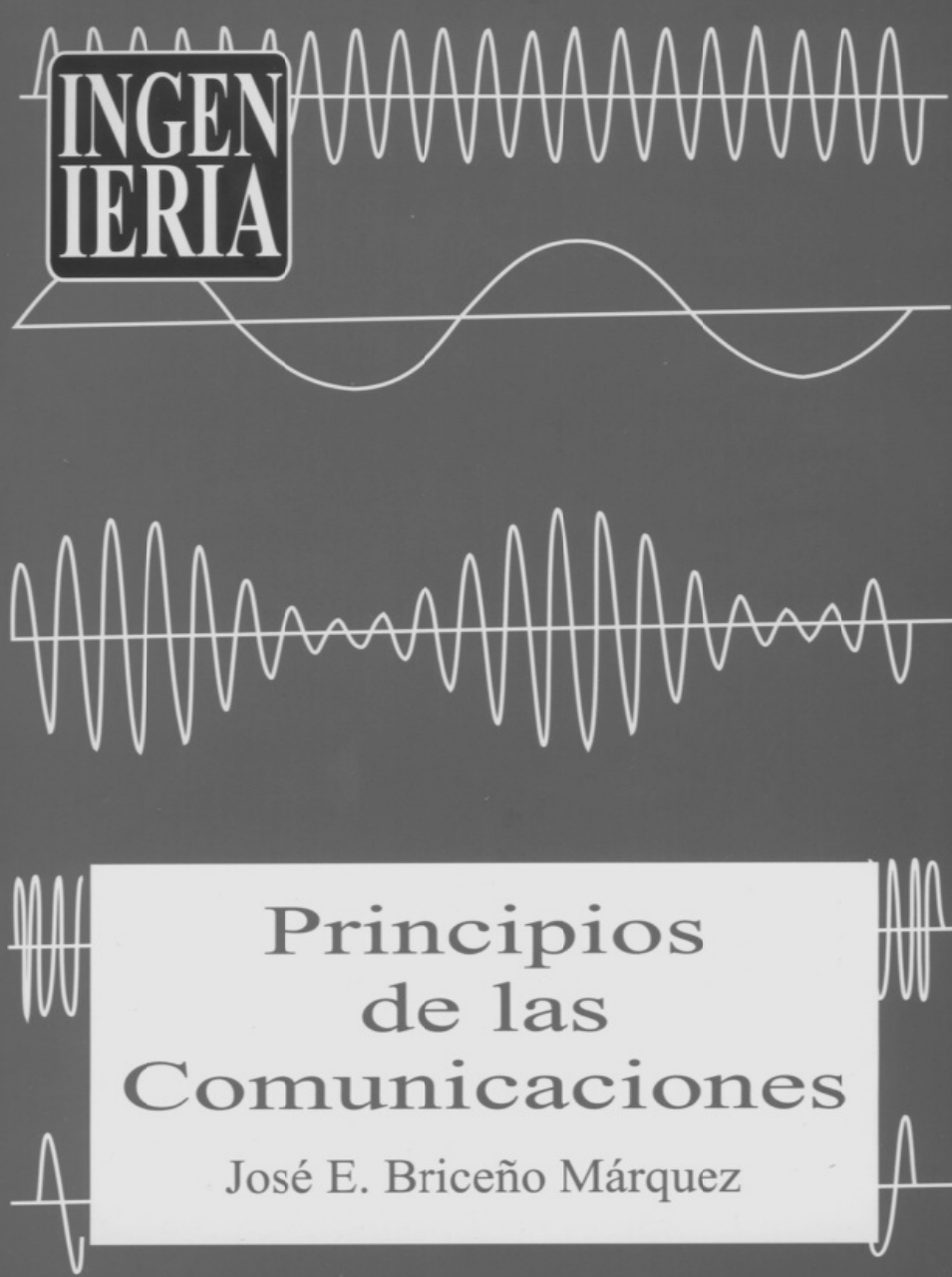


The cover features several white line-art waveforms on a dark background. At the top, a high-frequency sine wave spans the width. Below it, a single cycle of a lower-frequency sine wave is shown. In the middle, a complex, irregular waveform resembling a signal trace is displayed. At the bottom, two short segments of waveforms are positioned on the left and right sides of the central title box.

**INGEN
IERIA**

**Principios
de las
Comunicaciones**

José E. Briceño Márquez

ULA

Facultad de Ingeniería
Publicaciones



Edición Digital III

**PRINCIPIOS
DE LAS
COMUNICACIONES**

**José E. Briceño M., Dr. Ing.
Profesor Titular, ULA**

Mérida, Venezuela, Noviembre 2012

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

La primera edición de este libro fue recomendada para su edición y publicación por el Departamento de Electrónica y Comunicaciones de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes, en su Reunión Ordinaria realizada el 14 de Diciembre de 1989.

Está prohibida la reproducción total o parcial de este libro sin previa autorización del autor.

Ediciones: 1990, 1993, 1998, 2004, Digital I 2005, Digital II 2009, Digital III 2012
Código:

Impreso en Mérida, Venezuela
Taller de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería,
Universidad de Los Andes

ÍNDICE DE MATERIAS

PREFACIO A LA EDICIÓN DIGITAL	xiii
PREFACIO	xiv
CAPÍTULO I	1
REPRESENTACIÓN ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. MODELOS DE SEÑALES	4
1.2.1. Señales Determinísticas y Aleatorias	4
1.2.2. Señales Periódicas y no Periódicas	5
1.2.3. Señales de Energía y de Potencia	5
1.2.4. Señales Singulares	9
La Rampa Unitaria	10
El Escalón Unitario	10
La Función Signo	11
El Impulso Unitario Delta Dirac	12
1.2.5. Señales Ortogonales	14
1.2.6. Realizabilidad Física de las Señales	15
1.3. EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	16
1.3.1. Representación Espectral	16
1.4. SERIES Y ESPECTROS DE FOURIER	19
1.4.1. Señales Periódicas	19
Definición	20
1.4.2. Series de Fourier	21
Definición	21
La Serie Trigonométrica de Fourier	21
La Serie Exponencial de Fourier	23
1.4.3. El Espectro Discreto	25
Propiedades del Espectro Discreto	28
1.4.4. Espectro de Potencia de Señales Periódicas	29
Teorema de Parseval	29
1.5. LA TRANSFORMADA DE FOURIER	32
1.5.1. Introducción	32
1.5.2. El Espectro Continuo	34
1.5.3. Propiedades de la Transformada de Fourier de Señales Reales	36
1.6. DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA	40
Teorema de Raleigh	40
1.7. TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	42
1.7.1. Teorema de la Superposición o Linealidad	42
1.7.2. Teorema de la Traslación o Desplazamiento en el Tiempo	43
1.7.3. Teorema del Cambio de Escala	43
1.7.4. Teorema de la Dualidad o Simetría	44
1.7.5. Teorema de la Traslación o Desplazamiento en Frecuencia	45

Teorema de la Modulación	46
1.7.6. Teorema de la Diferenciación e Integración en el Tiempo	49
1.7.7. Teorema de la Diferenciación e Integración en Frecuencia	51
1.8. TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS	53
1.9. DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA	56
1.9.1. Introducción	56
Definición	56
1.9.2. Teorema de la Modulación para Señales de Potencia	58
1.10. RELACIÓN ENTRE EL ANCHO DE BANDA Y LA DURACIÓN DE UNA SEÑAL	61
1.11. FUNCIONES DE CORRELACION	63
1.11.1. Introducción	63
1.11.2. Autocorrelación	64
Definición	65
Tiempo de Correlación	66
Propiedades de la Función de Autocorrelación	66
1.11.3. Teorema de Wiener-Kintchine	69
1.11.4. Teorema de la Modulación para Señales de Potencia	71
1.11.5. Intercorrelación	72
Propiedades de la Función de Intercorrelación	73
1.11.6. Detección de una Señal en presencia de Ruido	73
1.12. RESUMEN	75
PROBLEMAS DE APLICACIÓN	75
CAPÍTULO II	91
REPRESENTACIÓN ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS	91
2.1. INTRODUCCIÓN	91
2.2. CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS	91
2.2.1. Concepto de Sistema	91
2.2.2. Clasificación de Sistemas	92
2.2.3. Caracterización de Sistemas Lineales en el Dominio del Tiempo	93
Respuesta Impulsional	93
Sistemas Lineales Invariantes y Variantes en el Tiempo	94
Causalidad y Estabilidad en Sistemas Lineales	98
2.2.4. Caracterización de Sistemas Lineales en el Dominio de la Frecuencia	99
Función de Transferencia	99
Criterio de Paley-Wiener	101
Propiedades de la Función de Transferencia	101
2.3. LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN	104
2.3.1. Aplicaciones en el Análisis de Señales y Sistemas	104
2.3.2. Interpretación Gráfica de la Convolución	110
2.4. DISTORSIÓN EN LAS SEÑALES	113
2.4.1. Transmisión sin Distorsión	113
Sistemas de Fase Lineal	116
2.4.2. Tipos de Distorsión	117

Distorsión de Amplitud	117	
Distorsión de Fase	117	
Distorsión no Lineal	120	
Compansión	122	
2.5. INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS		123
2.6. FILTROS		125
2.6.1. Introducción	125	
2.6.2. Filtros Ideales	125	
Filtro Ideal Pasabajo	125	
Filtro Ideal Pasabanda	126	
Filtro Ideal Pasaalto	127	
Filtro Ideal Eliminador de Banda	127	
2.6.3. Ancho de Banda en Filtros Reales	132	
2.7. SEÑALES Y SISTEMAS PASABANDA		137
2.7.1. La Transformada de Hilbert	137	
2.7.2. La Señal Analítica	142	
2.7.3. Señales Pasabanda	144	
2.7.4. Señales Moduladas y Bandas Laterales	150	
Modulación en Doble Banda Lateral	150	
Modulación en Banda Lateral Única	152	
2.7.5. Señales Pasabanda de Potencia	154	
2.7.6. Sistemas Pasabanda	155	
2.8. FUNCIONES DE CORRELACIÓN EN SISTEMAS LINEALES		159
2.8.1. Autocorrelación Entrada/Salida	159	
2.8.2. Intercorrelación Entrada/Salida	161	
2.9. RUIDO EN SISTEMAS		163
2.9.1. Introducción	163	
2.9.2. Ruido Interno	163	
Ruido de Disparo	163	
Ruido Térmico	163	
Circuitos Equivalentes del Ruido	164	
Potencia de Ruido Disponible	166	
2.9.3. Ruido Blanco	167	
Ruido Blanco Pasabanda de Banda Angosta	169	
2.9.4. Ancho de Banda Equivalente del Ruido	172	
2.9.5. Caracterización del Ruido en Sistemas	173	
Relaciones Señal/Ruido en Sistemas de Comunicación	173	
Relaciones Señal/Ruido en un Receptor con Detección Coherente	174	
Ganancia de Conversión o de Detección,	176	
Cifra de Ruido	178	
Cifra de Ruido en Sistemas en Cascada	180	
Cifra de Ruido en Redes Atenuadoras	182	
Medida del Ruido	186	
2.10. RESUMEN		188
PROBLEMAS DE APLICACIÓN		188

CAPÍTULO III	203
VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS	203
3.1. INTRODUCCIÓN	203
3.2. NOCIONES DE LA PROBABILIDAD	203
3.2.1. Definición de la Probabilidad	203
Definición Empírica de la Probabilidad	204
Sucesos Mutuamente Excluyentes o Disjuntos	204
Definición Axiomática de la Probabilidad	205
3.2.2. Probabilidad Conjunta. Probabilidad Condicional. Independencia	205
Probabilidad Conjunta	205
Probabilidad Condicional	205
Independencia Estadística	206
Probabilidad Total	207
Teorema de Bayes	207
3.2.3. Pruebas de Bernoulli	208
3.2.4. Otras Probabilidades	210
3.2.5. Modelo Probabilístico de un Canal de Comunicaciones	215
3.3. VARIABLES ALEATORIAS. FUNCIONES DE PROBABILIDAD	218
3.3.1. Variables Aleatorias Discretas	218
3.3.2. Variables Aleatorias Continuas	220
3.3.3. Distribuciones Conjuntas	223
Distribución Condicional	224
3.4. FUNCIONES DE PROBABILIDAD ESPECIALES	226
3.4.1. Distribución Normal o Gaussiana	226
3.4.2. Distribución de Poisson	228
3.4.3. Distribución Binomial	229
3.4.4. Distribución Uniforme	229
3.5.5. Distribución de Laplace	230
3.4.6. Distribución de Cauchy	230
3.4.7. Distribución de Raleigh	231
3.4.8. Distribución de Maxwell	232
3.5. FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS	232
Teorema Fundamental	232
3.6. PROMEDIOS ESTADÍSTICOS	234
3.6.1. Definición	234
3.6.2. Valor Promedio de Funciones de Variables Aleatorias	235
Valor Promedio de una Función de una Variable Aleatoria	235
Valor Promedio de una Función de Variables Aleatorias	235
Valor Promedio de Variables Aleatorias Estadísticamente Independientes	236
3.6.3. Momentos	236
Momentos Centrales	238
3.7. FUNCION CARACTERÍSTICA	240

3.8. PROCESOS ALEATORIOS O ESTOCÁSTICOS	243
3.8.1. Introducción	243
Estadísticas de Primer Orden	245
Estadísticas de Segundo Orden	246
3.8.2. Estacionariedad y Ergodicidad	247
Estacionariedad en el Sentido Estricto	247
Estacionariedad en el Sentido Amplio	247
Ergodicidad	248
3.8.3. Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia	246
Función de Autocorrelación	250
Densidad Espectral de Potencia	251
3.9. PROCESOS ALEATORIOS DISCRETOS	252
3.9.1. Secuencias Aleatorias Discretas	252
Procesos Cicloestacionarios	253
Determinación de la Densidad Espectral	255
3.9.2. Densidad Espectral y Función de Autocorrelación de Secuencias PCM	257
3.9.3. Secuencias Binarias Seudoaleatorias	283
Características Espectro-Temporales	263
Dispersión o Ensanchamiento del Espectro (Spread Spectrum)	265
Generación de Secuencias Binarias Seudoaleatorias	267
3.10. RESUMEN	269
PROBLEMAS DE APLICACIÓN	270
CAPÍTULO IV	277
PRINCIPIOS DE LA TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN	277
4.1. INTRODUCCIÓN	277
4.2. MODELO DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN	277
Fuente de Información	278
Transductor de Entrada	278
Transmisor	278
Canal	278
Receptor	279
Ruido	279
Ancho de Banda y Potencia de Transmisión	279
4.3. CONCEPTO Y MEDIDA DE LA INFORMACIÓN	280
Cantidad de Información	280
4.4. CARACTERIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN	2782
4.4.1. Entropía	282
4.4.2. Velocidad de Información	285
4.4.3. Codificación de Fuente. Codificación de Canal	286
4.4.4. Velocidad de Modulación	288
4.4.5. Redundancia Agregada	288
4.5. CARACTERIZACIÓN DEL CANAL	290

4.5.1. Ancho de Banda del Canal	290
4.5.2. Capacidad del Canal	294
Definición	294
Canal sin Ruido	295
Canal con Ruido	296
Rendimiento Máximo del Canal	297
4.6. EL SISTEMA IDEAL DE TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN	298
4.6.1. Introducción	298
4.6.2. El Receptor Ideal	299
Intercambio Ancho de Banda-Relación Señal Ruido	299
Relación de Expansión del Ancho de Banda,	300
4.7. RESUMEN	301
PROBLEMAS DE APLICACIÓN	302
CAPÍTULO V	313
MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS	313
5.1. INTRODUCCIÓN	313
5.2. TEORÍA DEL MUESTREO UNIFORME DE SEÑALES	314
5.2.1. Introducción	314
5.2.2. Teoremas del Muestreo Uniforme de Señales	314
Teorema N° 1. Teorema del Muestreo de Shannon	314
Teorema N° 2. Recuperación o Interpolación de la Señal	316
Teorema de Parseval para Señales Muestreadas	319
Teorema N° 3. Muestreo de Señales Pasabanda	320
Muestreo en el Dominio de la Frecuencia	321
Teorema N° 4	321
5.2.3. Muestreo Práctico de Señales Pasabajo	326
Muestreo Natural	326
Muestreo con Retención	328
5.2.4. Distorsión Producida por el Muestreo	333
Distorsión de Solapamiento (Aliasing)	333
Distorsión de Interpolación	334
Distorsión por Efecto de Apertura	334
5.3. SISTEMAS DE MODULACIÓN ANALÓGICA DE IMPULSOS	335
5.3.1. Introducción	335
5.3.2. Modulación de Amplitud de Impulsos (PAM)	336
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PAM	337
5.3.3. Modulación de la Duración de Impulsos (PDM)	339
Demodulación PDM	340
Ancho de Banda en Sistemas PDM	343
5.3.4. Modulación por Posición de Impulsos (PPM)	343
Ancho de Banda y Relaciones S/N en PPM y PDM	346
5.3.5. Comparación entre las Ganancias de Conversión en PAM, PDM y PPM	350
5.4. SISTEMAS DE MODULACIÓN DIGITAL DE IMPULSOS	352
5.4.1. Introducción	352

5.4.2. Modulación de Impulsos Codificados (PCM)	353
Cuantificación y Codificación	353
Demodulación de Señales PCM	357
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PCM	358
5.4.3. Modulación Diferencial de Impulsos Codificados (DPCM)	365
5.4.4. Modulación Delta Lineal (DM)	358
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas de Modulación Delta Lineal	370
5.5. TÉCNICAS EN LA TRANSMISIÓN DE IMPULSOS	373
5.5.1. Introducción	373
5.5.2. Técnicas de Multicanalización o Multiplicidad	374
Técnicas de Multiplicidad por División de Tiempo (TDM)	375
5.5.3. Interferencia Intersímbolo	377
5.5.4. Códigos de Línea	385
Densidades Espectrales de algunos Códigos de Línea	381
Rendimiento Espectral de algunos Códigos de Línea	382
5.5.5. Métodos de Acceso Múltiple	385
Acceso Múltiple por División de Tiempo (TDMA)	386
5.6. RECEPCIÓN DE IMPULSOS EN BANDA DE BASE	387
5.6.1. Introducción	387
5.6.2. El Filtro Acoplado	388
5.7. TRANSMISIÓN Y RECEPCIÓN DE SEÑALES BINARIAS MEDIANTE PORTADORA MODULADA	392
5.7.1. Introducción	392
5.7.2. Demodulación y Sincronización de Señales Binarias Moduladas	393
Métodos de Demodulación	393
Sincronización de Portadora y Temporización	395
5.7.3. Modulación Binaria de Amplitud (ASK)	388
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas ASK	388
Demodulación Coherente de Señales ASK	400
Demodulación no Coherente de Señales ASK	403
5.7.4. Modulación Binaria de Frecuencia (FSK)	405
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas FSK	405
Principio de Ortogonalidad en Señales FSK	406
Ancho de Banda en FSK	408
Relaciones S/N en FSK	409
Demodulación Coherente de Señales FSK	409
Demodulación no Coherente de Señales FSK	410
5.7.5. Modulación Binaria de Fase (PSK)	415
Demodulación de Señales PSK	406
Modulación Binaria Diferencial de Fase (DPSK)	416
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PSK y DPSK	419
5.7.6. Comparación entre los Sistemas de Modulación Binaria	424
5.8. MODULACIÓN DIGITAL M-aria MEDIANTE PORTADORA MODULADA	425
5.8.1. Introducción	425
5.8.2. Modulación PSK M-aria	426
5.8.3. Modulación DPSK M-aria	430
5.8.4. Modulación FSK M-aria de Banda Ancha	432

Ortogonalidad de Señales FSK M-aria	434	
5.9. TRANSMISIÓN DE SEÑALES DIGITALES MEDIANTE DISPERSIÓN DEL ESPECTRO (SPREAD SPECTRUM)		435
5.9.1. Introducción	435	
5.9.2. Sistemas SS de Secuencia Directa (DSSS)	435	
Acceso Múltiple por División de Código (CDMA)	439	
5.9.3. Dispersión del Espectro mediante Conmutación de Frecuencias (FHSS)		442
5.9.4. Consideraciones Finales	445	
5.10. RESUMEN		446
PROBLEMAS DE APLICACIÓN		447
CAPÍTULO VI		463
MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES CONTINUAS		463
6.1. INTRODUCCIÓN		463
6.1.1. Esquemas de Modulación Analógica de Ondas Continuas	464	
6.2. MODULACIÓN LINEAL DE SEÑALES CONTINUAS		466
6.2.1. Introducción	466	
6.2.2. Modulación de Amplitud en Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida (DSB)	466	
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Modulación DSB	468	
6.2.3. Modulación de Amplitud con Portadora de gran Potencia (AM)	469	
Potencia y Rendimiento de Transmisión en AM	472	
Moduladores y Transmisores AM	477	
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Modulación AM	479	
Efecto Umbral en Sistemas AM	481	
6.2.4. Modulación en Banda Lateral Unica (SSB)	483	
Generación de Señales SSB	484	
Demodulación de Señales SSB	485	
Ancho de Banda y Relaciones S/N en Modulación SSB	486	
6.2.5. Modulación en Banda Lateral Residual (VSB)	480	
6.2.6. Comparación entre los Sistemas de Modulación Lineal	497	
6.3. TÉCNICAS DE TRASLACIÓN DE FRECUENCIAS		500
6.3.1. Conversión de Frecuencias	500	
Frecuencias Imagen	501	
El Receptor Superheterodino	501	
6.3.2. Multiplicidad por División de Frecuencia (FDM)	504	
Ancho de Banda de la Banda de Base Multicanal	505	
Multicanalización en Sistemas Telefónicos	506	
Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA)	506	
6.4. MODULACIÓN ANGULAR O EXPONENCIAL DE SEÑALES CONTINUAS		508
6.4.1. Introducción	508	
Esquemas de Modulación Angular de Señales Continuas	509	
Modulación de Fase. Modulación de Frecuencia	509	
Efecto de una Componente Continua en Modulación Angular	513	
6.4.2. Modulación Angular de Banda Angosta	513	

6.4.3. Modulación Angular de Banda Ancha	516
Modulación Sinusoidal Compuesta	521
6.4.4. Potencia y Ancho de Banda en Modulación Angular de Banda Ancha	522
Potencia en Modulación Angular	522
Ancho de Banda en Modulación Angular	523
6.4.5. Generación y Detección de Señales Moduladas en Angulo	528
Generación Directa de Señales Moduladas en Frecuencia	529
Generación Indirecta de Señales Moduladas en Frecuencia	532
Demodulación de Señales Moduladas en Ángulo	533
6.4.6. Interferencia y Relaciones S/N en Modulación Angular	538
Interferencia	538
Relaciones S/N en Modulación de Frecuencia	540
Efecto Umbral en Modulación de Frecuencia	544
Relaciones S/N en Modulación de Fase	546
6.4.7. Comparación entre los Sistemas de Modulación Angular	547
6.5. COMPARACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE MODULACIÓN DE SEÑALES CONTINUAS	548
6.5.1. Criterios de Comparación	548
6.5.2. Comparación entre los Sistemas de Modulación Angular vs Modulación Lineal	548
6.5.3. Intercambio “Ancho de Banda-Relación S/N” en Sistemas de Banda Ancha	549
6.5.4. Comparación entre los Sistemas de Banda Ancha	551
6.5.5. Características Generales de los Sistemas de Modulación de Ondas Continuas	553
6.6. RESUMEN	554
PROBLEMAS DE APLICACIÓN	554
APÉNDICE A	571
CÁLCULO NUMÉRICO DE LAS SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER	571
A.1. Cálculo Numérico de los Coeficientes de Fourier	561
A.2. La Transformada de Fourier Discreta (DFT)	573
Cálculo Directo de la Transformada de Fourier Discreta	576
A.3. La Transformada de Fourier Rápida (FFT)	576
Algoritmo FFT por Decimación en el Tiempo	576
APÉNDICE B	582
ESTÁNDARES DE TELEVISIÓN Y RADIODIFUSIÓN DIGITAL	582
B.1. Introducción	582
B.2. La Multiplicidad por División de Frecuencia Ortogonal (OFDM)	582
B.3. Estándares de Televisión Digital	588
B.4. Estándares de Radiodifusión Digital	591
APÉNDICE C	596
MISCELÁNEOS	596
C.1. El Espectro Electromagnético	596

C.2. Designación de las Bandas de Microondas	596
C.3. Bandas de Televisión (NTSC, CATV) y FM en VHF	597
C.4. Bandas de Televisión (NTSC, CATV) en UHF	597
C.5. Código ASCII o Alfabeto Internacional N° 5 de la UIT-T	598
C.6. Código Baudot	598
APÉNDICE D	599
TRANSFORMADAS	599
D.1. Teoremas de la Transformada de Fourier	599
D.2. Pares de Transformadas de Hilbert	599
D.3. Pares de Transformadas de Fourier	600
D.4. Otras Fórmulas de Interés	600
APÉNDICE E	601
FÓRMULAS MATEMÁTICAS	601
E.1. Identidades Trigonómicas	601
E.2. Integrales Indefinidas	602
E.3. Integrales Definidas	602
E.4. La Función Error	603
BIBLIOGRAFÍA	604

PREFACIO A LA EDICION DIGITAL I

Actualmente en Venezuela y en muchas partes del mundo se está observando la gran importancia que tiene la información en la vida cotidiana; esto ha permitido que la demanda de información vaya en aumento y por lo tanto se tenga que hacer uso de sistemas más sofisticados para lograr la generación, almacenamiento, administración y acceso de los datos.

La Biblioteca Digital de la Universidad de Los Andes es una colección de artículos, de trabajos de investigación y de libros de texto completos, disponibles a través de la Web, con la finalidad de contribuir a las actividades académicas y de investigación en cualquiera disciplina. Esta Biblioteca Digital permitirá la difusión a nivel mundial de la inmensa cantidad de obras producidas por el personal académico docente y de investigación de la Universidad.

Con esta finalidad, he puesto a disposición de la comunidad hispanoamericana los libros Transmisión de Datos y el presente libro Principios de las Comunicaciones, como una contribución a la enseñanza, tanto teórica como práctica, de las Telecomunicaciones.

Como una ayuda y colaboración para mis colegas profesores, pongo también a su disposición el Problemario de Comunicaciones que contiene la solución completa de todos los problemas planteados en el libro Principios de las Comunicaciones, Edición Digital I. Este Problemario, mis estimados colegas, lo pueden obtener dirigiéndose a mí directamente por correo electrónico; mi dirección electrónica es: jbriceros@yahoo.com. Esto me permitirá el establecimiento de contactos más personales con los potenciales usuarios del libro.

Espero que este texto les sea de utilidad en su diaria enseñanza.

José E. Briceño M., Dr. Ing.
Profesor Titular, ULA.
jbriceros@yahoo.com
Mérida, Venezuela, Abril 2005

PREFACIO A LA TERCERA EDICION

El presente texto es el resultado de más de cuatro décadas de enseñanza de las comunicaciones en la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Los Andes (ULA) y es una reedición corregida y aumentada del texto del mismo nombre editado por el Consejo de Publicaciones de la Universidad de los Andes y utilizado en los cursos del Pregrado de Ingeniería Eléctrica.

Este libro ha sido concebido para servir como introducción, a nivel de pregrado, a los principios básicos de la teoría moderna de la comunicación y a los sistemas de comunicación desde el punto de vista del análisis de sistemas. El método seguido consiste en la presentación de los principios matemáticos aplicados a los modelos físicos de los sistemas con ejemplos, hasta donde es posible, de sistemas de comunicación prácticos. No está contemplada la deducción o explicación de los principios matemáticos básicos utilizados.

Los requisitos necesarios para entender el material son conocimientos elementales de la teoría de las probabilidades y variables aleatorias, trigonometría, álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, convolución y nociones de circuitos eléctricos y electrónica, es decir, conocimientos a nivel de sexto o séptimo semestre de Ingeniería Eléctrica o Electrónica. El material, incluyendo los Apéndices, se cubre cómodamente en dos semestres o tres trimestres.

El texto está dividido en seis capítulos y cinco apéndices. Los dos primeros capítulos comprenden los principios básicos teóricos, el tercer capítulo es una introducción a la teoría de la probabilidad, variables y procesos aleatorios, en el cuarto capítulo se presentan los principios de la transmisión de información, y los capítulos quinto y sexto son aplicaciones en sistemas de comunicación prácticos. El procedimiento seguido se ha planteado principalmente desde el punto de vista determinístico; sin embargo, a todo lo largo del texto se hace continuas referencias a señales aleatorias, y para el lector poco familiarizado con estos conceptos, en el Capítulo III se presenta una breve introducción a las variables y procesos aleatorios. Nuestra intención es la de proporcionar al estudiante de pregrado conocimientos sólidos de los fundamentos teóricos como introducción, tanto analítica como intuitiva, a la metodología a seguir en el análisis, planificación, diseño y evaluación de sistemas de comunicación, y como una primera fase en el estudio de la Teoría Estadística de las Comunicaciones y Sistemas Avanzados de Comunicación.

La selección de tópicos, organización y presentación son consecuencia de nuestra experiencia en la enseñanza de esta materia. En particular, se hace énfasis en los principios y conceptos de los sistemas y de las aplicaciones más bien que en la instrumentación práctica, pues los dispositivos, circuitos y componentes pueden cambiar con la tecnología y son más del dominio de la electrónica que de las comunicaciones. A fin de facilitar el estudio no dirigido, el material se complementa con una bibliografía suficiente y con numerosos ejemplos resueltos y problemas al final de cada capítulo, en su mayor parte con respuesta. Para profesores de la materia hay disponible un Manual del Instructor con la solución completa de todos los problemas propuestos en el texto. Los interesados en este Manual se pueden dirigir directamente al autor.

Quizás en la Ingeniería de las Comunicaciones es donde se hace empleo muy extenso, tal vez abusivo, de las siglas. Esta “codificación” es necesaria por cuanto permite, a los iniciados, expresarse rápidamente y sin ambigüedades acerca de un tópico dado. La mayor parte de los libros de comunicaciones en idioma español son traducciones de otros idiomas, y cada traductor interpreta o traduce libremente y luego define unas siglas correspondientes a su traducción. El resultado son textos completamente ilegibles, aún para los iniciados. En este texto utilizaremos las siglas correspondientes al idioma inglés, pues la mayoría de la información pertinente se encuentra en este

idioma. Por ejemplo, para la “Modulación Diferencial de Impulsos Codificados” utilizaremos la sigla en inglés DPCM y no MDIC o MCID o MCPD o MICD, encontradas en cuatro textos diferentes.

Vamos a describir sumariamente el contenido de los capítulos que conforman el texto. En los Capítulos I y II se presentan las técnicas y modelos matemáticos necesarios para la representación de señales y sistemas, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Particularmente, se hace énfasis especial en los métodos clásicos para el análisis espectral de señales: las Series y la Transformada de Fourier, y se presenta un desarrollo unificado de la densidad espectral de potencia y de las funciones de correlación. En el Capítulo II se presenta un breve estudio de los sistemas lineales y su caracterización espectro-temporal, así como la descripción, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, de la transmisión de señales a través de filtros y canales lineales. La Transformada de Hilbert se define en términos muy sencillos y mediante el concepto de función analítica, se obtiene la descripción de señales pasabanda de banda angosta y el concepto de bandas laterales en señales moduladas. El Capítulo II concluye con un breve estudio del ruido en sistemas de comunicación y su caracterización como Relación Señal/Ruido, Temperatura de Ruido, Cifra de Ruido y Medida del Ruido.

En el Capítulo III se desarrollan algunos modelos probabilísticos de las variables y procesos aleatorios. El capítulo comienza con una breve revisión de los conceptos elementales más importantes de la teoría de la probabilidad y a continuación se introduce el concepto de variable aleatoria, tanto en su forma discreta como en su forma continua. El concepto de proceso aleatorio se presenta como un modelo para describir una colección de funciones del tiempo y se estudian las propiedades de los procesos estacionarios y ergódicos en relación con la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia. Por último, se estudian algunos modelos que representan secuencias aleatorias binarias de gran utilización en la teoría, práctica y diseño de sistemas comunicación digital y se introduce el concepto de dispersión del espectro (Spread Spectrum). El material presentado en este capítulo es solamente una introducción, o más bien un repaso, de la teoría de la probabilidad y procesos aleatorios, y no se pretende que sea un curso completo en sí mismo. El lector interesado en profundizar sus conocimientos en este campo puede consultar la bibliografía especializada.

En el Capítulo IV se presentan las ideas básicas de la Teoría de la Información más desde un punto de vista intuitivo que mediante desarrollos matemáticos avanzados. El concepto de información, la entropía, la velocidad de información, la velocidad de modulación, el ancho de banda de un canal y la capacidad de Shannon se presentan haciéndose énfasis en la codificación digital de señales y en las características de los canales reales. Se definen, asimismo, los parámetros básicos de un sistema ideal de transmisión de información.

El Capítulo V está dedicado a la modulación y transmisión de impulsos, bases de las técnicas del procesamiento digital de señales y de la transmisión de datos desde el punto de vista determinístico. Se comienza con la Teoría del Muestreo de Señales, utilizando las técnicas y conceptos estudiados en los Capítulos I y II. El muestreo y la recuperación de señales se tratan tanto desde un punto de vista teórico como práctico, y se hace énfasis de su importancia en los sistemas de modulación de impulsos. Se estudian los diferentes sistemas de modulación analógica (PAM, PDM y PPM) y digital (PCM, DPCM y DM) de impulsos y se comparan sus características en el caso de transmisión y recepción en banda de base. En este capítulo se estudia también la transmisión de impulsos binarios mediante portadora modulada y se describen los sistemas usuales para la transmisión de datos en presencia del ruido con aplicaciones a sistemas reales. Asimismo, se hace una breve introducción a la transmisión de señales digitales mediante dispersión o ensanchamiento del espectro (Spread Spectrum) y algunas de sus aplicaciones. Donde es aplicable,

se utilizan o citan las Recomendaciones del UIT-T (Unión Internacional de Telecomunicaciones-Sector de Telecomunicaciones) y del UIT-R (Unión Internacional de Telecomunicaciones-Sector de Radiocomunicación).

En el Capítulo VI se estudia la modulación y transmisión de señales continuas, tales como voz, música o video. Se definen los dos tipos de modulación de ondas continuas: lineal (Modulación de Amplitud) y exponencial (Modulación Angular), y se desarrollan las descripciones de los diferentes sistemas particulares, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Particular énfasis se da al comportamiento de los sistemas desde el punto de vista de la potencia (Relaciones S/N) como del ancho de banda, sin olvidar la complejidad en la instrumentación práctica. Se desarrolla el concepto de multicanalización o multiplex, y se dan algunos ejemplos de su aplicación en telefonía, radiodifusión y transmisión por satélites. El capítulo concluye con una comparación de todos los sistemas estudiados, tanto de impulsos como de ondas continuas, y se señalan algunas de sus aplicaciones en el campo de la transmisión de información. Igual que en el Capítulo V, la presentación se hará desde el punto de vista determinístico.

En el Apéndice A se presenta una breve introducción al cálculo numérico de los Coeficientes y Transformada de Fourier. En particular se estudia la Transformada de Fourier Discreta, se presentan algunas de sus aplicaciones, especialmente la Transformada de Fourier Rápida (Fast Fourier Transform, FFT), de gran aplicación en el Análisis Espectral de Señales. Los nuevos estándares de Televisión y Radiodifusión Digitales, así como la Modulación OFDM, se describen en el Apéndice B. En los Apéndices siguientes se da información adicional acerca del Espectro Electromagnético, las Bandas de Frecuencia en FM, VHF y UHF, así como fórmulas matemáticas, tablas de transformadas, etc., que son de amplia utilización en el texto.

Se ha hecho un esfuerzo considerable para presentar el material de tal manera que haya una progresión coherente desde los principios y conceptos hasta las consideraciones de diseño, sin profundizar demasiado en desarrollos matemáticos innecesarios, e intentando, en lo posible, interpretar en forma intuitiva los conceptos y resultados, así como su materialización física (dispositivos y circuitos).

Queremos dejar constancia de nuestro agradecimiento a los Profesores Ermanno Pietrosemoli y Néstor Angulo Reina (+), de la Cátedra de Comunicaciones de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de los Andes, cuyas valiosas sugerencias han contribuido a mejorar considerablemente la exactitud y claridad del texto

Finalmente, quiero dedicar este libro a Margot, mi esposa, por el apoyo que siempre me ha dado y por la paciencia que ha demostrado por el tiempo robado a su compañía y dedicado a la elaboración de este texto.

José E. Briceño M., Dr. Ing.
<jbriceros@yahoo.com>

Mérida, Venezuela, Agosto 2004

CAPÍTULO I

REPRESENTACIÓN ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

1.1. INTRODUCCIÓN

El propósito de un sistema de comunicación es el de transmitir información. Un sistema de comunicación comprende un transmisor, un canal sobre el cual la información se transmite, y un receptor para recoger la información y entregarla al destinatario. El canal de transmisión puede ser un simple par de conductores, un cable coaxial, una fibra óptica, una guía de ondas o el espacio libre.

La palabra “**comunicación**” parece privativa del ingeniero de comunicaciones o de los medios de comunicación de masas. La transmisión de medidas de voltaje, corriente, frecuencia, etc., desde una estación remota hasta el puesto de control es comunicación; la transmisión de datos a través de un cable coaxial en un sistema de automatización industrial es también comunicación. La transmisión de un programa de opinión por un medio de transmisión de masas también es comunicación. Hay un gran número de aplicaciones en las cuales la palabra “comunicación” se emplea indistintamente. Sin embargo, desde el punto de vista que nos ocupa, la palabra o palabras más apropiadas que describen el proceso que nos interesa son las de “transmisión de información”.

Como estaremos hablando continuamente de comunicación, y siendo la comunicación tan diversa y tan importante, sería interesante conocer algo de sus orígenes históricos y de los hombres que han sobresalido en su estudio y desarrollo.

La teoría moderna de la comunicación tuvo su origen en el estudio de las comunicaciones eléctricas y algunas de las ideas más importantes se originaron en los primeros intentos para establecer comunicaciones rápidas a larga distancia.

En 1832, Samuel Morse (1791-1877) logró la primera forma eficiente del telégrafo eléctrico. Como todos sabemos, el código Morse de telegrafía consta de puntos y rayas cuyas combinaciones se asignan a los símbolos del alfabeto (letras y números). La transmisión se efectuaba mediante conductores sobre postes y no había demasiados problemas en lo que se refería a la reproducción de la señal recibida en el extremo alejado. En 1843, Morse emprendió la tarea de construir una línea con cable subterráneo, pero encontró ciertas dificultades que más tarde afectaron a los cables submarinos aún más severamente. Las dificultades que Morse encontró, con su cable subterráneo, siguen siendo todavía un problema importante. En efecto, circuitos diferentes que conduzcan igualmente una corriente continua, no son necesariamente adecuados para una comunicación eléctrica en donde las corrientes son esencialmente variables. Si se transmiten puntos y rayas demasiado a prisa por cable subterráneo, estos puntos y rayas, que básicamente son impulsos, no pueden diferenciarse en el extremo receptor. Como se indica en la Fig. 1.1(a), cuando se transmite un corto impulso de corriente, se recibe en el extremo alejado del circuito un impulso de corriente mucho más largo, muy disperso. Asimismo, como se indica en la Fig. 1.1(b), cuando se transmite una señal clara y distinta, puede suceder que se reciba una señal difícil de interpretar.

Naturalmente, si los impulsos son lo suficientemente largos, la interpretación en el extremo receptor será completa, pero la velocidad de transmisión habrá disminuido apreciablemente. Es evidente, entonces, que hay una velocidad de transmisión límite asociada de algún modo con un circuito o canal dado. Los primeros telegrafistas estaban conscientes de esta limitación, y en sus esfuerzos para superarla se construyeron los primeros cimientos de la teoría de la comunicación.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

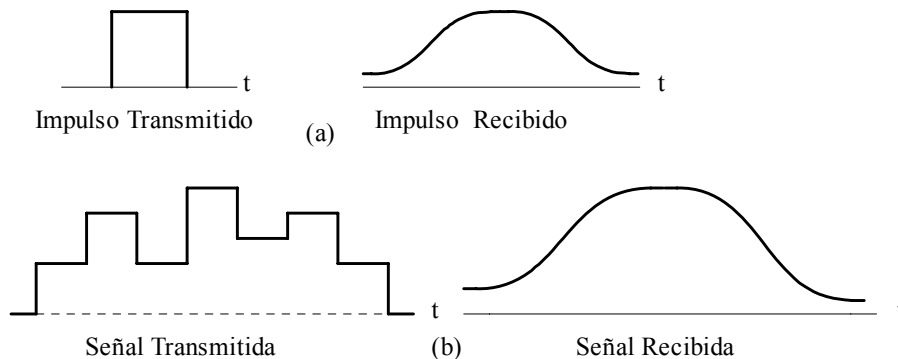


Fig. 1.1. Formas de Onda Transmitidas y Recibidas.

Pero no solamente eran las limitaciones del canal las que hacían difícil la interpretación. Durante las tormentas, sobre todo, aparecían señales extrañas que hacían aún más difícil la interpretación. Estas señales espurias, llamadas en general “ruido”, están siempre presentes en los sistemas de transmisión y dificultan la interpretación de la información contenida en un mensaje. Los telegrafistas de aquella época tenían un conocimiento, que podríamos llamar intuitivo, de las limitaciones de los sistemas físicos, pero hace falta algo más que un conocimiento intuitivo: se necesita un análisis matemático de estos fenómenos.

