u , primero debe investigarse si existe una relación entre la resistencia al corte y la profundidad. En geotecnia es muy frecuente que muchas propiedades del terreno cambien con la profundidad bajo un mismo punto.

En la figura A de la lámina 5.4 se muestra la variación de los valores de S_u con la profundidad. A simple vista no parece existir ninguna correlación. La línea casi vertical en el centro de los valores de la figura es la recta de mínimos cuadrados y el cuadrado del coeficiente de correlación muestral, R^2 , es: 0,0015, indicativo de que menos del uno por ciento del cambio de los valores de S_u es explicable por la profundidad. Por lo tanto, al no encontrarse correlación entre S_u y la profundidad, puede suponerse que S_u es una variable aleatoria independiente y se pasará a estimar su distribución probabilística (fdp).

En la figura inferior de la misma lámina se muestra la comparación de la curva de frecuencias acumuladas de S_u con la distribución normal que mejor se les ajusta, obtenida a través del papel de probabilidades. La coincidencia es razonablemente buena.

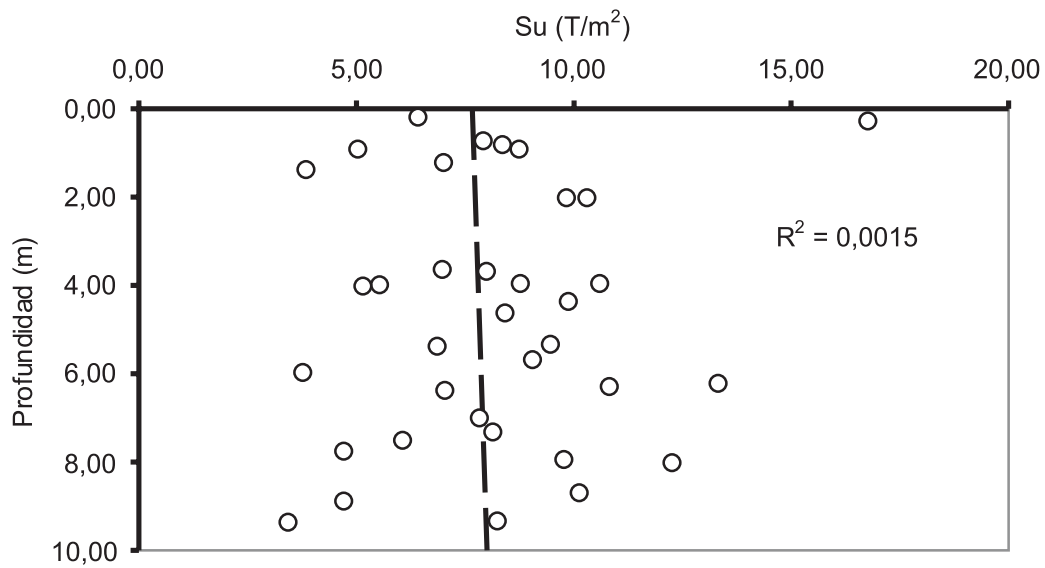
En la figura superior de la lámina siguiente, 5.5, se muestra, en el papel de probabilidades, el ajuste de los valores de S_u a esta correlación normal. A partir de la figura se obtiene que $E[S_u] = 7,73 \text{ T/m}^2$, $\sigma[S_u] = 2.52$ y $CV[S_u] = 32,16\%$.

En la figura inferior de la misma lámina 5.5 se muestra la correlación de los valores del logaritmo de S_u con la distribución lognormal que mejor se ajusta ellos. Es decir, se está investigando si los valores de S_u también pudiesen ajustarse a una distribución lognormal. En este caso la correlación es más deficiente que en el anterior. En efecto, el cuadrado del coeficiente de correlación es de 0,985 en el primer caso y 0.954 en el segundo. Por lo tanto, es más apropiada la distribución normal. Sin embargo, se optará por

Lámina 5.4

Análisis de los valores de Su

A) Ausencia de Correlación con la Profundidad



B) Ajuste a una Distribución Normal

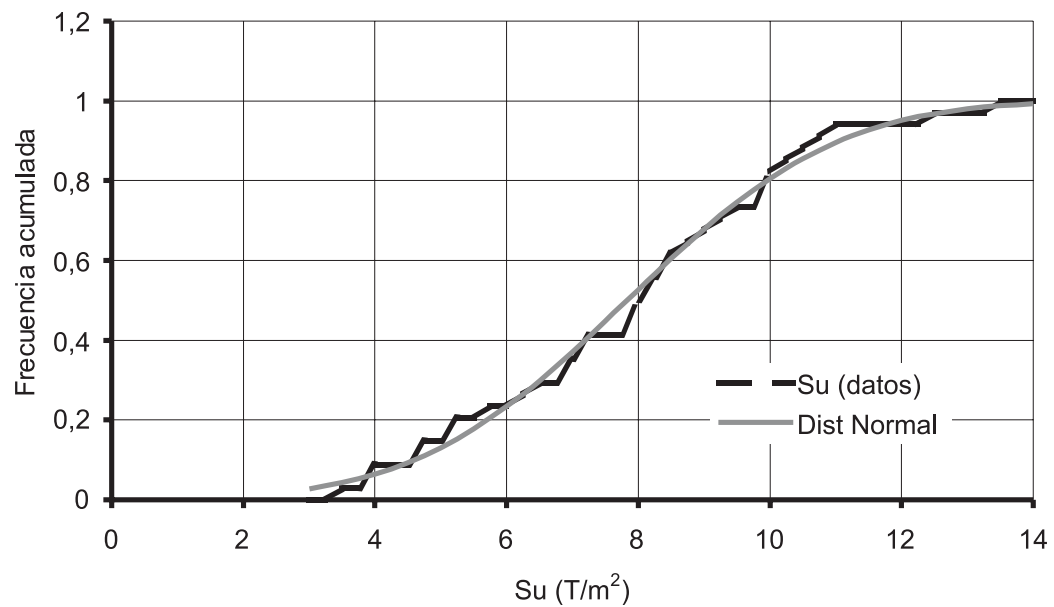
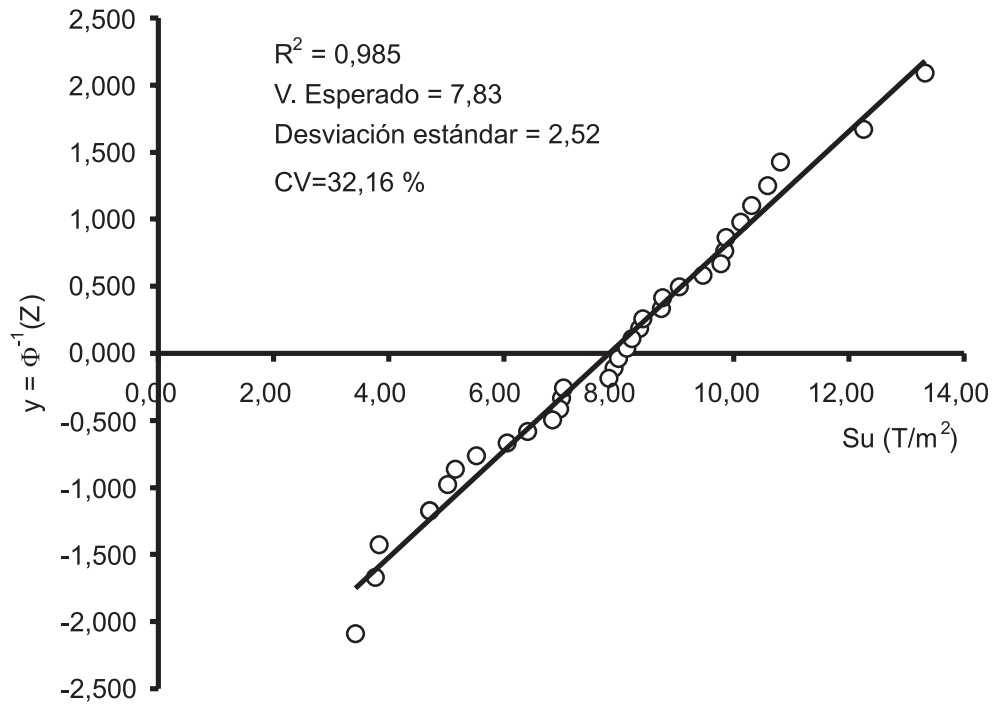


Lámina 5.5

Comparación de los valores de Su con una distribución Normal y una Lognormal

A) Distribución Normal



B) Distribución Lognormal

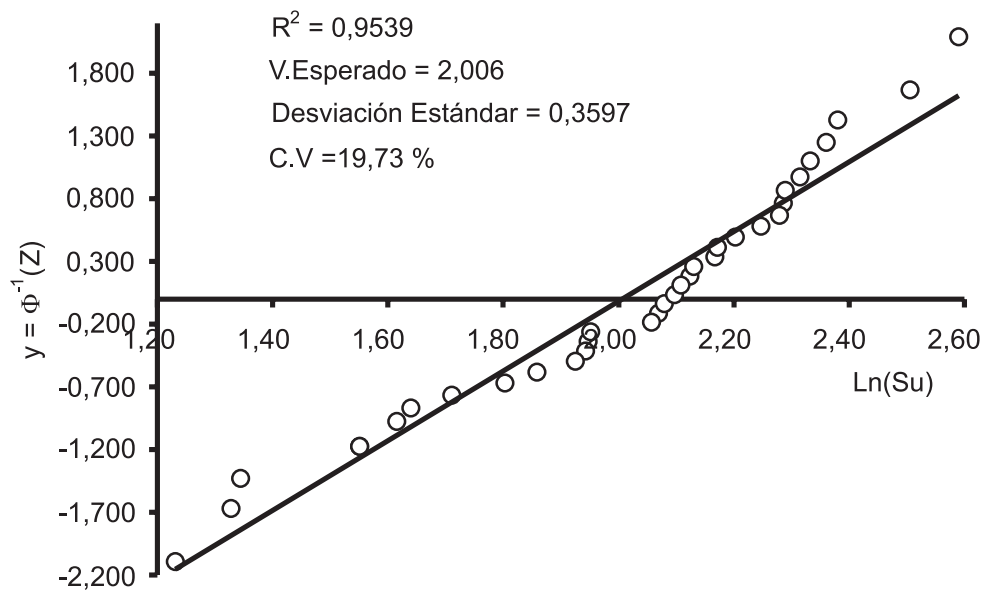


Lámina 5.5

la distribución lognormal dado que la relación empírica entre S_u y α a utilizar en este caso es logarítmica (lámina 5.2). El tratamiento matemático será más sencillo si se utiliza una distribución lognormal para S_u como se verá más adelante⁷⁶.

Finalmente, queda otro punto por analizar. Como puede verse en la lámina 5.4, en la figura donde se muestra la distribución de los valores de S_u con la profundidad, existe un valor extremo de $16,76 \text{ T/m}^2$ a una profundidad de $0,27 \text{ m}$. Los ajustes a las distribuciones normal y lognormal de S_u antes mencionadas se hicieron sin incluir este valor. Ahora debe probarse que en verdad dicho valor no pertenece a la población de los valores de S_u .

Como primer paso, considérese la distribución normal adoptada para S_u con un valor esperado: $E[S_u] = 7,83 \text{ T/m}^2$ y una desviación estándar $\sigma[S_u] = 2,52 \text{ T/m}^2$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor igual o superior al mencionado de $16,76 \text{ T/m}^2$ en una distribución así? La respuesta es: $P[S_u \geq 16,76] = N[7,83 ; 2,52] \geq 16,76 = 1,96 \times 10^{-4}$. Como se ve la probabilidad de obtener tal valor es, a efectos prácticos, nula. Si se considera el caso de la distribución lognormal para S_u , la probabilidad sería de $0,0118$, es decir del orden de 1% , que de todas formas es muy baja. Por lo tanto, no se tomará en cuenta este valor que podría interpretarse como un error en el ensayo o quizás como una muestra particular del terreno no afectada por las fisuras. En ambos casos, la probabilidad de que ese valor pertenezca a la población estadística de S_u es muy baja.

5.3.3 Análisis Probabilista de la relación entre α y S_u

A fin distinguir los valores de la resistencia no drenada obtenidos en el terreno donde se efectuó la prueba de carga (lámina 5.1) de los valores de la resistencia no drenada que figuran en la correlación de Kulhawy y Phoon (lámina 5.2) se seguirá denominando S_u a los primeros y se llamará $(S_u)_c$ a los segundos.

Como ya se estableció en el Capítulo 1, una regresión lineal puede interpretarse como una relación entre dos variables de forma que para cada valor de la primera la segunda pueda ser considerada como una variable aleatoria con una distribución

⁷⁶ El tratamiento será más sencillo porque, al tratarse de logaritmos, el logaritmo del producto de $S_u \cdot \alpha$ se convertirá en suma de sus logaritmos lo cual dará origen a una función aleatoria lineal que es más fácil de manejar que un producto. De todas formas, de no adoptarse esta simplificación en este momento habrá que adoptar otra simplificación similar más adelante mediante series de Taylor, como se hizo en el capítulo anterior.

probabilística (generalmente una distribución normal) de valor esperado dado por la regresión lineal en cada punto. La dispersión (varianza y desviación estándar) se consideran constantes en todo el rango de la regresión y, por lo tanto, independientes de los valores de la primera variable.

Según Berk y Carey (2000), para aceptar estas suposiciones hay que probar cuatro hipótesis:

- 1) La relación es lineal
- 2) La distribución probabilística que se asociará a al valor dado por la regresión lineal en cada punto es normal con un valor esperado de cero
- 3) Los residuos tienen varianza constante.
- 4) Los residuos son independientes entre sí.

En el caso de la relación entre α y $(Su)_c$, sólo sería necesario probar las tres primeras hipótesis, la cuarta, independencia de los residuos, es sólo para fenómenos estocásticos, es decir aquellos donde la variación depende del espacio o del tiempo.

Muchas de estas hipótesis pueden aceptarse como válidas por simple inspección visual, aunque para cada una existen métodos rigurosos de verificación (Crow). Así, en el caso de linealidad, las figuras de la lámina 5.2 parecen indicar que sí existe un relación lineal entre los logaritmos de α y $(Su)_c$.

Respecto a las otras dos hipótesis, distribución normal y varianza constante, en la lámina 5.6 se muestran los valores de la correlación y los calculados mediante la regresión y en la lámina 5.7, figura A se muestra el gráfico de los residuos en papel probabilístico normal. Se observa que éstos se adaptan bastante bien a una distribución normal cuyo valor esperado es $1,34 \times 10^{-5}$, es decir, prácticamente nulo y cuya desviación estándar es el inverso de 5,3294, es decir, 0,18764.

En la figura inferior de la misma lámina se presentan los valores de los residuos como función de los valores calculados de $(Su)_c$ (última vs. penúltima columnas en la tabla de la lámina 5.6). No parece haber una tendencia aparente en la dispersión de los residuos y