Desde muy pronto se aplicaron técnicas matemáticas a la solución de estos problemas, aunque el cuerpo completo de la teoría sólo se ha logrado en las últimas décadas. En 1885, William Thompson (1824-1907), conocido como Lord Kelvin, calculó en forma exacta la corriente recibida en un cable submarino cuando se transmitía impulsos (puntos y rayas). Un ataque más poderoso a tales problemas siguió a la invención del teléfono por Alexander Graham Bell (1847-1922), en 1876. En la telefonía las señales varían brusca y rápidamente en un amplio margen de amplitudes, con una rapidez mucho mayor que en la telegrafía manual; esto complicó aún más la recepción de la señales.

Muchos hombres ayudaron al establecimiento del tratamiento matemático de la telefonía. Hombres como Poincaré (1854-1912), Heaviside (1850-1925), Pupin (1858-1935), Baudot (1845-1903), son los más eminentes de ellos. Estos hombres usaron los métodos matemáticos establecidos por el físico francés Joseph Fourier (1768-1830), los cuales habían sido aplicados al estudio de las vibraciones y que se utilizan para analizar el comportamiento de señales eléctricas que varían de un modo complicado en función del tiempo. El Análisis de Fourier es de absoluta necesidad en el estudio de las comunicaciones eléctricas, porque provee las técnicas matemáticas con las cuales el ingeniero puede describir señales y sistemas no solamente en el dominio del tiempo sino también en el dominio de la frecuencia. Este es el principal objetivo de este texto.

El Análisis de Fourier se basa en la representación de una función complicada como una suma de funciones sinusoidales, y su utilidad depende de dos hechos físicos importantes: la invariancia en el tiempo y la linealidad. Un circuito eléctrico posee parámetros (R , L y C) que no varían en el tiempo (por lo menos a corto plazo); en términos más formales, la ecuación diferencial que representa al circuito es una ecuación cuyos coeficientes (los parámetros del circuito) son constantes. La linealidad significa, sencillamente, que si conocemos las señales de salida correspondientes a cualquier número de entradas enviadas separadamente, podemos calcular la señal de salida total simplemente sumando las señales de salida individuales; éste es el enunciado del teorema de superposición. El análisis de Fourier de las señales en función de sus componentes

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

frecuenciales, hace posible estudiar las propiedades de transmisión de un circuito lineal para todas las señales en términos de la atenuación y desfase que les son impuestas a su paso por el circuito, y proporciona a los ingenieros una asombrosa variedad de resultados que no pueden ser obtenidos de otro modo.

En 1917, Harry Nyquist, de la American Telephone and Telegraph Company, de los Estados Unidos, empezó a atacar los problemas de la telegrafía con métodos matemáticos más poderosos y secundado por una gran intuición y claridad de conceptos. Los primeros resultados de su trabajo los publicó en 1924 en el artículo **“Ciertos Factores que afectan a la Velocidad Telegráfica”** [Nyquist, 1924]. En este artículo, Nyquist trata varios problemas relacionados con la telegrafía y, en particular, aclara la relación entre la velocidad telegráfica y el número de valores o impulsos de corriente que pueden ser transmitidos y correctamente interpretados. Este trabajo, en nuestra opinión, es el primer cimiento de la moderna teoría de la información. Nyquist demostró que se podía transmitir varios mensajes simultáneamente por un mismo canal si los anchos de banda de las señales mensaje no se solapaban. Observó, asimismo, que la velocidad de transmisión era proporcional al ancho de banda del circuito y que podía aumentarse mediante una codificación apropiada de la señal. Demostró que una señal contenía, en todo momento, una componente continua de amplitud constante, que, consumiendo parte de la potencia transmitida, no tenía utilidad y podía ser añadida en el receptor, lo mismo que si hubiera sido transmitida por el circuito.

Nyquist continuó sus trabajos sobre los problemas de la telegrafía y en 1928 publicó un segundo e importante artículo: **“Ciertos Tópicos en la Teoría de la Transmisión Telegráfica”** [Nyquist, 1928]. Este segundo artículo fue más cuantitativo y exacto que el primero, y juntos abarcan mucho material importante que hoy está incorporado en la Teoría de las Comunicaciones.

En 1928, R.V. Hartley, el inventor del conocido “Oscilador Hartley”, publicó el artículo **“Transmisión de Información”** [Hartley, 1928]. Hartley atacó el problema de la codificación de los símbolos primarios (por ejemplo, las letras del alfabeto o caracteres alfanuméricos) en términos de símbolos secundarios (por ejemplo, puntos o rayas del código Morse o secuencias de impulsos) y observó que las longitudes de los símbolos secundarios deberían depender de la frecuencia de ocurrencia de los símbolos primarios si se desea transmitir los mensajes con más rapidez. Hartley sugirió también un modo de aplicar tales consideraciones a las señales continuas, por ejemplo, las señales telefónicas o de transmisión de imágenes. Finalmente, Hartley estableció, de acuerdo con Nyquist, que la cantidad de información que puede ser transmitida es proporcional al ancho de banda del canal multiplicado por el tiempo de transmisión. Vemos la importancia que en la velocidad de transmisión tiene una codificación adecuada.

Después de los trabajos de Nyquist y Hartley no se publicó ningún trabajo de importancia hasta el advenimiento de la Segunda Guerra Mundial. Acicateados por las obligaciones de la defensa, los gobiernos beligerantes establecieron equipos de matemáticos, científicos e ingenieros para estudiar y desarrollar muchos aspectos de la ciencia y de la tecnología. El radar, las microondas, la televisión y muchos desarrollos más, fueron los frutos de este esfuerzo combinado, hábilmente dirigido y con ilimitados medios económicos.

Problemas como la detección y estimación de señales en presencia de ruido fueron resueltos por A.N. Kolmogoroff (1903-1987), en Rusia, y en Estados Unidos, independientemente, por Norbert Wiener (1894-1964). Después de la guerra otro matemático, Claude E. Shannon (1916-2001), se interesó en los problemas de las comunicaciones en presencia de ruido y en 1948 publicó en dos partes su artículo **“Una Teoría Matemática de la Comunicación”** [Shannon, 1948], que es otro de los pilares de la moderna Teoría de las Comunicaciones. En el problema tratado por Shannon se permite elegir cómo representar el mensaje por medio de una señal eléctrica, cuántos valores de la corriente se pueden permitir y cuántos se transmitirían por segundo, es decir, el

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

problema de la codificación y la redundancia. El problema no es, pues, cómo tratar una señal contaminada con ruido para obtener una mejor estimación de ella, sino qué clase de señal enviar para transportar mejor los mensajes de un tipo dado sobre un canal particular o circuito ruidoso. Shannon demostró, asimismo, que no es posible transmitir sin error si los códigos utilizados no tienen redundancia.

Los sistemas de comunicación consisten, pues, en un conjunto de bloques funcionales interconectados que transfieren información entre dos puntos mediante una serie secuencial de operaciones o procesamiento de señales. La Teoría de las Comunicaciones trata de los modelos y técnicas matemáticas que se pueden utilizar en el estudio y análisis de los sistemas de comunicación.

En los sistemas de comunicación las señales son magnitudes que varían en el tiempo, tales como voltajes y corrientes que, en general, se representarán con la notación $x(t)$. Los elementos funcionales de un sistema son los circuitos eléctricos, pero tanto los circuitos eléctricos (sistemas) como las señales se pueden representar en el “**dominio del tiempo**” si la variable independiente es el tiempo (t), o en el “**dominio de la frecuencia**” si la variable independiente es la frecuencia (f). En el análisis y estudio de los sistemas de comunicación a menudo es necesario y conveniente describir o representar las señales y sistemas en el dominio de la frecuencia, lo cual conlleva a los conceptos de “espectro” y de “ancho de banda”.

La representación espectro-temporal de señales y sistemas es posible mediante el Análisis Espectral de Fourier: Series y Transformadas. En este capítulo se desarrollarán las técnicas matemáticas para la descripción de señales en el dominio de la frecuencia y de la correspondencia **Tiempo $\Leftrightarrow$ Frecuencia**. Estas técnicas no son sino modelos matemáticos, es decir, descripciones idealizadas de señales y sistemas reales. Aunque se puede elegir diferentes modelos para un problema particular, la selección del modelo más apropiado estará basada en el conocimiento más o menos completo de los fenómenos físicos a modelar y en las limitaciones de los diferentes modelos.

En las últimas décadas el desarrollo de las telecomunicaciones ha sido extraordinario pero más que todo desde el punto de vista de la tecnología: fueron las técnicas de integración de dispositivos de estado sólido las que iniciaron esta nueva era de las comunicaciones. El Procesamiento y Transmisión de Datos, las Comunicaciones por Satélite y las Comunicaciones Ópticas son los dominios en los cuales el crecimiento ha sido y seguirá siendo espectacular. En la conjunción entre la Electrónica, las Telecomunicaciones y la Informática, estará la base de este desarrollo. En la Referencia [IEEE, 1984] de la Bibliografía, el lector interesado encontrará un nutrido material sobre la historia de las telecomunicaciones en los últimos 100 años.

1.2. MODELOS DE LAS SEÑALES

1.2.1. Señales Determinísticas y Aleatorias

En los sistemas de comunicación se encuentran dos clases amplias de señales, conocidas como “señales determinísticas” y “señales aleatorias”. Las señales determinísticas se pueden representar mediante expresiones matemáticas explícitas del tiempo. Por ejemplo, una señal portadora sinusoidal de la forma $x(t) = A \cos(2\pi f_c t)$ para todo t , es una señal determinística. Son también señales determinísticas aquellas que no poseen una ecuación que las describa pero que están representadas mediante gráficos. El punto a resaltar es que el valor exacto de una señal determinística se puede predecir o calcular por adelantado. En Europa a las señales determinísticas se las denomina también “señales ciertas”.

En su definición más sencilla, una señal aleatoria es aquella en la cual existe un mayor o menor grado de incertidumbre en cuanto a un valor instantáneo futuro. Aunque el valor exacto en un instante dado no se conoce, muchas de las señales aleatorias que se encuentran en los sistemas de

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

comunicación tienen ciertas características en su comportamiento que permiten describirlas en términos estadísticos o probabilísticos. El “ruido” en sistemas de comunicación es una señal aleatoria.

Como veremos en Capítulo IV, puede decirse que solamente las señales aleatorias proporcionan verdaderamente información, puesto que las señales determinísticas pueden ser totalmente conocidas de antemano. Esto es verdad desde un punto de vista muy amplio y, por supuesto, todas las señales procesadas en un sistema de comunicación son de naturaleza aleatoria, por lo menos en lo que se refiere al destinatario. Sin embargo, desde el punto de vista del análisis, diseño, prueba y operación de sistemas, no solamente es deseable sino también necesario utilizar señales determinísticas para analizar el sistema y predecir su comportamiento. Las señales determinísticas tienen propiedades bien conocidas, además de que son más fáciles de generar y utilizar. En el Capítulo III se presentan algunos fundamentos de las variables y procesos aleatorios.

En este texto el enfoque será mayormente desde el punto de vista determinístico y las señales serán preferentemente reales, es decir, aquellas accesibles a la medida.

1.2.2. Señales Periódicas y no Periódicas

Una señal periódica es aquella que se repite en una forma predecible cada T segundos, donde T es el período de repetición de la señal, es decir,

$$x(t) = x(t + T) \text{ para todo } t \quad (1.1)$$

T es una constante positiva y es el valor más pequeño que satisface la expresión (1.1). Al intervalo de un período se le denomina también un “ciclo” de la señal, aunque la palabra “ciclo” se utiliza principalmente en señales sinusoidales.

Una señal no periódica o aperiódica se puede considerar como el límite de una señal periódica cuando el período T tiende a infinito. En términos más formales, una señal no periódica es aquella para la cual no existe un T finito que satisfaga la expresión (1.1).

Pudiera pensarse que dentro de un intervalo finito una señal no periódica puede repetirse después de un período bastante grande y ser en realidad una señal periódica. Igualmente, podemos argumentar que una señal aparentemente periódica deje de serlo después de un tiempo lo suficientemente grande. Desde un punto de vista práctico estos argumentos no producen ninguna dificultad, pero en los intervalos usuales de trabajo y para efectos de análisis, hay que considerar siempre una u otra representación.

1.2.3. Señales de Energía y de Potencia

En el dominio de la Física y la Ingeniería la energía total de una señal $x(t)$ en el dominio del tiempo usualmente se define en la forma

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.2)$$

La señal $x(t)$ puede ser un voltaje o una corriente. E es la energía normalizada para una resistencia de 1 Ohm, y se expresa en joules.

Como $x(t)$ puede, en general, ser compleja, una definición más general de la energía es

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

donde $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Si $x(t)$ es real e independiente de T , la energía se puede definir en la forma siguiente, que es la más utilizada en la caracterización de señales físicas (reales) de aplicación práctica:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (1.4)$$

La potencia promedio de una señal $x(t)$ en el dominio del tiempo se define como la energía por unidad de tiempo; por lo tanto, la potencia promedio de la señal en el intervalo $(-T/2, T/2)$ es

$$P = \frac{E}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

Si la señal es periódica, no es necesario tomar el límite y la integración se efectúa dentro de un período T , es decir,

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad \text{si } x(t) \text{ es real y periódica} \quad (1.6)$$

Esta es la potencia normalizada para una resistencia de 1 Ohm; se mide en vatios (W). Mientras no se especifique lo contrario, en este texto la potencia y la energía estarán siempre normalizadas (referidas a una resistencia de 1 Ohm).

Para simplificar la notación, en este texto utilizaremos continuamente el llamado “operador promedio tiempo” definido mediante la expresión general $\langle [\dots] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\dots] dt$ o la expresión particular $\langle [\dots] \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\dots] dt$. Este es un operador lineal puesto que verifica el principio de superposición $\langle ax_1(t) + bx_2(t) \rangle = a \langle x_1(t) \rangle + b \langle x_2(t) \rangle$, donde a y b son dos constantes cualesquiera.

Algunas veces se define también la denominada “intensidad normalizada de una señal” como la potencia o la energía normalizadas, según el caso. En este texto representaremos la intensidad normalizada de una señal con la notación $\langle x^2(t) \rangle$, que corresponderá a la energía si la señal es de energía, o a la potencia si la señal es de potencia; sin embargo, como es costumbre en los textos de comunicaciones, daremos preferencia a la notación $\langle x^2(t) \rangle$ para representar la potencia promedio normalizada de una señal $x(t)$; asimismo, $\langle x(t) \rangle$ representará el valor promedio (componente continua) de una señal $x(t)$.

De las definiciones (1.2) a (1.6) se puede establecer lo siguiente:

(a) Se dice que una señal $x(t)$ es de energía si y sólo si su energía es finita, es decir, si

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty \quad (1.7)$$

$$\text{lo cual implica que } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = 0$$

Las señales de energía finita tienen potencia cero.

En general, las señales de duración limitada son señales de energía finita.

(b) Se dice que $x(t)$ es una señal de potencia si y sólo si su potencia es finita, es decir, si

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.8)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

lo cual implica que la energía de una señal de potencia es infinita ($E = \infty$). Las señales periódicas son señales de potencia promedio finita.

Las señales de potencia finita tienen una energía infinita.

De acuerdo con las definiciones (1.7) y (1.8), una señal física puede ser de energía o de potencia y no puede ser de otro tipo. En efecto, si una señal física $x(t)$ tiene una energía finita su potencia es cero, y si su potencia es finita su energía es infinita. En general, las señales físicas aplicadas en ingeniería son de energía (son señales de duración limitada), pero para efectos de análisis a menudo se modelan como señales de potencia. Más adelante comentaremos algo sobre la “realizabilidad física” de las señales.

Evidentemente, todas las señales periódicas son necesariamente señales de potencia. Sin embargo, no todas las señales de potencia son periódicas. En efecto, hay muchas señales que tienen una potencia límite dada cuando $T \rightarrow \infty$, aunque tales señales sean no periódicas o tengan un comportamiento de carácter aleatorio. En este tipo de señales hay que utilizar la ecuación (1.5) para su definición.

♣ Ejemplo 1.1.

Se trata de determinar si la señal $x(t) = A \exp(-a|t|)$, donde A y a son constantes y $a > 0$, es de potencia o de energía, Fig. 1.2.

Por inspección, $x(t)$ no es periódica; pero como la curva se extiende hasta el infinito, no es obvio si es o no de energía. En efecto, aplicando (1.4),

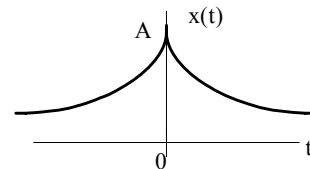


Fig. 1.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 \exp(-2a|t|) dt = 2A^2 \int_0^{\infty} \exp(-2at) dt = \frac{A^2}{a} \text{ joules}$$

Se verifica que $E = \frac{A^2}{a} < \infty$, por lo tanto $x(t) = A \exp(-a|t|)$ es una señal de energía.

♣

♣ Ejemplo 1.2

Determinar si la señal $x(t)$ de la Fig. 1.3 es de energía, de potencia o ninguna de las dos.

El área bajo la señal es infinita, por lo tanto no es una señal de energía. La señal no es periódica pero puede ser de potencia. Vamos a verificar esto aplicando la expresión (1.5) a la señal de la Fig. 1.3.

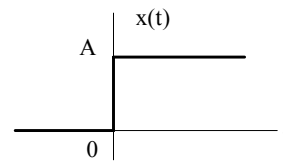


Fig. 1.3

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 dt = \frac{A^2}{2} \text{ W}$$

Se verifica entonces que $\langle x^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} < \infty$, por lo tanto, $x(t)$ es una señal de potencia.

Podemos decir también que una señal continua de amplitud A para todo t ($-\infty \leq t \leq \infty$) es una señal de potencia cuya potencia es A^2 .

♣

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

♣ Ejemplo 1.3. Potencia de una Señal Sinusoidal

Sea la señal sinusoidal $x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi)$, donde A , f_c y ϕ son constantes reales.

Por inspección, el período T de $x(t)$ es $T=1/f_c$. De (1.6),

$$\langle x^2(t) \rangle = f_c \int_{-1/2f_c}^{1/2f_c} A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \phi) dt = \frac{f_c A^2}{2} \left\{ \int_{-1/2f_c}^{1/2f_c} dt + \int_{-1/2f_c}^{1/2f_c} \cos(4\pi f_c t + \phi) dt \right\}$$

La segunda integral de la derecha es cero pues la integración cubre dos períodos completos de la función por integrar. La potencia promedio de una señal sinusoidal será entonces

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} = \left[\frac{A}{\sqrt{2}} \right]^2 \quad (1.9)$$

donde $A/\sqrt{2}$ es el “valor eficaz” de la señal sinusoidal, resultado ya obtenido en los cursos de Circuitos Eléctricos. Nótese que la información de fase (valor de ϕ) no interviene para nada en el cálculo de la potencia. Esto es válido para cualquiera señal, sea o nó sinusoidal.

♣

♣ Ejemplo 1.4. Energía de una Señal Triangular

Sea la señal triangular mostrada en la Fig. 1.4(a), donde $x(t) = \begin{cases} A(1 - \frac{|t|}{\tau}) & \text{para } |t| \leq \tau \\ 0 & \text{para } |t| > \tau \end{cases}$

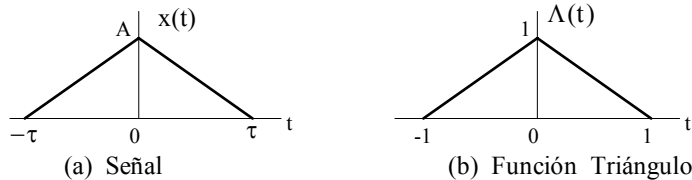


Fig. 1.4

Esta forma de señal es de uso muy frecuente, por lo que se ha definido la “función triángulo”, Fig. 1.4 (b), representada por

$$\text{Triang}(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$$

El área de la función triángulo es la unidad (Conviene memorizar la definición de la señal triángulo).

En consecuencia, $x(t) = A\Lambda(\frac{t}{\tau})$. La energía de $x(t)$ será: $E = 2 \int_0^{\tau} A^2 (1 - \frac{t}{\tau})^2 dt = \frac{2}{3} A^2 \tau$ joules

♣

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

♣ Ejemplo 1.5. Potencia Promedio de una Señal Periódica Rectangular

Sea la señal periódica rectangular mostrada en la Fig. 1.5(a).

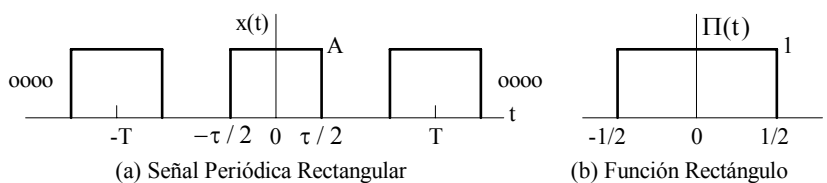


Fig. 1.5.

Esta forma de señal también es de uso muy frecuente, habiéndose definido la “función rectángulo”, Fig. 1.5(b), representada por

$$\text{Rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

El área de la función rectángulo es la unidad (sugerimos memorizar esta expresión).

Por consiguiente, $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ en T . La potencia promedio de la señal periódica rectangular $x(t)$ será

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} A^2 dt = \frac{\tau}{T} A^2$$

En la literatura técnica a la relación $R_T = \frac{\tau}{T}$ se la denomina “*ciclo o relación de trabajo*”.

♣

1.2.4. Señales Singulares

Hay una clase de señales elementales cuyos miembros tienen formas matemáticas muy simples pero que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas. Debido a que estas señales no tienen derivadas finitas de ningún orden, generalmente se las denomina “señales o funciones singulares”. Las señales singulares más comunes en el análisis de señales y sistemas son la rampa, el escalón unitario, la señal signo y el impulso unitario Delta Dirac. Diremos sin demostrarlo, que cualquiera señal representada por un polinomio en t es una señal singular.

Aunque este tipo de señales no son sino idealizaciones matemáticas y no ocurren naturalmente en un sistema físico (no son físicamente realizables), ellas sirven para varios propósitos de gran utilidad en el análisis de señales y sistemas. En primer lugar, sirven como aproximación de señales que verdaderamente ocurren en los sistemas cuando se efectúan operaciones de tipo conmutativo. En segundo lugar, su forma matemática más simple permite efectuar cuantitativamente el análisis de un sistema con mucha más facilidad que si se emplearan señales más complicadas. Además, muchas señales complicadas pueden representarse como combinaciones de estas señales elementales. Por último, no por eso menos importante, estas señales pueden simularse en el laboratorio con mucha facilidad y aproximación, de modo que puede determinarse experimentalmente si un sistema se comporta en la forma predicha por un análisis matemático previo.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

La Rampa Unitaria

La rampa unitaria, $r(t)$, se muestra en la Fig. 1.6 y se define en la forma siguiente:

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

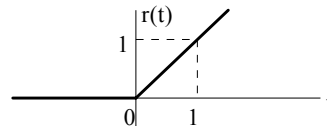


Fig. 1.6. La Rampa Unitaria.

Si se desea que la pendiente sea distinta de la unidad, bastará multiplicar $r(t)$ por una constante; por lo tanto, $br(t)$ es una rampa de pendiente b . Una forma matemática para cambiar la pendiente es mediante un cambio de escala en el eje t . En efecto, como la pendiente de $r(t)$ es la unidad, su valor debe ser la unidad siempre que su argumento sea la unidad, es decir, $br(t)$ y $r(bt)$ representan rampas cuyas pendientes son iguales a b . En la Fig. 1.7 se representa diferentes formas de la rampa.

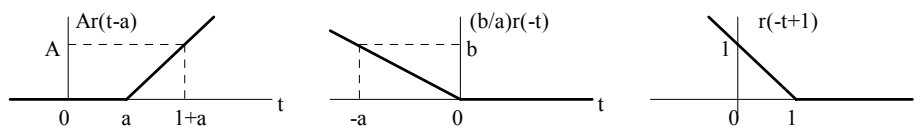


Fig. 1.7. Formas diferentes de la Rampa.

El Escalón Unitario

El escalón unitario, $u(t)$, se muestra en la Fig. 1.8 y se define en la forma

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

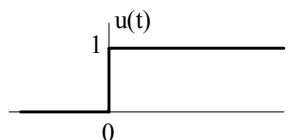


Fig. 1.8. El Escalón Unitario.

Al escalón unitario se le denomina también Escalón de Heaviside.

Para un cambio de escala en el eje t , $u(at) = u(t)$, pero $u(at - t_0) = u(t - \frac{t_0}{a})$

Puede observarse que la rampa es la integral del escalón unitario, es decir,

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t') dt' \quad (1.12)$$

Esta expresión es válida para todo t , excepto $t = 0$, en cuyo punto no existe una derivada; por lo tanto,

$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t) \quad (1.13)$$

De las definiciones de rampa y escalón unitario, se puede decir que $r(t) = t u(t)$.

En la Fig. 1.9 se muestran diferentes representaciones del escalón unitario.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

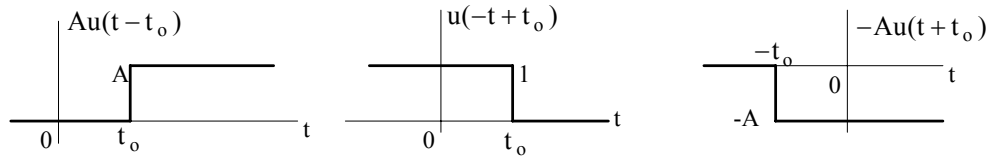


Fig. 1.9. Formas del Escalón Unitario.

La Función Signo

La función signo, $\text{sgn}(t)$, es aquella que cambia de signo cuando su argumento pasa por cero; se representa en la Fig. 1.10 y la vamos a definir en la forma siguiente:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \\ -1 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Para un cambio de escala en el eje t , $\text{sgn}(at) = \text{sgn}(t)$, pero $\text{sgn}(at - t_o) = \text{sgn}(t - \frac{t_o}{a})$.

La función signo es una función impar de t .

El escalón unitario y la función signo se relacionan mediante las siguientes expresiones:

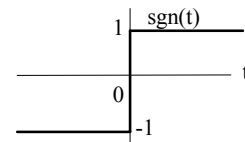


Fig. 1.10. Función Signo

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \quad \text{o} \quad \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \quad (1.15)$$

En la Fig. 1.11 se muestran algunas representaciones de la función signo.

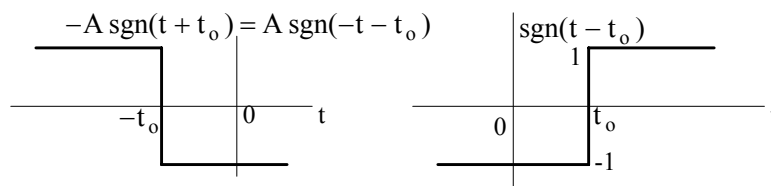


Fig. 1.11. Formas de la Función Signo.

Usando combinaciones de las funciones rampa, escalón, signo, rectángulo y triángulo, es posible representar otros tipos de señal. El lector puede verificar que las señales $x(t)$ y $z(t)$ de la Fig. 1.12 se pueden representar en la forma

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) = u(t + \tau) - u(t - \tau) = u(t + \tau)u(-t + \tau) = \frac{1}{2}[\text{sgn}(t + \tau) - \text{sgn}(t - \tau)]$$

$$z(t) = -r(t + 1) + 2r(t) - r(t - 2) - u(t - 3) = -\Lambda(t) + (t - 1)\Pi(t - 1,5) + \Pi(t - 2,5)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

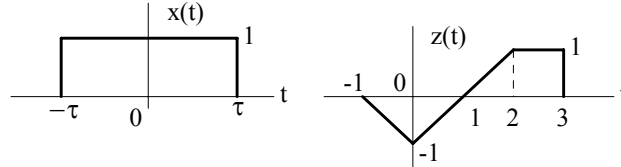


Fig. 1.12. Señales Compuestas.

El Impulso Unitario Delta Dirac

El Impulso Unitario Delta Dirac, representado en la forma $\delta(t)$, no es una función en el sentido matemático usual. Perteneciente a una clase especial de funciones conocida como “funciones generalizadas” o “distribuciones”, y se define mediante un proceso o regla de asignación en vez de una ecuación. El impulso unitario Delta Dirac se define entonces mediante la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(t)|_{t=0} = x(0) \quad (1.16)$$

donde $x(t)$ es una función cualquiera continua en $t = 0$. El impulso unitario Delta Dirac se representa en la forma mostrada en la Fig. 1.13.

Mediante un cambio de variables en la definición (1.16), se puede demostrar la conocida “Propiedad de Muestreo o Cernido” del impulso unitario Delta Dirac. En efecto, si $x(t)$ es continua en $t = t_0$, se verifica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad (1.17)$$

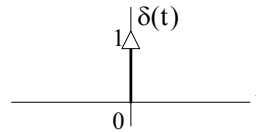


Fig. 1.13. El Impulso Unitario Delta Dirac

La propiedad de muestreo del impulso unitario, expresión (1.17), es de mucha aplicación en el análisis de señales y sistemas y la estaremos utilizando continuamente. Se dice “cernido” porque el impulso unitario “cierne”, “tamiza” o extrae el valor $x(t_0)$ de la integral.

Otras propiedades del impulso unitario son:

- (a) $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$
- (b) $\delta(t - t_0) = 0$ para $t \neq t_0$
- (c) $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)dt = 1$ para $t_1 < t_0 < t_2$

Esta última expresión establece que el “área” de un impulso unitario es la unidad. Quiere decir también que los coeficientes constantes que afecten el impulso unitario representan el “área” del mismo. Estas propiedades se han utilizado también para definir el impulso unitario. Se pueden interpretar diciendo que $\delta(t - t_0)$ tiene área unitaria concentrada en el punto discreto t_0 y área cero en cualquiera otra parte.

Por definición, el impulso unitario $\delta(t)$ no tiene ningún significado matemático o físico a menos que aparezca bajo el signo de integración. Aún así es conveniente establecer algunas relaciones sin integrales como simplificaciones que pueden hacerse antes de la integración, ya que

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

ellas son consistentes con lo que sucede después de la integración. A continuación damos, sin demostrarlas, algunas de esas relaciones.

$$1. \quad x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t); \quad x(t)\delta(t - t_o) = x(t_o)\delta(t - t_o) \quad (1.18)$$

$$2. \quad \text{Cambio de escala en el eje } t: \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad \text{para } a \neq 0$$

$$\text{pero} \quad \delta(at - t_o) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t - \frac{t_o}{a}\right)$$

En relación con la variable independiente t , $\delta(at)$ es un impulso unitario de área $1/|a|$.

El caso especial cuando $a = -1$, define la “*propiedad de simetría par*” del impulso unitario:

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

3. Se puede relacionar $\delta(t)$ con el escalón unitario $u(t)$. En efecto, de (1.16),

$$\int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = u(t) \quad (1.19)$$

y diferenciando ambos miembros de (2.19)

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) \quad (1.20a)$$

$$\text{y en general,} \quad \delta(t - t_o) = \frac{d}{dt} u(t - t_o) \quad (1.20b)$$

Las expresiones (1.20a) y (1.20b) no son definiciones de $\delta(t)$ sino una consecuencia de la regla de asignación (1.16). Pero, por otro lado, estas expresiones establecen también que la derivada en una discontinuidad es un impulso unitario de área igual al valor absoluto de la discontinuidad; el signo dependerá de si la discontinuidad es montante o bajante. Por ejemplo, la derivada de la función signo es

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t); \quad \text{y de la Fig. 1.11,} \quad \frac{d}{dt} \text{sgn}(-t - t_o) = -2\delta(t + t_o)$$

Esta propiedad es particularmente útil en la diferenciación de señales discretas.

4. Aunque el impulso unitario no existe físicamente, hay numerosas funciones de tipo convencional que tienen las propiedades del impulso unitario $\delta(t)$ cuando algunos de sus parámetros tiende a cero o a infinito. Por ejemplo:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \delta(t) \quad (1.21a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi t} \text{sen}\left(\frac{\pi t}{\varepsilon}\right) = \delta(t) \quad (1.21b)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \exp\left[-\pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2\right] = \delta(t) \quad (1.21c)$$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B \exp(\pm j2\pi t f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm j2\pi t f) df = \delta(t) \quad (1.21d)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

5. Derivada del Impulso Unitario

Es posible definir una función que se puede interpretar como la “derivada” de un impulso, aunque en un sentido estricto la derivada no existe. Esta derivada, comúnmente denominada “doblete”, se puede definir axiomáticamente especificando un conjunto de condiciones las cuales debe satisfacer. Si el doblete se designa como $\delta'(t)$, las condiciones que debe satisfacer son:

$$(a) \delta'(t - t_0) = 0 \quad t \neq 0$$

$$(b) \int_{t_1}^{t_2} \delta'(t - t_0) dt = 0 \quad t_1 < t_0 < t_2$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta'(t - t_0) dt = -x'(t_0); \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta^{[n]}(t - t_0) dt = (-1)^n x^{[n]}(t_0)$$

$$(d) x(t) \delta'(t - t_0) = -x'(t_0) \delta(t - t_0) + x(t_0) \delta'(t - t_0)$$

En general, se puede tratar $\delta(t)$ como una función ordinaria siempre que todas las conclusiones sean basadas en la regla de asignación (1.16).

Como se verá más adelante, además del empleo del impulso unitario en la representación de señales, él es de gran aplicación en el análisis de sistemas lineales. Esto proviene del hecho de que la respuesta de un sistema lineal, cuando la entrada es un impulso unitario, se puede utilizar para determinar la salida del sistema para cualquiera otra señal de entrada. En consecuencia, la respuesta de un sistema a un impulso unitario se puede considerar como otro modelo matemático del sistema, porque permite relacionar la entrada con la salida. Esto lo veremos detalladamente más adelante.

Debemos señalar una vez más que el impulso unitario no es una función en el sentido matemático usual, donde una función está definida dentro de intervalos de tiempo, finitos o infinitos. Sin embargo, su aplicación formal produce resultados que pueden ser interpretados físicamente. La función impulso es muy común en las ciencias físicas y en la ingeniería para la representación de entidades tales como masas, cargas o fuentes puntuales, que aunque no existen en la práctica, esta idealización simplifica la interpretación de los resultados de un análisis. Aún más, los equipos de generación y medida actuales, debido a su resolución finita, no pueden distinguir entre la respuesta de un impulso unitario ideal y un impulso de duración muy pequeña. No está de más señalar de nuevo que cualquier función representada por un polinomio en t es una función singular.

1.2.5. Señales Ortogonales

Se dice que dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ortogonales en un intervalo (t_1, t_2) , si ellas verifican la integral (denominada “producto interno”)

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t) x_2(t) dt = 0 \quad \text{para} \quad x_1(t) \neq x_2(t) \quad (1.22a)$$

Si las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son complejas, entonces la condición de ortogonalidad es

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t) x_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x_1^*(t) x_2(t) dt = 0 \quad (1.22b)$$

donde el asterisco indica “conjugado de”.

La ortogonalidad se puede extender a todo el eje t ; en efecto, para dos señales $x(t)$ e $y(t)$,

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0 \quad \text{donde} \quad x(t) \neq y(t) \quad (1.23)$$

Un grupo de funciones ortogonales que son de gran importancia en el análisis de señales son las funciones sinusoidales de la forma $\cos(2\pi n f_0 t)$ y $\sin(2\pi m f_0 t)$ en el intervalo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, con m y n enteros distintos de cero, $m \neq n$ y $T = \frac{1}{f_0}$. Estas señales las encontraremos más adelante al estudiar las Series de Fourier.

1.2.6. Realizabilidad Física de las Señales

En general, las señales reales que son físicamente realizables en la práctica, es decir, que se pueden medir o reproducir en un laboratorio, deben satisfacer varias condiciones [Couch, 1990]:

1. La señal tiene valores significativos dentro de un intervalo de tiempo finito.
2. El espectro de la señal tiene valores significativos dentro de un intervalo de frecuencia finito.
3. La señal es continua en el tiempo.
4. La señal no tiene valores pico de amplitud infinita dentro de su intervalo de existencia.
5. La señal es real, no contiene componentes imaginarias.

A estas condiciones se las conoce a menudo como las “*condiciones de realizabilidad física*” de las señales.

La primera condición es necesaria porque las señales físicas existen durante una cantidad finita de tiempo y ellas producen una cantidad finita de energía. La segunda condición es necesaria por cuanto los medios de transmisión reales (conductores metálicos, cable coaxial, guías de onda, fibras ópticas y el mismo espacio libre) tienen anchos de banda restringidos; el ancho de banda de las señales debe ser compatible con el ancho de banda de los medios de transmisión y procesamiento de señales. La tercera condición es una consecuencia de la segunda, como veremos en las secciones siguientes (equivalencia Tiempo $\Leftrightarrow$ Frecuencia). La cuarta condición es necesaria debido a que los dispositivos físicos se destruyen cuando se les aplican voltajes o corrientes elevadas. La quinta condición sigue del hecho que en el mundo real solamente existen señales reales sin componentes imaginarias. La generación y transmisión de señales sólo puede llevarse a cabo con señales reales. Sin embargo, el concepto de señal compleja es útil en la representación analítica de señales pasabanda reales, como veremos en el Capítulo II.

Los modelos matemáticos de señales y sistemas que se presentarán a lo largo del presente texto pueden violar algunas de las condiciones arriba expresadas, pero su empleo es necesario para simplificar el análisis matemático. De hecho, algunas veces uno tiene que usar un modelo que viola algunas de estas condiciones a fin de alcanzar un tipo de respuesta; por ejemplo, algunos modelos matemáticos exigen la presencia de la señal para todo t , lo cual es físicamente imposible. Sin embargo, si se es cuidadoso en el tratamiento del modelo, el resultado correcto se puede obtener cuando la respuesta es interpretada en forma apropiada. Básicamente, las señales físicamente realizables son señales de energía pero a menudo uno las modela como señales de potencia de duración infinita.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

1.3. EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Las señales eléctricas utilizadas en los sistemas de comunicación están representadas generalmente en el dominio del tiempo donde la variable independiente es t (tiempo). Pero en el análisis de sistemas de comunicación es imperativo describir también las señales en el dominio de la frecuencia donde la variable independiente es f (frecuencia). Esto quiere decir que una señal temporal se puede considerar como constituida por un número de componentes de frecuencia, generalmente señales sinusoidales, con una amplitud, fase y frecuencia dadas. Por consiguiente, aunque una señal existe físicamente en el dominio del tiempo, puede decirse que ella está formada por un conjunto de componentes en el dominio de la frecuencia, denominado el “espectro” de la señal.

1.3.1. Representación Espectral

Para introducir la noción de dominio de la frecuencia o espectro, consideremos la señal sinusoidal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, que se puede escribir en la forma

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A \exp[j(\omega_0 t + \phi)]\} = \operatorname{Re}\{A \exp(j\phi) \exp(j\omega_0 t)\} \quad \text{donde } \omega_0 = 2\pi f_0 \quad (1.24a)$$

Esta es la “representación fasorial” porque el término dentro de las llaves se puede ver como un vector o **fasor rotatorio** en un plano complejo cuyos ejes son las partes real e imaginaria, como se muestra en la Fig. 1.14(a).

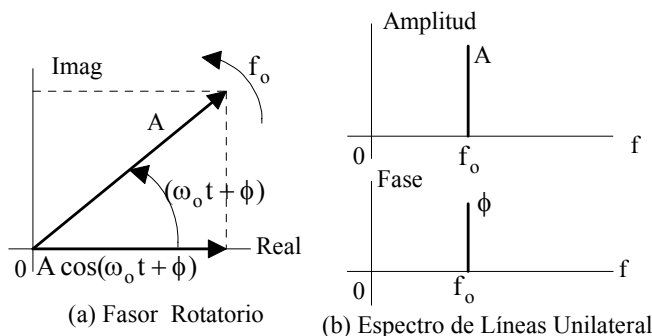


Fig. 1.14. Fasor Rotatorio y Espectro de Líneas Unilateral.

La expresión (1.24a) indica entonces que $x(t)$ es la parte real de una señal $x_c(t)$ más general de la forma

$$x_c(t) = A_c \exp[j(\omega_0 t + \phi)] \quad (1.24b)$$

La forma (1.24b) es muy empleada en el análisis de señales pues ella representa el conjunto de todas las señales sinusoidales de amplitud A_c , frecuencia f_0 y fase ϕ . La expresión (1.24b) representa entonces un fasor rotatorio de amplitud A_c que gira en el sentido contrario a las agujas del reloj a una velocidad de f_0 revoluciones por segundo con un ángulo inicial ϕ (para $t = 0$), como se muestra en la Fig. 1.14.

El fasor de longitud A gira entonces en el sentido contrario a las agujas del reloj a una velocidad de f_0 revoluciones por segundo. Asimismo, $\omega_0 = 2\pi f_0$ es la velocidad angular en

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

radianes por segundo. El ángulo ϕ es la fase o desfase con respecto al eje real o con respecto a $t = 0$ en el eje t .

Los tres parámetros necesarios para especificar un fasor son entonces la amplitud A , la fase ϕ y la frecuencia rotacional o cíclica f_0 . En el dominio de la frecuencia el fasor está definido para un valor particular de la frecuencia, por ejemplo, para $f = f_0$. En consecuencia, se puede asociar tanto la amplitud A como la fase ϕ con este valor particular de f en la forma mostrada en la Fig. 1.14(b), que se denomina “espectro de líneas”. Este espectro consta de dos gráficos: uno de Amplitud vs Frecuencia y el otro de Fase vs Frecuencia, siendo ambos necesarios para representar sin ambigüedades en el dominio de la frecuencia un fasor definido en el dominio del tiempo.

El espectro de líneas de la Fig. 1.14(b) está definido solamente para frecuencias positivas y por ello se le denomina “espectro de líneas unilateral”. Pero esta representación se puede extender a todo el eje f de la manera siguiente.