Lámina 5.6

Valores de la Relación entre $\ln(su)$ y $\ln(\alpha)$

$(Su)_c$ (Kg/cm ²)	$\ln(Su)_c$	Alfa	$\ln(Alfa)$	Regresión	Residuos
0,21	-1,56	0,86	-0,15	-0,05	-0,10
0,24	-1,43	0,87	-0,14	-0,11	-0,03
0,29	-1,25	0,80	-0,22	-0,18	-0,04
0,33	-1,12	0,81	-0,21	-0,23	0,02
0,51	-0,67	0,97	-0,03	-0,42	0,39
0,45	-0,79	0,74	-0,30	-0,37	0,07
0,49	-0,71	0,64	-0,44	-0,41	-0,04
0,51	-0,68	0,71	-0,35	-0,42	0,07
0,57	-0,56	0,75	-0,29	-0,47	0,18
0,59	-0,52	0,56	-0,58	-0,48	-0,10
0,69	-0,37	0,55	-0,60	-0,54	-0,05
0,69	-0,37	0,63	-0,47	-0,54	0,08
0,68	-0,38	0,66	-0,42	-0,54	0,12
0,80	-0,22	0,74	-0,30	-0,61	0,31
0,94	-0,06	0,60	-0,51	-0,67	0,17
1,01	0,01	0,61	-0,50	-0,70	0,21
1,13	0,13	0,61	-0,49	-0,75	0,27
0,94	-0,06	0,33	-1,12	-0,68	-0,44
1,03	0,03	0,35	-1,04	-0,71	-0,33
1,05	0,05	0,36	-1,03	-0,72	-0,31
1,13	0,13	0,38	-0,96	-0,75	-0,21
1,26	0,23	0,36	-1,02	-0,79	-0,22
1,31	0,27	0,40	-0,92	-0,81	-0,11
1,33	0,28	0,40	-0,91	-0,82	-0,09
1,40	0,34	0,33	-1,12	-0,84	-0,28
1,43	0,36	0,33	-1,12	-0,85	-0,27
0,98	-0,02	0,48	-0,74	-0,69	-0,04
1,06	0,06	0,45	-0,80	-0,72	-0,08
1,17	0,16	0,46	-0,77	-0,76	0,00
1,15	0,14	0,50	-0,69	-0,76	0,07
1,14	0,13	0,51	-0,67	-0,76	0,08
1,31	0,27	0,47	-0,76	-0,81	0,05
1,53	0,43	0,53	-0,63	-0,88	0,24
1,77	0,57	0,48	-0,74	-0,94	0,20
1,79	0,58	0,40	-0,92	-0,94	0,02
1,91	0,65	0,41	-0,89	-0,97	0,08
2,05	0,72	0,42	-0,87	-1,00	0,13
2,16	0,77	0,42	-0,86	-1,02	0,16
2,03	0,71	0,39	-0,94	-0,99	0,05
2,13	0,76	0,37	-1,00	-1,01	0,01
1,95	0,67	0,30	-1,20	-0,98	-0,22
2,20	0,79	0,31	-1,17	-1,03	-0,14
2,86	1,05	0,38	-0,97	-1,14	0,16
3,03	1,11	0,24	-1,42	-1,16	-0,26
3,04	1,11	0,27	-1,30	-1,16	-0,14
3,05	1,12	0,31	-1,19	-1,16	-0,02
3,68	1,30	0,34	-1,08	-1,24	0,16
4,50	1,50	0,34	-1,08	-1,32	0,24

Varianza Residuos: 0,03

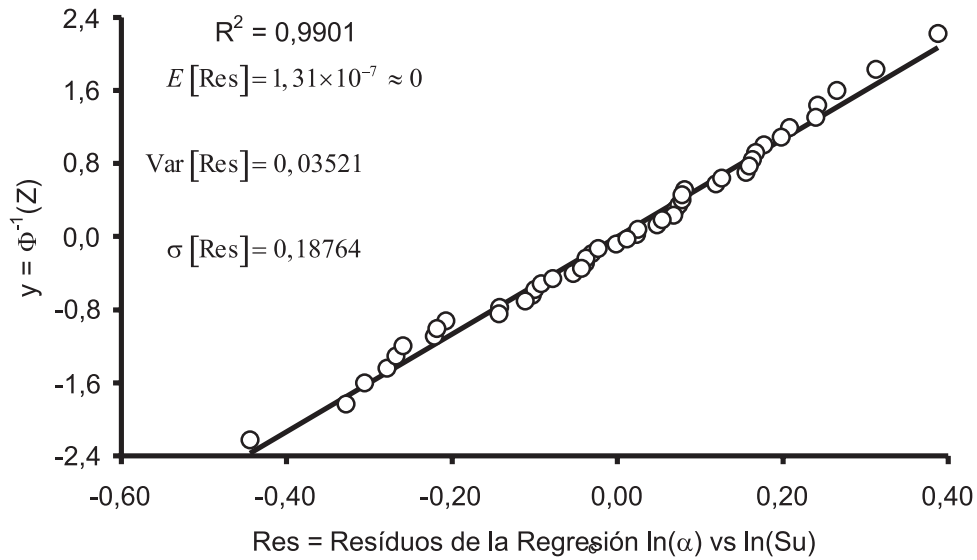
Desviación Estándar Residuos: 0,18

$\rho[\ln(Su), \ln(Alfa)]: -0,85$

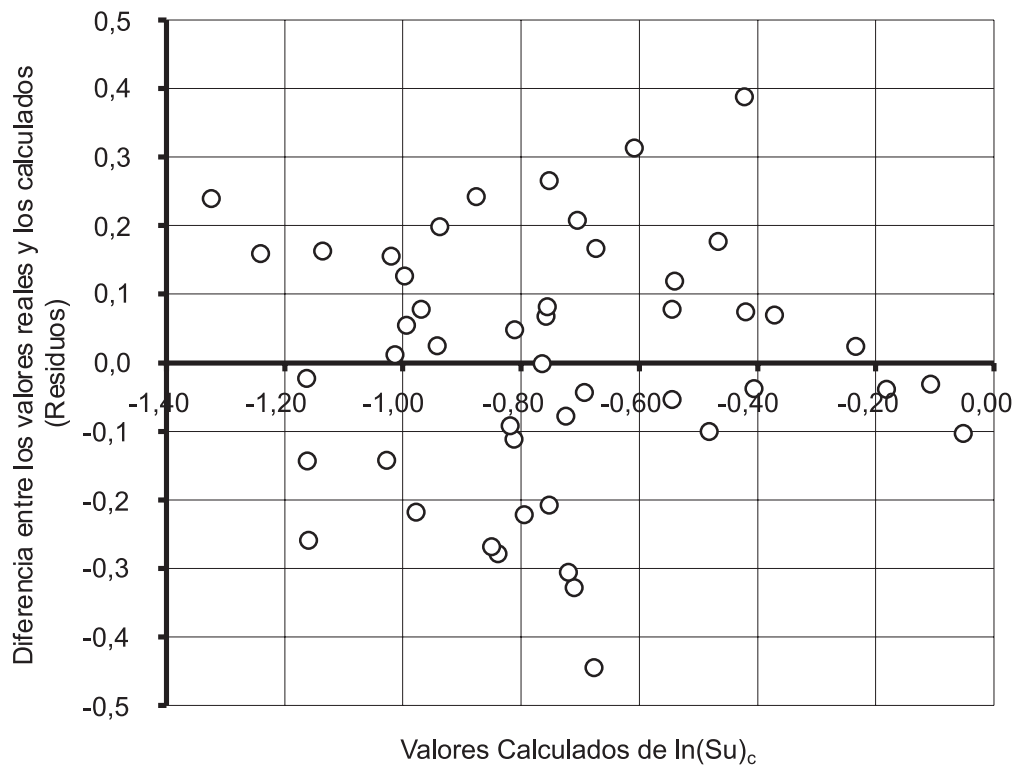
Lámina 5.7

Análisis de la regresión lineal entre α y S_u

A) Comparación de los residuos con una distribución normal



B) Variación de los residuos respecto a los valores calculados



su distribución parece ser aleatoria e independiente de los valores de $(S_u)_c$, con lo cual podrían aceptarse las hipótesis sobre la distribución normal y varianza constante para los residuos.

Aceptando pues, que las condiciones antedichas se cumplen, la relación entre los logaritmos de $(S_u)_c$ y α , para cualquier valor de establecido de S_u , puede expresarse como:

$$\ln(\alpha) = -0,415 \cdot \ln(S_u) - 0,6999 + N(0; 0,18764) \quad (5.6)$$

Donde el último término, representa la distribución normal de los residuos con valor esperado nulo.

5.3.4 Parámetros de la Distribución de Probabilidades de la Resistencia Lateral Unitaria, f_{su}

5.3.4.a Valor Esperado de la Resistencia Lateral

La expresión para el cálculo de la fricción lateral por el método alfa, en un pilote cilíndrico recto, en arcilla, viene dado por la ecuación (5.3) anterior:

$$F_{su} = f_{su} \times \pi \times D \times L$$

Donde f_{su} , la resistencia lateral unitaria última es el producto de la resistencia no drenada S_u por el factor de adherencia α . Es decir:

$$F_{su} = \pi \times D \times L \times (S_u \times \alpha) \quad (5.7)$$

Como en este caso se suponen distribuciones lognormales para α y S_u , es conveniente expresar la ecuación anterior mediante logaritmos:

$$\ln(F_{su}) = \ln(\pi \times D \times L) + \ln(S_u) + \ln(\alpha) \quad (5.8)$$

Dado que la ecuación anterior es una ecuación lineal de variables aleatorias el valor esperado de $\ln(F_{su})$ viene dado por:

$$E[\ln(F_{su})] = \ln(\pi \times D \times L) + E[\ln(S_u)] + E[\ln(\alpha)] \quad (5.9)$$

Esta es la principal razón de haber adoptado distribuciones lognormales para las variables, a pesar de que era más aceptable la distribución normal para S_u (lámina 5.5). También contribuyó el hecho de que la relación de Kulhawy y Phoon entre S_u y α ya viene

impuesta en logaritmos, como muchas otras en geotecnia. La razón de adoptar la distribución lognormal para S_u , es pues, el poder convertir los productos y cocientes en funciones lineales utilizando las propiedades de los logaritmos.

Volviendo al caso del valor esperado de F_{su} , ya se ha establecido que $E[\ln(S_u)] = 2,006$ (lamina 5.5, figura B), mientras que $E[\ln(\alpha)]$ debe calcularse a partir de la relación aleatoria dada por la ecuación (5.6) que es también una relación lineal:

$$\ln(\alpha) = -0,415 \cdot \ln(S_u) - 0,6999 + N(0; 0,18764)$$

En consecuencia y sabiendo que $E[N(0 ; 0,18764)] = 0$, el valor esperado de $E[\ln(\alpha)]$ viene dado por:

$$E[\ln(\alpha)] = -0,415 \cdot E[\ln(S_u)] - 0,6999 + 0,00 \quad (5.10)$$

Y dado que $f_{su} = S_u \cdot \alpha$ (ecuación(5.1)) entonces $\ln(f_{su}) = \ln(S_u) + \ln(\alpha)$. Por lo tanto:

$$E[\ln(f_{su})] = E[\ln(S_u)] + E[\ln(\alpha)]$$

Sustituyendo $E[\ln(S_u)]$ por 2,006, los valores esperados de las variables son:

$$E[\ln(S_u)] = 2,006$$

$$E[\ln(\alpha)] = -0,5757 \quad (5.11)$$

$$E[\ln(f_{su})] = 1,4303$$

Los valores esperados de S_u , α y f_{su} no pueden ser calculados todavía porque es necesario conocer las respectivas varianzas. Recuérdese que de acuerdo a lo expuesto en el capítulo 1, $\ln(E[f_{su}]) \neq E[\ln(f_{su})]$.

5.3.4.b Varianza y Desviación Estándar de la fricción lateral

Volviendo a la ecuación de $\ln(F_{su})$ (Ecuación(5.9))

$$\ln(F_{su}) = \ln(\pi \times D \times L) + \ln(S_u) + \ln(\alpha)$$

Aprovechando nuevamente las ventajas de las relaciones lineales, pero recordando que $\ln(Su)$ y $\ln(\alpha)$ no son variables independientes entre sí, la ecuación (4.3) del capítulo 4 se particulariza a:

$$\text{Var}[\ln(F_{su})] = \text{Var}[\pi \times D \times L] + \text{Var}[\ln(f_{su})] = 0 + \text{Var}[\ln(f_{su})] \quad (5.12)$$

$$\text{Var}[\ln(F_{su})] = \text{Var}[\ln(Su)] + \text{Var}[\ln(\alpha)] + 2 \cdot \sigma[\ln(Su)] \cdot \sigma[\ln(\alpha)] \cdot \rho[\ln(Su), \ln(\alpha)]$$

La varianza de $\ln(Su)$ ya se estableció en $0,3597^2 = 0,1293$ (figura B, lámina 5.5), mientras que la varianza de $\ln(\alpha)$ puede calcularse a partir de la relación entre α y Su (ecuación(5.6)):

$$\ln(\alpha) = -0,415 \cdot \ln(S_u) - 0,6999 + N(0; 0,18764)$$

Aplicando nuevamente esta propiedad de la varianza para funciones lineales pero ahora al caso de una función lineal de variables independientes entre sí:

$$\text{Var}[\ln(\alpha)] = (-0,415)^2 \cdot \text{Var}[\ln(S_u)] + (0,18764)^2 \quad (5.13)$$

$$\text{Var}[\ln(\alpha)] = 0,0523$$

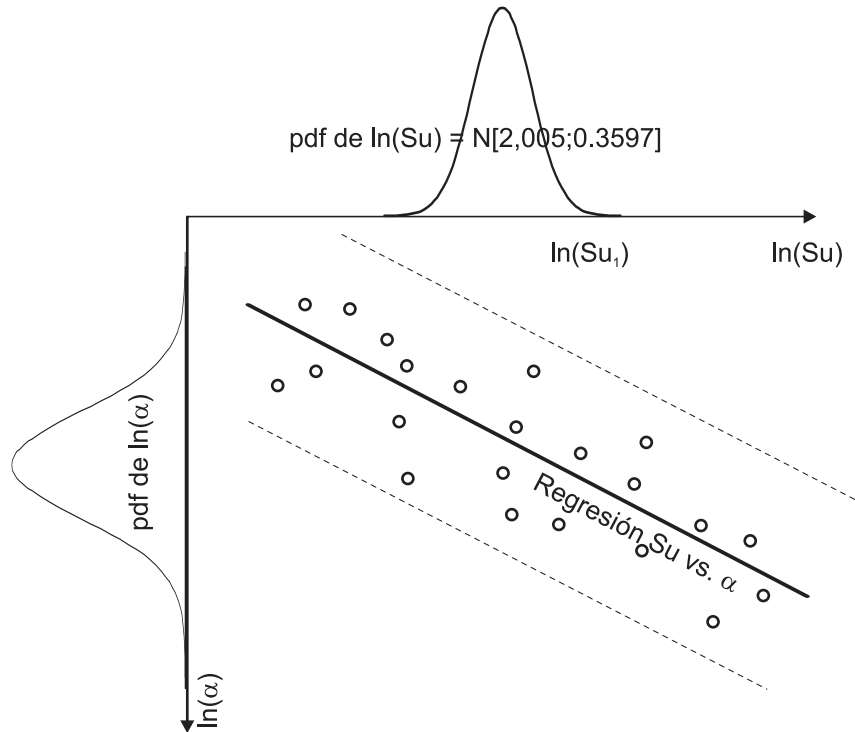
Es interesante observar que la dispersión o varianza de los valores de $\ln(\alpha)$ dependen tanto de la dispersión de la regresión lineal entre $\ln(su)$ y $\ln(\alpha)$ (término: $0,18764^2$ en la ecuación anterior), como de la dispersión de $\ln(Su)$ (término: $-0,4152 \times \text{Var}[\ln(Su)]$ en la misma ecuación). Esta condición se muestra gráficamente en la lámina 5.8. En la figura A de dicha lámina se muestra el planteamiento general del problema y en la Figura B la idealización con los valores esperados, regresión y dispersiones de las variables involucradas.

Para completar los componentes de la ecuación (5.12) queda por calcular el último factor, es decir, $\rho[\ln(Su), \ln(\alpha)]$. Este coeficiente de correlación no se conoce realmente. Se conoce el coeficiente de correlación entre una muestra de Su y una muestra de α , que son las que constituyen la regresión lineal de Kulhawy y Phoon presentada en la lámina 5.2. Para esta regresión el cuadrado del coeficiente de correlación muestral es

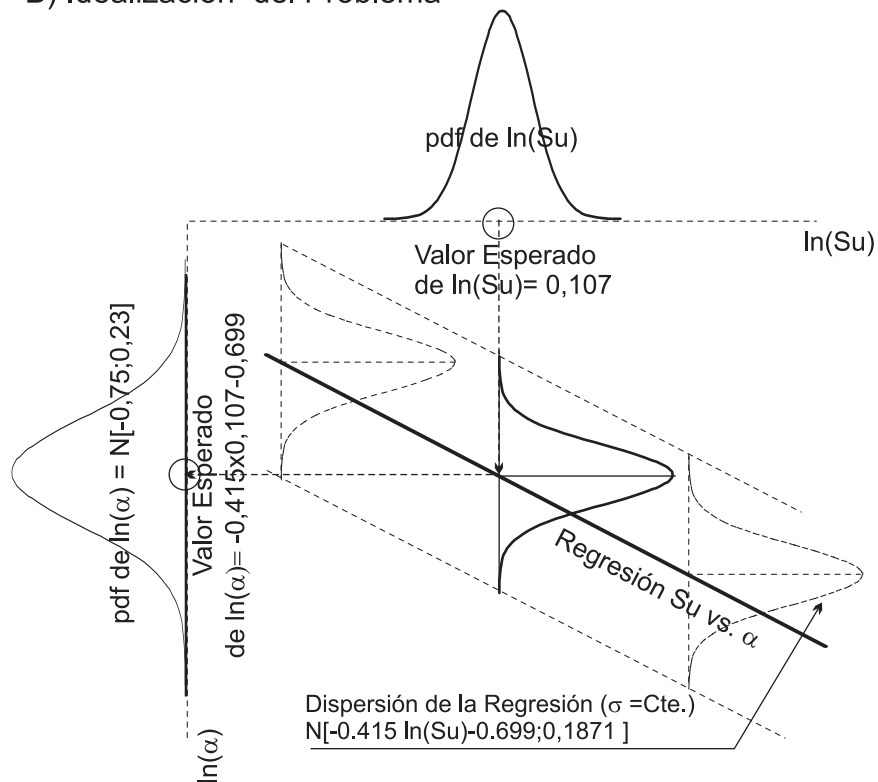
Lámina 5.8

Obtención de la dispersión de la variable dependiente ($\ln \alpha$) proveniente de una variable independiente, ($\ln Su$) y una regresión

A) Caracterización General del Problema



B) Idealización del Problema



$\{R[\ln(Su), \ln(\alpha)]\}^2 = 0,7211$ y, por lo tanto, $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = (0,7211)^{1/2} = -0,8491$ (ver también tabla lámina 5.6). Este valor de R es realmente una aproximación al coeficiente de correlación ρ .