A partir de la ecuación de Euler, $\cos(\theta) = \frac{1}{2} [\exp(j\theta) + \exp(-j\theta)]$, se puede escribir

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} \exp(j\phi) \exp(j\omega_0 t) + \frac{A}{2} \exp(-j\phi) \exp(-j\omega_0 t) \quad (1.25)$$

que es la representación en “fasores rotatorios conjugados” puesto que los dos términos de $x(t)$ son conjugados entre sí. La representación correspondiente se muestra en la Fig. 1.15(a): dos fasores rotatorios de amplitud $A/2$ que giran en sentidos opuestos a velocidades de f_0 revoluciones por segundo.

El correspondiente espectro de líneas bilateral, puesto que incluye frecuencias negativas, se muestra en la Fig. 1.15(b). Nótese que la Amplitud tiene simetría par, mientras que la Fase tiene simetría impar. Esto es consecuencia directa de la representación en fasores rotatorios conjugados, Fig. 1.15(a).

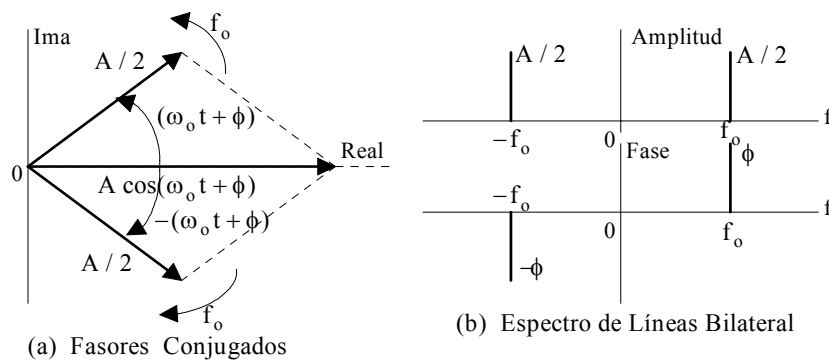


Fig. 1.15.

El espectro bilateral, como se verá al avanzar en el texto, tiene muchas ventajas respecto al espectro unilateral y por ello lo utilizaremos exclusivamente, excepto en el caso particular al analizar los sistemas de modulación angular, que veremos en el Capítulo VI.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

En la representación espectral de señales se utilizarán algunas convenciones y notación que se pueden resumir en lo siguiente:

- (a) Los ángulos de fase se medirán respecto al coseno, es decir, respecto al eje real positivo del diagrama fasorial. Las señales seno deberán convertirse en cosenos mediante la identidad $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$.
- (b) Los ángulos de fase se expresarán en radianes o en grados, según la aplicación. En este texto la tendencia será la de expresar los ángulos siempre en radianes.
- (c) La amplitud de las componentes de frecuencia o de las líneas espectrales se considerará siempre como una magnitud positiva; cuando aparezcan signos negativos, éstos deberán ser absorbidos en la fase. Por ejemplo, $-A \cos(\omega t) = A \cos(\omega t \pm \pi)$; es indiferente que se tome el signo (+) o el signo (−), pues el coseno es una función par.
- (d) En general, el módulo del espectro de una señal $x(t)$ será una función par y positiva de f , mientras que la fase será una función impar de f . Esto lo justificaremos posteriormente.

Nótese que en el Análisis de Señales la noción de “frecuencia negativa ($f < 0$)” o “tiempo negativo ($t < 0$)” es puramente formal y no tiene ningún significado físico. En la realidad física no existen ni frecuencias negativas ni tiempos negativos.

Una componente continua puede describirse también en el dominio de la frecuencia. En efecto, sea $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$; si $f_0 = 0$, entonces $x(t) = A$. Esto significa que cuando $f \rightarrow 0$, las líneas del espectro se acercan al origen, formando una línea con el doble de amplitud. En consecuencia, una componente continua $\pm A$ se representa en el dominio de la frecuencia como una línea de amplitud $\pm A$ a la frecuencia $f = 0$ (en el origen). La “fase” de una componente continua será entonces, por definición, cero.

En general, los gráficos de Amplitud y Fase son necesarios para describir completamente una señal sinusoidal, aunque podemos decir que el gráfico Amplitud vs Frecuencia, que en lo sucesivo llamaremos “espectro de amplitudes”, es más importante en las comunicaciones que el “espectro de fase”. El espectro de amplitudes no solamente muestra qué componentes de frecuencia están presentes, sino también en qué proporción. El espectro de amplitudes muestra el “contenido espectral o frecuencial” de una señal; en este aspecto se puede considerar como una función de distribución de amplitudes en el dominio de la frecuencia. El espectro de fase es importante en otras ramas de la ingeniería, por ejemplo, en el procesamiento de voz e imágenes.

El lector está familiarizado con el concepto de filtro, que es un dispositivo que deja pasar solamente aquellas señales cuyo contenido espectral está dentro de su banda de paso. Esta es una descripción en el dominio de la frecuencia y por lo tanto se puede asociar con la noción de espectro. En efecto, en el dominio de la frecuencia un filtro se puede representar mediante un gráfico Ganancia vs Frecuencia, como se muestra en la Fig. 1.16(a) para un filtro pasabajo de ganancia (o atenuación) k en la gama de frecuencias $|f| \leq B$. La cantidad B es la llamada “frecuencia de corte” o “ancho de banda” de este filtro ideal.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

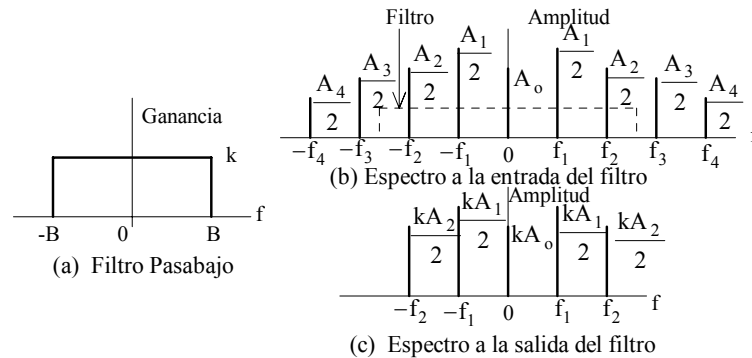


Fig. 1.16

♣ Ejemplo 1.6

A la entrada del filtro de la Fig. 1.16(a) se aplica una combinación lineal de señales sinusoidales de la forma $x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t) + A_4 \cos(\omega_4 t)$, como se muestra en la Fig. 1.16(b). La correspondiente salida del filtro será

$$y(t) = kx(t) \quad \text{para } |f| \leq B \quad (\text{Banda de paso del filtro})$$

$$y(t) = 0 \quad \text{para } |f| > B \quad (\text{Fuera de la banda de paso del filtro})$$

Cada componente de $x(t)$ comprendida dentro de la banda de paso sale multiplicada por la ganancia (o atenuación) del filtro. Las componentes fuera de banda son rechazadas. Por ejemplo, en el caso donde $f_2 < |B| < f_3$, la salida del filtro será

$$y(t) = kA_0 + kA_1 \cos(\omega_1 t) + kA_2 \cos(\omega_2 t)$$

cuyo espectro se muestra en la Fig. 1.16(c). La correspondiente potencia será

$$\langle y^2(t) \rangle = k^2 A_0^2 + k^2 \frac{A_1^2}{2} + k^2 \frac{A_2^2}{2}$$

Estos conceptos se generalizarán más adelante.

♣

1.4. SERIES Y ESPECTROS DE FOURIER

Hemos visto cómo las señales sinusoidales puras se pueden representar en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, en muchos casos se tiene señales que, aunque periódicas, son mucho más complicadas que las simples señales sinusoidales. Por ejemplo, la señal periódica rectangular del Ejemplo 1.5 es una señal de este tipo. Cuando se aplican señales sinusoidales puras a un filtro cualquiera, se puede calcular fácilmente su salida, en especial la potencia de salida. Pero, ¿cómo podría calcularse la potencia de salida del mismo filtro cuando se le aplica una señal periódica rectangular, por ejemplo? La solución a este problema no es tan evidente y se puede decir que es muy difícil de obtener con los métodos usuales en el dominio del tiempo.

1.4.1. Señales Periódicas

Las señales periódicas son de gran aplicación en el análisis de sistemas de comunicación y sería deseable poder representarlas en términos de señales periódicas elementales, tales como el seno o el coseno. Este es el objetivo del Análisis de Fourier, así designado en honor del físico francés Jean Baptiste Fourier.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Definición

En la expresión (1.1) se dió la definición de señal periódica que repetiremos aquí con un ligero cambio en la notación. Entonces, para todo t real y para un T positivo, una señal periódica está definida mediante la expresión

$$x_T(t) = x_T(t + T) \quad (1.26)$$

donde T es el período de la señal y es el valor más pequeño que satisface la expresión (1.26).

La señal $x_T(t)$ puede considerarse como la repetición periódica de una señal $x(t)$ de duración finita, algunas veces llamada “señal generatriz o generadora” de $x_T(t)$, en cualquier intervalo de duración T , como se muestra en la Fig. 1.17. El período T debe ser igual o mayor que la duración de su señal generatriz.

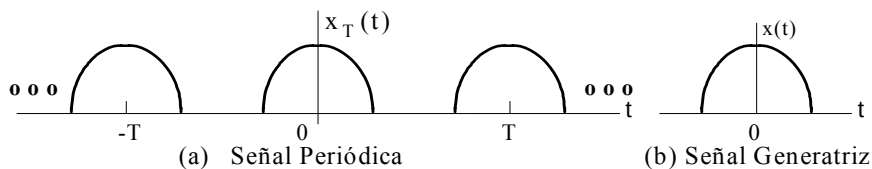


Fig. 1.17 . Generación de una señal periódica

De (1.26) se sigue que para un entero k cualquiera

$$x_T(t) = x_T(t + kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) \quad (1.27)$$

Aún más, si $x_T(t)$ y $g_T(t)$ tienen el mismo período T , entonces, con a y b dos constantes reales, $y_T(t) = ax_T(t) + bg_T(t)$ será también periódica de período T .

En particular, si la señal $x_T(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$ es periódica de período T , entonces debe ser posible encontrar dos números enteros m y n tales que

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 T = 2\pi f_1 T = 2\pi m \\ \omega_2 T = 2\pi f_2 T = 2\pi n \end{aligned} \right\} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{m}{n} \quad m \text{ y } n \text{ enteros}$$

La fracción m/n o ω_1 / ω_2 debe ser una fracción racional irreducible para que $x_T(t)$ sea periódica. Si la fracción m/n no es racional se dice que la señal $x_T(t)$ es “cuasi-periódica”.

El valor más pequeño de m o n determina el período T . Por ejemplo, si $m > n$, entonces $T = n / f_2$.

♣ Ejemplo 1.7

Verificar si las señales siguientes son periódicas, en cuyo caso determinar el período.

(a) $y(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$. De aquí, $f_1 = 1/6\pi$; $f_2 = 1/8\pi$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow m=4; n=3$$

La fracción es racional, la señal $y(t)$ es periódica de período $T = \frac{3}{f_2} = 24\pi$.

$$(b) \quad y(t) = \cos(10t) + \cos[(10 + \pi)t]; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{10}{10 + \pi} \Rightarrow \text{fracción irracional}$$

La fracción es irracional, por lo tanto la señal $y(t)$ no es periódica.



1.4.2. Series de Fourier

En la ingeniería de las comunicaciones, además de las conocidas señales periódicas seno y coseno, se emplea una gran cantidad de formas de onda periódicas para simular señales físicas, tales como señales rectangulares (relojes), diente de sierra, señales rectificadas, señales moduladas, etc., que se pueden representar en el dominio de la frecuencia mediante los métodos que se verán a continuación.

Si una señal $x_T(t)$ es periódica y satisface ciertas condiciones, se puede representar en el dominio de la frecuencia mediante un número infinito de componentes sinusoidales relacionadas armónicamente (múltiplos de) con la frecuencia fundamental. La amplitud y la fase relativas de cada una de estas componentes están especificadas en el desarrollo en serie de Fourier de $x_T(t)$.

Definición

Cualquiera señal periódica $x_T(t)$ real, definida en el intervalo $(-T/2, T/2)$, donde T es su período y que satisface las siguientes condiciones suficientes, se puede desarrollar en Serie de Fourier:

1. $x_T(t)$ es periódica de período T , es decir, $x_T(t) = x_T(t + T)$
2. $x_T(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo $(-T/2, T/2)$.
3. $x_T(t)$ es de módulo integrable en un período, es decir,

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)| dt < \infty \quad (1.28)$$

Las condiciones 2 y 3 implican que $x_T(t)$ es una función acotada en el intervalo $(-T/2, T/2)$, es decir, que $|x_T(t)| \leq K$ en el intervalo $(-T/2, T/2)$, donde K es una constante.

Estas condiciones se conocen con el nombre de “Condiciones de Dirichlet”. La demostración de estas condiciones está fuera de los objetivos de este texto.

La Serie Trigonométrica de Fourier

El desarrollo de $x_T(t)$ en Serie Trigonométrica de Fourier tiene la forma

$$x_T(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \quad (1.29)$$

donde $f_0 = 1/T$ es la frecuencia fundamental. Los coeficientes a_0 , a_n y b_n son reales. A la expresión (1.29) se la denomina también “desarrollo de Fourier en coeficientes reales”, donde

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$a_o = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) dt = \langle x_T(t) \rangle \quad \text{Componente Continua} \quad (1.30)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos(2\pi n f_o t) dt \quad (1.31)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin(2\pi n f_o t) dt \quad (1.32)$$

Las expresiones (1.30), (1.31) y (1.32), conocidas con el nombre de “Fórmulas de Euler”, son los coeficientes del desarrollo en serie trigonométrica de Fourier de (1.29). La deducción de estas fórmulas está fuera de los objetivos de este texto.

La expresión (1.29) se puede escribir en la forma polar,

$$x_T(t) = a_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n f_o t - \arctg \frac{b_n}{a_n}) \quad (1.33)$$

$$\text{donde podemos definir } \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |X_n| \quad \text{y} \quad \phi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (1.34)$$

$|X_n|$ es la **Amplitud Relativa** de las diferentes componentes de frecuencia, y ϕ_n su correspondiente fase. La expresión (1.33) queda entonces en la forma

$$x_T(t) = a_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \cos(2\pi n f_o t + \phi_n) \quad (1.35)$$

A esta expresión se la conoce como “desarrollo armónico de Fourier”.

En las expresiones anteriores se puede observar lo siguiente:

1. a_o es la componente continua o valor promedio de $x_T(t)$ y puede ser una magnitud positiva, negativa o cero.
2. Si $x_T(t)$ es real, entonces a_n y b_n son reales. En este caso:

- (a) Si $x_T(t)$ es par, es decir, si $x_T(t) = x_T(-t)$, entonces $b_n = 0$; $|X_n| = a_n$; $\phi_n = 0$, y

$$x_T(t) = a_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_o t) \quad (1.36)$$

El desarrollo de Fourier será una serie de cosenos de la forma

$$x_T(t) = a_o + 2a_1 \cos(\omega_o t) + 2a_2 \cos(2\omega_o t) + 2a_3 \cos(3\omega_o t) + \dots \quad (1.37)$$

$$\text{donde } \omega_o = 2\pi f_o = \frac{2\pi}{T}$$

- (b) Si $x_T(t)$ es impar, es decir, si $x_T(t) = -x_T(-t)$, entonces $a_o = 0$; $a_n = 0$;

$$|X_n| = b_n; \quad \phi_n = -\frac{\pi}{2}; \quad \text{y}$$

$$x_T(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_o t) \quad (1.38)$$

El desarrollo de Fourier será una serie de senos de la forma

$$x_T(t) = 2b_1 \sin(\omega_o t) + 2b_2 \sin(2\omega_o t) + 2b_3 \sin(3\omega_o t) + \dots \quad (1.39)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

(c) Si $x_T(t)$ no es par ni impar, el desarrollo de Fourier es simplemente el desarrollo directo de (1.29) o (1.35):

$$x_T(t) = a_0 + 2a_1 \cos(\omega_0 t) + 2a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + 2b_1 \sin(\omega_0 t) + 2b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

$$x_T(t) = a_0 + 2|X_1| \cos(\omega_0 t + \phi_1) + 2|X_2| \cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \dots \quad (1.40)$$

Estos resultados tienen mucha importancia porque permiten expresar cualquiera señal periódica como una serie de señales sinusoidales, las cuales son mucho más fáciles de manipular por cuanto la derivada y la integral de una señal sinusoidal es otra señal sinusoidal de la misma frecuencia. Además, las distintas componentes de una señal periódica que se obtienen a partir del análisis de Fourier son algo más que un simple artificio matemático: ellas son tan reales como la señal $x_T(t)$ misma. Ya volveremos sobre este aspecto al tratar el espectro discreto.

Como lo que más interesa es la amplitud relativa X_n de las diferentes componentes de frecuencia y no los valores individuales de a_n y b_n , sería mucho más sencillo obtener dicha característica directamente de $x_T(t)$. En efecto, esto puede hacerse empleando la forma exponencial de la Serie de Fourier que se verá a continuación.

La Serie Exponencial de Fourier

La Serie Exponencial de Fourier tiene la forma

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t); \quad f_0 = \frac{1}{T} \quad (1.41)$$

Este es el “desarrollo de Fourier en coeficientes complejos”.

El coeficiente de Fourier X_n , llamado también “Espectro Complejo de Fourier”, viene dado por la expresión

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt \quad (1.42)$$

Se puede desarrollar (1.42) en la forma

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = a_n - j b_n \quad (1.43)$$

X_n es, en general, una cantidad compleja; por lo tanto,

$$X_n = |X_n| \exp(j\phi_n) \quad \text{donde } \phi_n = \arg[X_n] \quad (1.44)$$

y de (1.43), $|X_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $\phi_n = -\arctg(\frac{b_n}{a_n})$, expresiones iguales a la (1.34), donde

$|X_n|$ es la “**Característica de Amplitud del Espectro**” y

ϕ_n la “**Característica de Fase del Espectro**”.

La expresión (1.41) se puede expresar en la forma dada por (1.35). En efecto,

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) dt = a_0 \quad \text{es la componente continua} \quad (1.45)$$

Para valores negativos de n , $X_{-n} = |X_{-n}| \exp(-j\phi_{-n}) = a_n + j b_n = X_n^*$; entonces,

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$|X_{-n}| = |X_n^*| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \phi_{-n} = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

Esto implica que X_n tiene simetría hermítica [en honor del matemático francés Charles Hermite (1822-1901)], es decir, que

$$|X_n| = |X_{-n}| = |X_n^*| \quad \text{y} \quad \phi_n = -\phi_{-n} \quad (1.46)$$

La expresión (1.41) se puede escribir entonces en la forma

$$x_T(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ |X_n| \exp(-j\phi_n) \exp(-j2\pi n f_0 t) + |X_n| \exp(j\phi_n) \exp(j2\pi n f_0 t) \}$$

$$\text{de donde,} \quad x_T(t) = X_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \quad (1.47a)$$

$$\text{o también,} \quad x_T(t) = X_0 + 2|X_1| \cos(\omega_0 t + \phi_1) + 2|X_2| \cos(2\omega_0 t + \phi_2) + \dots \quad (1.47b)$$

La expresión (1.47a) se denomina “desarrollo armónico de Fourier”; ella permite el desarrollo en serie de una señal periódica $x_T(t)$, tal como se hizo para las expresiones (1.35), (1.36) y (1.38). Su interpretación en el dominio de la frecuencia se ofrecerá en la siguiente sección.

♣ Ejemplo 1.8. Desarrollo en Serie de Fourier de una Señal Rectificada de Onda Completa

Sea la señal rectificada de onda completa de la Fig. 1.18 donde

$$x_T(t) = 110\sqrt{2} \cos(2\pi 60t) \quad \text{en } T$$

El período T se obtiene a partir de

$$\cos(2\pi 60 \frac{T}{2}) = 0, \quad \text{de donde}$$

$$120\pi \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad \text{De aquí,}$$

$$T = \frac{1}{120}; \quad f_0 = 120 \text{ Hz}; \quad A = 110\sqrt{2}$$

$$\text{Entonces,} \quad x_T(t) = 110\sqrt{2} \cos(120\pi t) \quad \text{para} \quad -\frac{1}{240} < t \leq \frac{1}{240}$$

$$x_T(t) \text{ es par; } X_n = a_n \quad \text{y} \quad \phi_n = 0. \quad \text{De (1.43),}$$

$$X_n = \frac{2A}{T} \int_0^{1/240} \cos(120\pi t) \cos(240\pi n t) dt$$

Integrando y reemplazando valores numéricos

$$X_n = \frac{220\sqrt{2}}{\pi(4n^2 - 1)} (-1)^{n+1} \quad \text{para todo } n; \quad \phi_n = 0$$

$$X_0 = \frac{220\sqrt{2}}{\pi} = 99,035. \quad \text{Esta es la componente continua.}$$

El desarrollo en serie de Fourier de la señal rectificada de onda completa será, de (1.47),

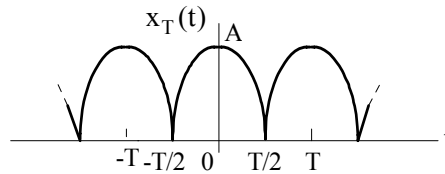


Fig. 1.18. Señal Rectificada de Onda Completa.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$x_T(t) = 99,035 \left[1 + \frac{2}{3} \cos(240\pi t) - \frac{2}{15} \cos(480\pi t) + \frac{2}{35} \cos(720\pi t) - \dots \right] \quad \clubsuit$$

En general, la resolución de la integral de X_n , expresión (1.42), es una operación laboriosa. Sin embargo, mediante la utilización de computadoras digitales se puede calcular rápida y eficientemente los coeficientes de Fourier (En este texto utilizaremos el programa MATHCAD para todos los cálculos numéricos y la graficación de funciones). En el APENDICE A el lector encontrará una breve introducción al cálculo numérico de estos coeficientes.

1.4.3. El Espectro Discreto

El desarrollo en serie de Fourier se puede utilizar para dos clases de señales: (a) Para representar una señal aperiódica $x(t)$ en un intervalo finito, por ejemplo $(0, T)$; en este caso la serie de Fourier converge para una extensión de una señal $x(t)$ fuera del intervalo $(0, T)$, por ejemplo, para $x(t) = x(t + nT)$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ (b) Se puede emplear también el desarrollo en serie de Fourier para representar una señal periódica $x_T(t)$ en cualquier intervalo de interés. Este es el tipo de aplicación de las Series de Fourier de más utilización en ingeniería eléctrica.

Pero la interpretación que más nos interesa del desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica es que se está descomponiendo la señal en términos de sus armónicas, es decir, sus diferentes componentes frecuenciales. Si $x_T(t)$ es una señal periódica de período T , entonces, de acuerdo con (1.35) o (1.47), ella contiene componentes de frecuencia a las frecuencias armónicas nf_0 , con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ donde $f_0 = 1/T$. El conjunto o colección de estas componentes de frecuencia que conforman $x_T(t)$ se denomina “**Espectro de Frecuencia de $x_T(t)$** ” o simplemente “**Espectro de $x_T(t)$** ”. En el caso de una señal periódica este espectro es discreto, es decir, es cero para $n \neq nf_0$, con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, y estará formado por “rayas o líneas” de amplitud $|X_n|$ en las frecuencias $\pm nf_0$.

El espectro discreto es la representación de una señal periódica $x_T(t)$ en el dominio de la frecuencia, y, dado el espectro, se puede especificar $x_T(t)$. Se dispone ahora de dos formas para especificar una señal periódica $x_T(t)$: definir $x_T(t)$ en el dominio del tiempo mediante la descripción (gráfica o analítica) de su forma de onda, o especificar $x_T(t)$ en el dominio de la frecuencia mediante el espectro de frecuencias. El espectro discreto se representa gráficamente mediante el llamado “**Espectro de Amplitudes o de Líneas**”, en el cual la amplitud de cada armónica o componente frecuencial se representa con una línea vertical de longitud proporcional a la amplitud de la armónica, y localizada en el eje de frecuencia a las frecuencias $\pm f_0, \pm 2f_0, \pm \dots$; es la gráfica $|X_n|$ vs nf_0 para todo n entero. Si $x_T(t)$ contiene una componente continua, ésta se localiza como una línea de amplitud X_0 a la frecuencia cero (origen); el espectro de líneas se muestra en la Fig. 1.19(a).

El espectro de líneas es entonces un gráfico de líneas igualmente espaciadas con longitudes proporcionales a las amplitudes de las diferentes componentes de frecuencia contenidas en $x_T(t)$, como se muestra en la Fig. 1.19(a). Obsérvese también que la fase de cada armónica se puede representar en la misma forma; en este caso se tiene el “**Espectro de Fase**” que es la gráfica ϕ_n vs nf_0 para todo n entero, como se muestra en la Fig. 1.19(b). En estas figuras se hace $|X_{-n}| = |X_n|$ y $\phi_{-n} = -\phi_n$.

El espectro de líneas de señales periódicas prácticas puede no contener líneas en algunas de las frecuencias. Esto lo veremos a continuación.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

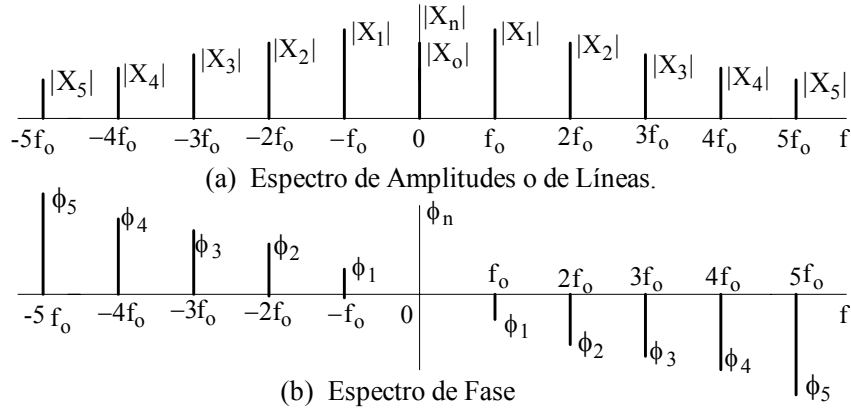


Fig. 1.19. El Espectro Discreto.

♣ Ejemplo 1.9. Espectro de una Señal Periódica Rectangular

Sea la señal periódica rectangular de la Fig. 1.20(a).

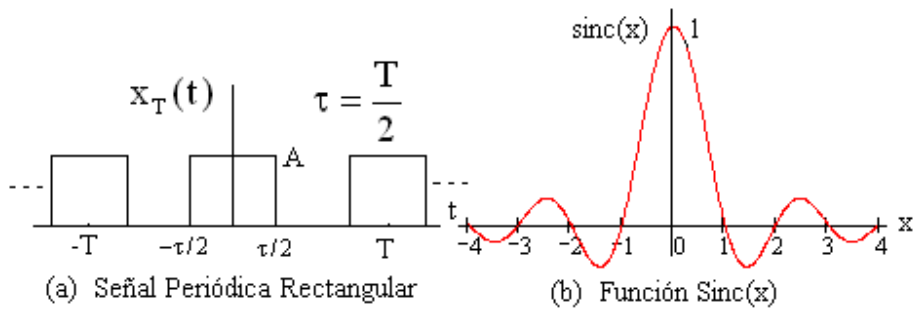


Fig. 1.20

$$x_T(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT}{\tau}\right); \quad T > \tau; \quad x_T(t) \text{ es par}; \quad X_n = a_n \text{ es real}; \quad \phi_n = 0.$$

$$\text{De (1.43),} \quad X_n = \frac{2}{T} \int_0^{\tau/2} A \cos(2\pi n f_0 t) dt = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(\pi n f_0 \tau)}{\pi n f_0 \tau}$$

Para simplificar la notación, vamos a introducir la llamada “Función Sinc(x)”, Fig.1.20(b), definida en la forma

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \quad (1.48)$$

La función sinc(x) se conoce también con el nombre “seno cardinal” y su área es la unidad.

La función sinc(.) tiene las siguientes propiedades:

$$1. \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(\pm j2\pi ft) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos(2\pi ft) dt = \text{sinc}(Tf) \quad (1.49)$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(ax) dx = \frac{1}{a} \quad (1.50a)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$3. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(an) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(an) = \frac{1}{a} \quad (1.50b)$$

$$4. \text{sinc}(0) = 1; \quad \text{sinc}(m) = 0 \quad \text{para todo } m \text{ entero } \neq 0$$

Nótese que los ceros de $\text{sinc}(x/a)$ ocurren en los puntos $x = na$, con n entero $\neq 0$.

En algunos textos se utiliza la función $\text{Sa}(x)$ definida en la forma

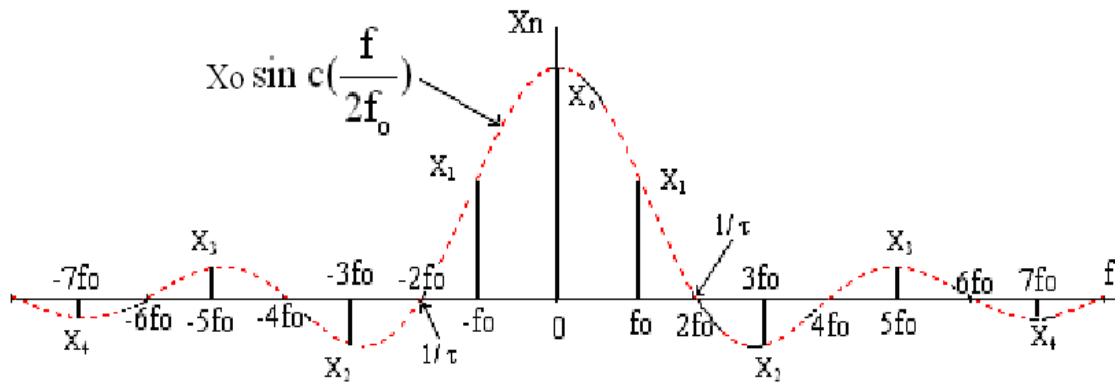
$$\text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}; \quad \text{por lo tanto, } \text{sinc}(x) = \text{Sa}(\pi x)$$

Utilizando la función $\text{sinc}(\cdot)$, el resultado del presente ejemplo se puede expresar en la forma

$$X_n = A\tau f_0 \text{sinc}(nf_0\tau) = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(n\frac{\tau}{T}\right) \quad (1.51)$$

También, $X_0 = A\tau f_0 = A\frac{\tau}{T}$; $\frac{\tau}{T}$ es el ciclo de trabajo.

En la Fig. 1.21(a) se muestra el espectro X_n cuando la señal periódica es cuadrada ($\tau = T/2$), y en (b) y (c) se muestra el espectro de amplitudes X_n para algunos valores del ciclo de trabajo. Nótese que la envolvente de X_n en (a) es $X_0 \text{sinc}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$ y X_n no contiene componentes (líneas) para n par.



(a) Espectro de una Señal Periódica Cuadrada

Fig. 1.21(a)

En la Fig. 1.21(b) se observa que a medida que T aumenta, manteniendo τ fijo, dos características del espectro cambian también: la separación entre las diferentes componentes discretas de frecuencia y la amplitud de las mismas. El espectro se hace más denso pero de menor amplitud a medida que T aumenta. Nótese, sin embargo, que el perfil o “envolvente” del espectro no cambia puesto que él depende de la duración del impulso. Por el contrario, si T es fijo y τ varía, la amplitud del espectro aumenta proporcionalmente a τ y la distancia al primer cero de la envolvente se hace cada vez menor, como se muestra en la Fig. 1.21(c).

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

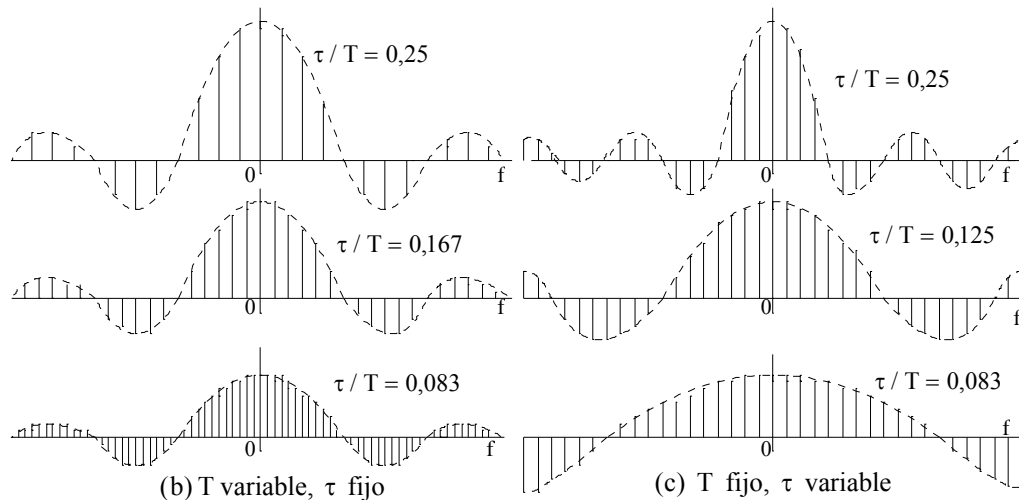


Fig. 1.21(cont.). Espectros de una Señal Periódica Rectangular para diferentes valores de T y tau.

Nótese que si T/τ es un número entero, a las frecuencias n/τ las componentes serán cero; pero si T/τ es fraccionario, las componentes en n/τ serán distintas de cero. Obsérvese la relación inversa entre el primer cero del espectro o “**extensión espectral**” y el valor de τ : cuando τ disminuye, la extensión espectral aumenta y viceversa. Obsérvese también que cuando $\tau = T$, el tren de impulsos rectangulares degenera en una constante A . En este caso el espectro constará de una sola línea de amplitud A a la frecuencia cero.



Propiedades del Espectro Discreto

Hemos dicho que el espectro discreto posee ciertas propiedades que son muy útiles en la representación espectral de señales periódicas. Estas propiedades son:

1. Las líneas espectrales están igualmente espaciadas en f_0 , puesto que todas las frecuencias están relacionadas armónicamente con la frecuencia fundamental f_0 .
2. La componente continua corresponde a la frecuencia cero y es el valor promedio de la señal. En efecto, para $n = 0$,

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) dt = \langle x_T(t) \rangle \quad (1.52)$$

X_0 puede ser positiva, negativa o cero.

3. Si $x_T(t)$ es real, el espectro de amplitudes es simétrico (par en nf_0) y el espectro de fase es antisimétrico (impar en nf_0), es decir,

$$|X_n| = |X_{-n}| \quad \text{y} \quad \phi_n = -\phi_{-n} \quad (\text{Simetría hermítica}) \quad (1.53)$$

como se muestra en la Fig. 1.19. X_n viene dado por (1.42).

- (a) Si $x_T(t)$ es real y par, el espectro de amplitudes será enteramente real y la fase será 0 ó $\pm \pi$. Entonces, de (1.43),

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x_T(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (1.54)$$

- (b) Si $x_T(t)$ es real e impar, el espectro de amplitudes es enteramente imaginario y la fase será $\pm \frac{\pi}{2}$. Entonces, de (1.43),

$$X_n = -j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = -j \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x_T(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (1.55)$$

4. Si $x_T(t)$ tiene un desarrollo en serie de Fourier dado por (1.40) o (1.47), entonces el desarrollo en serie de Fourier de $x_T(t \pm t_0)$ será

$$x_T(t \pm t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp[j2\pi n f_0 (t \pm t_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{X}_n \exp(j2\pi n f_0 t) \quad (1.56)$$

donde $\tilde{X}_n = X_n \exp(\pm j2\pi n f_0 t_0)$; y de (1.44), $\tilde{X}_n = |X_n| \exp[j(\phi_n \pm 2\pi n f_0 t_0)]$

Por consiguiente, $|\tilde{X}_n| = |X_n|$ y $\tilde{\phi}_n = \phi_n \pm 2\pi n f_0 t_0$ (1.57)

Estas relaciones indican que el espectro de amplitudes $|\tilde{X}_n|$ de $x_T(t \pm t_0)$ es idéntico al espectro de amplitudes $|X_n|$ de $x_T(t)$. Las frecuencias armónicas son también idénticas, como puede apreciarse en (1.56). Sin embargo, el espectro de fase ha cambiado; en efecto, el desplazamiento en el tiempo de $\pm t_0$ segundos, produce un desfase de $\pm 2\pi n f_0 t_0$ radianes en la armónica n -ésima. Un desplazamiento en el tiempo no afecta al espectro de amplitudes, pero sí al espectro de fase en un ángulo o desfase dado.

1.4.4. Espectro de Potencia de Señales Periódicas

Teorema de Parseval

Al desarrollar el espectro discreto de Fourier se ha demostrado que los espectros de fase y amplitud se relacionan con las fases y amplitudes de las componentes frecuenciales de la señal, formando un conjunto discreto de sinusoides complejas que representan la señal original. La noción de espectro discreto de una señal puede plantearse en una forma más intuitiva si se considera la distribución de la potencia en función de la frecuencia. La relación requerida se encuentra expresando la potencia en el dominio del tiempo y escribiendo luego una expresión equivalente en el dominio de la frecuencia. Puesto que la potencia es un invariante, ella será siempre la misma cualquiera que sea el dominio en que esté representada.

De las expresiones (1.5) y (1.6), la potencia normalizada de una señal periódica en el dominio del tiempo es

$$\langle x_T^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) x_T^*(t) dt \quad (1.58)$$

Se puede expresar también la potencia promedio de $x_T(t)$ en el dominio de la frecuencia calculando la potencia asociada con cada componente de frecuencia. Esto conlleva a la idea de un “**Espectro de Potencia de $x_T(t)$** ” en el cual se pueda representar la potencia promedio asociada con cada armónica de $x_T(t)$; *el espectro de potencia de $x_T(t)$ es entonces la distribución de la potencia en el dominio de la frecuencia*. El concepto de *espectro de potencia* lo desarrollaremos posteriormente en forma más general.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

El conjugado $x_T^*(t)$ de $x_T(t)$ es $x_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* \exp(-j2\pi n f_0 t)$ (1.59)

Reemplazando (1.59) en (1.58),

$$\begin{aligned} \langle x_T^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* \exp(-j2\pi n f_0 t) \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \end{aligned}$$

Entonces, $\langle x_T^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$ (1.60)

Esta expresión se conoce con el nombre de “**Teorema de Parseval**” y establece que la potencia promedio de una señal periódica se puede determinar en el dominio de la frecuencia elevando al cuadrado y sumando las amplitudes de las líneas espectrales. *La representación $|X_n|^2$ vs $n f_0$ se conoce con el nombre de “Espectro de Potencia de $x_T(t)$ ”.* La forma de este espectro es igual a la mostrada en la Fig. 1.19(a) con la diferencia de que las componentes están elevadas al cuadrado. Nótese que no existe el correspondiente espectro de fase.

El Teorema de Parseval permite calcular tanto la potencia total de una señal como la distribución de esta potencia en las distintas frecuencias. Obsérvese que el teorema requiere solamente del conocimiento de la característica de amplitud $|X_n|$; la fase no interviene.

La importancia del Teorema de Parseval en el análisis de señales y sistemas es que permite determinar la potencia dentro de una gama de frecuencias como, por ejemplo, cuando se quiere determinar la potencia a la salida de un filtro dado. El desarrollo en serie de Fourier expande $x_T(t)$ en una suma de fasores de la forma $X_n \exp(j2\pi n f_0 t)$ y la potencia promedio de cada fador será $|X_n|^2$, de modo que la potencia promedio total es la suma de las potencias promedio de los fasores componentes, como se puede ver en (1.60). En general, *la potencia compuesta de n señales independientes es igual a la suma de las potencias individuales de las señales, siempre y cuando no coincidan las frecuencias de algunas componentes. En este último caso hay que tomar en cuenta los factores de fase correspondientes, pues al sumarse las componentes puede ocurrir interferencia destructiva.*

Puesto que $|X_n| = |X_{-n}|$, el Teorema de Parseval se puede también escribir en la forma

$$\langle x_T^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = X_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2 \quad (1.61)$$

♣ Ejemplo 1.10.

La señal rectificada de onda completa del Ejemplo 1.8 se aplica a un filtro pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda de 400 Hz. Calcular las potencias de entrada y salida del filtro.

Solución

Suponiendo que el rectificador no tiene pérdidas, la potencia de la señal rectificada es la misma que la potencia de la señal sin rectificar. Entonces, de (1.9), la potencia a la entrada del filtro es

$$\langle x_T^2(t) \rangle = 110^2 = 12100 \text{ W}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

El filtro tiene un ancho de banda de 400 Hz, y como las componentes discretas están separadas en 120 Hz, solamente saldrán las componentes a las frecuencias de 120 Hz, 240 Hz y 360 Hz, es decir, $n = 3$ componentes más la componente continua. Del teorema de Parseval, la potencia de salida del filtro será $\langle y^2(t) \rangle = X_0^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2$. Pero, del Ejemplo 1.8,

$$|X_n|^2 = \left| \frac{220\sqrt{2}}{(4n^2 - 1)\pi} \right|^2, \text{ de donde}$$

$$\langle y^2(t) \rangle = 9807,89 + 2179,73 + 87,87 + 16,01 = 12090,62 \text{ W}$$

Nótese que el 99,92% de la potencia total de la señal está contenida en las tres primeras componentes más la componente continua.



♣ Ejemplo 1.11. Distorsión Armónica

En general, el comportamiento de un dispositivo se puede caracterizar mediante la Distorsión Armónica, que se define en la forma

$$\text{Distorsión Armónica \%} = \sqrt{\frac{\text{Potencia Espuria}}{\text{Potencia Util}}} 100 = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |X_n|^2}{|X_1|^2}} 100$$

La potencia útil es la correspondiente a la frecuencia fundamental ($n = 1$).