Aceptando esta aproximación en lugar del valor legítimo del coeficiente de correlación, puede ahora calcularse la segunda de las ecuaciones (5.12):

$$\text{Var}[\ln(F_{su})] = 0,1293 + 0,05748 + 2\sqrt{0,1293}\sqrt{0,05748}(-0,8491)$$

$$\text{Var}[\ln(F_{su})] = \text{Var}[\ln(f_{su})] = 0,0419$$

Una vez conocidas las varianzas pueden calcularse los parámetros de las distribuciones lognormales de Su , α y f_{su} , aplicando las ecuaciones dadas en el capítulo 1 para este fin:

$$\sigma^2[\ln(X)] = \ln(CV^2[X] + 1)$$

$$E[\ln(X)] = \ln(E[X]) - \frac{1}{2}\sigma^2[\ln(X)]$$

A través de estas expresiones, se obtienen los siguientes valores:

Su

$$E[Su] = 7,93 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma[Su] = 2,95 \text{ T/m}^2$$

$$CV[Su] = 37,20\%$$

α

$$E[\alpha] = 0,58$$

$$\sigma[\alpha] = 0,134$$

$$CV[\alpha] = 23,10 \%$$

f_{su}

$$E[f_{su}] = 4,18 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma[f_{su}] = 0,87 \text{ T/m}^2$$

$$CV[f_{su}] = 22,54 \%$$

Es interesante observar que el coeficiente de variación de f_{su} es menor que los coeficientes de variación de las variables de donde proviene. Esto puede explicarse porque

la correlación entre estas dos últimas variables es negativa, es decir: a valores altos de S_u se opondrán valores bajos de α y viceversa, manteniendo el producto de ambos dentro de un rango intermedio y reduciendo así la dispersión.

5.3.5 Aplicación de los Resultados

El valor de la carga lateral última total, F_{su} , soportada por el pilote durante la prueba de carga fue de 90 toneladas (ver figura B, curvas carga asentamiento de la lámina 5.3) por lo tanto la f_{su} , promedio real viene dada por ese valor dividido entre el área perimetral del pilote (ecuación (5.3)), es decir:

$$f_{su} = \frac{F_{su}}{\pi \times D \times L} = \frac{90}{\pi \times 0,76 \times 7,0} = 5,38 \frac{T}{m^2}$$

Este valor es aproximadamente 29 % mayor que el valor esperado de 4,18 T/m² calculado para la población. La carga total calculada utilizando este valor sería de 70 toneladas aproximadamente en lugar de las 90 T medidas en la prueba)

A partir de los resultados obtenidos pueden plantearse preguntas como: ¿Qué valor de f_{su} debe utilizarse en el cálculo para tener un 95 % de confianza que el valor real de f_{su} será superior al utilizado en el cálculo?

Dado que se conocen los parámetros de la distribución normal de los logaritmos de f_{su} : $E[\ln(f_{su})] = 1,43 \text{ T/m}^2$ y $\sigma[f_{su}] = 0,87 \text{ T/m}^2$, puede calcularse, mediante tablas o cualquier logicial adecuado, el valor de $\ln(f_{su})$ que corresponde a un área de 5% en la distribución normal de los logaritmos de f_{su} ⁷⁷. Dicho valor resulta igual a 1,101, por lo tanto f_{su} para una confiabilidad de 95% es igual a: $e^{1,101} = 3,01 \text{ T/m}^2$. Este resultado expresa que existe sólo una probabilidad de 5% de que el valor real de f_{su} sea menor que 3,01 T/m² y 95% de que sea mayor⁷⁸. Por supuesto, la pregunta anterior y su respuesta suponen el no conocer el resultado de la prueba de carga y, además, lleva implícita la aceptación del método de cálculo como exacto.

⁷⁷ Recuérdese según lo tratado en el capítulo 2 que el área de la fdp correspondiente a un valor de una variable es la misma que en la fdp de la transformación en este caso, la transformación es de la forma $Y=\ln(X)$

⁷⁸ El ingeniero siempre espera que los valores de la resistencia por él calculados sean iguales o menores que los de la demanda.

5.3.6 Importancia del coeficiente de correlación

En el cálculo de la desviación estándar de f_{su} intervinieron las desviaciones estándar de las poblaciones lognormales supuestas para Su y α y el coeficiente de correlación de la relación entre ambas ($R = -0,85$, lámina 5.2). Este coeficiente de correlación proviene de la comparación dos muestras de 48 elementos de Su y α (correlación de Kulhawy y Phoon). Esta correlación, como ya se ha dicho, es muestral y no poblacional por lo tanto el coeficiente de correlación obtenido es una aproximación al verdadero entre poblaciones.

La expresión general para el coeficiente de correlación muestral (capítulo 1) cuando se trata de N pares de muestras de las variables aleatorias X e Y , viene dada por:

$$R[X, Y] = \frac{CoV[x, y]}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m_x) \cdot (y_i - m_y)}{N - 1} \cdot \frac{1}{s_x \cdot s_y}$$

Comparando esta expresión con la también indicada en el capítulo 1 para la pendiente, m , de la regresión lineal y manipulando ambas puede concluirse que:

$$R[\ln(Su); \ln(\alpha)] = m \frac{s_x}{s_y} \quad (5.14)$$

Si se utiliza esta expresión para calcular el coeficiente de regresión de $\ln(Su)$ vs. $\ln(\alpha)$, pero, en lugar de emplear las desviaciones estándar de la muestra que forman la correlación de Kulhawy y Phoon, se utilizan las de las poblaciones de ambas variables, y recordando que $m = -0,415$; $\sigma[\ln(Su)] = 0,36$ y $\sigma[\ln(\alpha)] = 0,23$; se obtiene:

$$R[\ln(Su); \ln(\alpha)] = -0,415 \times \frac{0,36}{0,23} = -0,65$$

Si con este valor se calcula nuevamente la desviación estándar de f_{su} se obtiene $\sigma[\ln(f_{su})] = 0,27$ en lugar de 0,20, obtenida anteriormente utilizando $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,85$.

Indiscutiblemente, este nuevo valor de $R[\ln(f_{su}); \ln(\alpha)] = -0,65$ es un híbrido que toma valores muestrales (m) y poblacionales ($\sigma[\ln(Su)$; $\sigma[\ln(\alpha)]$), pero los resultados calculados

coinciden mucho mejor con los obtenidos por el método de Monte Carlo como se describe a continuación.

Ya se estableció en el capítulo anterior, que siempre es conveniente utilizar el método de Monte Carlo como una verificación de los resultados de otros métodos. Por esta razón se utilizó este método como verificación de los resultados obtenidos hasta ahora.

En la lámina 5.9 se muestra el diagrama de flujo del procedimiento seguido para la aplicación del método de Monte Carlo. Se observa que en cada iteración es necesario generar dos números aleatorios, el primero de ellos para la obtener un valor del $\ln(Su)$. Este valor a su vez servirá para obtener el valor esperado de $\ln(\alpha)$ en la regresión. Mediante el segundo número aleatorio se obtiene un valor de alfa en la distribución pertinente al valor esperado antes obtenido. Se obtienen así en cada ciclo sendos valores de los logaritmos de Su y α cuya suma conduce a un valor del logaritmo de f_{su} . El proceso se repitió cinco mil ciclos y posteriormente se calcularon los promedios y desviaciones estándar de todas las variables que intervienen en el cálculo.