Por ejemplo, el rizado en un rectificador es una forma de distorsión armónica, pero la expresión que lo define es

$$\text{Factor de Rizado \%} = \sqrt{\frac{2 \sum_{n=2}^N |X_n|^2}{X_0^2}} 100$$

donde $N \geq 2$ es un número entero que depende del filtro utilizado y que debe ser lo más pequeño posible. Vamos a calcular el factor de rizado de la señal rectificada del Ejemplo 1.8, si el filtro deja pasar solamente las dos primeras componentes, afectadas, cada una, en un factor $1/n$.

$$\text{Del Ejemplo 1.8: } X_0 = 99,03; \quad X_1 = 33,01; \quad X_2 = 6,60$$

Las salidas correspondientes del filtro serán:

$$Y_0 = X_0 = 99,03; \quad Y_1 = \frac{X_1}{1} = 33,01; \quad Y_2 = \frac{X_2}{2} = 3,3$$

$$\text{El Factor de Rizado } (F_R \%) \text{ será: } F_R \% = \frac{\sqrt{2(33,01)^2 + 2(3,3)^2}}{99,03} 100 = 44,37\%$$

Cuanto más pequeño sea el Factor de Rizado mejor será el comportamiento del rectificador.



En general, la serie de Fourier proporciona un método para descomponer una señal en términos de una suma de señales elementales de la forma $\exp(j2\pi n f_0 t)$. Esta descomposición es de gran importancia en el análisis de sistemas lineales complicados excitados por señales arbitrarias

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

puesto que la respuesta de estos sistemas a señales exponenciales o sinusoidales es fácil de calcular o medir.

Hay que recordar que el desarrollo en Serie de Fourier se aplica a señales que son:

1. Periódicas, es decir, que $x_T(t) = x_T(t + T)$, en cuyo caso la representación es válida para todo t ($-\infty < t < \infty$).
2. Aperiódicas, en cuyo caso la representación es válida en un intervalo finito (a, b) . La extensión periódica de $x(t)$ se obtiene fuera del intervalo (a, b) .

♣ Ejemplo 1.12

Considérese el desarrollo de la señal $x(t) = \exp(-t)$ en el intervalo $(-1, 1)$ mediante la serie exponencial de Fourier. Como el período es $T = 2$, entonces $f_0 = 1/2$ y

$$X_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(-t) \exp(-j2\pi n \frac{t}{2}) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp[-(1 + j\pi n)t] dt$$

Integrando, $X_n = \frac{e \exp(j\pi n) - e^{-1} \exp(\pm j\pi n)}{2(1 + j\pi n)}$, pero $\exp(\pm j\pi n) = (-1)^n$, de donde

$$X_n = \frac{(-1)^n}{1 + j\pi n} \left[\frac{e - e^{-1}}{2} \right] = \frac{(-1)^n \sinh(1)}{1 + j\pi n}.$$

El desarrollo de $x(t)$ en el intervalo $(-1, 1)$ será entonces

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh(1)}{1 + j\pi n} \exp(j\pi n t)$$

♣

1.5. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

1.5.1. Introducción

Si se desea extender la clase de funciones transformables a fin de incluir señales aperiódicas representadas para todo t , hay que utilizar otro tipo de descomposición para $x(t)$. Un tipo de descomposición bastante útil es aquella en la cual se representa $x(t)$ mediante un continuo de sinusoides complejas de la forma $\exp(j2\pi ft)$. La representación se efectúa entonces en términos de la llamada Transformada de Fourier que se considera a continuación.

Para desarrollar una representación de $x(t)$, Fig. 1.22(a), en el intervalo $(-\infty, \infty)$ en términos de un continuo de señales exponenciales, vamos a postular que $x(t)$ define un ciclo de una señal periódica $x_T(t)$, es decir, $x(t)$ es la señal generatriz de $x_T(t)$, como se muestra en la Fig. 1.22(b).

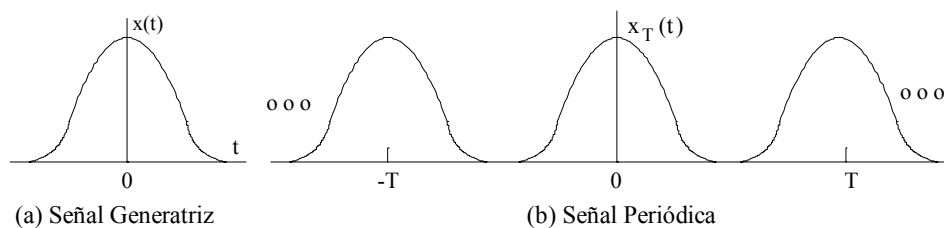


Fig. 1.22.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$x_T(t)$ es una señal periódica de período T y como tal podrá representarse mediante un desarrollo en serie de Fourier. A medida que T aumenta, el intervalo de representación se hace más grande y cuando T es infinito la señal periódica se habrá convertido en aperiódica, es decir,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = x(t) \quad (1.62)$$

La serie de Fourier que representa a $x_T(t)$ representará también a $x(t)$ en el límite cuando $T \rightarrow \infty$. Por lo tanto, de (1.41),

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t) = x(t) \quad (1.63)$$

$$\text{donde} \quad X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt \quad (1.64)$$

Si se define: $\Delta f = \frac{1}{T}$; $n f_0 = f_n$ y $X(n f_0) = X(f_n) = T X_n$

entonces (1.63) y (1.64) quedan en la forma

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f_n) \exp(j2\pi f_n t) \Delta f = x(t) \quad (1.65)$$

$$\text{y} \quad X(f_n) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \exp(-j2\pi f_n t) dt \quad (1.66)$$

Cuando $T \rightarrow \infty$, se sigue que:

$\Delta f \rightarrow df$; $f_n = n f_0 \rightarrow f$; el límite de la sumatoria cuando la variable se hace continua es una integral; $X(f_n) \rightarrow X(f)$, y $x_T(t) \rightarrow x(t)$. Por esta razón, en el límite, las expresiones (1.65) y (1.66) se convierten, respectivamente, en

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df \quad (1.67)$$

$$\text{y} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) dt \quad (1.68)$$

La cantidad $X(f)$ se conoce como la “**Transformada de Fourier de $x(t)$** ”, siendo $x(t)$ su correspondiente transformada inversa. Estas operaciones se representan generalmente en la forma

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \text{ o } X(f) = \text{TF}\{x(t)\} \quad \text{y} \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \text{ o } x(t) = \text{TF}^{-1}\{X(f)\}$$

$$\text{y simbólicamente mediante la correspondencia} \quad x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad (1.69)$$

Las expresiones (1.67) y (1.68) reciben también el nombre de “Par de Transformadas de Fourier”. En general, se utilizarán letras minúsculas para las señales en el dominio del tiempo, y las correspondientes letras mayúsculas para sus transformadas.

Hay otro procedimiento para obtener el par de transformadas (1.67) y (1.68) en el cual se utilizan las propiedades del impulso unitario Delta Dirac. En efecto, de (1.21d),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f t) df = \delta(t)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

y de la propiedad de muestreo del impulso unitario, expresión (1.17),

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j2\pi(\tau - t)f] df \right] d\tau$$

Intercambiando el orden de integración,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \right] \exp(j2\pi ft) df$$

Definiendo la integral dentro de los corchetes en la forma

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \text{ y con el cambio de variables } \tau = t, \text{ queda}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.68)$$

$$\text{y también } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (1.67)$$

Esta segunda forma de deducción del par de Transformadas de Fourier nos parece más artificiosa que la primera forma, en la cual se considera a las Integrales de Fourier como el límite de la Serie de Fourier cuando el período tiende a infinito, enfoque que creemos es más significativo. De todas maneras, la demostración rigurosa de estas expresiones está fuera de los objetivos de este texto. Para nosotros ingenieros, estas expresiones no son nada más que herramientas de análisis.

Las integrales (1.67) y (1.68), salvo para algunas formas sencillas de $x(t)$ y $X(f)$, son, en general, de difícil resolución en forma analítica. Sin embargo, el creciente uso de métodos digitales como ayudas computacionales y para aplicaciones en el procesamiento digital de señales, ha llevado a la definición de una versión discreta de la Transformada de Fourier. En el APENDICE A se trata en forma breve algunos métodos para el cálculo numérico de la Transformada de Fourier: la Transformada de Fourier Discreta (DFT) y la Transformada de Fourier Rápida (FFT). Puede también utilizarse programas matemáticos como MATHCAD, MATLAB, MAPLE y otros, aunque nosotros utilizaremos siempre MATHCAD.

1.5.2. El Espectro Continuo

La expresión (1.67) se puede interpretar como una descomposición de $x(t)$ en términos del continuo de funciones elementales $\{\exp(j2\pi ft)\}$, cuya magnitud viene dada por $X(f)df$. La cantidad $X(f)$ hace el mismo papel que X_n en la representación en Serie de Fourier, y $X(f)df$ es el “coeficiente” asociado con la función básica elemental $\exp(j2\pi ft)$. La cantidad $X(f)$ es entonces el **“Espectro Continuo de $x(t)$ ”**.

En general, $X(f)$ es una función compleja de una variable real f y se puede expresar en la forma

$$X(f) = |X(f)| \exp[j\phi(f)] \quad (1.70)$$

donde $|X(f)|$ es el **“Espectro Continuo de Amplitudes de $x(t)$ ”** y $\phi(f)$ el **“Espectro Continuo de Fase de $x(t)$ ”**.

El espectro continuo $X(f)$ de $x(t)$ se puede interpretar como la distribución, en amplitud y fase, de todas las componentes de frecuencia que existen para $-\infty < t < \infty$, la suma de las cuales debe ser cero excepto en el intervalo de existencia de $x(t)$.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

♣ Ejemplo 1.13. Transformada de un Impulso Rectangular

Sea el impulso rectangular mostrado en la Fig. 1.23(a).

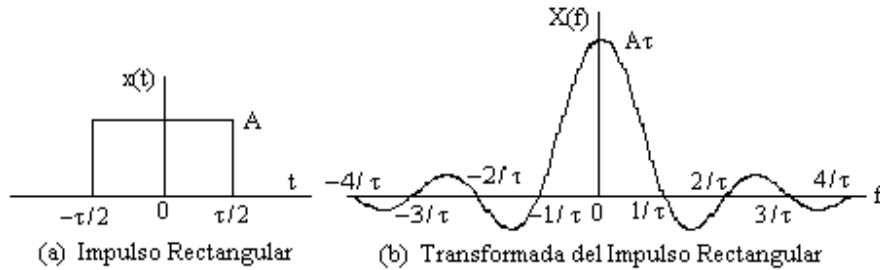


Fig. 1.23

Puede observarse que $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$; reemplazando $x(t)$ en (1.68),

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \exp(-j2\pi ft) dt = 2A \int_0^{\tau/2} \cos(2\pi ft) dt = \frac{2A \sin(2\pi f t)}{2\pi f} \Big|_0^{\tau/2} \\
 X(f) &= 2A \frac{\sin(2\pi f \frac{\tau}{2})}{2\pi f} = A\tau \text{sinc}(\tau f); \text{ en consecuencia,} \\
 A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) &\Leftrightarrow A\tau \text{sinc}(\tau f) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{f}{1/\tau}\right)
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

En la Fig. 1.23(b) se muestra la forma de este espectro.

Aconsejamos al lector aprenderse de memoria los pares de transformadas del rectángulo y del triángulo, pues los estaremos usando repetidamente en todo el texto en el modelaje de señales tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

♣

Nótese que no todas las señales se pueden desarrollar en un continuo de exponenciales $\{\exp(j2\pi ft)\}$. La denominada “condición de unicidad” establece que si una señal $x(t)$ tiene una transformada de Fourier, entonces esta transformada y su inversa son unívocas. En efecto, dada una función del tiempo, hay sólo y solamente una transformada de Fourier de esa función; inversamente, dada una transformada de Fourier, habrá sólo y solamente una función del tiempo correspondiente.

Las condiciones necesarias para la existencia de la Transformada de Fourier son las mismas que las dadas para la Serie de Fourier (Condiciones de Diritchlet), excepto que no es necesario que $x(t)$ sea periódica. En particular, la condición suficiente para que $x(t)$ posea una transformada de Fourier es que $x(t)$ sea de módulo integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{1.72}$$

Aún más, una condición suficiente débil para la existencia de la Transformada de Fourier es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{1.73}$$

Estas condiciones incluyen entonces todas las señales de energía, es decir, las señales de energía poseen una transformada de Fourier. Estas condiciones son satisfechas por todas las señales físicamente realizables utilizadas en ingeniería. Sin embargo, hay un cierto número de señales de

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

gran importancia, como la función escalón por ejemplo, cuya energía no es finita (no es de cuadrado integrable) pero que posee una transformada de Fourier. Esto quiere decir que (1.72) es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de la transformada de Fourier de $x(t)$. Se puede determinar la transformada de Fourier de estas señales mediante la teoría de las distribuciones y el empleo de impulsos unitarios Delta Dirac en las transformadas.

1.5.3. Propiedades de la Transformada de Fourier de Señales Reales

La Transformada de Fourier es, como ya hemos señalado, una forma alterna y equivalente de representación de una señal $x(t)$. Las dos descripciones, una en el tiempo y la otra en la frecuencia, son de gran utilidad en ingeniería porque a menudo una descripción es más fácil de utilizar en una aplicación particular, o una descripción puede ser más intuitiva en un problema dado.

La Transformada de Fourier tiene las siguientes propiedades:

1. Si $x(t)$ es real, si se sustituye f por $-f$ en (1.68), entonces

$$X(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(j2\pi ft) dt = X^*(f) \quad (1.74a)$$

$$\text{o también} \quad X(f) = X^*(-f) \quad (1.74b)$$

Esto implica que $X(f)$ tiene simetría hermitica, es decir, que

$$|X(f)| = |X(-f)| = |X^*(f)| \quad \text{y} \quad \phi(f) = -\phi(-f) \quad (1.74c)$$

El espectro de amplitudes de una señal real $x(t)$ es simétrico (par en f), mientras que el espectro de fase es antisimétrico (impar en f).

Similarmente, si se sustituye t por $-t$ en (1.67), entonces

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-f), \text{ de donde } x(-t) \Leftrightarrow X(-f) \quad (1.74d)$$

Nótese también que si $x(t)$ es compleja, la transformada de su conjugado será entonces

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-f) \quad (1.74e)$$

2. Desarrollando $X(f)$ en la forma

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

$$\text{Si } x(t) \text{ es par, entonces } X(f) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (1.75a)$$

$X(f)$ será enteramente real y la fase será 0 ó $\pm\pi$.

$$\text{Si } x(t) \text{ es impar, entonces } X(f) = -j2 \int_0^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (1.75b)$$

En este caso $X(f)$ será enteramente imaginario y la fase será $\pm\frac{\pi}{2}$.

3. Haciendo $f=0$ en la expresión (1.68), se tiene

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad (1.76)$$

La cantidad $X(0)$ representa el área neta bajo la señal $x(t)$.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Nótese que las dimensiones de $X(f)$ son las de $x(t)$ por unidad de ancho de banda, por ejemplo volts/Hz, por lo cual el espectro de señales aperiódicas a veces se denomina “espectro de densidad de amplitudes” y es la distribución de la amplitud de $X(f)$ en el dominio de la frecuencia, puesto que las ordenadas representan la amplitud relativa de una determinada componente de frecuencia. La amplitud, en volts por ejemplo, correspondiente a una cierta frecuencia es infinitesimal y sólo es finita el área de la curva de $X(f)$ comprendida dentro un intervalo de frecuencias dado.

4. Simetría de la Transformada de Fourier. Si una señal $x(t)$ se puede expresar en términos de la suma de una señal par $x_e(t)$ y una señal impar $x_o(t)$, de la forma

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t), \quad (1.79a)$$

$$\text{entonces } x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad \text{y} \quad x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1.79b)$$

Puesto que la integración es una operación lineal, $X(f) = X_e(f) + X_o(f)$

$$\text{y de (1.79b), } X_e(f) = \frac{1}{2}[X(f) + X(-f)] \quad \text{y} \quad X_o(f) = \frac{1}{2}[X(f) - X(-f)] \quad (1.79c)$$

El lector puede demostrar también que

$$X_e(f) = 2 \int_0^\infty x_e(t) \cos(2\pi ft) dt \quad \text{y} \quad X_o(f) = -j2 \int_0^\infty x_o(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (1.79d)$$

♣ Ejemplo 1.14. Transformada de una Señal Triangular

Sea la señal triangular de la Fig. 1.24(a).

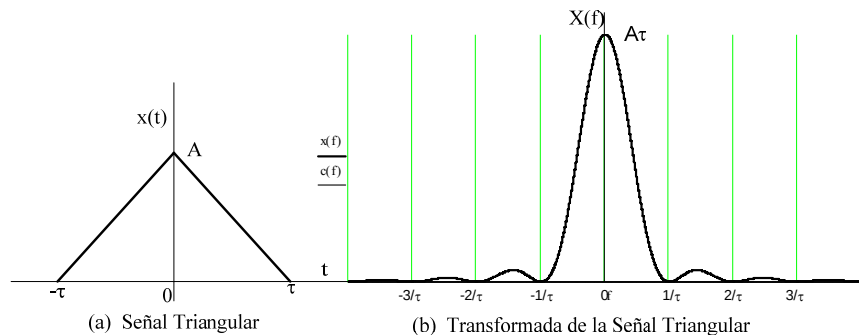


Fig. 1.24

$$\text{Del Ejemplo 1.4, } x(t) = A\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) & \text{para } |t| \leq \tau \\ 0 & \text{para } |t| > \tau \end{cases}$$

$$X(f) = 2A \int_0^\tau \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi ft) dt = 2A \int_0^\tau \cos(2\pi ft) dt - \frac{2A}{\tau} \int_0^\tau t \cos(2\pi ft) dt$$

$$X(f) = \left[2A \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} - \frac{2A}{\tau} \left[\frac{\cos(2\pi ft)}{(2\pi f)^2} + \frac{t \sin(2\pi ft)}{2\pi f} \right] \right]_0^\tau$$

Reemplazando límites y reorganizando, se obtiene finalmente

$$X(f) = A\tau \frac{\sin^2(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} = A\tau \text{sinc}^2(\tau f), \text{ de donde}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$A\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow A\tau \text{sinc}^2(\tau f) = A\tau \text{sinc}^2\left(\frac{f}{1/\tau}\right) \quad (1.80)$$

El espectro $X(f)$ se muestra en la Fig. 1.24(b). Esta es otra transformada que conviene memorizar. ♣

♣ Ejemplo 1.15. Transformada del Impulso Unitario Delta Dirac

Considérese la función $\exp(-j\omega t)$ a la cual se le aplica la propiedad de muestreo del impulso unitario, expresión (1.17),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \delta(t \pm t_0) dt = \exp(\pm j\omega t_0), \text{ pero } \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \delta(t \pm t_0) dt = \mathcal{F}\{\delta(t \pm t_0)\}$$

$$\text{de donde } A\delta(t \pm t_0) \Leftrightarrow A \exp(\pm j2\pi t_0 f) \quad (1.81)$$

$$\text{y para } t_0 = 0, \quad A\delta(t) \Leftrightarrow A \quad (1.82)$$

El impulso unitario tiene un espectro de amplitud constante para todo f y una variación de fase lineal en f , como se muestra en la Fig. 1.25(b) y (c). Estas propiedades del impulso unitario son de especial importancia en el análisis de sistemas lineales, como veremos en el Capítulo II.

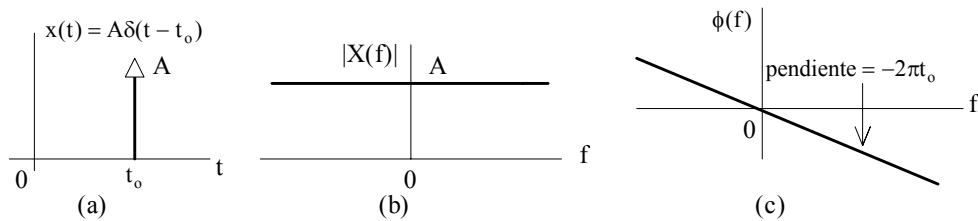


Fig. 1.25. Transformadas del Impulso Unitario Delta Dirac.

♣ Ejemplo 1.16. Transformada de un Impulso Exponencial Decreciente

Sea el impulso exponencial decreciente de la Fig. 1.26(a).

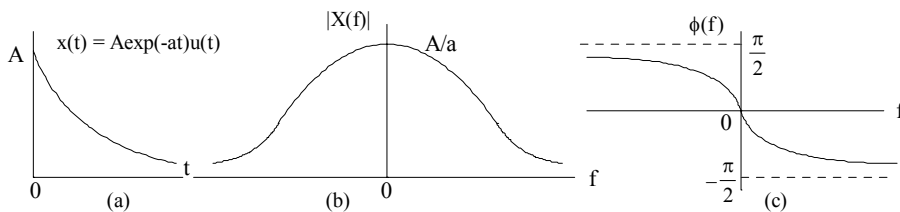


Fig. 1.26. Transformadas de la Señal $x(t) = A\exp(-at)u(t)$

$$x(t) = A \exp(-at)u(t) \Leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-at)u(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Efectuando la integración, $X(f) = \frac{A}{a + j2\pi f}$, de donde

$$A \exp(-at)u(t) \Leftrightarrow \frac{A}{a + j2\pi f} \quad (1.83)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

También, $|X(f)| = \frac{A}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$ y $\phi(f) = -\arctg\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$

que se muestran en la Fig. 1.26(b) y (c).

♣

♣ Ejemplo 1.17. Transformada de la Función Signo

Esta función no cumple con la condición de integrabilidad absoluta pero su transformada de Fourier se puede determinar mediante límites. En efecto, considérese la función $[\exp(-at)u(t) - \exp(at)u(-t)]$, Fig. 1.27, cuya transformada se calculó en el Ejemplo anterior.

De la Fig. 1.27,

$$\lim_{a \rightarrow 0} [\exp(-at)u(t) - \exp(at)u(-t)] = \text{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\{\exp(-at)u(t) - \exp(at)u(-t)\}$$

Del Ejemplo 1.16 y de (1.76),

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f} \right]$$

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{1}{j\pi f}$$

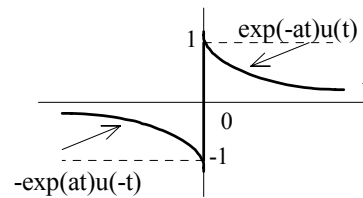


Fig. 1.27

de donde, $A \text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{A}{j\pi f}$ (1.84)

♣

♣ Ejemplo 1.18. Transformada del Escalón Unitario

De (1.15), $u(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)]$, y del Ejemplo 1.17, $\mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2} \left[\delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \right]$.

Entonces, $Au(t) \Leftrightarrow \frac{A}{2} \delta(f) + \frac{A}{j2\pi f}$ (1.85)

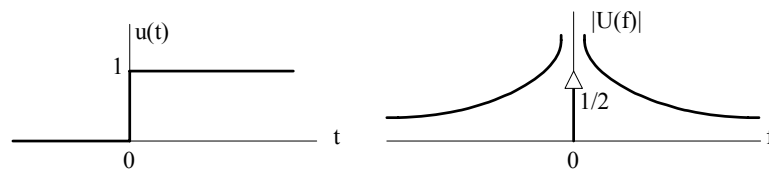


Fig. 1.28. Transformadas del Escalón Unitario.

En la Fig. 1.28 se muestra el par de transformadas del escalón unitario.

♣

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

1.6. DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGIA

Teorema de Raleigh

Hemos demostrado que la potencia total de una señal periódica se puede asociar con la suma de las potencias contenidas en cada componente de frecuencia (Teorema de Parseval). La misma clase de resultado es de esperar en el caso de señales no periódicas representadas por sus transformadas de Fourier. Para señales de energía, la energía en el intervalo $(-\infty < t < \infty)$ es finita, mientras que su potencia es cero. Por consiguiente, el espectro de energía, más bien que el espectro de potencia, es la caracterización más apropiada para señales que poseen una transformada de Fourier. La energía de una señal $x(t)$ es, de (1.4),

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \right] dt$$

Intercambiando el orden de integración,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \exp(j2\pi ft) dt \right] df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df; \text{ por lo tanto,}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.86)$$

Este resultado se conoce con el nombre de “Teorema de Raleigh”; conocido también en Europa con el nombre de “Relación de Plancherel”. Este teorema establece que la energía contenida en una señal $x(t)$ es igual al área bajo el cuadrado del módulo de la transformada de $x(t)$, es decir, $|X(f)|^2$. La cantidad $|X(f)|^2$ se denomina “**Espectro de Energía**” o “**Densidad Espectral de Energía**” de la señal $x(t)$, y de acuerdo con (1.86), $|X(f)|^2 df$ es la energía contenida en un ancho de banda infinitesimal df . Las dimensiones de $|X(f)|^2$ son joules/Hz, y la energía a una frecuencia en particular es cero.

Sea $G_x(f)$ la densidad espectral de energía normalizada de $x(t)$

$$G_x(f) = |X(f)|^2 \quad (1.87)$$

$$\text{La energía total de } x(t) \text{ será entonces,} \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.88)$$

La densidad espectral de energía $G_x(f)$ de $x(t)$ es la distribución de la energía de $x(t)$ en el dominio de la frecuencia y sus dimensiones son joules/Hz. Puesto que la energía es una magnitud positiva, entonces $G_x(f)$ es par en f y positiva para todo f [$G_x(f) \geq 0$].

Estrictamente hablando, el Teorema de Raleigh dice que en el espacio L^2 de las funciones de módulo cuadrado integrable sobre $(-\infty, \infty)$, la Transformación de Fourier es una transformación lineal isométrica, es decir, que conserva la norma. En el sentido físico, que es el que nos interesa directamente, el Teorema de Raleigh traduce el hecho de que la energía de una señal no depende del modo de representación de la señal. La energía es un invariante y es la misma así se tenga una representación temporal o una representación espectral de la señal.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

♣ Ejemplo 1.19. Energía de un Impulso Rectangular

Se quiere determinar el porcentaje de la energía total contenido dentro del lóbulo principal de la transformada de un impulso rectangular de amplitud A y duración τ ; este espectro se muestra en la Fig. 1.29. El lóbulo principal se muestra en color (Sugerimos al lector estudiar este ejemplo con mucha atención).

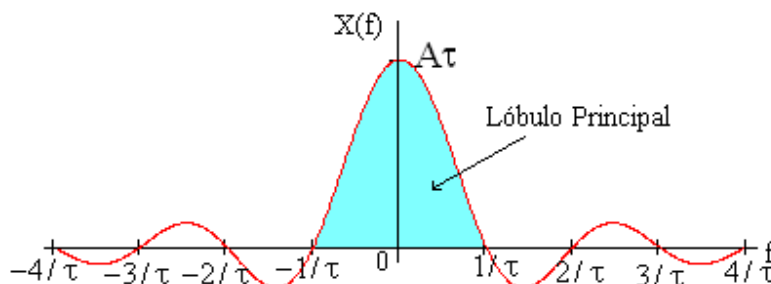


Fig. 1.29. Transformada de un Impulso Rectangular.

Del Ejemplo 1.13, $A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow X(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f)$

La energía total del impulso rectangular se puede calcular con más facilidad en el dominio del tiempo. En efecto,

$$E_x = 2 \int_0^{\tau/2} A^2 dt = A^2 \tau \text{ joules}$$

La energía contenida en el intervalo de frecuencias $|f| \leq \frac{1}{\tau}$ es, de (1.88),

$$E_B = 2A^2 \tau^2 \int_0^{1/\tau} \text{sinc}^2(\tau f) df = 2A^2 \tau^2 \int_0^{1/\tau} \frac{\text{sen}^2(\pi \tau f)}{(\pi \tau f)^2} df$$

y con el cambio de variables $\pi \tau f = x$, $E_B = \frac{2A^2 \tau}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} dx = A^2 \tau \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} dx$

$$\text{pero } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2} dx = 0,903$$

$$\text{De donde, } E_B = 0,903 A^2 \tau$$

$$\text{pero como } E_x = A^2 \tau, \text{ entonces } E_B = 0,903 E_x$$

La energía contenida en el lóbulo principal de la transformada de un impulso rectangular constituye el 90% de su energía total. Esto equivale a decir que si se aplica el impulso rectangular de duración τ a un filtro pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda $B = 1/\tau$, a la salida del filtro se tendrá el 90% de la energía a su entrada. En la Fig. 2.26(b) se muestra la correspondiente forma de onda de la salida; la salida es parecida a la entrada, criterio que se utiliza en la transmisión de datos en donde se necesita detectar una “presencia” y no una “forma”.

El lector puede verificar en la misma forma que si $B = 1/2\tau$, a la salida del filtro se tendrá el 77,5% de la energía a la entrada, y si $B = 3/2\tau$, se tendrá el 93%. Estos distintos valores de B corresponden a diferentes definiciones del ancho de banda de una señal. En general, la definición del ancho de banda de una señal es una cuestión de convención, y cada definición puede ser más

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

apropiada para una determinada aplicación; el lector debe estar atento entonces a la forma como se define el ancho de banda de una señal o de un sistema, como veremos más adelante.



1.7. TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

El par de transformadas de Fourier permite la representación de señales tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia; pero a menudo es necesario pasar de un dominio a otro dominio y la resolución de las integrales (1.67) y (1.68) puede hacerse más fácil, casi por inspección, si se aplican algunas propiedades y teoremas que simplifican enormemente las operaciones matemáticas.

En la práctica es de gran utilidad estudiar el efecto en un dominio causado por una operación en el otro, pues permite encontrar algunas relaciones y visualizar algunos aspectos físicos de las señales y sistemas que no son percibidos a simple vista. Por ejemplo, uno puede preguntarse qué sucede en el dominio de la frecuencia cuando una señal pasa por un integrador, o cuál es el espectro resultante de una señal que ha sido multiplicada por una señal sinusoidal. Estas y muchas otras preguntas, que demandarían laboriosas operaciones si se hicieran a través de las expresiones (1.67) y (1.68), pueden responderse muy fácilmente mediante la aplicación de las propiedades de la Transformada de Fourier ya vistas, y de los teoremas que se estudiarán en esta sección.

1.7.1. Teorema de la Superposición o Linealidad

$$\text{Sea } x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f) \quad \text{y} \quad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$$

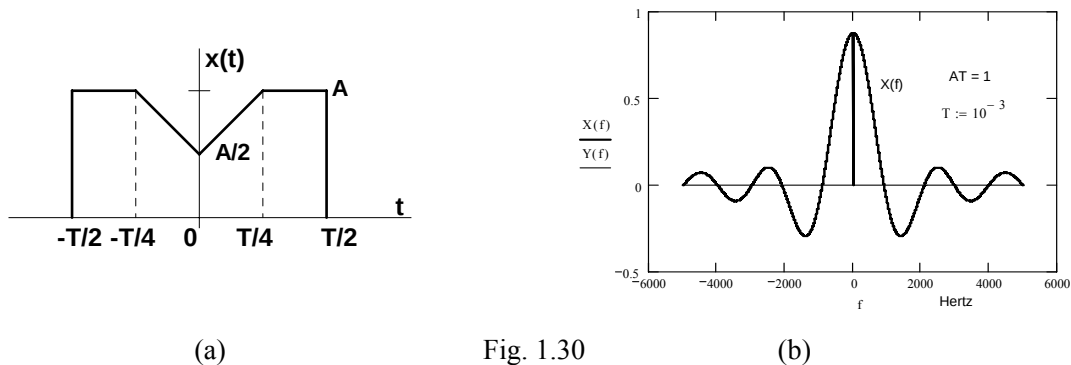
entonces, para cualesquiera constantes a y b , se verifica que

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Leftrightarrow aX_1(f) + bX_2(f) \quad (1.89)$$

La demostración de este teorema es directa pues la integración es una operación lineal. Este teorema es muy útil pues permite la descomposición de una señal cualquiera en una combinación lineal de señales cuyas transformadas se conocen o son fáciles de calcular, y determinar la transformada total como la suma de las transformadas de las señales individuales.

♣ Ejemplo 1.20

Calcular y dibujar la transformada de Fourier de la señal de la Fig. 1.30(a).



Solución:

$$x(t) \text{ se puede expresar en la forma } x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) - (1/2)A\Lambda\left(\frac{t}{T/4}\right)$$

$$\text{De los Ejemplos 1.13 y 1.14, } X(f) = AT \sin c(Tf) - (1/8)AT \sin c^2\left(\frac{Tf}{4}\right)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Este espectro se muestra en la Fig. 1.30b. ♣

1.7.2. Teorema de la Traslación o Desplazamiento en el Tiempo

$$\text{Si } x(t) \Leftrightarrow X(f), \text{ entonces } x(t \pm t_0) \Leftrightarrow X(f) \exp(\pm j2\pi t_0 f) \quad (1.90)$$

Demostración:

$$\text{Por definición, } \mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Con el cambio de variables $t' = t - t_0$,

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \exp(-j2\pi ft') \exp(-j2\pi t_0 f) dt'$$

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \exp(-j2\pi t_0 f) \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \exp(-j2\pi ft') dt'$$

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = X(f) \exp(-j2\pi t_0 f), \text{ y de la misma forma,}$$

$$\mathcal{F}\{x(t + t_0)\} = X(f) \exp(j2\pi t_0 f)$$

La señal $x(t - t_0)$ es una versión de $x(t)$ retardada en t_0 segundos (representa la salida de un filtro de ganancia unitaria cuya entrada es $x(t)$ y cuyo retardo es t_0). Este teorema establece entonces que el espectro de la señal retardada en un tiempo t_0 es igual al producto del espectro de la señal original por $\exp(-j2\pi t_0 f)$. Este retardo no afecta al espectro de amplitudes original, pero sí lo hace experimentar un desfase de $(-2\pi t_0 f)$ radianes. En general, *un desplazamiento en el dominio del tiempo corresponde a un desfase en el dominio de la frecuencia, y viceversa.*

1.7.3. Teorema del Cambio de Escala

$$\text{Sea } x(t) \Leftrightarrow X(f), \text{ entonces para una constante real } a, \quad x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (1.91)$$

Demostración:

Supóngase que $a > 0$. La transformada de $x(at)$ es

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) \exp(-j2\pi ft) dt. \text{ Con el cambio de variables } t' = at$$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \exp(-j2\pi \frac{f}{a} t') dt' = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Si $a < 0$, se puede demostrar en forma similar que $\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{-1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$, de donde

$$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Este teorema, algunas veces denominado “**Propiedad Escalar de la Transformada de Fourier**”, cuantifica la relación “duración-ancho de banda” entre una función del tiempo y su correspondiente transformada. Si $|a| > 1$, entonces $x(at)$ es la señal $x(t)$ con una escala de tiempo t

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

comprimida en un factor $|a|$. En forma similar, $X(\frac{f}{a})$ representa la función $X(f)$ con una escala de frecuencia f expandida o dilatada en un factor $|a|$ [Nótese que si $|a| < 1$, entonces $x(at)$ es una expansión de $x(t)$, y $X(\frac{f}{a})$ es una compresión de $X(f)$]. Una compresión en el dominio del tiempo corresponde entonces a una expansión en el dominio de la frecuencia, y viceversa. Esta propiedad permite decir que una señal que es limitada en el tiempo (existe sólo en un intervalo dado) es ilimitada en frecuencia (existe para todo f), y viceversa. El factor de escala $1/|a|$ asegura que la energía no varía al comprimir o expandir las señales; la invariancia de la energía debe mantenerse siempre.

Un ejemplo muy elocuente de esta propiedad se observa cuando se toca un disco de 33 rpm en un tocadiscos de 45 rpm (las nuevas generaciones no saben lo que es un disco de 33 o 45 rpm; pero seguimos manteniendo este ejemplo, porque es ya un clásico). La voz se escucha muy aguda (expansión en frecuencia) pues la pieza se está tocando en menos tiempo (compresión en el tiempo). Otro ejemplo se tiene en los grabadores de cinta magnética, en los cuales para obtener respuestas a frecuencias elevadas (expansión en frecuencia) se utiliza altas velocidades de cinta (tiempos más cortos o compresión en el tiempo).

1.7.4. Teorema de la Dualidad o Simetría

$$\text{Sea } x(t) \Leftrightarrow X(f), \text{ entonces } X(t) \Leftrightarrow x(-f) \quad (1.92a)$$

$$\text{Si } x(f) \text{ es par, entonces } X(t) \Leftrightarrow x(f) \quad (1.92b)$$

Demostración:

$$\text{Como } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df, \text{ entonces } x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \exp(-j2\pi ft') df'$$

Si se reemplaza t por f en la segunda integral,

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \exp(-j2\pi ff') df'$$

A fin de obtener una forma reconocible, se puede reemplazar f' por t , es decir,

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \text{ o sea que } X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Si $x(f)$ es una función par, es decir, si $x(f) = x(-f)$, entonces la expresión (1.92) se reduce

$$\text{a } \mathcal{F}\{X(t)\} = x(f) \quad \text{ó} \quad X(t) \Leftrightarrow x(f)$$

La utilidad de este teorema es que permite la generación de un nuevo par de transformadas de Fourier a partir de un par conocido.

♣ Ejemplo 1.21

Se desea determinar la transformada de Fourier de la señal $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Se conoce el par $x(t) = A \exp(-a|t|) \Leftrightarrow X(f) = \frac{2aA}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$ obtenido en el Problema de Aplicación 1.23(b). Vemos que el $x(t)$ del ejemplo y $X(f)$ tienen la misma estructura. Entonces,

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$X(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + 4\pi^2 t^2} = \frac{2(2\pi)\pi}{(2\pi)^2 + 4\pi^2 t^2}$$

que tiene la misma forma de la transformada del par conocido.

Del teorema de dualidad o simetría,

$$X(t) = \frac{2(2\pi)\pi}{(2\pi)^2 + 4\pi^2 t^2} \Leftrightarrow x(-f) = \pi \exp(-2\pi|f|) = \pi \exp(-2\pi|f|)$$

Como $x(-f)$ es una función par, finalmente queda

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow X(f) = \pi \exp(-2\pi|f|)$$

♣

♣ Ejemplo 1.22. Transformada de una Señal Sinusoidal

El Teorema de Dualidad permite determinar en forma muy sencilla la transformada de Fourier de una señal sinusoidal. En efecto, el dual de la expresión (1.81), Ejemplo 1.15, es

$$A \exp(\pm j2\pi f_c t) \Leftrightarrow A\delta(f \mp f_c)$$

$$\text{Asimismo,} \quad A \cos(2\pi f_c t) = \frac{A}{2} \exp(j2\pi f_c t) + \frac{A}{2} \exp(-j2\pi f_c t)$$

Tomando la transformada de Fourier del coseno,

$$\mathcal{F}\{A \cos(2\pi f_c t)\} = \frac{A}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)]. \text{ En consecuencia,}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \quad (1.93a)$$

y de la misma forma

$$x(t) = A \sin(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f + f_c) - \delta(f - f_c)] \quad (1.93b)$$

El espectro de una señal sinusoidal pura de amplitud A y frecuencia f_c está formado por dos impulsos de Dirac de área $A/2$ y centrados en las frecuencias $\pm f_c$.

♣

1.7.5 Teorema de la Traslación o Desplazamiento en Frecuencia

Si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ entonces, para una constante real f_c

$$x(t) \exp(\pm j2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f \mp f_c) \quad (1.94)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) \exp(\pm j2\pi f_c t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(\pm j2\pi f_c t) \exp(-j2\pi f t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp[-j2\pi(f \mp f_c)t] dt = X(f \mp f_c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x(t) \exp(\pm j2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f \mp f_c)$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Teorema de la Modulación

La multiplicación de una señal $x(t)$ por el factor $\exp(j2\pi f_c t)$ equivale a desplazar su transformada de Fourier en la dirección positiva de f en una cantidad f_c , es decir, un desfase en el dominio del tiempo corresponde a un desplazamiento en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, el factor $\exp(j2\pi f_c t)$ no es real y por lo tanto no puede ocurrir en un sistema de comunicación. No obstante, este teorema proporciona la base matemática para deducir el principio de la modulación de señales. En efecto, consideremos la multiplicación de una señal $x(t)$ por una señal sinusoidal de la forma $A \cos(2\pi f_c t)$. En este contexto, la señal $x(t)$, que puede contener información, se denomina “**señal modulante, moduladora o modulatriz**”, la senoide $A \cos(2\pi f_c t)$ la “**portadora**”, la frecuencia f_c la “**frecuencia de portadora**” y el producto $x(t)A \cos(2\pi f_c t)$ la “**señal modulada**”. Estas son denominaciones que estaremos utilizando continuamente. Se tiene entonces que

$$\mathcal{F}\{x(t)A \cos(2\pi f_c t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2}[x(t)\exp(j2\pi f_c t) + x(t)\exp(-j2\pi f_c t)]\right\}$$

$$\text{y de (1.94),} \quad x(t)A \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{A}{2}[X(f + f_c) + X(f - f_c)] \quad (1.95)$$

Este resultado, de capital importancia en los sistemas de comunicación, se conoce con el nombre de “**Teorema de la Modulación**”. Estrictamente hablando, el teorema de la modulación es válido para cualquiera señal $x(t)$ y cualquier valor de f_c ; sin embargo, por razones de tipo práctico que veremos más adelante, si la señal $x(t)$ tiene una frecuencia máxima f_m y posee información a transmitir, debe cumplirse que $f_c \geq f_m$. En los sistemas de comunicación esta condición se cumple siempre, pues generalmente $f_c \gg f_m$.

Se puede demostrar en forma similar que

$$x(t)A \sin(2\pi f_c t) \Leftrightarrow j\frac{A}{2}[X(f + f_c) - X(f - f_c)] \quad (1.96)$$

El teorema de la modulación se ilustra en la Fig. 1.31. En este caso $x(t)$ es una “**señal pasabajo**”, es decir, es una señal cuyo espectro $X(f)$ está concentrado alrededor del origen y cuya frecuencia máxima es f_m , Fig. 1.31(b). El ancho de banda de esta señal es $B = f_m$. En telecomunicaciones a las señales pasabajo se las denomina también “**señales de banda de base**” (“baseband signals”).

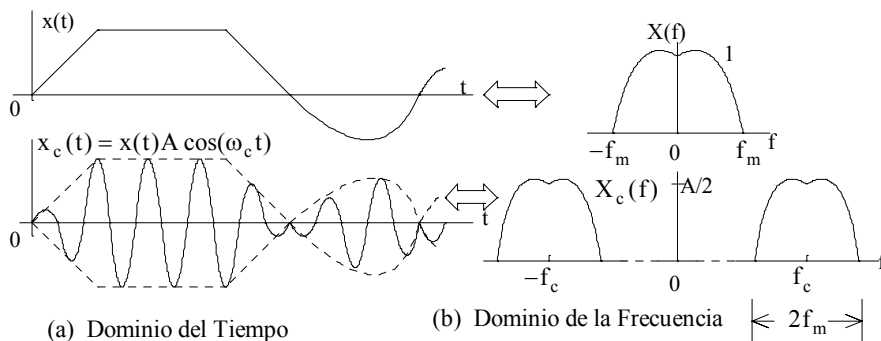


Fig. 1.31 Teorema de la Modulación.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Señales cuyo espectro tiene la forma de $X_c(f)$, Fig. 1.31(b), el cual está concentrado alrededor de las frecuencias $\pm f_c$, se denominan “**señales pasabanda**” y su ancho de banda es $B = 2f_m$. En la práctica generalmente se cumple que $f_c \gg f_m$ o $f_c \gg B$. Esta clase de señales se tratará extensamente más adelante.

♣ Ejemplo 1.23. Energía de una Señal Modulada

Sea $x(t)$ una señal de energía, de frecuencia máxima f_m , y se desea determinar la energía de la señal modulada

$$x_c(t) = x(t)A \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X_c(f) = \frac{A}{2} [X(f + f_c) + X(f - f_c)]$$

$$\text{De (1.86), } E_c = \int_{-\infty}^{\infty} |X_c(f)|^2 df = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f + f_c) + X(f - f_c)|^2 df$$

Si $f_c \geq f_m$, la expresión anterior se puede escribir en la forma

$$E_c = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [|X(f + f_c)|^2 + |X(f - f_c)|^2] df = \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f + f_c)|^2 df + \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f - f_c)|^2 df$$

pero cada una de las integrales de la derecha es igual a la energía E_x de $x(t)$. La energía de la señal modulada será entonces

$$E_c = \frac{A^2}{2} E_x$$

donde E_x es la energía de la señal modulante $x(t)$.

♣

♣ Ejemplo 1.24. Transformadas de Impulsos Sinusoidales

(a) Transformada de un Impulso de Radiofrecuencia

Considérese el impulso sinusoidal de duración τ , Fig. 1.32(a), conocido con el nombre de Impulso de Radiofrecuencia (RF), de gran utilización en sistemas de radar y en sistemas de transmisión de impulsos mediante portadora modulada (ASK, FSK y PSK) que veremos en el Capítulo V.

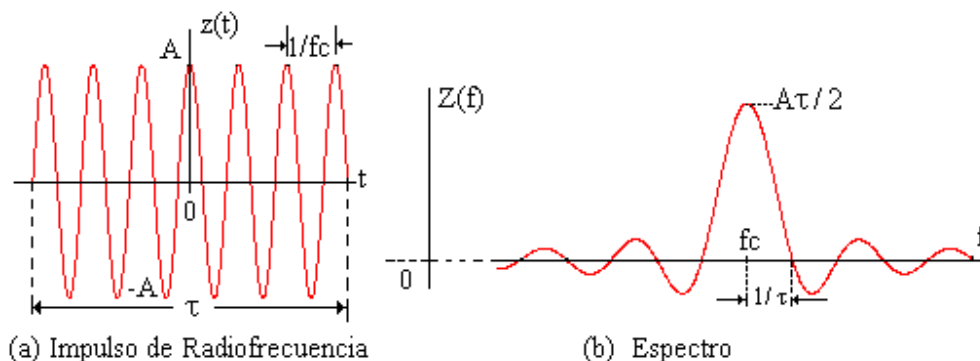


Fig. 1.32. Transformadas del Impulso de Radiofrecuencia.

El impulso de RF, Fig. 1.32(a), se puede describir en la forma

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$z(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos(2\pi f_c t), \quad \text{pero} \quad A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$

y por el teorema de la modulación,
$$Z(f) = \frac{A\tau}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{f+f_c}{1/\tau}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{f-f_c}{1/\tau}\right) \right]$$

Este espectro se muestra en la Fig. 1.32(b) (frecuencias positivas solamente).

Obsérvese que si la sinusoide fuera de duración infinita ($\tau \rightarrow \infty$), el espectro sería discreto con componentes de frecuencia (impulsos unitarios) en $\pm f_c$. En efecto, de (1.21b),

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} Z(f) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A\tau}{2} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{f+f_c}{1/\tau}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{f-f_c}{1/\tau}\right) \right] = \frac{A}{2} [\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)]$$

En consecuencia,
$$A \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow \frac{A}{2} [\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)]$$

resultado ya obtenido en el Ejemplo 1.22.

Este ejemplo es una muestra de lo que se denomina “espectro de corta duración”. En efecto, el cálculo exacto de la transformada de Fourier de una señal implica una integración en el tiempo desde $-\infty$ a $+\infty$, es decir, que para obtener el espectro exacto hay que observar a la señal durante un tiempo infinito, lo cual es imposible desde el punto de vista físico. Nótese que el espectro de corta duración $Z(f)$ depende de la duración τ . A medida que τ aumenta, el ancho de los lóbulos disminuye, y cuando $\tau \rightarrow \infty$, los lóbulos se convierten en impulsos unitarios centrados en f_c , como se demostró en el Ejemplo 1.22.

El espectro de corta duración $Z(f)$ tiene entonces un sentido físico: él es función de la frecuencia y del tiempo de observación τ pero, para altos valores de τ , él tiende a $X(f)$, expresión (1.93a), que siendo independiente del tiempo tiene una estructura matemática más simple y como consecuencia es más útil para un análisis teórico.

(b) Antitransformada de un Espectro Cosenoidal

Consideremos el espectro cosenoidal mostrado en la Fig. 1.32(c).

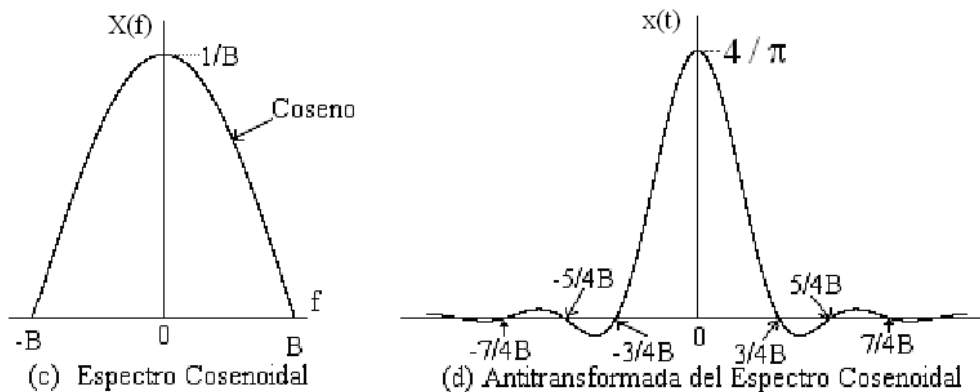


Fig. 1.32(cont). Transformadas de Impulsos Cosenoidales

De la Fig. 1.32(c),
$$X(f) = \frac{1}{B} \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Su correspondiente antitransformada será:

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$x(t) = \int_{-B}^B \frac{1}{B} \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \exp(j2\pi t f) df = \frac{2}{B} \int_0^B \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \cos(2\pi t f) df$$

$$\text{Resolviendo esta integral, obtenemos } x(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1 - 2\cos^2(\pi t B)}{(4tB)^2 - 1} = \frac{4}{\pi} \frac{\cos(2\pi t B)}{1 - 16 B^2 t^2}$$

que se muestra en la Fig. 1.32(d).

Estas transformadas se utilizan para definir filtros de mucha aplicación en la práctica (Ver Ejemplo 2.20).



1.7.6. Teorema de la Diferenciación e Integración en el Tiempo

La Transformada de Fourier se puede emplear para resolver ecuaciones diferenciales lineales. En esta aplicación particular, las transformadas de las señales que son diferenciadas o integradas son importantes.

Si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, entonces

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow (j2\pi f) X(f) \quad (1.97a)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (1.97b)$$

$$\int_{-\infty}^t x(t') dt' \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) \quad \text{si } X(0) = 0 \quad (1.98a)$$

$$\int_{-\infty}^t x(t') dt' \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f) \quad \text{si } X(0) \neq 0 \quad (1.98b)$$

Demostración:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi t f) df; \quad \frac{d}{dt} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) (j2\pi f) \exp(j2\pi t f) df$$

lo cual implica que $\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow (j2\pi f) X(f)$

Este resultado se puede extender para la derivada n-ésima mediante diferenciaciones sucesivas dentro del signo integral. En este caso se tiene que

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

En cuanto a la integración en t, considérese una función g(t) definida por

$$g(t) = \int_{-\infty}^t x(t') dt' \Leftrightarrow G(f)$$

Es evidente que $\frac{d}{dt} g(t) = x(t)$, y por el teorema de diferenciación en el tiempo, $(j2\pi f) G(f) = X(f)$, de donde

$$G(f) = \frac{1}{(j2\pi f)} X(f) \quad \text{o} \quad \int_0^t x(t') dt' \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f).$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Sin embargo, para que $g(t)$ tenga una transformada de Fourier $G(f)$, es necesario, por supuesto, que $G(f)$ exista. Una condición, quizás algo más restrictiva que la integrabilidad absoluta, expresión (1.72), es que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0, \quad \text{o sea} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x(t') dt' = 0$$

Esto significa que el área bajo $x(t)$ es cero, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$, lo cual equivale a $X(0) = 0$, el espectro no tiene componentes en $f = 0$.

Si $X(0) \neq 0$ (el espectro tiene componentes en $f = 0$), entonces $g(t)$ ya no es una señal de energía y la transformada de $g(t)$ incluirá impulsos unitarios de Dirac. En efecto, $g(t)$ se puede escribir en la forma

$$g(t) = \int_{-\infty}^t x(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') u(t - t') dt' = x(t) * u(t)$$

donde el asterisco denota un producto de convolución. Más adelante demostraremos que la transformada de Fourier $G(f)$ del producto de convolución $x(t) * u(t)$ es $\mathcal{F}\{x(t)\} \cdot \mathcal{F}\{u(t)\}$. En consecuencia,

$$G(f) = X(f) \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f} \right] = \frac{1}{2} X(0) \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

de donde $\int_{-\infty}^t x(t') dt' \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ para $X(0) \neq 0$.

La diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a multiplicación por $(j2\pi f)$ en el dominio de la frecuencia. Asimismo, integración en el dominio del tiempo corresponde a división por $(j2\pi f)$ en el dominio de la frecuencia.

Este teorema permite determinar la transformada de Fourier de una señal cualquiera, sobre todo de tipo gráfico, que se pueda aproximar en una forma lineal por tramos. Mediante diferenciaciones sucesivas se expresa la señal como suma de señales cuyas transformadas son fáciles de evaluar y luego se aplica el teorema. Generalmente, la señal $x(t)$, por diferenciación sucesiva, se transforma en una suma lineal de impulsos unitarios y la transformada $X(f)$ se obtiene directamente aplicando las propiedades y teoremas apropiados al caso, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

♣ Ejemplo 1.25

(a) Como aplicación del teorema de diferenciación consideremos la señal trapezoidal mostrada en al Fig. 1.33(a) y sus dos primeras derivadas, Figs. 1.33(b) y 1.33(c):

De la Fig. 1.33(c),

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{A}{t_1 - t_0} [\delta(t + t_1) + \delta(t - t_1)] - \frac{A}{t_1 - t_0} [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)]$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos miembros,

$$(j2\pi f)^2 X(f) = \frac{A}{t_1 - t_0} \{e^{j2\pi t_1 f} + e^{-j2\pi t_1 f} - e^{j2\pi t_0 f} - e^{-j2\pi t_0 f}\}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$= \frac{2A}{t_1 - t_0} [\cos(2\pi t_1 f) - \cos(2\pi t_0 f)]$$

de donde,
$$X(f) = \frac{2A}{t_1 - t_0} \left[\frac{\cos(2\pi t_0 f) - \cos(2\pi t_1 f)}{(2\pi f)^2} \right]$$

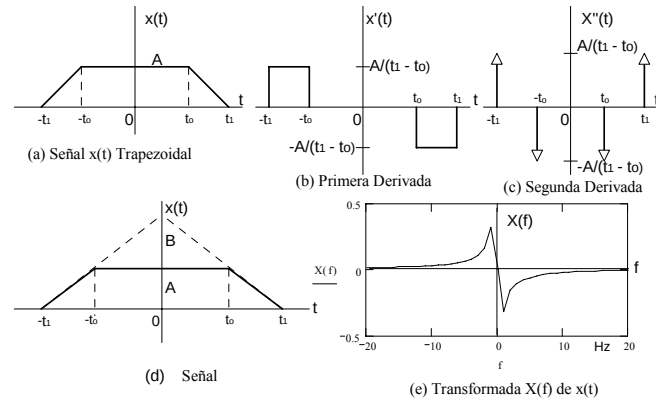


Fig. 1.33

En general, se puede decir que la transformada de una señal es igual a la transformada de su segunda derivada dividido por $(j2\pi f)^2$.

- (b) Vamos a hallar la transformada $X(f)$ en otra forma para comparar los dos métodos. Esta forma es considerar a la señal $x(t)$ como la diferencia de dos triángulos, como se muestra en la Fig. 1.33(d) :

$$x(t) = (A+B)\Lambda\left(\frac{t}{t_1}\right) - B\Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right), \text{ cuya transformada es}$$

$$X(f) = (A+B)t_1 \text{sinc}^2(t_1 f) - Bt_0 \text{sinc}^2(t_0 f)$$

Pero, por triángulos semejantes, $B = \frac{At_0}{t_1 - t_0}$, de donde $(A+B)t_1 = \frac{At_1^2}{t_1 - t_0}$

$$X(f) = \frac{At_1^2}{t_1 - t_0} \frac{\text{sen}^2(\pi t_1 f)}{(\pi t_1 f)^2} - \frac{At_0^2}{t_1 - t_0} \frac{\text{sen}^2(\pi t_0 f)}{(\pi t_0 f)^2}$$

y de la identidad trigonométrica $\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha)$, obtenemos finalmente

$$X(f) = \frac{2A}{t_1 - t_0} \left[\frac{\cos(2\pi t_0 f) - \cos(2\pi t_1 f)}{(2\pi f)^2} \right], \text{ resultado igual al de la parte (a).}$$

Nótese que esta resolución es más complicada que la de la parte (a), pero es una muestra de los recursos analíticos empleados en la resolución de las transformadas de Fourier.

En la Fig. 1.33(e) se grafica $X(f)$ para $A = 1$, $t_1 = 10$ ms y $t_0 = 7$ ms

♣

1.7.7. Teorema de la Diferenciación e Integración en Frecuencia

Si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, entonces

$$t x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)} \frac{d}{df} X(f) \quad (1.99)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$t^n x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{df^n} X(f) \quad (1.100)$$

$$\frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow -j2\pi \int_{-\infty}^f X(f') df' \quad \text{para } t \neq 0 \quad (1.101)$$

Demostración:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt; \quad \frac{d}{df} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) (-j2\pi t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Por lo tanto, $\frac{d}{df} X(f) = (-j2\pi) \mathcal{F}\{t x(t)\}$, de donde $t x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)} \frac{d}{df} X(f)$

Por diferenciación sucesiva dentro del signo integral, se obtiene

$$t^n x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^{[n]}}{df^{[n]}} X(f)$$

En cuanto a la integración en frecuencia, se puede aplicar el teorema de dualidad a la expresión (1.98a), obteniéndose

$$\frac{x(t)}{j2\pi t} \Leftrightarrow - \int_{-\infty}^{-f} X(-f') df' \quad \text{y mediante un cambio de variables en la integral,}$$

$$\frac{x(t)}{t} \Leftrightarrow (-j2\pi) \int_{-\infty}^f X(f') df' \quad \text{para } t \neq 0.$$

♣ Ejemplo 1.26. Aplicaciones de los Teoremas de la Transformada de Fourier

En los siguientes ejemplos se utilizan las Tablas de Transformadas del APENDICE D.

(a) Dada $y(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left[x\left(\frac{2t-4}{2}\right) \exp(j8\pi t) \right]$ determinar $Y(f)$ cuando $x(t) = 2\text{sinc}(2t)$.

$$x\left(\frac{2t-4}{2}\right) = x\left[\frac{2(t-2)}{2}\right] = x(t-2) = 2\text{sinc}[2(t-2)]$$

$$Y(f) = (j2\pi f)^2 \mathcal{F}\{x(t-2) \exp(j8\pi t)\} = (j2\pi f)^2 \left[\mathcal{F}\{x(t-2)\} \Big|_{f \rightarrow f-4} \right]$$

$$\text{pero } \mathcal{F}\{x(t-2)\} \Big|_{f \rightarrow f-4} = [X(f) \exp(-j4\pi f)] \Big|_{f \rightarrow f-4} = X(f-4) \exp[-j4\pi(f-4)]$$

$$\text{por consiguiente, } Y(f) = -4\pi^2 f^2 X(f-4) \exp[-j4\pi(f-4)]$$

$$\text{También, } x(t) = 2\text{sinc}(2t) \Leftrightarrow X(f) = \Pi\left(\frac{f}{2}\right) \quad \text{y} \quad X(f-4) = \Pi\left(\frac{f-4}{2}\right)$$

$$\text{de donde } Y(f) = \begin{cases} -4\pi^2 f^2 \exp[-j4\pi(f-4)] & \text{para } 3 \leq f \leq 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\text{También, } |Y(f)| = 4\pi^2 f^2 \Pi\left[\frac{f-4}{2}\right]. \text{ Sugerimos al lector graficar esta expresión.}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

(b) Dada $X(f) = A\Lambda\left(\frac{f+f_c}{B}\right)\exp(-j2\pi t_o f)$, determinar $x(t)$.

$$x(t) = \left[\mathcal{F}^{-1} \left\{ A\Lambda\left(\frac{f}{B}\right) \right\} \exp(-j2\pi f_c t) \right]_{t \rightarrow t-t_o}$$

$$\text{pero } \mathcal{F}^{-1} \left\{ A\Lambda\left(\frac{f}{B}\right) \right\} = AB \text{sinc}^2(Bt)$$

$$x(t) = \left[AB \text{sinc}^2(Bt) \exp(-j2\pi f_c t) \right]_{t \rightarrow t-t_o}, \text{ de donde}$$

$$x(t) = AB \text{sinc}^2[B(t-t_o)] \exp[-j2\pi f_c(t-t_o)]$$

(c) Dada $Y(f) = \frac{j2\pi f \exp(-j2\pi t_o f)}{a + j2\pi f}$, determinar $y(t)$.

$$Y(f) \text{ se puede escribir en la forma } Y(f) = (j2\pi f) \left[\frac{1}{a + j2\pi f} \right] \exp(-j2\pi t_o f)$$

$$y(t) = \left[\frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{a + j2\pi f} \right\} \right]_{t \rightarrow t-t_o}, \text{ pero } \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{a + j2\pi f} \right\} = \exp(-at)u(t)$$

$$\frac{d}{dt} [\exp(-at)u(t)] = \delta(t) - a \exp(-at)u(t), \text{ de donde}$$

$$y(t) = \delta(t-t_o) - a \exp[-a(t-t_o)]u(t-t_o)$$

Se sugiere al lector graficar esta expresión.

♣

1.8. TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIODICAS

La Transformada de Fourier surgió de la necesidad de conocer el espectro de una señal no periódica. Para las señales periódicas dicha información se obtuvo a partir del desarrollo en Serie de Fourier. Sin embargo, para unificar el análisis, es conveniente extender el uso de la Transformada de Fourier a señales periódicas. Es evidente que si se desea obtener la transformada de una señal periódica a partir de la definición, expresión (1.68), el resultado sería infinito pues las señales periódicas no son de módulo integrable (no cumplen con la condición (1.72)). No obstante, mediante un proceso de límites se puede representar una señal periódica en términos de la Transformada de Fourier siempre que a esta transformada se le permita incluir impulsos Delta Dirac.

Sea $x_T(t)$ una señal periódica que se representará mediante su desarrollo en Serie de Fourier

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_o t); \quad f_o = \frac{1}{T}$$

$$\text{Su transformada será } X_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_o t) \right] \exp(-j2\pi f t) dt$$

$$X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi n f_o t) \exp(-j2\pi f t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathcal{F} \{ \exp(j2\pi n f_o t) \}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

pero del teorema de traslación en frecuencia, $\mathcal{F}\{\exp(j2\pi n f_0 t)\} = \delta(f - n f_0)$; por lo tanto,

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t) \Leftrightarrow X_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - n f_0) \quad (1.102a)$$

La Transformada de Fourier de una señal periódica es un tren infinito de impulsos unitarios Delta Dirac, espaciados en f_0 y cada uno de área X_n , donde X_n , el coeficiente de Fourier, se definió en (1.42). Nótese que $X_T(f)$ representa entonces el espectro de una señal periódica $x_T(t)$.

Del Teorema de Parseval, podemos asimismo escribir una expresión que representa también el espectro de potencia de $x_T(t)$ dado en (1.60):

$$\langle x_T^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \delta(f - n f_0) \quad (1.102b)$$

Es evidente que el espectro de una señal periódica seguirá siendo discreto aún cuando se calcule a partir de la Transformada de Fourier. Aún más, una señal que contenga una parte periódica y una parte aperiódica, poseerá un espectro continuo en el que existirán componentes discretas superpuestas sobre él, como se puede observar en el Ejemplo 1.27.

El cálculo de los coeficientes de Fourier se puede simplificar mucho cuando se efectúa a través de la Transformada de Fourier. En efecto, sea $x(t)$ la función generatriz de una señal periódica $x_T(t)$. Entonces X_n se puede escribir en la siguiente forma

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt = \frac{1}{T} X(n f_0)$$

$$\text{o también} \quad X_n = f_0 X(n f_0) = \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}\right) = f_0 X(f)|_{f=n f_0} \quad (1.103)$$

donde $X(n f_0)$ es la transformada de $x(t)$ evaluada a las frecuencias discretas $n f_0$. La expresión (1.103) permite calcular los coeficientes de Fourier del espectro discreto de $x_T(t)$ a través de la transformada de Fourier de $x(t)$, pues esta transformada puede ser obtenida con más facilidad pues se dispone de extensas tablas de transformadas de Fourier. Sin embargo, hay que verificar siempre que $x(t)$ esté acotada en T .

La expresión (1.102a) puede escribirse ahora en la forma

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \exp(j2\pi n \frac{t}{T}) \quad (1.104)$$

Esta expresión es una forma de la llamada “Fórmula de la Suma de Poisson”.

En resumen, para una señal periódica $x_T(t)$,

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \exp(j2\pi n \frac{t}{T}) \Leftrightarrow X_T(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n f_0) \delta(f - n f_0) \quad (1.105)$$

Es evidente que la transformada de Fourier de una señal periódica es una serie infinita de impulsos de Dirac separados en f_0 y ponderados por el factor $f_0 X(n f_0)$, donde $X(f)$ es la transformada de Fourier de la señal generatriz. La “envolvente” de la serie infinita de impulsos es igual a $f_0 |X(f)|$.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

♣ Ejemplo 1.27

Calcular y dibujar el espectro de la señal de la Fig. 1.34.

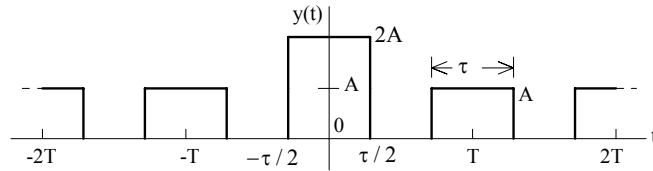


Fig. 1.34

La señal $y(t)$ se puede expresar en la forma $y(t) = x(t) + x_T(t)$, donde

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow X(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) \quad \text{y} \quad x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\Pi\left(\frac{t-nT}{\tau}\right) \Leftrightarrow X_T(f)$$

$Y(f) = X(f) + X_T(f)$, y de (1.105),

$$Y(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) + A\tau f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(nf_0\tau) \delta(f - nf_0)$$

El espectro $Y(f)$ se muestra en la Fig. 1.35.

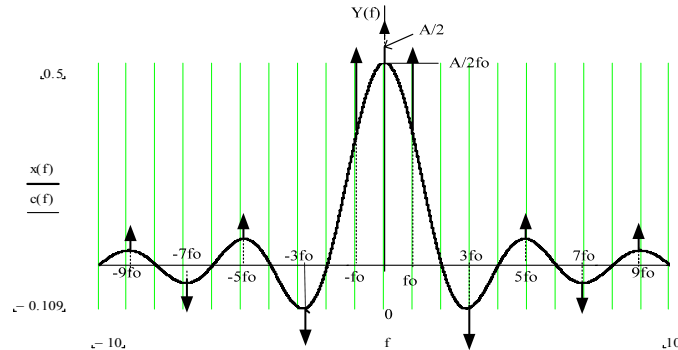


Fig. 1.35. Transformada de la señal de la Fig. 1.34

♣ Ejemplo 1.28. Transformada de un Tren de Impulsos Delta Dirac

El tren de impulsos unitarios, Fig. 1.36(a), es una serie de gran aplicación en el análisis de señales y sistemas.

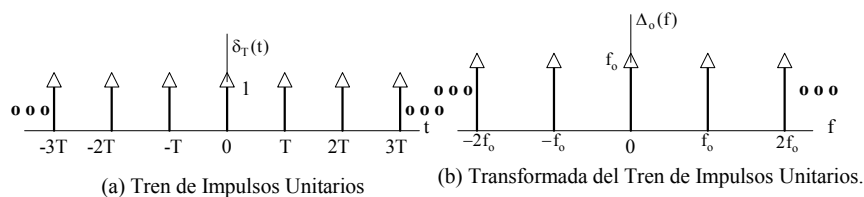


Fig. 1.36

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Esta serie periódica se representa en la forma

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

La función generatriz de $\delta_T(t)$ es $x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow X(f) = 1$ para todo f

De (1.103): $X_n = f_o = \frac{1}{T}$ pues $X(nf_o) = 1$ para todo n

La transformada de Fourier del tren de impulsos de Dirac será, de (1.105),

$$\Delta_o(f) = f_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_o) = f_o \delta_{f_o}(f), \text{ la cual se muestra en la Fig. 1.36(b).}$$

$$\text{Entonces, } \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow \Delta_o(f) = f_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_o) = f_o \delta_{f_o}(f) \quad (1.106a)$$

$$\text{También, de (1.105), } \delta_T(t) = f_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi n f_o t) = f_o \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n f_o t) \right] \quad (1.106b)$$

Un tren de impulsos de Dirac de período T y área unitaria, tiene como transformada de Fourier otro tren de impulsos de Dirac de período f_o y área f_o . A la función $\delta_T(t)$ se la conoce también con el nombre de “función peine de Dirac”.



1.9. DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

1.9.1. Introducción

De manera análoga al concepto de espectro de densidad de energía, se puede definir un espectro de densidad de potencia (distribución de la potencia en el dominio de la frecuencia) para señales cuya energía no está definida, es decir, que no poseen una transformada de Fourier y que fueron definidas mediante la expresión (1.5). Muchas señales determinísticas y todas las señales aleatorias pertenecen a esta clase.

Definición

El espectro de densidad de potencia de una señal $x(t)$, determinística o aleatoria, representada por $S_x(f)$, se puede definir partiendo de la premisa de que su integral (área) debe ser la potencia promedio de $x(t)$, es decir,

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df < \infty \quad (\text{La potencia es finita}) \quad (1.107)$$

La densidad espectral de potencia $S_x(f)$ de $x(t)$, así definida, representa entonces la distribución de la potencia de $x(t)$ en el dominio de la frecuencia y sus dimensiones son W/Hz. Puesto que la potencia es una magnitud positiva, $S_x(f)$ será una función real, par y positiva de f para todo f , es decir, $S_x(f) = S_x(-f)$ y $S_x(f) \geq 0$ para todo f .

El problema ahora es conseguir una expresión explícita que relacione $x(t)$ con $S_x(f)$, pero como $x(t)$ no posee una transformada de Fourier $X(f)$, no puede utilizarse una transformada para determinar $S_x(f)$. Sin embargo, mediante un enfoque determinístico, se puede utilizar el concepto conocido como el “criterio de la señal truncada”. En efecto, sea $x(t)$ una señal de potencia y sea

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$x_T(t)$ una parte de $x(t)$ comprendida dentro de un intervalo $(-T/2, T/2)$, como se muestra en la Fig. 1.37(b).

La señal $x_T(t) = x(t)\Pi(\frac{t}{T})$, Fig. 1.37(b), se denomina “señal truncada de $x(t)$ ”, y en el intervalo $(-T/2, T/2)$ se convierte en una señal de energía que cumple con las condiciones de existencia de la Transformada de Fourier, es decir, $x_T(t) \Leftrightarrow X_T(f)$. Esta transformada $X_T(f)$ se utilizará para relacionar $x(t)$ con $S_x(f)$.

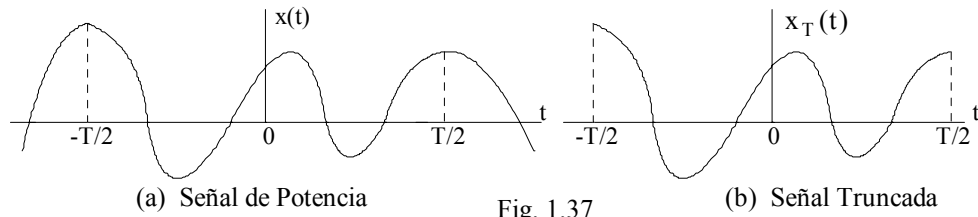


Fig. 1.37

La potencia promedio de $x(t)$ es, de (1.5),

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt$$

Como $x_T(t) = x(t)$ en el intervalo $(-T/2, T/2)$, entonces se puede escribir

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) x_T^*(t) dt$$

pero $x_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f) \exp(j2\pi ft) df$, entonces

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_T(f) \exp(j2\pi ft) df \right] dt$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_T^*(t) \exp(j2\pi ft) dt \right] df \right\}$$

La integral dentro de los corchetes es igual a $X_T^*(f)$, de donde

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f) X_T^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \right] df \quad (1.108)$$

Comparando (1.108) con la definición de densidad espectral dada en (1.107), se concluye que

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad \text{siempre que el límite exista} \quad (1.109)$$

La cantidad $S_x(f)$ es entonces la “**Densidad Espectral de Potencia**” normalizada de una señal $x(t)$. Las unidades de $S_x(f)$ son W/Hz respecto a una resistencia $R = 1$ Ohm. Obsérvese que el espectro de densidad de potencia de una señal retiene solamente la información de amplitud perdiéndose la información de fase. Por consiguiente, para una señal dada existe un solo espectro de

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

densidad de potencia $S_x(f)$, mientras que la misma densidad espectral $S_x(f)$ corresponde teóricamente a un número infinito de señales que difieren entre sí solamente en fase.

Para simplificar la notación, vamos a representar la relación entre la señal $x(t)$ y su densidad espectral de potencia $S_x(f)$ en la forma $\mathbf{x(t) \Rightarrow S_x(f)}$, la cual simplemente expresa que $x(t)$ posee una densidad espectral $S_x(f)$ dada y que, conocida $x(t)$, pudiera determinarse $S_x(f)$ pero no así lo contrario.

Obsérvese que en la formulación de la expresión (1.109) si $X_T(f)$ es independiente de T , la densidad espectral $S_x(f)$ se hace cero. Esto ocurre debido a que, para señales que poseen una transformada de Fourier, la integral de la expresión (1.108) tiende a un valor límite, el cual, de acuerdo con (1.3), es simplemente la energía de la señal; en consecuencia, cuando $T \rightarrow \infty$, la potencia promedio es cero. En resumen, el concepto de espectro de potencia no tiene significado cuando $x(t)$ posee una transformada de Fourier específica. Sin embargo, en la práctica nos encontramos con una gran cantidad de señales, sobre todo de tipo aleatorio, que no poseen transformadas de Fourier y para las cuales el concepto de espectro de potencia sí es aplicable. Más adelante, al estudiar las funciones de correlación, volveremos sobre este tema.

La densidad espectral de potencia es una potente herramienta en el análisis de sistemas de comunicación y en otros aspectos de la ingeniería, en particular en el análisis de vibraciones mecánicas (aviones, barcos, edificios, motores, etc.). El concepto de densidad espectral de potencia (Power Spectral Density, PSD en inglés) es de gran utilidad en la descripción de cómo el contenido de potencia de señales útiles y ruido es afectado por los filtros y otros dispositivos en los sistemas de comunicación.

La expresión (1.109) sugiere un método práctico para estimar la densidad espectral de potencia de una señal. En efecto, primero se registra un tramo de duración T de la señal $x(t)$ con lo cual se obtiene $x_T(t)$. A continuación se determina la transformada de Fourier $X_T(f)$ de $x_T(t)$, generalmente mediante un programa FFT. Finalmente, el espectro de potencia se aproxima mediante el cálculo de $|X_T(f)|^2/T$, cuyo resultado se grafica como una función de la frecuencia f .

La densidad espectral de potencia de una señal también se puede determinar en forma indirecta evaluando la transformada de la función de autocorrelación de la señal, método que veremos más adelante (Teorema de Wiener-Kintchine).

1.9.2. Teorema de la Modulación para Señales de Potencia

Consideremos ahora una señal modulada $x_c(t)$ cuya densidad espectral se quiere determinar. Sea entonces,

$$x_c(t) = x(t)A \cos(2\pi f_c t) \quad \text{donde} \quad x(t) \Rightarrow S_x(f), \text{ siendo } x(t) \text{ una señal real pasabajo.}$$

Si $x(t)$ es una señal de potencia, entonces $x_c(t)$ será también una señal de potencia, es decir,

$$x_c(t) \Rightarrow S_{xc}(f)$$

Sea también $x_T(t)$ la señal truncada de $x(t)$, donde $x_T(t) \Leftrightarrow X_T(f)$. Hagamos entonces

$$x_{cT}(t) = x_T(t)A \cos(2\pi f_c t) \quad \text{cuya transformada es}$$

$$X_{cT}(f) = \frac{A}{2} [X_T(f + f_c) + X_T(f - f_c)]$$

La densidad espectral de potencia $S_{xc}(f)$ será, de (1.109),

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$S_{xc}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{cT}(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} |X_T(f + f_c) + X_T(f - f_c)|^2 \quad (1.110a)$$

$$S_{xc}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} [X_T(f + f_c) + X_T(f - f_c)][X_T(-f + f_c) + X_T(-f - f_c)]$$

$$S_{xc}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4T} [X_T(f + f_c)X_T(-f + f_c) + X_T(f + f_c)X_T(-f - f_c) + X_T(f - f_c)X_T(-f + f_c) + X_T(f - f_c)X_T(-f - f_c)]$$

Supongamos que $x_T(t)$ es pasabajo, de frecuencia máxima f_m , donde $f_c \geq f_m$, y sea la Fig. 1.38 donde se muestra el espectro $X_T(f)$ de $x_T(t)$ y sus formas desplazadas $X_T(f + f_c)$ y $X_T(f - f_c)$.

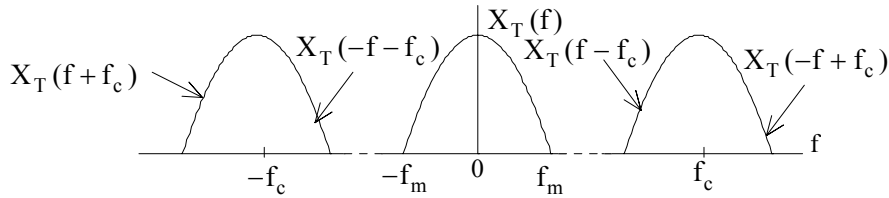


Fig. 1.38

En la Fig. 1.38 se puede observar que los productos cruzados se anulan pues sus términos ocupan bandas de frecuencia diferentes, es decir,

$$X_T(f + f_c)X_T(-f + f_c) = X_T(f - f_c)X_T(-f - f_c) = 0$$

de donde $X_T(f + f_c)X_T(-f - f_c) = |X_T(f + f_c)|^2$ y $X_T(f - f_c)X_T(-f + f_c) = |X_T(f - f_c)|^2$

$$\text{Por lo tanto, } S_{xc}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4} \left[\frac{|X_T(f + f_c)|^2}{T} + \frac{|X_T(f - f_c)|^2}{T} \right] \quad (1.110b)$$

La densidad espectral de potencia de la señal modulada será, de (1.109),

$$S_{xc}(f) = \frac{A^2}{4} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)] \quad (1.111)$$

La expresión (1.111) es válida para cualquiera señal $x(t)$ pasabajo de potencia, pues los productos cruzados se anulan. Si $x(t)$ es una señal de potencia pasabanda, en el desarrollo de (1.110a) aparecerá un producto cruzado de la forma $2X_T(f + f_c)X_T(f - f_c)$ que será distinto de cero, y la expresión (1.111) no será entonces válida para señales pasabanda. Sin embargo, si $x(t)$ es una señal pasabanda aleatoria (ruido, por ejemplo), el producto cruzado será siempre cero debido a las propiedades de incoherencia de las señales aleatorias; la expresión (1.111) se podrá aplicar entonces a este tipo de señales. Las propiedades de incoherencia de las señales aleatorias las veremos en el Capítulo III.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

El “Teorema de la Modulación para Señales de Potencia” se puede enunciar entonces en la forma siguiente:

Si $x(t)$ es una señal de potencia pasabajo, determinística o aleatoria, y de frecuencia máxima f_m , o una señal aleatoria pasabanda de ancho de banda $2f_m$ y centrada en $\pm f_c$, con $f_c \geq f_m$ se verifica que

$$x_c(t) = \begin{cases} x(t)A \cos(2\pi f_c t) \\ x(t)A \sin(2\pi f_c t) \end{cases} \Rightarrow S_{xc}(f) = \frac{A^2}{4} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)] \quad (1.112)$$

donde $S_x(f)$ es la densidad espectral de potencia de $x(t)$.

Este teorema, ilustrado en la Fig. 1.39, se puede demostrar con más facilidad utilizando el Teorema de Wiener-Kintchine, que se estudiará en la Sección 1.11.3, mediante aplicación de las propiedades de las funciones de correlación.

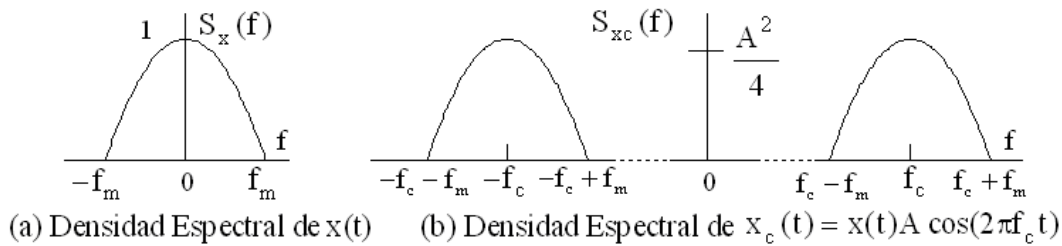


Fig. 1.39. Teorema de la Modulación para Señales de Potencia.

La expresión (1.112) es válida aunque la modulación se realice con un seno, puesto que el seno y el coseno difieren solamente en un factor de fase y por lo tanto tendrán el mismo espectro de densidad de potencia.

El Teorema de la Modulación para Señales de Potencia es de gran aplicación en los sistemas de comunicación para el cálculo de la potencia de señales moduladas y en particularmente en el cálculo de las relaciones Señal/Ruido (S/N).

♣ Ejemplo 1.29. Potencia de una Señal Modulada

Sea $x(t)$ una señal pasabajo de potencia, con una frecuencia máxima f_m , que modula una señal sinusoidal de amplitud unitaria y frecuencia f_c . Entonces,

$$x(t) \Rightarrow S_x(f) \text{ y } x_c(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_c(f), \text{ donde}$$

$$S_c(f) = \frac{1}{4} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)]; \quad f_c \geq f_m$$

La potencia de la señal modulada es, de (1.107),

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(f) df = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)] df$$

Pero cada una de las integrales de la derecha es la potencia promedio $\langle x^2(t) \rangle$ de $x(t)$; de donde,

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle x^2(t) \rangle$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

La potencia de una señal modulada es la mitad de la potencia de la señal moduladora.

Este resultado es de particular importancia en telecomunicaciones en el diseño de sistemas de transmisión de señales.