En la figura A de la lámina 5.10 se comparan los resultados analíticos utilizando el coeficiente de correlación obtenido mediante la ecuación (5.14) con los provenientes del método de Monte Carlo. En los parámetros relativos a Su y α las diferencias porcentuales en ambos métodos son insignificantes. Ello no significa nada en particular, pues el método de Monte Carlo se nutre de las distribuciones supuestas para estas variables. Es interesante observar, sin embargo, que el coeficiente de correlación generado a través del método de Monte Carlo es igual al calculado mediante la fórmula (5.14). Ello es también consecuencia de las condiciones impuestas al método en este caso y no significa ninguna mejora en el coeficiente de correlación de Kulhawy y Phoon. Simplemente, lo que indica es que si se desea una mejor coincidencia entre el método analítico (ecuación(5.12)) y el método de Monte Carlo debe usarse el coeficiente de correlación dado por la ecuación (5.14) en la ecuación (5.12). La calidad de la respuesta siempre estará sujeta a la calidad de la correlación entre Su y α y a la calidad del ajuste de las poblaciones supuestas para estas variables en cada caso.

El valor de f_{su} calculado suponiendo $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,65$ fue de $4,34 \text{ T/m}^2$ en lugar de $4,18$ calculado con $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,85$. La diferencia no es importante, pero si

Lámina N° 5.9

Diagrama de Flujo para la Aplicación del del Método de Monte Carlo al Cálculo de la Distribución de fs

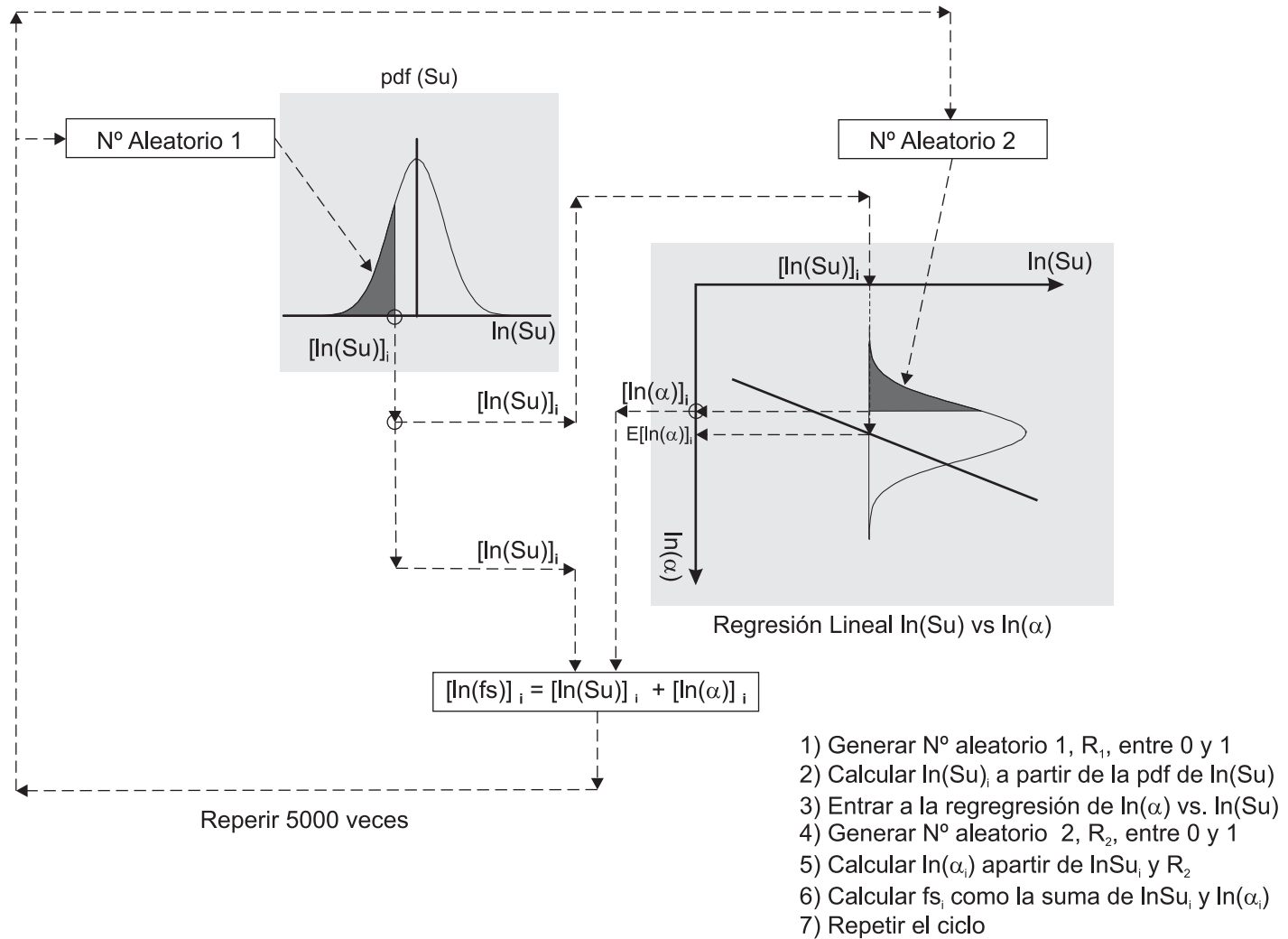


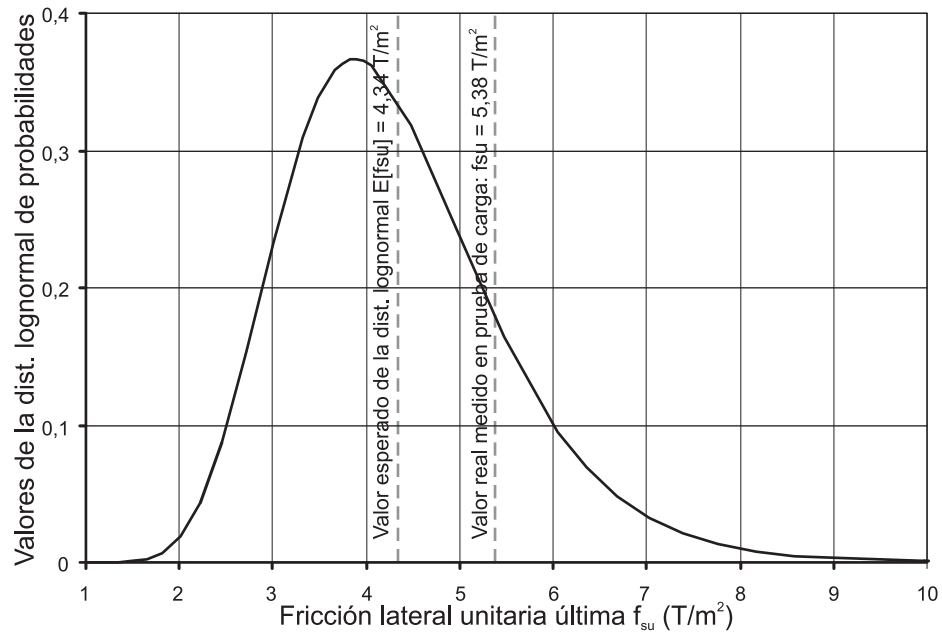
Lámina 5.10

Resultado de los Cálculos de la Capacidad por Fricción Lateral Última de un Pilote por Métodos Probabilísticos

A) Parámetros de la Distribución de Probabilidades Calculados y Valores Obtenidos por el Método de Monte Carlo

Variable	Calculado	M. Carlo 5000 ciclos	Diferencia (%)	Variable	Calculado	M. Carlo 5000 ciclos	Diferencia (%)
ln(Su)				Su			
E[ln Su]	2,01	2,00	-0,41	E[Su]	7,93	7,85	-0,90
σ [ln Su]	0,36	0,36	-0,88	σ [Su]	2,95	2,92	-0,81
Var[ln Su]	0,13	0,13	-1,75	Var[Su]	8,68	8,54	-1,61
ln(α)				α			
E[ln(α)]	-0,58	-0,57	-0,17	E[α]	0,58	0,58	0,01
σ [ln(α)]	0,23	0,23	-1,45	σ [α]	0,13	0,13	-2,11
Var[ln(α)]	0,05	0,05	-2,87	Var[(α)]	0,02	0,02	-4,17
R[ln(Su), ln(α)]	-0,65	-0,65					
ln(fsu)				fsu			
E[ln fs]	1,43	1,42	-0,51	E[fsu]	4,34	4,30	-0,76
σ [ln fsu]	0,27	0,27	-0,62	σ [fsu]	1,20	1,19	-0,96
Var[ln fsu]	0,07	0,07	-1,24	Var[fsu]	1,45	1,42	-1,91

B) Distribución Lognormal de Probabilidades



lo es la dispersión. El coeficiente de variación de f_{su} en el primer caso fue de 20,57 % mientras que en el segundo es de 27,65 %. Con este nuevo parámetro, el valor de f_{su} que debería usarse en los cálculos para tener un 95% de confianza de que el valor real de f_{su} será mayor es de 2,68 T/m², en lugar de 3,01 T/m² calculado con $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,85$. La respuesta no debe extrañar: un coeficiente de correlación de 0,85 indica menos dispersión que uno de 0,65 y por lo tanto más confianza en los cálculos. La decisión de cuál usar queda a cargo del ingeniero.