En general, si $x_c(t) = x(t)A \cos(2\pi f_c t + \phi)$, entonces

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} \langle x^2(t) \rangle \quad (1.113)$$

Nótese que la información de fase no interviene en el cálculo de la potencia. La expresión (1.113), válida para señales tanto determinísticas como aleatorias, será utilizada continuamente a lo largo de todo el texto. ♣

1.10. RELACION ENTRE EL ANCHO DE BANDA Y LA DURACION DE UNA SEÑAL

De acuerdo con la propiedad escalar de la Transformada de Fourier, una señal de duración infinita (existe para todo t) tiene un espectro contenido dentro de una banda de frecuencias B , es decir,

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = 0 \quad \text{para } B < |f|$$

En este caso se dice que $x(t)$ es una señal de “banda limitada B ”.

En forma similar, una señal cuyo espectro se extiende hasta el infinito (existe para todo f), tiene la propiedad de que, para dos constantes $t_1 < t_2$,

$$x(t) = 0 \quad \text{para } t < t_1 \quad \text{y} \quad t > t_2$$

En este caso se dice que $x(t)$ es una señal “limitada en el tiempo”.

Una señal no puede ser, a la vez, limitada en banda y limitada en el tiempo. La imposibilidad de que una señal sea limitada simultáneamente en frecuencia y en el tiempo, es un caso particular del “principio de incertidumbre” entre una señal y su correspondiente transformada de Fourier (Una discusión de este principio está fuera de los objetivos de este texto). Sin embargo, desde un punto de vista práctico, si el valor de una señal decrece más allá de cierto límite, se puede decir que la señal es despreciable. Este límite está determinado, en general, por el ruido que siempre está presente. Algunas veces se puede considerar que la señal es despreciable aún antes de alcanzar el umbral del ruido, mientras que en otros casos, aún si la señal está inmersa en ruido, ella debe ser tomada en cuenta.

El problema de la duración de una señal es finalmente una cuestión de convención, y lo mismo se puede decir de su ancho de banda. Todo depende de la aplicación particular considerada y conviene entonces definir la duración de la señal y su ancho de banda de la manera más apropiada a la aplicación en cuestión.

En algunos casos se puede definir el ancho de banda B de una señal $x(t)$ como la gama de frecuencias en la cual está contenido un $p\%$ de la energía total de la señal. El ancho de banda B se puede definir entonces a partir de la expresión

$$\int_{-B}^B |X(f)|^2 df = \frac{p}{100} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.114a)$$

Esta definición la utilizamos en el Ejemplo 1.19 cuando demostramos que el ancho de banda $B = \frac{1}{\tau}$ de un impulso rectangular $\Pi(\frac{t}{\tau})$ contenía el 90% de la energía total del impulso.

De la misma manera, la duración τ de una señal $x(t)$ se puede definir a partir de la expresión

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x^2(t) dt = \frac{p}{100} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (1.114b)$$

El ancho de banda y la duración definidos así tienen poco valor práctico pues B y τ no aparecen en forma explícita y es necesario resolver las integrales.

Una manera conveniente de relacionar B y τ en forma explícita, consiste en definir la duración τ de una señal como “el tiempo que duraría un impulso rectangular que tuviera la misma amplitud máxima y la misma área bajo el módulo de la señal”, es decir,

$$\tau x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \geq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \quad (1.115)$$

Igualmente, para el ancho de banda B ,

$$2BX(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)| df \geq \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = x(0) \quad (1.116)$$

Estas definiciones se ilustran en la Fig. 1.40 (a) y (b), respectivamente.

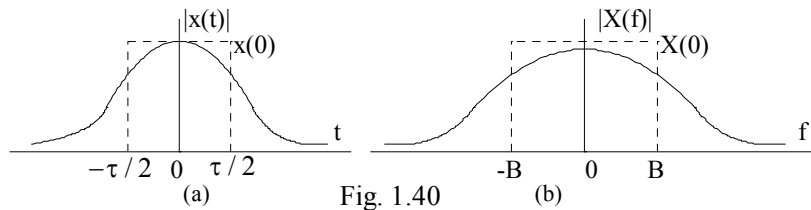


Fig. 1.40

De (1.115) y (1.116) se obtiene el par de desigualdades $\frac{x(0)}{X(0)} \geq \frac{1}{\tau}$ y $2B \geq \frac{x(0)}{X(0)}$

$$\text{de donde} \quad B \geq \frac{1}{2\tau} = \frac{x(0)}{2X(0)} \quad (1.117)$$

$$\text{y en general,} \quad B\tau \geq \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad B \geq \frac{1}{2\tau} \quad (1.118)$$

La expresión (1.118) es la relación “duración-ancho de banda” para señales pasabajo. El producto duración-ancho de banda es de gran aplicación en sistemas de radar.

En el caso de señales pasabanda, el correspondiente ancho de banda se define como el doble del ancho de banda en pasabajo. Esto es así puesto que el espectro aparece centrado en las frecuencias $\pm f_c$ y se puede considerar como una traslación del espectro pasabajo hacia las frecuencias $\pm f_c$. Esto lo justificaremos más adelante al estudiar el concepto de señal analítica.

Otra forma de definir el ancho de banda es el “ancho de banda de potencia” de una señal, como “el ancho de banda $B = f_2 - f_1$ en donde reside el 99% de la potencia de la señal”. Esta definición es similar a la definida por la FCC de los Estados Unidos como “ancho de banda ocupado”.

Más adelante definiremos otros dos tipos de ancho de banda: el “ancho de banda de 3-dB” y el “ancho de banda equivalente de ruido”.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

♣ Ejemplo 1.30. Ancho de Banda de un Impulso en Coseno Elevado

Sea el impulso en coseno elevado mostrado en la Fig. 1.41(a).

$$x(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right) \right] \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{A}{2} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) + \frac{A}{2} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)$$

pero $\frac{A}{2} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{A\tau}{2} \text{sinc}\left(\frac{f}{1/\tau}\right)$, y del teorema de la modulación,

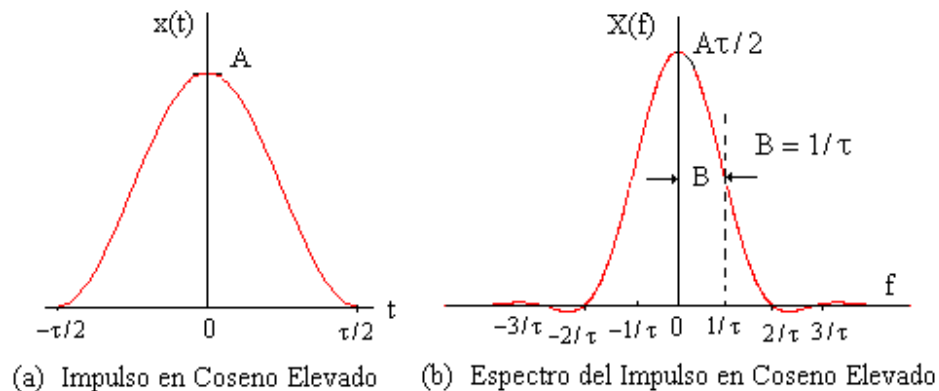


Fig. 1.41.

$$X(f) = \frac{A\tau}{2} \text{sinc}(\tau f) + \frac{A\tau}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{f+1/\tau}{1/\tau}\right) + \text{sinc}\left(\frac{f-1/\tau}{1/\tau}\right) \right]$$

$$X(f) = \frac{A\tau}{2} \frac{\text{sen}(\pi\tau f)}{\pi\tau f} + \frac{A\tau}{4} \left[\frac{\text{sen}(\pi\tau f + \pi)}{\pi\tau f + \pi} + \frac{\text{sen}(\pi\tau f - \pi)}{\pi\tau f - \pi} \right]$$

Desarrollando y simplificando se obtiene finalmente $X(f) = \frac{A\tau}{2} \frac{\text{sinc}(\tau f)}{1 - \tau^2 f^2}$

$X(f)$ se muestra en la Fig. 1.41(b).

De (1.117), el ancho de banda B del impulso en coseno elevado es

$$B \geq \frac{x(0)}{2X(0)} = \frac{A}{2A\tau/2} = \frac{1}{\tau}$$

El impulso en coseno elevado es de gran aplicación en la transmisión de impulsos en banda de base, como veremos en el Capítulo V. En el Capítulo V se tratará este mismo ejercicio, pero aplicado a un sistema (Filtros de Nyquist). ♣

1.11. FUNCIONES DE CORRELACION

1.11.1. Introducción

En muchas aplicaciones en ingeniería no es suficiente decir que dos señales son similares; en general, uno desea saber cuán similares son esas señales. Es deseable entonces disponer de una cifra o un conjunto de cifras que nos permitan comparar y cuantificar el grado de similitud o

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

semejanza entre diferentes clases de señales, y esto se puede lograr mediante las llamadas “Funciones de Correlación”.

Las funciones de correlación, surgidas de la teoría moderna de la información, son muy útiles en el análisis de señales reales tanto determinísticas como aleatorias. Por ejemplo, si un proceso físico produce diferentes señales del tiempo, una descripción completa de ellas se puede obtener mediante un análisis correlativo. Esta forma de análisis es muy importante en dos grandes áreas de aplicación: (1) en la “**Autocorrelación**”, la cual se puede utilizar para detectar una señal repetitiva (periódica) inmersa en ruido, o para medir una banda particular de frecuencias de una señal; y (2) en la “**Intercorrelación**”, que se utiliza para comparar dos señales (que pueden estar perturbadas por ruido) a fin de determinar algún tipo o grado de similitud entre ellas.

1.11.2. Autocorrelación

Consideremos el conjunto de señales mostrado en la Fig. 1.42. Vamos a investigar el grado de similitud que hay entre ellas.

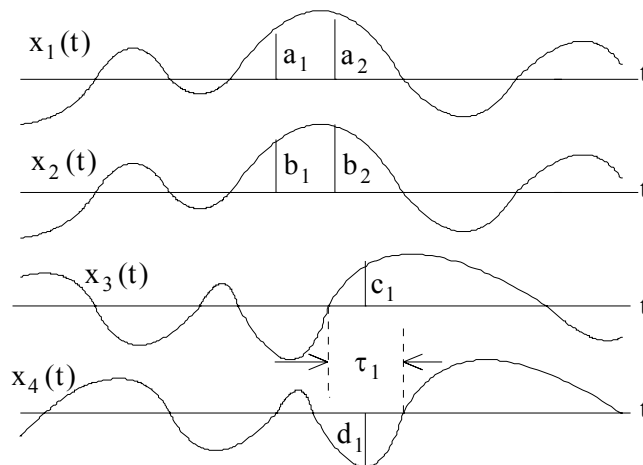


Fig. 1.42.

Un buen método para medir la similitud entre dos señales es multiplicarlas entre sí, ordenada por ordenada, y luego sumar los productos durante la duración de las señales. Por ejemplo, para estimar la similitud entre las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, Fig. 1.42, se multiplican las ordenadas a_1 por b_1 , a_2 por b_2 y así sucesivamente, y luego se suman estos productos a fin de obtener una cifra que es una medida de la similitud entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$. En la Fig. 1.42, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son idénticas, de manera que cada producto contribuye con un término positivo a la sumatoria y la suma será grande. Pero si efectuamos el mismo proceso entre las señales $x_1(t)$ y $x_3(t)$, vemos que habrá productos positivos y negativos que tenderán a cancelarse y el valor de la sumatoria será menor puesto que las señales no son idénticas. El valor de la sumatoria es entonces una medida o estimación de la similitud o semejanza entre dos señales.

Consideremos ahora las señales $x_3(t)$ y $x_4(t)$. Ellas son idénticas en forma pero $x_4(t)$ está desplazada en un tiempo τ_1 respecto a $x_3(t)$. Si se efectúa el proceso de multiplicación de ordenadas (de las cuales c_1 y d_1 son un ejemplo) vemos de nuevo que productos positivos tienden a ser cancelados por productos negativos y la suma será pequeña. Si se tuviera que estimar la similitud entre una señal $x(t)$ y una versión desplazada de ella $x(t+\tau)$, puede esperarse que la

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

sumatoria resultante tenga valores cada vez más pequeños para valores crecientes del desplazamiento τ . El valor máximo de la similaridad se tendrá cuando $\tau = 0$, es decir, cuando las señales están superpuestas. Este es, en esencia, el proceso denominado “autocorrelación”. El proceso de autocorrelación proporciona una medida de la similitud, semejanza o coherencia entre una señal dada y una réplica de ella desplazada en un tiempo τ variable, y esta medida nos proporciona alguna información acerca de la señal.

La función de autocorrelación es utilizada ampliamente en la detección y reconocimiento de señales que están inmersas en ruido. Un estudio más avanzado de las funciones de correlación está fuera de los objetivos del presente texto.

Definición

En términos más formales, la “Función de Autocorrelación” de una señal real $x(t)$ de potencia se define en la forma

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (1.119)$$

Si $x(t)$ es periódica de período T ,

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.120)$$

En general, si $x(t)$ es compleja,

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x^*(t+\tau) \rangle = \langle x^*(t)x(t+\tau) \rangle \quad (1.121)$$

En estas definiciones, la variable τ juega el papel de un parámetro de exploración o búsqueda.

La función de autocorrelación se puede definir también para señales de energía, en cuyo caso, para $x(t)$ real,

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)x(t)dt \quad (1.122)$$

Esta integral se conoce con el nombre de “Integral de Correlación de $x(t)$ ”.

En la Fig. 1.43 se muestra la función de autocorrelación de tres señales de potencia diferentes.

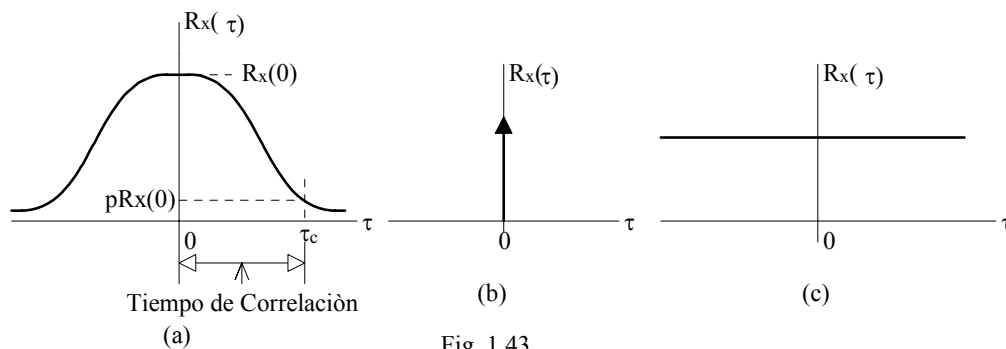


Fig. 1.43.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

La Fig. 1.43(a) representa la función de autocorrelación típica de una señal. La forma mostrada en (b) representa una señal que no tiene ninguna relación entre dos puntos infinitamente cercanos, característica ésta propia de las señales aleatorias como, por ejemplo, el ruido blanco que estudiaremos en el Capítulo II. En (c) se muestra una función de autocorrelación constante en el tiempo; esta correlación no tiene sentido físico.

Tiempo de Correlación

El tiempo de correlación τ_c , denominado también “tiempo de coherencia”, es el tiempo que tarda la función de autocorrelación en caer a un determinado porcentaje $p\%$ de su valor máximo en el origen. Este porcentaje es variable y depende de la aplicación, pero por lo general es del 1 al 8 por ciento. Este tiempo de correlación es de mucha aplicación en la práctica. En la Fig. 1.43(a) se muestra este tiempo.

Otra forma de definir el tiempo de correlación es mediante la expresión

$$\tau_c = \frac{1}{R_x(0)} \int_0^\infty R_x(\tau) d\tau,$$

pero esta forma de definirlo no es apropiada en muchas aplicaciones prácticas en que no se dispone de una expresión explícita para $R_x(\tau)$, como, por ejemplo, en el análisis de procesos físicos.

Un examen más atento del proceso de correlación nos muestra que la función de autocorrelación $R_x(\tau)$ es una medida de la rapidez de variación de una señal $x(t)$. En efecto, la función de autocorrelación está comprimida en el dominio de τ (τ_c bajo) cuando $x(t)$ tiene componentes de alta frecuencia, y extendida en el dominio de τ (τ_c alto) cuando $x(t)$ contiene solamente componentes de baja frecuencia. Esto nos induce a pensar que si la función de autocorrelación posee una transformada de Fourier, esta transformada estará relacionada en alguna medida con el contenido espectral de $x(t)$. Demostraremos más adelante que esa relación no está basada en la transformada de Fourier de $x(t)$ pues $x(t)$ no posee una, sino en la densidad espectral de potencia $S_x(f)$ de $x(t)$.

En el Capítulo III se calculan algunas funciones de autocorrelación que se utilizan en la caracterización de algunas de las señales aleatorias digitales de aplicación práctica que veremos en el Capítulo V.

Propiedades de la Función de Autocorrelación

1. La potencia promedio de $x(t)$ es igual a $R_x(0)$. En efecto, para $\tau = 0$,

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \overline{x^2(t)} \quad (1.123)$$

El valor de la función de autocorrelación en el origen es igual a la potencia promedio de la señal $x(t)$.

2. La función de autocorrelación es una función par de τ . En efecto,

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \quad \text{para } 0 < \tau \quad \text{y} \quad R_x(-\tau) = \overline{x(t-\tau)x(t)} \quad \text{para } \tau < 0$$

Como es indiferente que los desplazamientos sean en el sentido positivo o negativo de t , se sigue que

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad (1.124)$$

3. La función de autocorrelación es máxima en el origen. Esto se sigue a partir de la desigualdad [válida para $x(t)$ real],

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$0 \leq [x(t) \pm x(t + \tau)]^2 = x^2(t) \pm 2x(t)x(t + \tau) + x^2(t + \tau), \text{ de donde}$$

$$\pm 2x(t)x(t + \tau) \leq x^2(t) + x^2(t + \tau)$$

Integrando ambos miembros en un intervalo $(-T/2, T/2)$, dividiendo por T y tomando el límite $T \rightarrow \infty$,

$$\pm \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2x(t)x(t + \tau) dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt + \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t + \tau) dt \right]$$

$$\pm 2R_x(\tau) \leq 2R_x(0), \text{ de donde}$$

$$R_x(0) \geq R_x(\tau) \quad (1.125)$$

4. Si $x(t)$ es periódica de período T , entonces $R_x(\tau)$ será también periódica con el mismo período. En efecto, si $x(t)$ es periódica de período T , entonces

$$x(t) = x(t + T) = x(t + nT) \text{ donde } n \text{ es un entero } \geq 1$$

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \langle x(t + T)x(t + T + \tau) \rangle = \langle x(t + nT)x(t + nT + \tau) \rangle, \text{ de donde}$$

$$R_x(\tau) = R_x(\tau + T) = R_x(\tau + nT) \quad (1.126)$$

5. Si el valor promedio (componente continua) de $x(t)$ es distinto de cero, entonces $R_x(\tau)$ poseerá una componente continua de valor igual al cuadrado del valor promedio de $x(t)$. En efecto, si $\langle x(t) \rangle \neq 0$, entonces se puede escribir $x(t) = b_0 + x_0(t)$, donde $b_0 = \langle x(t) \rangle$ es la componente continua de $x(t)$, y $\langle x_0(t) \rangle = 0$. La función de autocorrelación de $x(t)$ será

$$R_x(\tau) = \langle [b_0 + x_0(t)][b_0 + x_0(t + \tau)] \rangle$$

$$R_x(\tau) = \langle b_0^2 + b_0 x_0(t + \tau) + b_0 x_0(t) + x_0(t)x_0(t + \tau) \rangle$$

$$R_x(\tau) = \langle b_0^2 \rangle + b_0 \langle x_0(t) \rangle + b_0 \langle x_0(t + \tau) \rangle + \langle x_0(t)x_0(t + \tau) \rangle$$

$$\text{pero } \langle b_0^2 \rangle = b_0^2; \quad \langle x_0(t) \rangle = \langle x_0(t + \tau) \rangle = 0; \quad R_{x_0}(\tau) = \langle x_0(t)x_0(t + \tau) \rangle, \text{ entonces}$$

$$R_x(\tau) = b_0^2 + R_{x_0}(\tau) \text{ cuando } \langle x(t) \rangle = b_0 \quad (1.127)$$

Esta expresión nos permite investigar el comportamiento de $R_x(\tau)$ cuando $|\tau| \rightarrow \infty$.

En efecto, si $\langle x(t) \rangle = 0$, entonces

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0 \text{ cuando } \langle x(t) \rangle = 0 \quad (1.128)$$

Esto es así porque cuando $|\tau| \rightarrow \infty$, las señales $x(t)$ y $x(t + \tau)$ son tan disímiles que ellas pierden toda relación y ya no hay correlación entre ellas, es decir,

$$R_x(\tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } |\tau| \rightarrow \infty.$$

Si $\langle x(t) \rangle = b_0 \neq 0$, entonces cuando $|\tau| \rightarrow \infty$, y de la expresión (1.127),

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} [b_0^2 + R_{x_0}(\tau)] = b_0^2 + \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{x_0}(\tau)$$

$$\text{pero, de (1.128), } \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{x_0}(\tau) = 0, \text{ de donde}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = b_o^2 \quad \text{cuando} \quad \langle x(t) \rangle = b_o \neq 0 \quad (1.129)$$

Las expresiones (1.128) y (1.129) son válidas siempre que $x(t)$ no contenga componentes periódicas. Si $x(t)$ contiene componentes periódicas, entonces, de acuerdo con la Propiedad 4, para altos valores de τ , aún cuando $|\tau| \rightarrow \infty$, $R_x(\tau)$ exhibirá un comportamiento periódico. Esto quiere decir que si $x(t)$ tiene escondida una componente periódica, la autocorrelación muestra su frecuencia, pero no su fase. Este aspecto es muy importante en la detección de señales en presencia de ruido.

6. Si $R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ y $R_{\bar{x}}(\tau) = \langle \bar{x}(t)\bar{x}(t+\tau) \rangle$, se puede demostrar (Ver Problema de Aplicación 2.27) que

$$R_x(\tau) = R_{\bar{x}}(\tau) \quad \text{y} \quad R_z(\tau) = 2[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)] \quad (1.130)$$

donde $R_z(\tau)$ es la función de autocorrelación de $z(t) = x(t) + j\bar{x}(t)$, y $\hat{R}_x(\tau)$ es la transformada de Hilbert de $R_x(\tau)$.

Obsérvese que si $z(t)$ es la señal analítica de $x(t)$, entonces $R_z(\tau)/2$ es la señal analítica de $R_x(\tau)$. Por lo tanto, la transformada de Fourier de $R_z(\tau)$ (que demostraremos más adelante que es su densidad espectral de potencia) deberá tener un espectro idénticamente nulo para $f < 0$.

Todas estas propiedades se aplican tanto a señales determinísticas como aleatorias.

♣ Ejemplo 1.31. Autocorrelación de una Señal Sinusoidal

Sea $x(t) = A \cos(\omega_c t + \phi)$, donde ϕ es un desfase constante.

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{\cos(\omega_c t + \phi) \cdot \cos[\omega_c(t + \tau) + \phi]\} dt$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \{\cos[2(\omega_c t + \phi) + \omega_c \tau] + \cos(\omega_c \tau)\} dt$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2T} \cos(\omega_c \tau) \int_{-T/2}^{T/2} dt + \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2(\omega_c t + \phi) + \omega_c \tau] dt$$

pero la segunda integral es cero debido a la periodicidad del integrando. Entonces,

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

El resultado sería el mismo para $x(t) = A \sin(\omega_c t + \phi)$. Nótese que la información de fase se pierde en la función de autocorrelación.

♣

♣ Ejemplo 1.32. Función de Autocorrelación de una Señal Periódica Rectangular

Vamos a determinar la función de autocorrelación de la señal periódica de la Fig. 1.44(a).

Sea $R_x(\tau) = R_{x-}(\tau)$ para $\tau < 0$ y $R_x(\tau) = R_{x+}(\tau)$ para $0 \leq \tau$

En consecuencia, $R_x(\tau) = R_{x-}(\tau) + R_{x+}(\tau)$ para todo τ .

De la Propiedad 2: $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$, o también $R_{x+}(\tau) = R_{x-}(-\tau)$

Por consiguiente, $R_x(\tau) = R_{x-}(\tau) + R_{x-}(-\tau)$.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Solamente se calcula $R_{x-}(\tau)$, y para $0 \leq \tau$ se hace $\tau \rightarrow -\tau$ en $R_{x-}(\tau)$. Entonces,

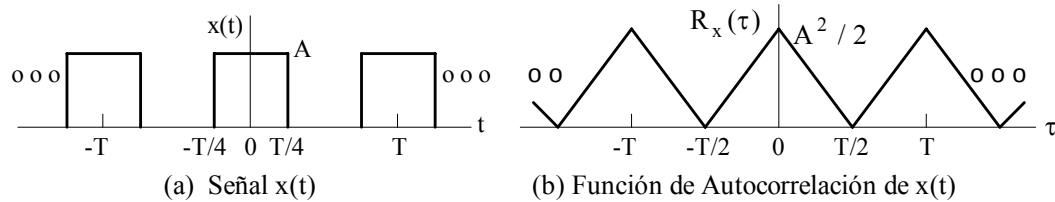


Fig.1.44

$$\text{para } -\frac{T}{2} < \tau < 0, \quad R_{x-}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\tau} A^2 dt = \frac{A^2}{T} \left(\tau + \frac{T}{2} \right) = \frac{A^2}{2} \left(1 + \frac{\tau}{T/2} \right)$$

$$\text{para } 0 \leq \tau < \frac{T}{2}, \quad R_{x+}(\tau) = R_{x-}(-\tau) = \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{\tau}{T/2} \right).$$

Puesto que $x(t)$ es periódica, combinando estos dos términos se obtiene la señal generatriz $R_{gx}(\tau)$ de $R_x(\tau)$. Entonces,

$$R_{gx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \left[1 - \frac{|\tau|}{T/2} \right] = \frac{A^2}{2} \Lambda\left(\frac{\tau}{T/2}\right)$$

La función de autocorrelación de la señal periódica rectangular $x(t)$ será también periódica:

$$R_x(\tau) = R_{gx}(\tau) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) = \frac{A^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left[\frac{\tau - nT}{T/2}\right]$$

la cual tendrá la forma mostrada en la Fig. 1.44(b).

Se puede demostrar que la función de autocorrelación de una señal periódica cualquiera $x(t)$ de período $T = 1/f_0$ es

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \exp(j2\pi n f_0 \tau)$$

Esta autocorrelación también es periódica de período $T = 1/f_0$.

♣

1.11.3. Teorema de Wiener-Kintchine

Hemos visto que las señales de potencia se pueden caracterizar mediante la densidad espectral de potencia y sería muy conveniente averiguar si hay alguna operación que utilizando las funciones de correlación permita relacionarlas con la densidad espectral de potencia. En efecto, la función de autocorrelación, además de ser una medida de la semejanza entre una señal $x(t)$ y una réplica de ella desplazada en un tiempo τ , verifica la relación (de la Propiedad 1)

$$R_x(0) = \langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

Esta expresión nos dice que la potencia promedio de una señal de potencia, igual a $R_x(0)$, es igual al área de su densidad espectral de potencia. Esto nos induce a pensar que entre la función

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

de autocorrelación y la densidad espectral existe una relación muy estrecha que vamos a tratar de determinar. Consideremos entonces la densidad espectral de potencia $S_x(f)$ de una señal de potencia $x(t)$, es decir,

$$x(t) \Rightarrow S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

donde $X_T(f)$ es el espectro de la señal truncada de $x(t)$. Por transformada de Fourier inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \exp(j2\pi\tau f) df \quad (1.131)$$

En la expresión (1.131) se ha elegido una nueva variable τ pues la variable t está ya implícita en la definición de $X_T(f)$. Intercambiando el orden de las operaciones,

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f) X_T^*(f) \exp(j2\pi\tau f) df$$

Como $x(t)$ es real, entonces,

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t') \exp(-j2\pi f t') dt' \quad y \quad X_T^*(f) = X_T(-f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \exp(j2\pi f t) dt$$

Rearreglando,

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(t-t'+\tau)f] df \right] dt' \right\} dt$$

La integral dentro de los corchetes es, de (1.21d), igual a $\delta(t-t'+\tau)$, y de la propiedad de muestreo del impulso unitario se obtiene finalmente

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) x_T(t+\tau) dt$$

Como $x_T(t) = x(t)$ en el intervalo $(-T/2, T/2)$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt = \langle x(t) x(t+\tau) \rangle = R_x(\tau), \text{ de donde}$$

$$S_x(f) \Leftrightarrow R_x(\tau) \quad (1.132a)$$

Este resultado, de gran importancia en el análisis espectral de señales, se conoce con el nombre de “**Teorema de Wiener-Kintchine**” o “**Relación de Wiener-Kintchine**” (Obtenido por Wiener en 1930 y por Kintchine en 1934. Recientemente se descubrió que Einstein obtuvo también este resultado en 1914. El lector encontrará entonces algunas veces la denominación “Teorema de Einstein-Wiener-Kintchine”). Este teorema establece que la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia conforman un par de transformadas de Fourier, es decir,

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi\tau f) df \Leftrightarrow S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi\tau f) d\tau \quad (1.132b)$$

La segunda parte de (1.132b) muestra que *la densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación*, resultado de gran importancia en el análisis de señales y sistemas, como veremos más adelante.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

La deducción rigurosa del Teorema de Wiener-Kintchine está fuera de los límites que nos hemos impuesto.

Las relaciones de Wiener-Kintchine demuestran que la función de autocorrelación de una señal contiene solamente aquellas componentes de frecuencia presentes en la señal misma, es decir, la función de autocorrelación no depende de la forma de la señal en el dominio del tiempo (pues ha perdido la información de fase) sino de su contenido espectral. Esta equivalencia **tiempo** $\Leftrightarrow$ **frecuencia** es aplicable tanto a señales determinísticas como aleatorias.

Si las señales son de energía, se verifica que

$$x(t) \Leftrightarrow X(f); \quad R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = E_x \quad \text{energía de } x(t)$$

$$G_x(f) = |X(f)|^2 = X(f) \cdot X(-f) \Leftrightarrow R_x(\tau) = x(t) * x(-t) \quad (1.133)$$

El Teorema de Wiener-Kintchine proporciona un método práctico para la estimación de la densidad espectral de potencia de una señal $x(t)$ cualquiera. En efecto, primero se determina la función de autocorrelación $R_x(\tau)$ de $x(t)$, y por transformación de Fourier de $R_x(\tau)$ se obtiene $S_x(f)$, la densidad espectral de potencia de $x(t)$. La mayoría de las señales en las comunicaciones y en muchas otras áreas de la ingeniería eléctrica son modeladas como señales de potencia cuyo contenido espectral debe ser bien conocido, y la importancia práctica del Teorema de Wiener-Kintchine es que las operaciones de cálculo se pueden efectuar en forma muy eficiente y rápida mediante cálculo numérico en computadoras digitales, aplicando las técnicas del cálculo numérico de la transformada de Fourier que se muestran en el APENDICE A.

1.11.4. Teorema de la Modulación para Señales de Potencia

En la Sección 1.9.2 se demostró el Teorema de la Modulación para Señales de Potencia. Este teorema lo podemos demostrar también utilizando el Teorema de Wiener-Kintchine.

Sea $x(t)$ una señal pasabajo de potencia de banda limitada B , y sea la señal modulada $x_c(t) = x(t)A \cos(\omega_c t)$ con $f_c \geq B$, donde

$$x(t) \Rightarrow S_x(f) \Leftrightarrow R_x(\tau) \quad \text{y} \quad x_c(t) \Rightarrow S_{xc}(f) \Leftrightarrow R_{xc}(\tau)$$

$$R_{xc}(\tau) = \langle x_c(t)x_c(t+\tau) \rangle = A^2 \langle x(t) \cos(\omega_c t) \cdot x(t+\tau) \cos[\omega_c(t+\tau)] \rangle$$

$$R_{xc}(\tau) = \frac{A^2}{2} \langle x(t)x(t+\tau) [\cos[\omega_c(2t+\tau)] + \cos(\omega_c \tau)] \rangle$$

$$R_{xc}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c \tau) \langle x(t)x(t+\tau) \rangle + \frac{A^2}{2} \langle x(t)x(t+\tau) \cos[\omega_c(2t+\tau)] \rangle$$

Debido a la periodicidad del segundo término, la integral correspondiente es cero, es decir,

$$\langle x(t)x(t+\tau) \cos[\omega_c(2t+\tau)] \rangle = 0, \quad \text{de donde}$$

$$R_{xc}(\tau) = \frac{A^2}{2} R_x(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \quad (1.134a)$$

donde $R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ es la función de autocorrelación de $x(t)$ y $R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f)$.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Mediante el Teorema de Wiener-Kintchine, la transformada de Fourier de $R_{xc}(\tau)$ es

$$S_{xc}(f) = \frac{A^2}{4} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)] \quad (1.134b)$$

resultado ya obtenido anteriormente, expresión (1.112), y que es el Teorema de la Modulación para Señales de Potencia.

1.11.5. Intercorrelación

La intercorrelación, llamada también “**correlación cruzada**” o “**correlación mutua**”, permite la comparación entre dos señales diferentes pero coherentes. La función de intercorrelación contiene información respecto a las frecuencias comunes a ambas señales y a la diferencia de fase entre ellas.

La intercorrelación entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ se define en la forma

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t + \tau) dt = \langle x(t)y(t + \tau) \rangle \quad (1.135)$$

Puede observarse que si entre las señales $x(t)$ e $y(t)$ existe algún grado de semejanza, entonces la función de intercorrelación existirá en un cierto rango de τ (tiempo de intercorrelación, similar al tiempo de correlación τ_c), proporcionando así una medida cuantitativa del grado de similitud o coherencia entre ellas. Cuando las señales son tan disímiles que aún para $\tau = 0$ la intercorrelación es cero, se dice entonces que las señales son ortogonales, es decir, si

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t + \tau) dt = 0 \quad \text{para todo } \tau \quad (1.136a)$$

entonces $x(t)$ e $y(t)$ son ortogonales y no habrá ninguna correlación entre ellas. En general, como vimos en la Sección 1.2.5, la condición de ortogonalidad total entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ se expresa mediante la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = 0 \quad (1.136b)$$

Si $x(t)$ e $y(t)$ son periódicas de período T , la función de intercorrelación será

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t + \tau) dt \quad (1.137)$$

Se puede demostrar que la función de intercorrelación resultante es también periódica de período T .

En cuanto al dominio de la frecuencia, la “**densidad interespectral de potencia**” o “**densidad espectral mutua**” o “**densidad espectral cruzada**” de dos señales, se define como la transformada de Fourier de su función de intercorrelación (del Teorema de Wiener-Kintchine), es decir,

$$S_{xy}(f) \Leftrightarrow R_{xy}(\tau) \quad (1.138a)$$

$$\text{O también, } S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (1.138b)$$

La densidad interespectral de potencia suministra, en el dominio de la frecuencia, la misma información acerca de las señales que la que suministra la función de intercorrelación, pero es de más utilidad en el análisis de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Propiedades de la Función de Intercorrelación

A continuación damos, sin demostrarlas, algunas propiedades de la función de intercorrelación.

1. La función de intercorrelación no es conmutativa, es decir,

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (1.139)$$

$$2. \quad (a) \quad \sqrt{R_x(0) \cdot R_y(0)} \geq |R_{xy}(\tau)| \quad (1.140)$$

$$(b) \quad \frac{1}{2} [R_x(0) + R_y(0)] \geq |R_{xy}(\tau)| \quad (1.141)$$

3. Si dos señales $x(t)$ e $y(t)$ no están correlacionadas y sus valores promedio son distintos de cero, se cumple que su función de intercorrelación es igual al producto de sus valores promedio, es decir,

Si $\langle x(t) \rangle \neq 0$ y $\langle y(t) \rangle \neq 0$, entonces

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t)y(t+\tau) \rangle = \langle x(t) \rangle \cdot \langle y(t) \rangle \quad (1.142)$$

pero si $\langle x(t) \rangle = 0$ ó $\langle y(t) \rangle = 0$ o ambos son cero, entonces $R_{xy}(\tau) = 0$. Asimismo, si

$x(t)$ e $y(t)$ son ortogonales, entonces

$$R_{xy}(\tau) = 0 \text{ si } x(t) \text{ y } y(t) \text{ son ortogonales} \quad (1.143)$$

Nótese que si $x(t)$ o $y(t)$ no poseen una componente continua, entonces la ortogonalidad implica no correlación. Sin embargo, en general, ortogonalidad implica no correlación, pero no correlación no necesariamente implica ortogonalidad. La ortogonalidad es una condición mucho más estricta que la no correlación, como puede apreciarse en la expresión (1.136b).

4. Si $x(t)$ e $y(t)$ son periódicas de período $T=1/f_0$, y sus funciones generatrices son $x_g(t) \Leftrightarrow X_g(f)$ e $y_g(t) \Leftrightarrow Y_g(f)$, se verifica que

$$R_{xy}(\tau) \Leftrightarrow S_{xy}(f) = f_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_g(nf_0) Y_g(nf_0) \delta(f - nf_0) \quad (1.144)$$

La intercorrelación es muy útil en la descripción del grado de conformidad entre dos señales diferentes en función de su desplazamiento mutuo. Su habilidad para medir cuantitativamente el grado de semejanza o coherencia entre dos señales, permite visualizar con más profundidad los fenómenos investigados que si se analizara cada señal por separado.

Un tratamiento más avanzado de la intercorrelación está fuera de los límites de este texto.

1.11.6. Detección de una Señal Periódica en presencia de Ruido

En muchas ocasiones es necesario detectar periodicidades escondidas dentro de otras señales, en especial señales contaminadas con ruido, como, por ejemplo, en la transmisión de señales digitales, en la detección de señales de radar o de periodicidades en encefalogramas, en el estudio de vibraciones y en muchas otras aplicaciones del Análisis Espectral de Señales. En estos casos las técnicas de correlación tienen una gran importancia, pero aquí sólo trataremos la detección de una componente periódica en presencia de ruido.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Sea una señal $x(t)$ formada por una componente periódica de período T más una señal aleatoria (ruido) que enmascara completamente la componente periódica. La señal $x(t)$ se puede expresar en la forma

$$x(t) = p(t) + n(t)$$

donde $p(t)$ es una componente periódica de período T y $n(t)$ es una señal aleatoria. No hay correlación entre $p(t)$ y $n(t)$, y suponemos que sus valores promedio son cero, es decir, $\langle p(t) \rangle = \langle n(t) \rangle = 0$. Entonces,

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \langle [p(t) + n(t)][p(t+\tau) + n(t+\tau)] \rangle$$

$$R_x(\tau) = R_p(\tau) + R_n(\tau) + R_{pn}(\tau) + R_{np}(\tau)$$

Pero de la Propiedad 3 de la función de intercorrelación,

$$R_{pn}(\tau) = R_{np}(\tau) = 0 \text{ puesto que } \langle p(t) \rangle = \langle n(t) \rangle = 0. \text{ Entonces,}$$

$$R_x(\tau) = R_p(\tau) + R_n(\tau)$$

Tomemos el límite $|\tau| \rightarrow \infty$ de esta expresión:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_p(\tau) + \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_n(\tau)$$

Puesto que $p(t)$ es periódica de período T , su función de autocorrelación también será periódica de período T para todo τ , por lo tanto

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = R_p(\tau + kT) + \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_n(\tau)$$

pero de (1.128), como $\langle n(t) \rangle = 0$, entonces $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_n(\tau) = 0$. Finalmente,

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = R_p(\tau + kT) \quad (1.145)$$

La importancia de esta expresión es que para valores altos de τ la función de autocorrelación de la señal $x(t)$ exhibe un comportamiento periódico del mismo período de $p(t)$. En general, si la función de autocorrelación de una señal $x(t)$ cualquiera muestra un comportamiento periódico de período T , es porque la señal $x(t)$ contiene una componente periódica con el mismo período (o frecuencia). Aunque la componente periódica esté inmersa en el ruido, la autocorrelación puede detectar su frecuencia, aunque no su fase.

En una forma alterna, se puede correlacionar mutuamente $x(t)$ con un proceso periódico $q(t)$, generado localmente, del mismo período que $p(t)$, la componente periódica de $x(t)$. Se tiene entonces,

$$R_{xq}(\tau) = \langle x(t) \cdot q(t+\tau) \rangle = \langle [p(t) + n(t)] \cdot q(t+\tau) \rangle = \langle p(t) \cdot q(t+\tau) \rangle + \langle n(t) \cdot q(t+\tau) \rangle$$

Como $n(t)$ y $q(t)$ no están correlacionados y además $\langle n(t) \rangle = 0$, entonces $\langle n(t)q(t+\tau) \rangle = 0$, de donde

$$R_{xq}(\tau) = \langle p(t) \cdot q(t+\tau) \rangle = R_{pq}(\tau)$$

Puesto que los procesos $p(t)$ y $q(t)$ tienen componentes de igual período, $R_{pq}(\tau)$ tendrá también una componente del mismo período. Por consiguiente, $R_{xq}(\tau)$ exhibirá un comportamiento periódico del mismo período que $q(t)$. Si $q(t)$ tiene la forma de un tren de impulsos

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

unitarios de período T , se puede demostrar [Lathi, 1968] que $R_{xq}(\tau)$ reproduce $q(\tau)$. Esto quiere decir que este método no sólo detecta la presencia de una componente periódica, sino que también revela la forma o perfil de dicha componente. En el Capítulo II aplicamos estos conceptos a los sistemas lineales.

Un estudio más avanzado de estas técnicas está fuera de los objetivos de este texto.

1.12. RESUMEN

El objetivo principal de este capítulo es la representación en los dominios del tiempo y de la frecuencia de señales con énfasis en sus aplicaciones en el área de las comunicaciones. Es necesario, por lo tanto, el desarrollo de modelos matemáticos que representen las señales y sistemas físicos para emprender el análisis de las interrelaciones señales-sistemas.

El estudio sistemático de los modelos de señales se inicia mediante el establecimiento de una primera clasificación que se corresponda con los fenómenos físicos o señales reales que se observan en la práctica. Esta primera clasificación comprende las señales determinísticas y aleatorias por un lado, y por el otro comprende las señales de energía y de potencia. Asimismo, se establecen modelos para señales periódicas y no periódicas, pues éstas son señales de mucha aplicación en el campo de la ingeniería eléctrica y particularmente en las telecomunicaciones. La mayoría de las señales utilizadas en la práctica corresponde a algunos de estos modelos; por ejemplo, una señal periódica rectangular es a la vez una señal de potencia y es determinística, y es el modelo de una señal de temporización (reloj).

El análisis espectral de señales es esencial para comprender muchos fenómenos no perceptibles en el dominio del tiempo. Este análisis lo enfocamos desde el punto de vista de las Series y Transformadas de Fourier, que nos proveen de las herramientas analíticas necesarias para emprender el estudio de las señales y sistemas en el dominio de la frecuencia. A partir del Análisis de Fourier, de sus propiedades y teoremas derivados (Parseval, Raleigh, Wiener-Kintchine, etc.), comprendemos los conceptos de espectro, de ancho de banda, de densidad espectral de potencia y energía todos de gran aplicación en la práctica. Otras técnicas matemáticas, tales como la convolución y las funciones de correlación, se han definido y aplicado en el análisis espectro-temporal de señales.

Dado el carácter introductorio de este texto, el Capítulo I es simplemente una muestra de la ingente cantidad de herramientas matemáticas y conceptuales necesarias para un estudio más avanzado en la Teoría Estadística de las Comunicaciones, pero es suficiente para comprender y aplicar los conceptos que se estudiarán en el resto del texto.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.1. Clasifique cada una de las señales siguientes como señales de energía, de potencia o ninguna de las dos. Calcule la energía o la potencia, según el caso.

$$(a) \ x(t) = 2 \cos(6\pi t - \pi/2); \quad (b) \ x(t) = A|\cos(\omega_c t)|; \quad (c) \ x(t) = A \exp(-\frac{t}{\tau})u(t)$$

$$(d) \ x(t) = \frac{A\tau}{\tau + jt}; \quad (e) \ x(t) = A \exp(-\frac{t}{\tau})\Pi(\frac{t}{\tau}); \quad (f) \ x(t) = A \exp(\frac{t}{\tau})\cos(\omega_c t)$$

$$(g) \ x(t) = A \exp(-\frac{|t|}{\tau})\Pi(\frac{t}{2\tau})\cos(\omega_c t) \quad \text{con} \quad \frac{1}{f_c} \ll \tau$$

$$(h) \ \frac{A}{t} \Pi(\frac{t}{\tau}); \quad (i) \ x(t) = \frac{A}{t} \Pi(\frac{t-\tau}{\tau})$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

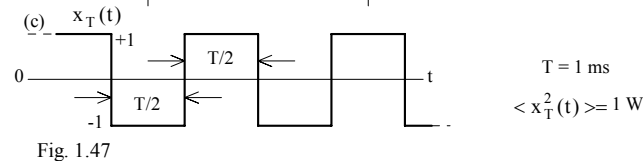
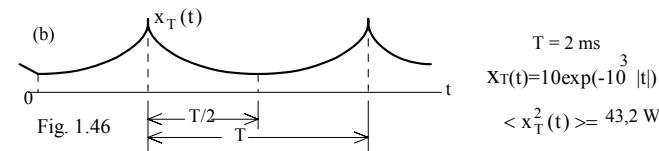
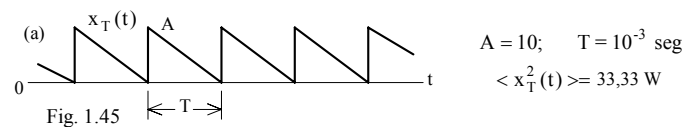
1.2. Grafique las siguientes señales de energía y verifique que sus energías son las dadas.

(a) $x(t) = A \exp(-\frac{|t|}{T}) \Pi(\frac{t}{2T})$; $E = 0,8647A^2 T$ joules

(b) $\frac{A}{T} r(t) \Pi(\frac{t-T/2}{T})$; $E = \frac{A^2 T}{3}$ joules

(c) $x(t) = A \left[1 + \cos(\frac{\pi t}{T}) \right] \Pi(\frac{t}{2T})$; $E = 3A^2 T$ joules

1.3 Demuestre que las potencias promedio de las siguientes señales son las correspondientes dadas.



1.4. Grafique las siguientes señales:

- (a) $r(t+2)$; (b) $r(t-2)$; (c) $r(t) - 2r(t-1)$; (d) $u(2t-1)$; (e) $r(t) \cdot u(t-1)$;
(f) $r(t) - u(t)$; (g) $\exp(-at)u(t-1)$; (h) $\exp(-at)\delta(t-1)$; (i) $u(t) - u(t-1)$;
(j) $3\delta(t-2) + 2u(t)$; (k) $\delta(t-1) \cdot \delta(2t)$; (l) $u(t) \cdot u(1-t)$; (m) $r(t)\cos(\omega_0 t)$; (n) $\delta(2t-2\pi)$;
(o) $\delta(\frac{t}{2}+2)$; (p) $\delta(1-2t)$; (q) $\Pi(\frac{t}{8}) + \Lambda(\frac{t}{4})$; (r) $\Pi(\frac{t}{2}) - \Lambda(t)$; (s) $2\Pi(\frac{t}{2}) \cdot \Lambda(\frac{t}{2})$;
(t) $\text{sgn}(t)\sin(\omega_0 t)$; (u) $2\Pi(2t+1)$; (v) $\Lambda(4-2t)$; (x) $10(t-2)^2 \Pi(\frac{t-2}{2})$;
(y) $\exp(t)\Pi(\frac{t+2}{2}) + \exp(-t)\Pi(\frac{t-2}{2})$; (z) $\exp(-t)\Pi(\frac{t+2}{2}) + \exp(t)\Pi(\frac{t-2}{2})$

1.5. Verifique las siguientes integrales

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1-\pi t) \cos(\frac{1}{t}) dt = -\frac{1}{\pi}$; (b) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp[-\sin(t)] \cos(2t) \delta(2t-2\pi) dt = \frac{\pi^2}{2}$;
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + t^2 + t + 1) \delta(t-3) dt = 40$; (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3) \exp(-t) dt = 20,086$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$$\begin{aligned}
 (e) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)\cos[\pi(t-3)]dt &= -1; & (f) \int_{-\infty}^{\infty} (t^3+4)\delta(1-t)dt &= 5 \\
 (g) \int_{-\infty}^{\infty} (t^3+3)\delta(3t-9)dt &= 10; & (h) \int_{-\infty}^{\infty} (t^2+2)\delta\left(\frac{t}{2}-1\right)dt &= 12 \\
 (i) \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot u(2-t) \cdot u(t)dt &= 2; & (j) \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t)+u(t)-u(t-2)]dt &= 3 \\
 (k) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)u(t-t_1)dt &= \begin{cases} 1 & \text{para } t_0 \geq t_1 \\ 0 & \text{para } t_0 < t_1 \end{cases}; & (l) \int_{-\infty}^t u(\tau-1)d\tau &= r(t-1)
 \end{aligned}$$

1.6. Demuestre que el periodo de la señal periódica $x(t) = 10 \cos^2(t)$ es igual a π .

1.7. Verifique si las señales siguientes son periódicas, en cuyo caso determine el periodo.

$$(a) x(t) = \cos(6\pi t) + \cos(6\sqrt{2}\pi t); \quad (b) x(t) = 10\cos(60\pi t) + 5\cos(25t)$$

$$(c) x(t) = \cos(60\pi t) + \cos(50\pi t); \quad (d) x(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{7}\right)$$

$$(e) x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(t-5n); \quad (f) x(t) = \cos(5\pi t) + \sin(6\pi t); \quad (h) x(t) = \sin(2t) + \cos(\pi t)$$

1.8. Dibujar los fasores y los espectros uni y bilaterales de las señales

$$(a) x(t) = 5\cos\left(6\pi t - \frac{\pi}{4}\right); \quad (b) x(t) = 2\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

1.9. Demostrar las siguientes transformaciones trigonométricas (Sugerencia: Utilice fasores):

$$(a) x(t) = A_1 \cos(\omega_c t) + A_2 \cos[(\omega_c + \omega_m)t] = E(t) \cos[\omega_c t + \psi(t)] \quad \text{con } f_c \geq f_m$$

$$\text{donde } E(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_m t)} \quad \text{y} \quad \psi(t) = \arctg \frac{A_2 \sin(\omega_m t)}{A_1 + A_2 \cos(\omega_m t)}$$

$$(b) x(t) = A_1 \cos(\omega_c t) + A_2 \sin[(\omega_c + \omega_m)t] = E(t) \cos[\omega_c t + \psi(t)] \quad \text{con } f_c \geq f_m$$

$$\text{donde } E(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sin(\omega_m t)} \quad \text{y} \quad \psi(t) = -\arctg \frac{A_2 \cos(\omega_m t)}{A_1 + A_2 \sin(\omega_m t)}$$

1.10. Expresar $x(t)$ en la forma polar $x(t) = E(t) \cos[\omega_c t + \psi(t)]$ y dibuje su diagrama fasorial.

$$(a) x(t) = 6\sin(50\pi t)\cos(10\pi t) + 10\cos(60\pi t)\cos(20\pi t); \quad \text{referencia } f_c = 20$$

$$(b) x(t) = [A_c + A_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_c t) \quad \text{con } A_c > A_m \text{ y } f_c \gg f_m$$

$$(c) x(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_m \sin(\omega_m t) \cdot \sin(\omega_c t) \quad \text{con } A_c > A_m \text{ y } f_c \gg f_m$$

$$(d) x(t) = A_c \cos(\omega_c t) + n_c(t) \cos(\omega_c t) - n_s(t) \sin(\omega_c t)$$

1.11. Demuestre que si $x(t) = x(t+T)$, entonces

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_0^T x(t)dt \quad \text{y} \quad \int_T^{T+t} x(t)dt = \int_0^t x(t)dt$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

- 1.12. En las señales periódicas siguientes verifique que el coeficiente de Fourier X_n es el dado. Desarrolle también $x_T(t)$ en serie de Fourier con $A = 8$.

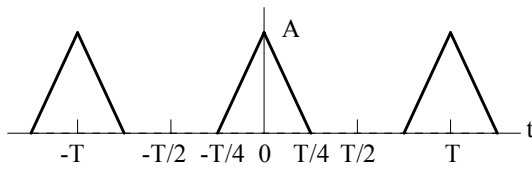


Fig. 1.48

(a)

$$X_n = \frac{A}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$X_0 = \frac{A}{4}; \quad \phi_n = 0$$

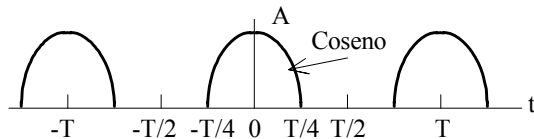


Fig. 1.49 (b) Rectificación en Media Onda

$$X_n = \begin{cases} \frac{-A(-1)^{n/2}}{(n^2 - 1)\pi} & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\phi_n = 0$$

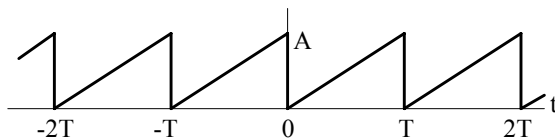


Fig. 1.50

(c) Diente de Sierra

$$X_n = j \frac{A}{2\pi n} \text{ para todo } n \text{ y } n \neq 0$$

$$X_0 = A/2; \quad \phi_n = \pi/2$$

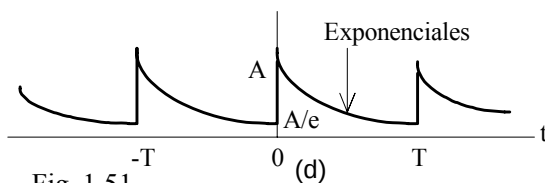


Fig. 1.51

(d)

$$X_n = \frac{0,6321A}{1 + j2\pi n} \text{ para todo } n$$

$$\phi_n = -\arctg(2\pi n)$$

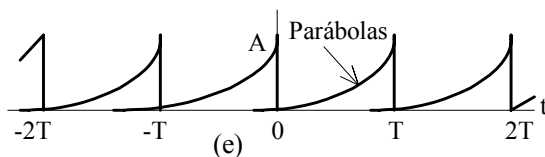


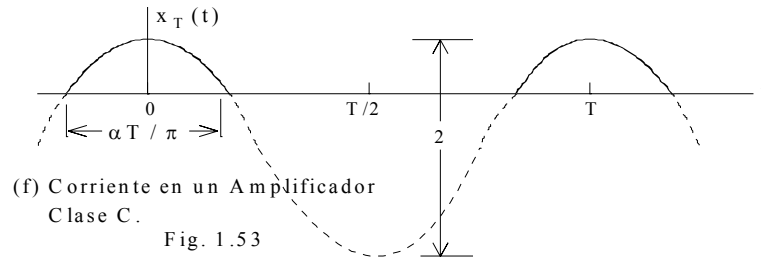
Fig. 1.52

(e)

$$X_n = A \frac{1 + j2\pi n}{2\pi^2 n^2} \text{ para todo } n \text{ y } n \neq 0$$

$$X_0 = \frac{A}{3}; \quad \phi_n = \arctg(2\pi n)$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES



$$X_n = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(\alpha)\sin(2\alpha) - n\sin(\alpha)\cos(n\alpha)}{n(n+1)(n-1)} \quad \text{para todo } n, \text{ excepto } n = \pm 1 \text{ y } n = 0$$

$$X_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right]; \quad X_0 = \frac{1}{\pi} [\sin(\alpha) - \alpha \cdot \cos(\alpha)]; \quad \phi_n = 0$$

Para desarrollar $x_T(t)$ en Serie de Fourier, suponga que $\alpha = \pi/4$.

- 1.13. La señal (d) del Problema 1.12 se aplica a un filtro pasabajo de ganancia 2 y ancho de banda $B = 2500$ Hz. Si $A = 10$ V y $T = 1$ ms, compruebe que

(a) La potencia de entrada al filtro es de 43,233 W

(b) La salida del filtro es

$$y(t) = 12,642 + 3,975 \cos(2\pi \times 10^3 t - 80,96^\circ) + 2,006 \cos(4\pi \times 10^3 t - 85,45^\circ)$$

(c) La potencia de salida del filtro es de 169,73 W

- 1.14. La salida rectificadora de media onda del Problema 1.12 se aplica a un filtro pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda $B = 400$ Hz. Si $A = 100$ V y $f_0 = 60$ Hz, demuestre que el Factor de Rizado a la salida del filtro es del 48,24%.

- 1.15. (a) Dibuje el espectro de potencia $|X_n|^2$ vs nf_0 de las tres señales del Problema 1.3 (Tome seis componentes a cada lado del origen).

(b) Si estas tres señales se aplican separadamente a un filtro pasabanda de ganancia unitaria, de ancho de banda $B = 1400$ Hz y centrado en $f_c = 1500$ Hz, determine las correspondientes potencias de salida del filtro.

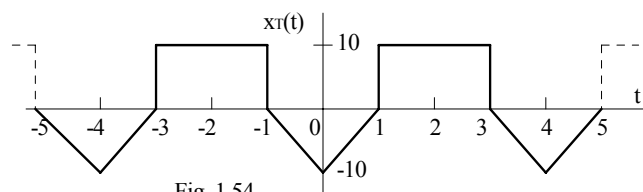
- 1.16. Sea la señal periódica de la Fig. 1.54. Aplique el concepto de Transformada de Fourier de Señales Periódicas.

Demuestre:

(a) Que el Coeficiente de Fourier X_n es

$$X_n = 5(-1)^n \sin c\left(\frac{n}{2}\right) - 2,5 \sin c^2\left(\frac{n}{4}\right); \quad \phi_n = 0; \quad X_0 = 2,5$$

(b) Que si la señal se aplica a una resistencia de 1000 Ohm, la potencia disipada en la resistencia es de 266,67 mW.



I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

1.17. Suponga que el circuito eléctrico de la Fig. 1.55 tiene un voltaje aplicado $v(t)$ de la forma

$$v(t) = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} |V_n| \cos(2\pi n f_o t + \theta_n)$$

La corriente $i(t)$ correspondiente vendrá dada por

$$i(t) = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \cos(2\pi n f_o t + \phi_n)$$

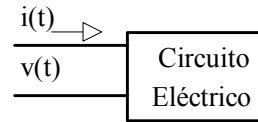


Fig. 1.55

Si se define la potencia promedio de entrada al circuito en la forma $P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cdot i(t) dt$, demuestre que la potencia de entrada se puede expresar en la forma

$$P = V_o I_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|V_n| |I_n|}{2} \cos(\theta_n - \phi_n)$$

1.18. El voltaje aplicado al circuito eléctrico de la Fig. 1.55 es $v(t) = V_o \cos(2\pi f_o t)$ y la corriente

$$i(t) \text{ tiene la forma } i(t) = I_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{t-nT}{T/2}\right) - \Pi\left(\frac{t-nT-T/2}{T/2}\right) \right]$$

(a) Demuestre que la potencia instantánea $p(t) = v(t) i(t)$ es igual a $p(t) = V_o I_o |\cos(2\pi t)|$ con $T = 1$. Este problema hay trabajarlo en forma gráfica; nótese que $p(t)$ tiene la forma de una señal rectificadora de onda completa.

(b) Demuestre que la potencia promedio de $p(t)$ es $\langle p^2(t) \rangle = \frac{1}{2} V_o^2 I_o^2$

1.19. La señal $v(t) = 110\sqrt{2} \cos(2\pi f_o t)$, con $f_o = 60$ Hz, se aplica a un rectificador de media onda. El rectificador alimenta una carga de 50 Ohm.

(a) Demuestre que el Coeficiente de Fourier de la corriente $i(t)$ que circula por la carga es

$$I_n = \begin{cases} \frac{110\sqrt{2}(-1)^{\frac{n+2}{2}}}{50\pi(n^2-1)} & \text{para } n \text{ par} \\ 0 & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} ; \quad I_o = 0,99 \text{ Amp}; \quad \phi_n = 0$$

(b) Demuestre que el desarrollo de $i(t)$ en Serie de Fourier es

$$i(t) = 0,99 + 0,66 \cos(240\pi t) - 0,132 \cos(480\pi t) + 0,057 \cos(720\pi t) - 0,031 \cos(960\pi t) + \dots$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

1.20. Sea la señal periódica de la Fig. 1.56.

- (a) Demuestre que el Coeficiente de Fourier de $x(t)$ es

$$X_n = \begin{cases} \frac{8A}{3\pi^2 n^2} & \text{para } n \text{ impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

$$X_0 = \frac{A}{3}; \quad \phi_n = 0$$

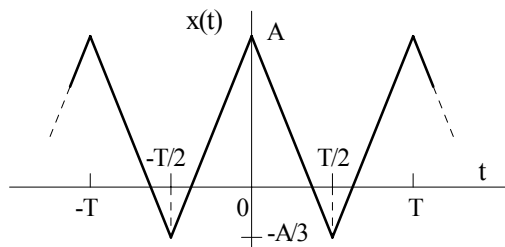


Fig. 1.56

- (b) Demuestre que la potencia promedio de $x(t)$, para $A = 10$, es $\langle x^2(t) \rangle = 25,926 \text{ W}$
- (c) La señal $x(t)$ se pasa por un filtro pasabajo, de ganancia unitaria y ancho de banda de 45 Hz. Si $T = 0,1 \text{ seg}$ y $A = 10$, demuestre que la potencia de salida del filtro es de 25,915 W.

1.21. Sean las dos señales periódicas de la Fig. 1.57.

- (a) Demuestre que sus correspondientes Coeficientes de Fourier son

$$X_n = j2A \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{4})}{n\pi}; \quad X_0 = 0; \quad \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

$$Y_n = \begin{cases} -j2A \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi(n^2-1)} & \text{para } n \text{ impar } \neq \pm 1 \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

$$Y_0 = 0; \quad Y_1 = j\frac{2A}{3\pi}; \quad \theta_n = \frac{\pi}{2}$$

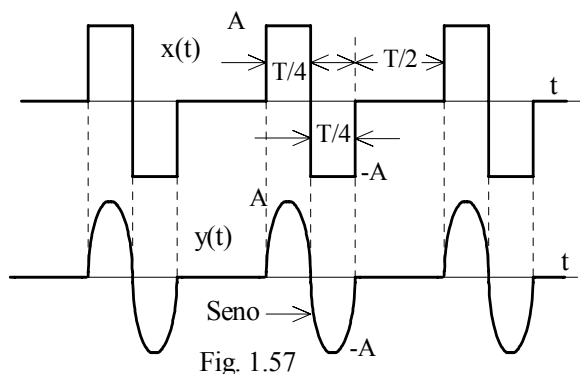
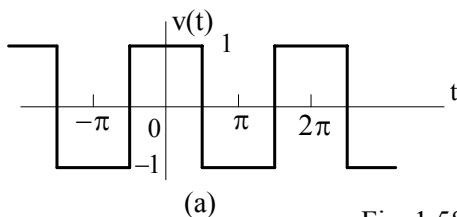


Fig. 1.57

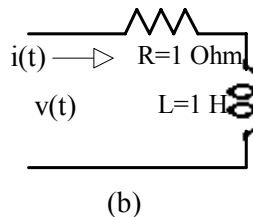
- (b) Demuestre que las potencias de $x(t)$ y de $y(t)$ están relacionadas mediante la expresión

$$\langle y^2(t) \rangle = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{2} = \frac{A^2}{4}$$

1.22. El voltaje periódico de la Fig. 1.58(a) se aplica al circuito RL serie mostrado en (b).



(a)



(b)

Fig. 1.58

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

Demuestre que: (a) $I_n = \begin{cases} \frac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n(1+jn)\pi} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$

(b) El desarrollo en serie de Fourier de la corriente $i(t)$ es

$$i(t) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - 45^\circ) - \frac{1}{3\sqrt{10}} \cos(3t - 71,56^\circ) + \frac{1}{5\sqrt{26}} \cos(5t - 78,69^\circ) - \dots \right]$$

1.23. Verifique los siguientes pares de Transformadas de Fourier.

(a) $x(t - t_0) \exp(\mp j2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f \pm f_c) \exp[-j2\pi t_0 (f \pm f_c)]$

(b) $x(t) = A \cdot \exp(-a|t|) \Leftrightarrow X(f) = \frac{2aA}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

(c) $x(t) = A[1 - \exp(-at)]u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{2} \delta(f) + \frac{aA}{j2\pi f(a + j2\pi f)}$

(d) $x(t) = A \cdot t \cdot \exp(-at) u(t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{(a + j2\pi f)^2} = \frac{A}{(a^2 - 4\pi^2 f^2) + j4\pi a f}$

(e) $x(t) = A \cdot \exp(-at) u(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{a + j2\pi(f + f_c)} + \frac{1}{a + j2\pi(f - f_c)} \right]$

(f) $x(t) = A \cdot \exp(-a|t|) \cdot \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{aA}{a^2 + 4\pi^2(f + f_c)^2} + \frac{aA}{a^2 + 4\pi^2(f - f_c)^2}$

(g) $x(t) = A \cdot \exp(-\frac{t^2}{2a^2}) \Leftrightarrow X(f) = A\sqrt{2\pi a^2} \cdot \exp(-2\pi^2 a^2 f^2)$ Impulso Gaussiano

1.24. Ventana de Ponderación de Hamming

La “Ventana de Hamming”, utilizada en procesamiento de señales, está definida en la forma

$$x(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & \text{para } |t| \leq T \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Grafique $x(t)$ para $T = 1$ seg.

(b) Demuestre que $X(f) = 1,08T \text{sinc}(2Tf) + 0,46T \text{sinc}(2Tf + 1) + 0,46T \text{sinc}(2Tf - 1)$

(c) Grafique $X(f)$ para $T = 1$ ms. Verifique que el primer cero de $X(f)$ ocurre a $f = 1$ kHz.

1.25. Sea la secuencia de impulsos de la Fig. 1.59.

(a) Demuestre que su transformada de Fourier $X(f)$ es

$$X(f) = 10^{-3} \text{sinc}\left(\frac{f}{10^3}\right) \left[\exp(-j10^{-3}\pi f) + \exp(-j5 \times 10^{-3}\pi f) + 3 \exp(-j7 \times 10^{-3}\pi f) \right]$$

(b) Grafique $|X(f)|$ y verifique que el primer cero de

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

$|X(f)|$ está a una frecuencia de 1000 Hz

(c) Demuestre que la energía contenida dentro del primer cero de $|X(f)|$ es el 90,3% de la energía total de la señal

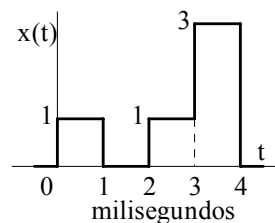


Fig. 1.59.

- 1.26. La señal $x(t) = \exp(-t)u(t)$ se aplica al circuito RC de la Fig. 1.60.

Demuestre que la transformada de Fourier de la salida es

$$Y(f) = \frac{j2\pi f}{(1 + j2\pi f)^2}$$

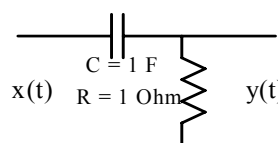


Fig. 1.60.

- 1.27. La misma entrada del Problema 1.26 se aplica al circuito RL de la Fig. 1.61.

Demuestre que

$$Y(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi f)^2}$$

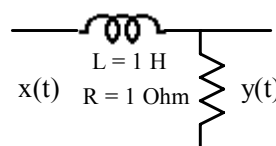


Fig. 1.61.

- 1.28. Demuestre que las transformadas de Fourier $X(f)$ de las señales $x(t)$ siguientes son las dadas.

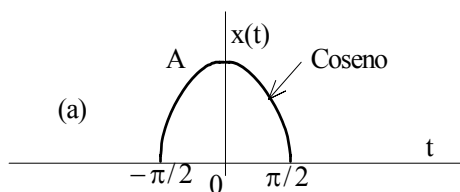


Fig. 1.62.

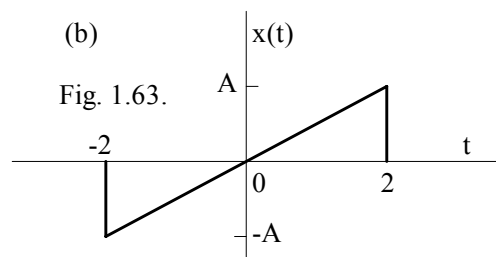
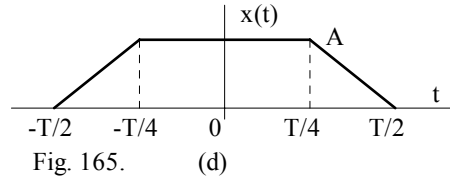
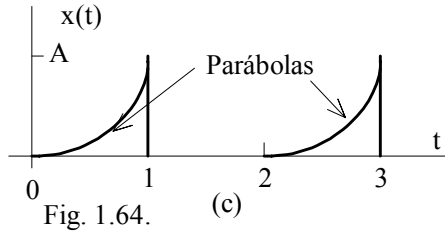


Fig. 1.63.

$$X(f) = \frac{A\pi}{2} \left[\text{sinc}\left(\pi f + \frac{1}{2}\right) + \text{sinc}\left(\pi f - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$X(f) = jA \left[\frac{\cos(4\pi f)}{\pi f} - \frac{\sin(4\pi f)}{4\pi^2 f^2} \right]$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES



$$X(f) = \frac{A \cos(2\pi f)}{j2(\pi f)^3} \exp(-j4\pi f) \cdot X_1(f)$$

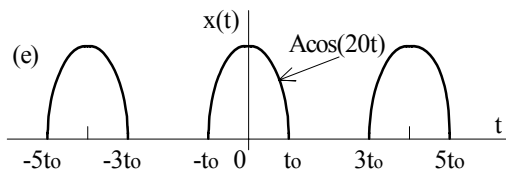
donde $X_1(f) = \left[(1 + j\pi f)^2 - (\pi f)^2 - \exp(j2\pi f) \right]$

Sugerencia: Expresé $x(t)$ en la forma

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t - t_0)$$

$$X(f) = \frac{AT}{4} \left[4 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{2/T}\right) - \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{4/T}\right) \right]$$

Expresé $x(t)$ como una diferencia de triángulos



$$X(f) = \frac{10A \cos\left(\frac{\pi^2 f}{20}\right)}{100 - \pi^2 f^2} \left[1 + 2 \cos\left(\frac{\pi^2 f}{5}\right) \right]$$

Sugerencia: Expresé $x(t)$ en la forma

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t + t_0) + x_1(t - t_0)$$

1.29. Sea $x(t) = 10 \exp(-|t|)$. Calcule el ancho de banda B dentro del cual está contenido el 80 % de la energía de la señal. [Respuesta: $B = 0,15056 \text{ Hz}$].

1.30. La señal $x(t) = t \exp(-Kt) u(t)$ se pasa por un filtro pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda B. Calcule el ancho de banda B del filtro a fin de que la energía de salida del filtro sea el 80% de la energía a la entrada. Expresar B en función de K.

[Respuesta: $B = 0,15056K \text{ Hz}$]

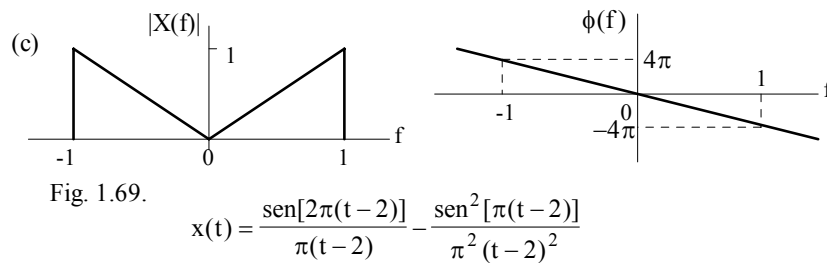
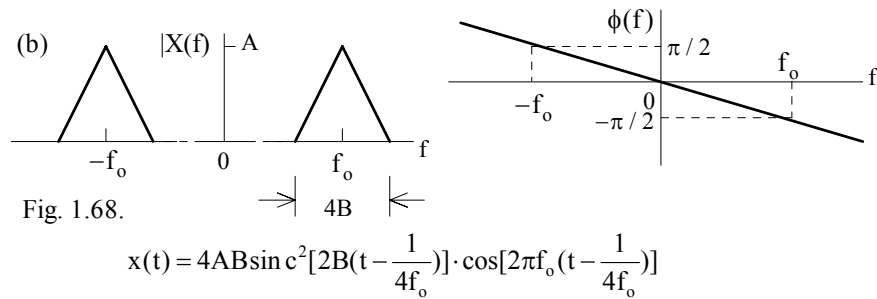
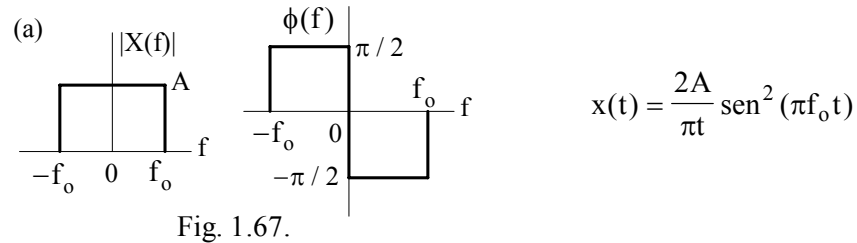
1.31. Sea $x(t) = \operatorname{sinc}^2(10t)$. Demuestre que:

$$(a) \text{ Su espectro de energía es } G_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{100} \left[1 - \frac{|f|}{5} + \frac{f^2}{100} \right] & \text{para } |f| \leq 10 \\ 0 & \text{para } 10 < |f| \end{cases}$$

(b) Su energía total es $E_x = \frac{1}{15} \text{ joules}$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

- 1.32. En las figuras siguientes verifique la correspondencia $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, es decir, dada $x(t)$ determine $X(f)$, y viceversa

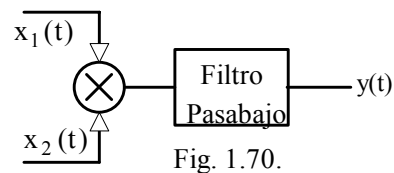


- 1.33. Sea el sistema de la Fig. 1.70. El filtro pasabajo tiene ganancia unitaria y un ancho de banda de 50 Hz.

$$x_1(t) = \exp(-0,01t) \cdot \cos(2\pi \times 10^6 t) \cdot u(t)$$

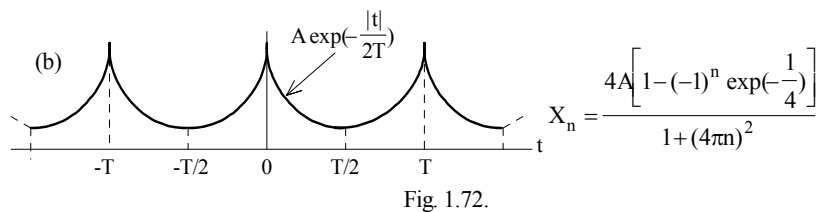
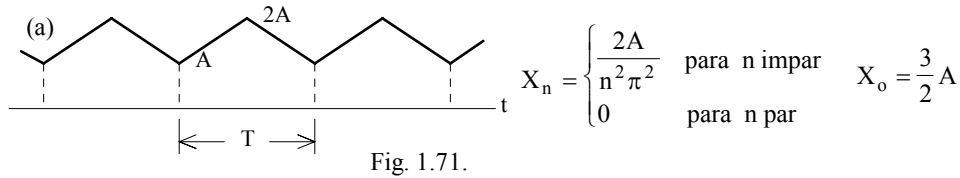
$$x_2(t) = 10 \cos(2\pi \times 10^6 t)$$

Demuestre que $y(t) \approx 5 \exp(-0,01t) \cdot u(t)$



I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

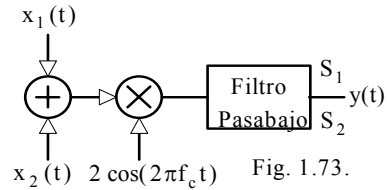
- 1.34. Mediante la transformada de Fourier de la señal generatriz, demuestre que los coeficientes de Fourier X_n de la siguientes señales periódicas son los correspondientes dados.



- 1.35. Sea el sistema de la Fig. 1.73, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales aleatorias.

$$x_1(t) \Rightarrow S_{x_1}(f) = 10^{-3} \left[\Pi\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) \right]$$

$$x_2(t) \Rightarrow S_{x_2}(f) = 10^{-4} \left[\Lambda\left(\frac{f+f_c}{B}\right) + \Lambda\left(\frac{f-f_c}{B}\right) \right]$$



$B = 5 \text{ kHz}$; $f_c = 100 \text{ kHz}$. El filtro es pasabaja de ganancia de potencia 2.

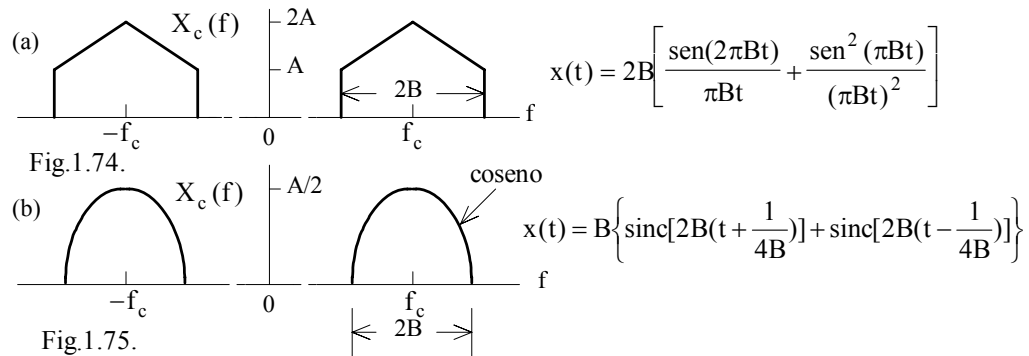
En la salida calcule la relación S_1 / S_2 , donde S_1 es la potencia a la salida debida a $x_1(t)$, mientras que S_2 es la potencia a la salida debida a $x_2(t)$.

Demuestre que $S_1 = 40 \text{ W}$, $S_2 = 2 \text{ W}$; $\frac{S_1}{S_2} = 20 = 13,01 \text{ dB}$

- 1.36. En las figuras siguientes se muestra el espectro de señales moduladas de la forma $x_c(t) = x(t)A \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X_c(f)$. Verificar las siguientes relaciones:

- Dada $X_c(f)$ en forma gráfica, determinar $x(t)$
- Dada $x(t)$, determinar $X_c(f)$ cuya forma gráfica se da.

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES



- 1.37. Considere la función $z(t) = x(t) + y(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son ortogonales para todo t , es decir, $\langle x(t) \cdot y(t) \rangle = 0$. Demuestre que

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \quad y \quad \langle z^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle + \langle y^2(t) \rangle$$

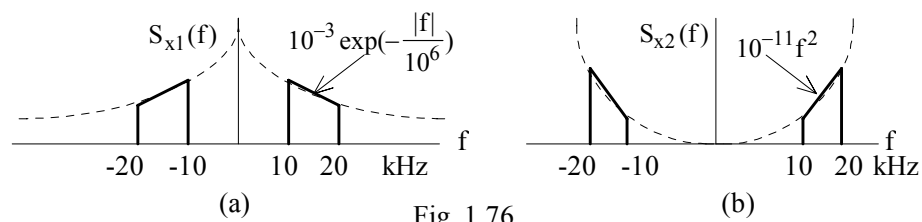
En este caso se dice que las señales son incoherentes, teniéndose entonces superposición de funciones de correlación así como superposición de energía y de potencia.

- 1.38. (a) Sea $x(t) \Rightarrow S_x(f) = 10^{-9} \left[\Lambda\left(\frac{f+10^4}{10^3}\right) + \Lambda\left(\frac{f-10^4}{10^3}\right) \right] \text{ W / Hz}$

Sea $x_c(t) = 4x(t) \cos(2\pi \times 10^4 t) \Rightarrow S_{xc}(f)$, y $z(t)$ una señal cuya densidad espectral de potencia es $S_z(f) = S_{xc}(f) \Pi\left(\frac{f}{2 \times 10^3}\right) \text{ W / Hz}$.

Demuestre que la potencia promedio de $z(t)$ es $\langle z^2(t) \rangle = 8 \mu\text{W}$

- (b) Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales aleatorias cuyas densidades espectrales de potencia se muestran en la Fig. 1.76.



Demuestre que sus respectivas potencias promedio son

$$\langle x_1^2(t) \rangle = 19,7 \text{ W} \quad y \quad \langle x_2^2(t) \rangle = 46,67 \text{ W}$$

- (c) Determine las correspondientes funciones de autocorrelación de los espectros de la parte (b), y mediante la Propiedad 1 de la Función de Autocorrelación, verifique que las potencias respectivas son iguales a las obtenidas en la parte (b).

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

- 1.39. A la entrada de un filtro pasabajo, de ganancia 2 y ancho de banda de 5 kHz, se aplica una señal $x(t)$ cuya función de autocorrelación es $R_x(\tau) = 10\text{sinc}^2(10^4 \tau)$.

Demuestre que a la salida del filtro

$$R_y(\tau) = 20\text{sinc}(10^4 \tau) + 10\text{sinc}^2(5 \times 10^3 \tau) \quad \text{y} \quad \langle y^2(t) \rangle = 30 \text{ W}$$

- 1.40. A la entrada del detector coherente, Fig. 1.77, se aplica una señal $x(t)$ cuya función de autocorrelación es

$$R_x(\tau) = 20\text{sinc}^2(5 \times 10^3 \tau) \cos(2\pi \times 10^5 \tau).$$

- (a) Dibuje la forma de la densidad espectral de potencia a la entrada y salida del filtro.
(b) Demuestre que la potencia a la salida del filtro es de 20 W.

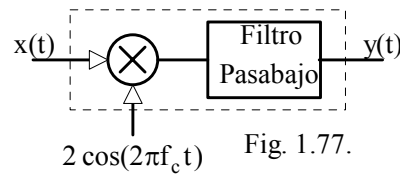


Fig. 1.77.

- 1.41. A la entrada del filtro RL de la Fig. 1.78, se aplica ruido blanco cuya densidad espectral es $\eta/2$.

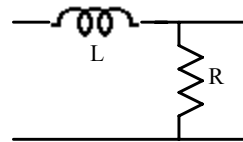


Fig. 1.78.

Calcule la función de autocorrelación, la densidad espectral de potencia y la potencia a la salida del filtro.

- 1.42. Determine la densidad espectral de potencia de la señal compleja $x(t) = A \exp(j2\pi f_0 t)$ utilizando el Teorema de Wiener-Kintchine.

- 1.43. Demuestre que si $x(t) \Rightarrow S_x(f)$, entonces,

$$y(t) = x(t) - x(t - T) \Rightarrow S_y(f) = 4S_x(f) \sin^2(\pi T f)$$

- 1.44. Demuestre que:

- (a) Si $x(t)$ tiene una función de autocorrelación $R_x(\tau) = \frac{A^2}{4} [1 + \Lambda(\frac{\tau}{T_b})]$, donde $T_b = \frac{1}{f_b}$,

$$\text{entonces} \quad y(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_y(f)$$

$$\text{donde,} \quad S_y(f) = \frac{A^2}{16} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A^2}{16f_b} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_b}\right) \right]$$

En el Capítulo III demostraremos que $x(t)$ es una secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud A, y que $y(t)$ es una señal digital ASK

- (b) Si $x(t)$ tiene una función de autocorrelación $R_x(\tau) = A^2 \Lambda(\frac{\tau}{T_b})$, entonces,

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_y(f) = \frac{A^2}{4f_b} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_b}\right) \right]$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

- 1.45. En el Ejemplo 1.32 se determinó la función de autocorrelación de una señal periódica rectangular. Demuestre que la densidad espectral de potencia correspondiente es

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} \left[\delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} \delta(f - nf_0) \right] \quad n \text{ impar}$$

donde $T = 1/f_0$, es el período de la señal periódica rectangular.