5.3.7 Probabilidad de Falla

¿Cuál es la probabilidad de falla de un pilote calculado de esta manera? Si se acepta por falla el que el valor calculado sea mayor que el valor real de la prueba, la pregunta a responder es: ¿ $P[f_{su} \geq 5,38 \text{ T/m}^2]$? De los 5000 valores obtenidos aleatoriamente por el método de Monte Carlo, 861 de ellos resultaron inferiores al valor real del pilote. Según la definición de probabilidad como frecuencia relativa dada en el capítulo 1: $P[f_{su} \geq 5,38 \text{ T/m}^2] = 861 / 5.000 = 17,20\%$. En vista de que los resultados obtenidos por el método de Monte Carlo son casi idénticos a los obtenidos a partir de la fdp de f_{su} cuando se emplea $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,65$, puede concluirse que la probabilidad de falla será la misma si se calcula a través de la fdp mencionada.

En geotecnia es usual un factor de seguridad de 2,00 o 2,50 según la magnitud de la obra (Coduto, 1993, tabla 11.1). Para un factor de seguridad de 2,0 la probabilidad de falla en este caso es de $P[f_{su}/2 \geq 5,38 \text{ T/m}^2]$. En este caso sólo 2 valores de los 5000 generados en el método de Monte Carlo superaron este valor. Por lo tanto $P[f_{su}/2 \geq 5,38 \text{ T/m}^2] = 2/5000 = 0,0004 (4 \times 10^{-4})$.

En la figura B de la lámina 5.10 se muestra la distribución lognormal de f_{su} calculada también con $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,65$. En la misma figura se muestra el valor esperado y el valor real medido en la prueba.

Finalmente, si se utiliza $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,85$, la probabilidad de falla viene dada por: $P[f_{su} \geq 5,38 \text{ T/m}^2] = 16,06 \%$, la cual es algo inferior a la calculada con $R[\ln(Su), \ln(\alpha)] = -0,85$, como era de esperar.

Bibliografía Utilizada

- 1 **Abramson** L.W. Lee T.H. Sarma S. Boyce G.M.1996. Slope Stability and Stabilization Methods. J. Wiley
- 2 **ASCE** 1972 Performance of Earth and Earth Supported Structures, Purdue University.
- 3 **Ashford** S.A, Roth L.H, Madsen S.L, Anderson D.G. 1992 FS=1,5 Is it Appropriate for Embankment Design? Stability and Performance of Slope and Embankments-II. A 25 year perspective ASCE. Berkeley
- 4 **Baecher** G.B, 2000 Performance Confirmation of Constructed Geotechnical Facilities. Geoinstitute ASCE.
- 5 **Beer** F.P. Johnston E.R. 1962 Mechanics for Engineers Statics and Dynamics McGraw Hill
- 6 **Benjamin** J.R y Cornell C.A..1970 Probability, Statistics and decision for Civil Engineers. McGraw-Hill
- 7 **Berk** K.N Carey P. 2000 Data Analysis with Microsoft Excel. Duxbury,Thomson Learning
- 8 **Bowles** J. E, 1996 Foundation Analysis and Design 5ta. ED. McGraw Hill
- 9 **Burland** J.B, 1973 Shaft Friction of Piles in Clay-A simple Fundamental Approach.(CP33/73)Building Research Establishment.Building Research PressVol 3 1978. The Construction Press
- 10 **Cacuot** y Kerisel 1966 Traite de mecanique des sols. Gauthier Villars. (Traducción al Español por Leopoldo García Iturbe, Gustavo Linares Esteves y Julio Estrada Manchón 1969. Interciencia)
- 11 **Centeno** W, R 1982 Inspección y Control de Obras Civiles. Ediciones Vega
- 12 **Christian** J.T., Ladd C.C., Baecher G.B., 1992 Reliability and Probability in Stability Analysis. Stability and Performance of Slopes and Embankments-II. ASCE Geotechnical Special Publication,
- 13 **Coduto** D.P, 1993 Foundation Design, Principles and Practices. Editorial Prentice Hall
- 14 **Coyle** H. M, Castello R. R, 1981 New Design Correlations for Piles in Sand. ASCE Journal of the Geotechnical Division Vol 107 N° GT 7
- 15 **Craig** R.F.1978 Soil Mechanics. 2da Edición.Van Nostrand Reinhold Company
- 16 **Crow** E.L., Davis F.A., Maxfield M.W., 1960 Statistics Manual, Dover Books.
- 17 **Das** B.M.1999 Shallow foundations. CRC Press
- 18 **Dawson** E.,Motamed F.Sadanathapillai N. Roth W. Geotechnical Stability Analysis by Strength Reduction. 2000. Slope Stability Analysis. Geotechnical Special Publication.Geo-Institute of the American Society of Civil Engineers
- 19 **Ekeland** Ivar,1998 Al Azar. Segunda Edición, Editorial Gedisa, Colección Límites de la Ciencia. Volumen 26
- 20 **Ellison** R. D,D' Apollonia, E.Thiers G.R.1971. Load-Deformation for Bored Piles. Journal of the Geotechnical Engineering Division. ASCE Vol 97 N° SM4
- 21 **Fleming** W.G.K, Weltman A.J, Elson W.K. 1985 Piling Engineering. Surrey University Press
- 22 **Gleick** J. 1988 Caos, La Creación de una Ciencia. Editorial Seix Barral
- 23 **Graham** J 1984. Slope Instability. Editado por Brunnsden D. Prior B. *Capítulo 6. Methods of Stability Analysis* Editorial J Wiley
- 24 **Hansen** J.B, 1970 A Revised and Extended Formula for Bearing Capacity. Boletín N° 28 Danish Geotechnical Institute.
- 25 **Harr** M. E 1987 Reliability Based Design in Civil Engineering. Dover Publications
- 26 **Hasofer** A.M. Lind. N 1974 An Exact and Invariant First-Order Reliability Format. Journal of Engineering Mechanics 100 N° EM1

- 27 **Hassan** A.M., Wolff T.F., 2000. Effect of Deterministic and Probabilistic Models on Slope Reliability Index. Slope Stability 2000. Geotechnical Special Publication. Geo-Institute of the American Society of Civil Engineers.
- 28 **Hoel** P.G., 1971 Introduction to Mathematical Statistics (4th edition) John Wiley & Sons.
- 29 **Janbu** N. 1972 Slope Stability Computations, Embankment Dam Engineering. Casagrande Volume. John Wiley and Sons
- 30 **Jiménez** S. J, De Justo A. J, Serrano G. A, 1984 Geotécnia y Cimientos, Tomo 2 Editorial Rueda
- 31 **Koosis** D. J, 1973. Probability. Ed Wiley
- 32 **Kulhawy** F. H, Phoon K.K, 1993 Drilled Shaft Side Resistance in Clay Soil to Rock. Design and Performance of Deep Foundations, ASCE Special Publication N° 38
- 33 **Kulhawy** F.H, Jackson C.S. 1989 Some observations on Undrained Side Resistance of Drilled Shafts. Foundation Engineering Current Principles and Practices. ASCE Special Publication
- 34 **Ladd** C.C., Rixner J.J., Gifford D.G. 1972 Performance of Embankment with Sand Drains on Sensitive Clay. Performance of Earth and Earth Supported Structures. Specialty Conference. ASCE, Purdue University
- 35 **Ladd** C.C., 1972 Test Embankment on Sensitive Clay. Performance of Earth and Earth Supported Structures. Specialty Conference. ASCE, Purdue University
- 36 **Lambe** T.W. 1964 Methods of Estimating Settlement. JSMFD. Sept, 1964. (Ver también Design of Foundation for Control of Settlement. Publicación Especial ASCE 1964)
- 37 **Lambe** T.W. Whitman R.V. 1970 Soil Mechanics. John Wiley and Sons
- 38 **Lechman** J.B., Griffiths D. V., 2000 Analysis of the Progression of Failure of Earth Slopes by Finite Elements. Slope Stability 2000. Geotechnical Special Publication. Geo-Institute of the American Society of Civil Engineers.
- 39 **Long** J.H, Wysockey M.H. 1999 Accuracy of the Methods for Predicting Axial Capacity of Deep Foundations, Analysis Construction and Testing of Deep Foundations. Geoinstitute ASCE
- 40 **Low** B.K., Gilbert R.B., Wright S.G. 1998 Slope Reliability Analysis Using Generalized Method of Slices. Journal of Geotechnical and Environmental Engineering. ASCE. Abril 1998
- 41 **Mandel** J. 1964 The Statistical Analysis of Experimental Data, Dover
- 42 **Meyerhof** G.G. 1955 Influence of roughness of the base and ground-water conditions on the ultimate bearing capacity of foundations. Géotechnique 5
- 43 **Meyerhof** G.G. 1964 Shallow Foundations. Design of Foundations for Control of Settlements. ASCE
- 44 **Meyerhof** G.G. 1976 Bearing Capacity and Settlements of Pile Foundations. The Eleventh Terzaghi Lecture. ASCE Journal of the Geotechnical Engineering Division Vol 100 N° GT3
- 45 **Mohan** D. Jain J.S. Kumar V. Load-Bearing Capacity of Piles 1963 Geotechnique Volumen XIII, 1, pg. 76
- 46 **Neely** W. J, 1990. Bearing Capacity of Expanded Base Piles in Sand. ASCE Journal of Geotechnical Engineering Vol 116 N° 1
- 47 **Neely** W. J, 1990. Bearing Capacity of Expanded Base Piles with Compacted Concrete Shafts. ASCE Journal of Geotechnical Engineering Vol 116 N° 9
- 48 **Nowac** S. A, Collins K.R. 2000 Reliability of Structures MacGraw Hill
- 49 **O' Neill** M.W, Reese L.C, 1972 Behavior of Bored Piles in Beaumont Clay. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division. ASCE Vol 98 SM2
- 50 **Peck** R.B. Hanson W.E y Thornburn T.H. 1973 Foundation Engineering 2da. Edición. John Wiley and Sons

- 51 **Reese** L.C, O'Neill M.W. 1989 New Design Methods for Drilled Shafts from Common Soil and Rock Tests. Foundation Engineering Common Principles and Practices. ASCE Special Publication
- 52 **Schmertmann** J. M. 1955 The Undisturbed Consolidation of Clay. Transactions ASCE Vol 120.
- 53 **Shackelford** C.D, Nelson P.P. Roth M.J. 1996 Uncertainty in the Geologic Environment. ASCE
- 54 **Simon** R.M., Christian J.T. Ladd C.C. 1974 Analysis of Undrained Behavior of Loads on Clay, Proceedings of the conference on Analysis and Design in Geotechnical Engineering. ASCE University of Texas.
- 55 **Spiegel** M.R. 1975 Probability and Statistics, Schaum Outline Series, McGraw Hill,
- 56 **Tan** C.K. Duncan J.M. 1991 Settlements of Footings on Sands, Accuracy and reliability Geotechnical Engineering Congress. ASCE
- 57 **Terzaghi** K. 1943 Theoretical Soil Mechanics, John Wiley
- 58 **Terzaghi** K. Peck R. Mesri G. 1996 Soil Mechanics in Engineering Practice. ED. John Wiley
- 59 **Tolinson**, M.J. 1977 Pile Design and Construction Practice. Ed. Viewpoint
- 60 **Vesic** A.S. 1973 Analysis of ultimate loads of shallow foundations. Journal of Soil Mechanics. Foundation Div. ASCE N° 99,1.
- 61 **Vijayvergiya** V. N, Fitch J.A 1972 A new way to predict capacity of piles in clay. Proceedings of the 4th Annual Offshore technology Conference. Ver también MacCelland B. The ninth Terzaghi Lecture. ASCE Octubre 1972
- 62 **Whitaker** T. 1976 The design of piled foundations. Segunda Edición. Pergamon Press
- 63 **Whitman** R. V. 1984 Evaluating Calculated Risk in Civil Engineering. 17th. Terzaghi Lecture. Journal of Geotechnical Engineering. ASCE. Vol 110, N° 2

Símbolos y Nomenclatura

α	Factor de Adhesión lateral terreno-pilote
$A \cap B$	Intersección de los eventos A y B
$A \cup B$	Unión de los eventos A y B
β	Índice de confiabilidad
B	Ancho de una fundación
$b(x, N, p)$	Distribución de Bernoulli
c	Cohesión
C_c	Índice de compresibilidad
CH	Arcilla de alta compresibilidad
$CIUC$	Ensayo triaxial isotrópicamente consolidado no drenado
c'_m	Cohesión efectiva movilizada
C_x^N	Combinaciones de N elementos tomados de x en x
CR	Relación de compresión
Cr	Índice de recompresibilidad
$CV[]$	Coefficiente de variación de una fdp
d	Profundidad de asiento de una fundación
D	Diámetro
Δ	Incremento
$\Delta'\sigma_v$	Cambio en el esfuerzo vertical efectivo: $\sigma'_{vf} - \sigma'_{vo}$
e	Relación de vacíos
$E[]$	Valor esperado o promedio de una fdp
e_0	
E_a	Valor de la fuerza de Empuje Activo según la fórmula de Rankine
ε_z	Deformación vertical
ϕ	Ángulo de Fricción Interna
F	Valor de la fuerza de fricción entre la base de un muro y el terreno de fundación
$\Phi(Z)$	Valores de la función normal reducida
fdp	Abreviatura de Función Distribución de Probabilidades
ϕ'_m	Ángulo efectivo de fricción interna movilizado
FPA	Abreviatura de Función de Probabilidades Acumulada
FS	Factor de Seguridad
f_{su}	Resistencia lateral unitaria máxima (última) en un pilote
F_{su}	Resistencia lateral total máxima (última) en un pilote
$f_Y(y)$	Función de Distribución de probabilidades de la variable aleatoria Y
$F_Y(y)$	Función de Probabilidades Acumulada de la variable aleatoria Y
γ	Peso Unitario de del suelo
H	Altura
I_{xx}	Momento de inercia de un área,volumen o masa respecto a un eje XX
L	Longitud
μ	Coefficiente de fricción entre la base de un muro y el terreno de fundación

m	Promedio de los valores de una muestra
$N(a,b)$	Distribución Normal de promedio "a" y Desviación Estándar "b"
N_q, N_γ, N_c	Factores en la ecuación de capacidad portante de una fundación
$P[A]$	Probabilidad del evento A
P'_c	Presión crítica de sobreconsolidación
$p_X(x_i)$	Probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x_i
$p_{xy}(x,y)$	Función Densidad Conjunta de Probabilidades de x e y
Q	Resistencia o capacidad de una estructura a un cierto efecto o carga
q_s	Presión aplicada por una fundación al terreno
q_{sadm}	Presión admisible o de trabajo del terreno (q_{su}/FS)
q_{su}	Presión última o capacidad de soporte de una fundación
$\mathcal{R}$	Carga o efecto de una carga sobre una estructura
ρ	Asentamiento
R	Empuje de Rankine, Coeficiente de correlación muestral
r	Coeficiente de correlación muestral
RR	Relación de recompresión
$\rho_{xy}(X,Y)$	Coeficiente de correlación de las variables aleatorias X e Y
s	Resistencia al corte
σ	Esfuerzo normal
s	Desviación estándar de los valores de una muestra
$\sigma[]$	Desviación Estándar de una fdp
S_u	Resistencia no drenada de una arcilla
σ'_{vf}	Esfuerzo vertical efectivo final
σ'_{vo}	Esfuerzo vertical efectivo inicial
τ	Esfuerzo cortante
V	Volumen
V_0	Volumen inicial
$Var[]$	Varianza de una fdp
W	Peso
Z	variable aleatoria reducida