- 1.46. Se tiene una señal $x(t)$ cuya función de autocorrelación es $R_x(\tau) = \exp(-\frac{|\tau|}{a})$. Se tiene también una señal $y(t)$ cuya densidad espectral de potencia es $S_y(f) = \frac{S_x(f)}{1 + (2\pi bf)^2}$, donde $S_x(f)$ es la densidad espectral de potencia de $x(t)$.

Demuestre que la función de autocorrelación de $y(t)$ y su correspondiente potencia son

$$R_y(\tau) = \frac{a}{a^2 + b^2} \left[a \exp(-\frac{|\tau|}{a}) - b \exp(-\frac{|\tau|}{b}) \right]$$

$$y \quad \langle y^2(t) \rangle = R_y(0) = \frac{a}{a + b}$$

I. REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SEÑALES

CAPÍTULO II

REPRESENTACIÓN ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo I se desarrollaron las técnicas básicas para la representación espectro-temporal de señales y en el presente capítulo se aplicarán esas mismas técnicas para la representación espectro-temporal de sistemas.

Aunque las técnicas matemáticas empleadas sean las mismas en la representación espectro-temporal de señales y sistemas, hay que tener en cuenta la diferencia entre lo que es “señal” y lo que es “sistema”. Las señales, como su nombre lo indica, son magnitudes eléctricas (corrientes y voltajes) y sobre la mayor parte de ellas podemos ejercer algún control, con excepción de las señales aleatorias que estudiaremos en el Capítulo III. Pero los sistemas son completamente diferentes. Un sistema es un dispositivo físico (filtros, moduladores, etc.) que podemos construir y ejercer algún control sobre él, pero un “canal” (de microondas, por ejemplo) también es un sistema sobre el cual la mayoría de las veces no podemos ejercer ningún control. Sin embargo, como veremos en el presente capítulo, un sistema puede también ser caracterizado en los dominios $\text{Tiempo} \Leftrightarrow \text{Frecuencia}$ en la misma forma como lo hicimos con las señales en el Capítulo I.

En este capítulo presentamos entonces un breve estudio de los sistemas lineales y su caracterización espectro-temporal, y con la definición de la Respuesta Impulsional y de la Función de Transferencia podemos estudiar los efectos de la transmisión de señales a través de filtros y canales ideales y reales. Haremos también una pequeña introducción al estudio del ruido y su influencia en los sistemas de comunicación.

2.2. CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS

2.2.1. Concepto de Sistema

Consideremos el diagrama de bloques de la Fig. 2.1, que denominaremos, en general, “sistema”.

La cantidad $x(t)$ representa la “**entrada**” o “**excitación**” del sistema, mientras que la cantidad $y(t)$ representa la correspondiente “**salida**” o “**respuesta**”.

Este bloque representa cualquiera operación o procesamiento de una señal en una aplicación dada; por ejemplo, un sistema de comunicaciones.

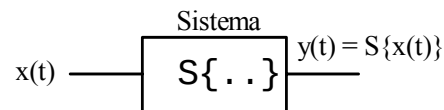


Fig. 2.1. Diagrama de Bloques de un Sistema.

El caso más sencillo es el del paso de una señal por un filtro: el filtro efectúa algún tipo de operación sobre la entrada obteniéndose una salida o respuesta. Por consiguiente, un sistema actúa como un operador o transformador sobre una señal y como resultado produce una salida. Este operador establece entonces una regla de correspondencia entre $y(t)$ y $x(t)$. Contrario a lo que a primera vista parece, es el sistema el que “actúa” sobre la señal y no lo contrario.

J. Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Sin preocuparnos por saber qué es lo que hay dentro del bloque, la operación que el sistema efectúa sobre la entrada $x(t)$ se puede representar mediante la transformación funcional

$$y(t) = \mathcal{D}\{x(t)\} \quad (2.1)$$

donde $\mathcal{D}\{\cdot\}$ es un operador que actúa sobre $x(t)$. Este operador será real si una entrada real $x(t)$ resulta en una salida real $y(t)$. En la mayoría de las aplicaciones en comunicaciones $x(t)$ e $y(t)$ son reales y representan voltajes o corrientes, con su correspondiente descripción en el dominio de la frecuencia. Vamos a demostrar que el operador $\mathcal{D}\{\cdot\}$ puede también representarse tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia y desarrollaremos las técnicas básicas necesarias para pasar de un dominio a otro dominio.

2.2.2. Clasificación de Sistemas

Basados en las propiedades de la relación funcional (2.1), los sistemas se pueden clasificar en “**sistemas lineales**” y “**sistemas no lineales**”.

Se dice que un sistema es lineal si él cumple con el “**principio de la superposición**”. En efecto, sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos entradas arbitrarias con $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sus correspondientes salidas. Sean también a_1 y a_2 dos constantes arbitrarias que pueden ser complejas. El operador $\mathcal{D}\{\cdot\}$ será lineal si y solamente si

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} &= a_1 \mathcal{D}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{D}\{x_2(t)\} \\ &= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

La respuesta de un sistema lineal a una suma de excitaciones es igual a la suma de las respuestas individuales de cada excitación actuando por separado. Este es “el principio de la superposición”. Este principio implica, por ejemplo, que si se dobla la entrada, la respuesta sale al doble también. Si hacemos $x_1(t) = x_2(t)$ y $a_1 = -a_2$, vemos que la linealidad implica también que cero entrada produce cero salida. Por lo tanto, la linealidad significa algo más que una línea recta: esta línea recta debe pasar también por el origen.

Evidentemente, un sistema en el cual el principio de superposición no es aplicable será un sistema no lineal. En este texto se estudiará solamente sistemas lineales, con algunas excepciones, como veremos en su oportunidad.

♣ Ejemplo 2.1

Determinar si el sistema definido por $y(t) = \mathcal{D}\{x(t)\} = x^2(t)$ es lineal.

$$\text{Sea } x(t) = a_1 x_1(t); \quad \mathcal{D}\{a_1 x_1(t)\} = a_1^2 x_1^2(t) = a_1^2 y_1(t)$$

pero si $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} &= a_1^2 x_1^2(t) + 2a_1 a_2 x_1(t)x_2(t) + a_2^2 x_2^2(t) \\ &= a_1^2 y_1(t) + a_2^2 y_2(t) + 2a_1 a_2 x_1(t)x_2(t) \neq a_1^2 y_1(t) + a_2^2 y_2(t) \end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema no es lineal.

♣

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.2.3. Caracterización de Sistemas Lineales en el Dominio del Tiempo

Respuesta Impulsional

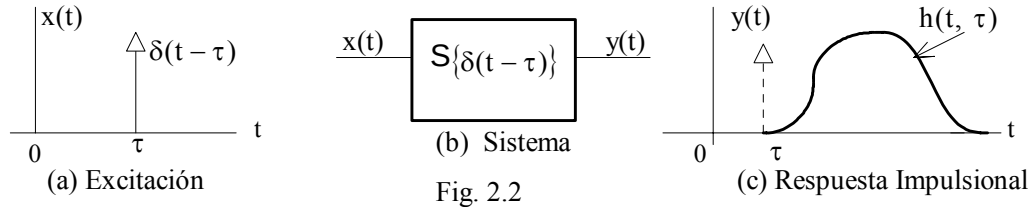
Para conocer o caracterizar un sistema lineal se puede aplicar a su entrada un cierto tipo de señales de prueba y observar su salida. Las señales de prueba más comunes son el impulso unitario, el escalón unitario y las señales sinusoidales. La respuesta del sistema a una señal de prueba es una descripción característica o un modelo matemático del mismo.

La caracterización más utilizada en el análisis de sistemas es aquella cuando la entrada es un impulso unitario Delta Dirac aplicado en un instante $t = \tau$ cualquiera. La excitación mediante un impulso unitario equivale a aplicar a la entrada del sistema un número infinito de frecuencias de la misma amplitud, y la salida del sistema será la respuesta a todas y cada una de las infinitas frecuencias presentes en la entrada. En este caso la salida se denomina “**respuesta impulsional**”, “**respuesta al impulso**” o “**respuesta impulsiva**” del sistema” y se representa por $h(t, \tau)$. Por lo tanto, en un sistema lineal caracterizado por la transformación $\mathcal{S}\{\cdot\}$ la respuesta impulsional es, de (2.1),

$$h(t, \tau) = \mathcal{S}\{\delta(t - \tau)\} \quad (2.3)$$

La respuesta impulsional $h(t, \tau)$ es, en general, una función de t y τ .

Esta situación se representa en la Fig. 2.2.



La respuesta del sistema para cualquiera señal arbitraria $x(t)$ se puede expresar en función de la respuesta impulsional. En efecto, consideremos la propiedad de muestreo del impulso unitario,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.4)$$

La expresión (2.4) se puede considerar como una representación de $x(t)$ en términos de un continuo de impulsos unitarios $\delta(t - \tau)$ de área $x(\tau)$, como se muestra en la Fig. 2.3.

La respuesta del sistema lineal a una entrada arbitraria $x(t)$ dada por (2.4) será

$$y(t) = \mathcal{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\}$$

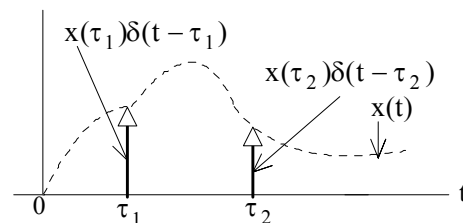


Fig. 2.3. Aproximación de la Excitación $x(t)$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

pero, de (2.3), $\delta(t - \tau) = h(t, \tau)$, de donde

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau \quad (2.5)$$

Esta es la llamada “**Integral de Superposición**”, la cual es válida para cualquier sistema lineal. En (2.4), el integrando $x(\tau)\delta(t - \tau)$ se puede considerar como un impulso que ocurre en el instante $t = \tau$ y cuya área es proporcional a $x(\tau)$. Asimismo, la integral de superposición (2.5) puede considerarse como la superposición de las respuestas de un número infinito de impulsos donde $x(\tau)h(t, \tau)$ es la respuesta a un impulso $x(\tau)\delta(t - \tau)$.

Estrictamente hablando, ni la expresión (2.4) ni la (2.5) son válidas en los puntos donde $x(t)$ es discontinua. Sin embargo, las dos expresiones se aplican a ambos lados de cualquiera discontinuidad. El hecho de que (2.4) y (2.5) no sean válidas en los puntos de discontinuidad, en general no tiene mucha importancia desde el punto de vista práctico. En particular, a menudo sucede que $y(t)$ es continuo a pesar de que $x(t)$ no lo sea, como es el caso de los filtros reales en los cuales una entrada discreta produce una salida continua. En este caso la expresión (2.5) es válida aún en los puntos de discontinuidad de $x(t)$.

Sistemas Lineales Invariantes y Variantes en el Tiempo

Se dice que un sistema lineal es invariante en el tiempo si un desplazamiento en el tiempo de la entrada resulta en un desplazamiento idéntico de la salida sin que cambie la forma de onda o perfil de la señal de salida. Esto se puede enunciar en la forma siguiente.

Un sistema lineal es invariante en el tiempo si para cualquier desplazamiento τ se verifica que $\delta(t - \tau) = h(t - \tau)$, y como consecuencia, para cualesquiera señal $x(t)$ y desplazamiento τ , $\delta\{x(t - \tau)\} = y(t - \tau)$. Por consiguiente, en un “**Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT)**” la respuesta impulsional dependerá únicamente de la diferencia $(t - \tau)$, es decir,

$$h(t, \tau) = h(t - \tau) \quad \text{para todo } \tau \text{ en un SLIT} \quad (2.6)$$

La respuesta impulsional de un SLIT simplemente experimenta desplazamientos en el eje del tiempo que no afectan en nada su perfil.

De (2.5) y (2.6), la respuesta de un SLIT para cualquiera excitación $x(t)$ será entonces

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.7)$$

Estas integrales son las conocidas “**Integrales de Convolución**”.

La respuesta de un SLIT es entonces el producto de convolución de la excitación con la respuesta impulsional del sistema. El producto de convolución generalmente se denota en la forma

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (2.8)$$

puesto que la convolución es conmutativa. Más adelante volveremos sobre este tema.

Un sistema lineal variante en el tiempo será aquel cuya respuesta impulsional dependerá de τ y de t , y no de la diferencia $(t - \tau)$. Esto quiere decir que el perfil de $h(t, \tau_1)$ será diferente del

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

perfil de $h(t, \tau_2)$; en este caso la respuesta $y(t)$ vendrá dada por la expresión (2.5). Nótese que el producto de convolución (2.7) o (2.8) se aplica sólo y solamente a sistemas lineales invariantes en el tiempo.

♣ Ejemplo 2.2. Respuesta al Escalón Unitario de un SLIT

Sea $h(t)$ la respuesta impulsional de un SLIT y sea $y_u(t)$ su respuesta al escalón unitario $u(t)$.

$$\text{De (2.7), } y_u(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2.9)$$

$$y_u(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau)d\tau. \text{ Con el cambio de variables } t' = t - \tau, \text{ la integral queda}$$

$$y_u(t) = -\int_t^{-\infty} h(t')dt'. \text{ De donde,}$$

$$y_u(t) = \int_{-\infty}^t h(t')dt' \quad (2.10)$$

La respuesta de un SLIT al escalón unitario es la integral de la respuesta impulsional del SLIT.

La respuesta al escalón unitario se emplea mucho en el análisis de sistemas lineales donde se utiliza la Transformada de Laplace, por una parte por el hecho de que es muy fácil simular en forma experimental esa respuesta y por otra parte, porque es sobre $y_u(t)$ que se evalúan los resultados de un servosistema desde el punto de vista del régimen transitorio.

El desarrollo anterior permite determinar la respuesta impulsional de un SLIT si se conoce su respuesta al escalón unitario. En efecto, tomando la derivada de la expresión (2.9),

$$\frac{d}{dt} y_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} u(t - \tau) \right] h(\tau)d\tau; \text{ pero como } \frac{d}{dt} u(t - \tau) = \delta(t - \tau),$$

$$\frac{d}{dt} y_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)h(\tau)d\tau; \text{ y de la propiedad de muestreo del impulso unitario,}$$

$$h(t) = \frac{d}{dt} y_u(t) \quad (2.11)$$

La respuesta impulsional de un SLIT es la derivada de la respuesta al escalón unitario del SLIT.

Conocida la respuesta al escalón unitario de un SLIT, es posible obtener, a partir de ella, la respuesta $y(t)$ del sistema para cualquiera excitación $x(t)$. En efecto, la salida $y(t)$ es, de (2.8) y (2.11),

$$y(t) * h(t) = x(t) * \frac{d}{dt} y_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{d}{dt} y_u(t - \tau)d\tau$$

$$\text{de donde, } y(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y_u(t - \tau)d\tau \right] = \frac{d}{dt} [x(t) * y_u(t)] \quad (2.12)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Esta expresión nos permite determinar también la respuesta $y(t)$ de un SLIT para cualquiera excitación $x(t)$ a partir de la respuesta al escalón unitario, pero su resolución es más laboriosa que la dada por (2.7). Veamos un ejemplo muy sencillo.

Sea $x(t) = \exp(-t)u(t)$ y supongamos que $h(t) = \exp(-t)u(t)$. De (2.10) la respuesta al escalón unitario es $y_u(t) = [1 - \exp(-t)]u(t)$. La respuesta $y(t)$ del SLIT se puede determinar entonces mediante las integrales

$$\text{De (2.7), } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau)u(\tau) \cdot \exp[-(t-\tau)]u(t-\tau)d\tau = t \exp(-t)u(t)$$

$$\text{De (2.12), } y(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau)u(\tau) \cdot [1 - \exp[-(t-\tau)]]u(t-\tau)d\tau \right] = t \exp(-t)u(t)$$

El lector puede verificar que la resolución de la segunda expresión es mucho más laboriosa que la de la primera.

♣

♣ Ejemplo 2.3

Vamos a verificar si el sistema representado por $y(t) = \text{sen}[x(t)]$ es variante o invariante en el tiempo. Veamos también si el sistema es lineal o no lineal.

$$\text{Sea } x_1(t) \text{ la entrada; la correspondiente salida será entonces } y_1(t) = \text{sen}[x_1(t)] \quad (\text{A})$$

$$\text{Sea una segunda entrada } x_2(t) \text{ tal que } x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad (\text{B})$$

que representa a $x_1(t)$ desplazada en un tiempo t_0 . La correspondiente salida será

$$y_2(t) = \text{sen}[x_2(t)] = \text{sen}[x_1(t - t_0)] \quad (\text{C})$$

En forma similar, de (A)

$$y_1(t - t_0) = \text{sen}[x_1(t - t_0)] \quad (\text{D})$$

Comparando (C) con (D), vemos que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$, lo que significa que el sistema es invariante en el tiempo. La no linealidad es directa, pues

$$\text{sen}[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] \neq a_1 \text{sen}[x_1(t)] + a_2 \text{sen}[x_2(t)]$$

El sistema es no lineal invariante en el tiempo.

♣

♣ Ejemplo 2.4

Establecer las características del sistema de la Fig. 2.4. El interruptor I está cerrado únicamente en el intervalo $|t| \leq \frac{1}{2}$.

Prueba de la linealidad:

$$\text{Sea } x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$\text{para } |t| \leq \frac{1}{2}$$

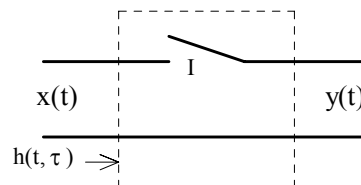


Fig. 2.4

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$y(t) = \mathcal{L}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}$$

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t), \quad \text{Luego el sistema es lineal.}$$

Respuesta Impulsional

$$\text{Para } x(t) = \delta(t - \tau) \text{ se tiene que } y(t) = h(t, \tau)$$

$$\text{entonces, } h(t, \tau) = \begin{cases} \delta(t - \tau) & \text{para } |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } |\tau| > \frac{1}{2} \end{cases} = \Pi(\tau) \delta(t - \tau)$$

El sistema es variante en el tiempo, pues su respuesta impulsional depende de t y τ , y no de la diferencia $(t - \tau)$. La respuesta $y(t)$ será entonces

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \Pi(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \Pi(t)$$

♣

♣ Ejemplo 2.5

Un sistema tiene una respuesta impulsional de la forma $h(t) = 5[\delta(t) - \exp(-5t)u(t)]$ y es excitado por un escalón retardado de la forma $x(t) = 2u(t - 1)$. Vamos a determinar la respuesta $y(t)$ del sistema.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 5[\delta(t - \tau) - \exp[-5(t - \tau)]u(t - \tau)] 2u(\tau - 1) d\tau$$

$$y(t) = 10 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) u(\tau - 1) d\tau - 10 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-5(t - \tau)] u(t - \tau) u(\tau - 1) d\tau$$

$$\text{pero } u(t - \tau) u(\tau - 1) = \begin{cases} 1 & \text{para } 1 \leq \tau \leq t; \quad 1 \leq t \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\text{de donde } y(t) = 10u(t - 1) - 10 \int_1^t \exp[-5(t - \tau)] d\tau$$

Como la integral es válida solamente para $1 \leq t$, entonces

$$y(t) = 10u(t - 1) - 2[1 - \exp[-5(t - 1)]]u(t - 1)$$

$$y(t) = [8 + 2 \exp[-5(t - 1)]]u(t - 1)$$

Esta respuesta se representa en la Fig. 2.5.

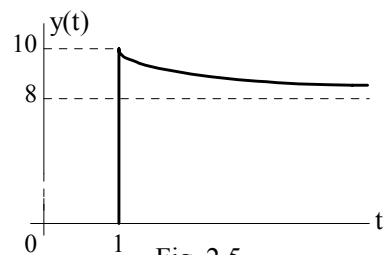


Fig. 2.5.

♣

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Causalidad y Estabilidad en Sistemas Lineales

Causalidad

Se dice que un sistema lineal es causal cuando no produce una respuesta antes de ser aplicada una excitación. Las condiciones necesarias y suficientes para alcanzar la causalidad son:

$$h(t, \tau) = 0 \quad \text{ó} \quad h(t - \tau) = 0 \quad \text{para} \quad t < \tau \quad \text{ó} \quad h(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0 \quad (2.13)$$

Un sistema no causal no cumple con (2.13) y además no puede realizarse físicamente. Los sistemas físicos son siempre causales pues al operar en tiempo real no pueden producir ninguna respuesta a menos de ser excitados. Sin embargo, hay muchas aplicaciones en las cuales la señal a ser procesada se encuentra almacenada; en tales casos el sistema puede no ser causal y aún así puede ser físicamente realizable.

En sistemas causales el límite superior de integración es t , de modo que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t, \tau) d\tau \quad \text{para cualquier sistema lineal causal} \quad (2.14)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad \text{para un SLIT causal} \quad (2.15)$$

Finalmente, se supone que la entrada es cero hasta determinado tiempo, como, por ejemplo, para $t = 0$. En este caso,

$$x(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0, \quad \text{de donde}$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t, \tau) d\tau \quad \text{para cualquier sistema lineal causal} \quad (2.16)$$

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad \text{para un SLIT causal} \quad (2.17)$$

Estabilidad

En cuanto a la estabilidad, se dice que un sistema lineal es estable cuando para una entrada acotada la respuesta también es acotada, es decir,

$$\text{Si} \quad |x(t)| \leq M < \infty \quad \text{y} \quad |y(t)| \leq N < \infty \quad \text{para todo } t, \text{ el sistema es estable} \quad (2.18)$$

M y N son constantes reales y positivas.

Vamos a ver cuáles son las condiciones que el sistema debe cumplir a fin de asegurar la estabilidad. Si la entrada es acotada, entonces

$$|x(t)| \leq M < +\infty \quad \text{para todo } t$$

Consideremos un SLIT. Se ha demostrado [C. R. Wylie, 1960] que si existe una constante K tal que $|q(x)| \leq K < \infty$ y $|z(x)| < \infty$, se cumple que

$$|z(x)| = \left| \int p(x) q(x) dx \right| \leq \int |p(x)| |q(x)| dx \leq \int K |p(x)| dx < \infty \quad \text{para todo } x.$$

Aplicando esta desigualdad a (2.7) y con ayuda de las condiciones (2.18), se obtiene

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} M|h(\tau)|d\tau$$

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = N < \infty \quad \text{para todo } t \quad (2.19)$$

De (2.19) se deduce que para que un SLIT sea estable, la respuesta impulsional $h(t)$ debe cumplir con la condición de integrabilidad absoluta, esto es, la condición suficiente para que haya estabilidad es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad (2.20)$$

de donde $|y(t)| \leq N < +\infty$ para todo t

La respuesta es acotada y por lo tanto el sistema es estable.

Nótese que (2.20) es también condición suficiente para que $h(t)$ tenga una transformada de Fourier, condición que vamos a utilizar en la siguiente sección.

2.2.4. Caracterización de Sistemas Lineales en el Dominio de la Frecuencia

Función de Transferencia

Consideremos un SLIT al cual se le aplica una excitación $x(t)$, donde $x(t) \Leftrightarrow X(f)$.

$$\text{De (2.7), } y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Tomando la transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j2\pi ft)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j2\pi ft)dt \right] d\tau \quad (2.21)$$

Mediante el cambio de variables $t' = t - \tau$, la integral dentro de los corchetes es

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp(-j2\pi ft)dt = \exp(-j2\pi ft) \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \exp(-j2\pi ft')dt' \quad (2.22)$$

La integral de la derecha en (2.22) tiene la forma de una integral de Fourier. Si éste es el caso, $h(t)$ debe satisfacer (2.20). Podemos entonces definir

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft)dt \quad (2.23)$$

La cantidad $H(f)$ se denomina “**Función de Transferencia**”, y es la caracterización de un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) en el dominio de la frecuencia. La función de transferencia $H(f)$ y la respuesta impulsional $h(t)$ forman entonces un par de transformadas de Fourier, es decir, en un SLIT se verifica que

$$h(t) \Leftrightarrow H(f) \quad (2.24)$$

Reemplazando (2.22) con la ayuda de (2.23) en (2.21), se obtiene

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = H(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)d\tau$$

pero la integral es la transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$, de donde

J. Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (2.25)$$

Un sistema lineal invariante en el tiempo puede describirse en el dominio de la frecuencia si se observa que la transformada de Fourier de la respuesta es el producto de la transformada de Fourier $X(f)$ de la excitación por la función de transferencia $H(f)$ del sistema. Las relaciones espectro-temporales correspondientes serán:

$$y(t) = h(t) * x(t) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f) \quad (2.26)$$

donde $h(t) \Leftrightarrow H(f)$; $x(t) \Leftrightarrow X(f)$; $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$

El dual de las expresiones (2.26) se puede establecer en la forma siguiente:

$$\text{Si } x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f) \text{ y } x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f),$$

entonces, por simetría o dualidad, podemos demostrar que

$$x_1(t) x_2(t) \Leftrightarrow X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(v)X_2(f-v)dv \quad (2.27)$$

En general, para señales reales se verifica que

$$x_1(t) * x_2(t) * x_3(t) * \dots \Leftrightarrow X_1(f) X_2(f) X_3(f) \dots \quad (2.28)$$

$$x_1(t) x_2(t) x_3(t) \dots \Leftrightarrow X_1(f) * X_2(f) * X_3(f) * \dots \quad (2.29)$$

En resumen, la convolución de señales en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación de sus espectros en el dominio de la frecuencia; igualmente, la multiplicación de señales en el dominio del tiempo es equivalente a la convolución de sus espectros en el dominio de la frecuencia. La convolución es conmutativa, asociativa y distributiva. A las expresiones (2.26) a (2.29) algunas veces se las denomina “teoremas de la convolución”.

♣ Ejemplo 2.6

Vamos a repetir el Ejemplo 2.5 pero trabajando en el dominio de la frecuencia.

$$\text{Del Ejemplo 2.5, } h(t) = 5[\delta(t) - \exp(-5t)u(t)] \Leftrightarrow H(f) = 5 - \frac{5}{5 + j2\pi f}$$

$$x(t) = 2u(t-1) \Leftrightarrow X(f) = \left[\delta(f) + \frac{2}{j2\pi f} \right] \exp(-j2\pi f)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

$$\text{Entonces, } Y(f) = \left[5\delta(f) + \frac{10}{j2\pi f} - \frac{5\delta(f)}{5 + j2\pi f} - \frac{10}{j2\pi f(5 + j2\pi f)} \right] \exp(-j2\pi f)$$

pero $\frac{5\delta(f)}{5 + j2\pi f} = \delta(f)$ pues $\delta(f) = 0$ para $f \neq 0$

$$Y(f) = \left[4\delta(f) + \frac{10}{j2\pi f} - \frac{10}{j2\pi f(5 + j2\pi f)} \right] \exp(-j2\pi f)$$

Mediante desarrollo en fracciones parciales, el tercer término dentro de los corchetes tiene la forma

$$\frac{10}{j2\pi f(5 + j2\pi f)} = \frac{2}{j2\pi f} - \frac{2}{5 + j2\pi f}; \text{ por lo tanto,}$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$Y(f) = \left[4\delta(f) + \frac{10}{j2\pi f} - \frac{2}{j2\pi f} + \frac{2}{5 + j2\pi f} \right] \exp(-j2\pi f)$$

$$Y(f) = 8 \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f} \right] \exp(-j2\pi f) + 2 \left[\frac{1}{5 + j2\pi f} \right] \exp(-j2\pi f)$$

Tomando las correspondientes antitransformadas

$$y(t) = 8u(t-1) + 2 \exp[-5(t-1)]u(t-1) = [8 + 2 \exp[-5(t-1)]]u(t-1)$$

que es el mismo resultado obtenido en el Ejemplo 2.5.



Criterio de Paley-Wiener

La estabilidad y posibilidad de realización física que tratamos en la sección anterior son nociones independientes; pero si un sistema es a la vez estable y realizable, se dice que él es físicamente realizable.

Para que un sistema sea físicamente realizable, debe cumplir, además de las condiciones (2.13) y (2.20), con el llamado “**Criterio de Paley-Wiener**”, el cual establece que si la integral I es finita, es decir, si

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(f)||}{1 + 4\pi^2 f^2} df < \infty \quad (2.30)$$

entonces (2.30) es condición necesaria y suficiente para que $|H(f)|$ sea el módulo de la función de transferencia de un sistema físicamente realizable. Esto quiere decir que si la integral existe (es menor que ∞), la función de transferencia $H(f)$ tendrá una característica de fase $\beta(f)$ tal que

$h(t) = 0$ para $t < 0$, donde

$$h(t) \Leftrightarrow H(f) = |H(f)| \exp[j\beta(f)] \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df < \infty \quad (2.31)$$

Todo sistema físicamente realizable producirá siempre un desfase (o retardo). Nótese que si $H(f)$ se hace cero en un intervalo de frecuencias dado, no cumplirá con el Criterio de Paley-Wiener y por lo tanto no es físicamente realizable. Otra manera de interpretar el Criterio de Paley-Wiener es que la amplitud de $|H(f)|$ no puede decaer más rápido que el decrecimiento exponencial.

Propiedades de la Función de Transferencia

1. Puesto que $H(f)$ es, en general, una magnitud compleja, se puede expresar en la forma

$$H(f) = |H(f)| \exp[j\beta(f)] \quad (2.32)$$

$|H(f)|$ se denomina “**Respuesta de Amplitud**” o más comúnmente “**Respuesta de Frecuencia del Sistema**”, y $\beta(f)$ es la “**Respuesta de Fase**”. En los sistemas de comunicación $h(t)$ siempre es real, por lo tanto la función de transferencia tendrá simetría hermítica, es decir,

$$|H(f)| = |H(-f)| = |H^*(f)| \quad \text{y} \quad \beta(f) = -\beta(-f)$$

2. La función de transferencia $H(f)$ es el nexo que relaciona, en el dominio de la frecuencia, la entrada y salida de un sistema lineal invariante en el tiempo. En efecto, demostramos que

J. Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$Y(f) = H(f)X(f) \quad (2.25)$$

3. Se puede determinar el efecto de la función de transferencia $H(f)$ sobre las densidades espectrales. En efecto, de la expresión (2.25), podemos escribir

$$|Y(f)| = |H(f)||X(f)| \quad \text{y} \quad \phi_y(f) = \beta(f) + \phi_x(f)$$

Si la señal de entrada $x(t)$ está caracterizada por su densidad espectral de energía $G_x(f)$, entonces la densidad espectral de energía a la salida del sistema será, de (1.87) y (1.88),

$$G_y(f) = |Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2 = |H(f)|^2 G_x(f) \quad (2.33)$$

$$\text{y la energía total de salida,} \quad E_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_x(f) df \quad (2.34)$$

Igualmente, si la entrada $x(t)$ es una señal de potencia con una densidad espectral de potencia $S_x(f)$, entonces la densidad espectral de potencia a la salida es

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \quad (2.35)$$

La potencia promedio de salida será entonces

$$\langle y^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df \quad (2.36)$$

donde $S_x(f)$ viene dada por (1.109).

4. Consideremos ahora la salida de un SLIT cuando la entrada es de la forma

$$x(t) = A \exp(j2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f) = A\delta(f - f_0)$$

$Y(f) = H(f)X(f) = AH(f)\delta(f - f_0)$. La salida $y(t)$ será entonces

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \exp(j2\pi ft) df = A \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\delta(f - f_0) \exp(j2\pi ft) df$$

pero de la propiedad de muestreo del impulso unitario,

$$y(t) = AH(f_0) \exp(j2\pi f_0 t) = H(f_0)x(t) \quad (2.37)$$

$$\text{donde} \quad H(f_0) = |H(f_0)| \exp[j\beta(f_0)] \quad (2.38)$$

La expresión (2.37) significa que un SLIT cuya función de transferencia es $H(f)$, no puede generar nuevas frecuencias: a la salida sólo estarán presentes las frecuencias que había a la entrada; estas componentes de frecuencia pueden estar atenuadas e incluso desaparecer, pero no podrá generarse nuevas frecuencias. En particular, si la entrada es una señal sinusoidal de frecuencia f_0 , la salida será también sinusoidal de la misma frecuencia, pero con una amplitud y fase en general diferentes, como bien lo expresa (2.37).

Recíprocamente, *un sistema que cambie o genere nuevas frecuencias será: o no lineal o variante en el tiempo o ambos, y no poseerá una función de transferencia.*

Nótese también que *cualquier sistema, lineal o no lineal, tendrá siempre una respuesta impulsional, pero solamente los sistemas lineales invariantes en el tiempo poseerán una función de transferencia.*

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

♣ Ejemplo 2.7. Ecuación Diferencial de un SLIT

Un sistema lineal invariante en el tiempo se puede representar mediante una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes que relaciona, en el dominio del tiempo, la excitación $x(t)$ con la respuesta $y(t)$. Por ejemplo, supongamos que un SLIT está representado mediante la ecuación diferencial

$$y(t) + 2RC \frac{d}{dt} y(t) + (RC)^2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) = x(t)$$

Tomando la correspondiente transformada de Fourier,

$$Y(f) + 2RC(j2\pi f)Y(f) + (RC)^2 (j2\pi f)^2 Y(f) = X(f)$$

$$Y(f) [1 + 2RC(j2\pi f) + (RC)^2 (j2\pi f)^2] = X(f)$$

de donde
$$Y(f) = \frac{X(f)}{1 + 2RC(j2\pi f) + (RC)^2 (j2\pi f)^2} = H(f)X(f)$$

Por consiguiente, la función de transferencia del SLIT es

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2RC(j2\pi f) + (RC)^2 (j2\pi f)^2} = \frac{1}{(1 + j2\pi fRC)^2}$$

El lector puede verificar que esta función de transferencia corresponde al circuito mostrado en la Fig. 2.68 del Problema de Aplicación 2.24.

La ecuación diferencial o integrodiferencial que representa a un sistema lineal invariante en el tiempo es otro modelo del sistema y por transformada de Fourier se puede determinar su función de transferencia $H(f)$ y su correspondiente respuesta impulsional $h(t)$.

♣

♣ Ejemplo 2.8. Respuesta de un SLIT a Entradas Periódicas

La entrada a un SLIT es una señal $x_T(t)$ periódica de período T . De (1.105),

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t) \Leftrightarrow X_T(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

El espectro $Y(f)$ de la salida $y(t)$ es

$$Y(f) = f_0 H(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \delta(f - nf_0) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nf_0) X(nf_0) \delta(f - nf_0)$$

Por transformada de Fourier inversa, la salida $y(t)$ es

$$\mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nf_0) X(nf_0) \delta(f - nf_0) \right] \exp(j2\pi f t) df$$

$$y(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nf_0) X(nf_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \exp(j2\pi f t) df$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$y(t) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nf_0) X(nf_0) \exp(j2\pi n f_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(nf_0) X_n \exp(j2\pi n f_0 t)$$

$$\text{Como } H(nf_0) = |H(nf_0)| \exp[j\beta(nf_0)] \quad \text{y} \quad X_n = |X_n| \exp(j\phi_n)$$

$$\text{entonces, } y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(nf_0)| |X_n| \exp\{j[2\pi n f_0 t + \beta(nf_0) + \phi_n]\}$$

Del Teorema de Parseval, la potencia de salida del SLIT será

$$\langle y^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(nf_0)|^2 |X_n|^2$$

Si $H(f)$ existe solamente en cierta gama de frecuencias, por ejemplo, en el intervalo $(-Nf_0, Nf_0)$, la salida $y(t)$ y su correspondiente potencia serán

$$y(t) = \sum_{n=-N}^N H(nf_0) X_n \exp(j2\pi n f_0 t) \quad \text{y} \quad \langle y^2(t) \rangle = \sum_{n=-N}^N |H(nf_0)|^2 |X_n|^2$$

y si además $H(f)$ es constante en ese intervalo, por ejemplo, $H(f) = H_0$ en $|f| \leq Nf_0$, entonces

$$y(t) = H_0 \sum_{n=-N}^N X_n \exp(j2\pi n f_0 t) \quad \text{y} \quad \langle y^2(t) \rangle = |H_0|^2 \sum_{n=-N}^N |X_n|^2$$

Recuérdese que H_0 es, en general, complejo. Obsérvese también que a la salida aparecen solamente las frecuencias de entrada que están contenidas dentro de la banda de paso de $H(f)$.

♣

2.3. LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

2.3.1. Aplicaciones en el Análisis de Señales y Sistemas

La operación matemática denominada “convolución” es una de las principales herramientas analíticas de los ingenieros de telecomunicación. En primer lugar, porque es un buen modelo para entender los procesos físicos que se desarrollan en un sistema lineal; y en segundo lugar, porque ayuda en la comprensión de las relaciones entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. Su importancia deriva también del hecho de proveernos de una poderosa herramienta analítica no sólo en el análisis de señales y sistemas de comunicación, sino también en conexión con las aplicaciones de la Teoría de Circuitos, la Transformada de Laplace y la Transformada Z en otras áreas de la ingeniería eléctrica.

Desde el punto de vista de los sistemas lineales invariantes en el tiempo, la convolución es el nexo entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia, es decir, de (2.26),

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow Y(f) = H(f) X(f)$$

Si se conoce la respuesta impulsional $h(t)$, la integral de convolución permite determinar la respuesta $y(t)$ de un sistema lineal para cualquiera excitación $x(t)$. Nótese que la integral de convolución no exige el conocimiento de $H(f)$ o $X(f)$. Por lo tanto, si se conoce $h(t)$ a partir de datos experimentales o si no es posible expresar $h(t)$ como una función explícita de t , la integral de convolución ofrece un método para determinar $y(t)$. La misma situación ocurre respecto a $x(t)$. En

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

situaciones como éstas, es conveniente interpretar la convolución en forma gráfica; esto lo veremos más adelante.

Como herramienta operacional, la integral de convolución se puede utilizar para determinar la transformada inversa de una función de f cuando esta función se puede escribir como un producto de funciones de f cuyas transformadas inversas son conocidas. Por ejemplo, se desea determinar la transformada de Fourier inversa de $X(f)$, donde $X(f)$ se puede descomponer en la forma

$$X(f) = X_1(f) \cdot X_2(f) \text{ donde se conoce } \mathcal{F}^{-1}\{X_1(f)\} = x_1(t) \text{ y } \mathcal{F}^{-1}\{X_2(f)\} = x_2(t)$$

Por transformada de Fourier inversa y aplicación del teorema de la convolución,

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{X_2(f)\}$$

$$\text{Por lo tanto, } x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df \quad (2.39)$$

En un problema particular, el lector deberá reconocer cuál de las dos formas de operar lo lleva a la respuesta con menor dificultad: si aplicando la integral de convolución o tomando directamente la transformada inversa de $X(f)$. La extensión de este procedimiento para n funciones de f es directa.

La resolución de la integral de convolución es, comúnmente, una operación complicada y muchas veces es preferible operar con las transformadas de Fourier. En los siguientes ejemplos presentamos algunas aplicaciones y métodos para la resolución puramente analítica de la integral de convolución.

♣ Ejemplo 2.9. Convolución de una Señal con Impulsos Unitarios

La convolución de una señal $x(t)$ con un impulso unitario $\delta(t)$, de acuerdo con la propiedad de muestreo del impulso unitario, resulta en la misma señal $x(t)$. En efecto,

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \quad (2.40)$$

En la misma forma, puede demostrarse que:

$$(a) \quad x(t) * \delta(t - T) = x(t - T) \quad (2.41)$$

$$(b) \quad x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2) \quad (2.42)$$

$$(c) \quad \delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \quad (2.43)$$

(d) Sea $x(t)$ una señal de duración finita τ y hagamos el producto de convolución con un tren de impulsos de período T . Entonces, para $T > \tau$,

$$x(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$$

y de las propiedades del Impulso Delta Dirac,

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(t - nT) \quad (2.44a)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Vemos que $x_T(t)$ es una señal periódica de período T donde $x(t)$ es su señal generatriz. Esto es lo que se conoce como “periodización de una señal”.

De (2.28), la transformada de la señal periódica $x_T(t)$ es

$$X_T(f) = X(f) \left[f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \right] = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \delta(f - nf_0) \quad (2.44b)$$

resultado que ya habíamos obtenido por otros métodos, expresión (1.105), que es la transformada de una señal periódica de la forma dada por (2.44a).

$$(e) \text{ Sea el producto } x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) = x_s(t).$$

$$\text{De (2.27), } X_s(f) = X(f) * f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

$$\text{y de (2.41), } X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (2.45)$$

Esta expresión nos dice que si se multiplica una señal $x(t)$ por un tren de impulsos unitarios de período $T_s = 1/f_s$ y amplitud unitaria, el espectro del producto es la repetición periódica del espectro de $x(t)$ en las frecuencias nf_s con un factor de escala f_s . Este resultado es de capital importancia en la Teoría del Muestreo, como veremos en el Capítulo V.

♣

♣ Ejemplo 2.10. Convolución de una Señal con un Impulso Rectangular

En el análisis de señales y sistemas lineales a menudo se presenta el caso de la convolución de una señal con un impulso rectangular. Para generalizar el procedimiento desde un punto vista puramente analítico, consideremos el producto de convolución

$$z(x) = y(x) * B\Pi\left(\frac{x}{2x_0}\right) \quad (2.46)$$

El rectángulo se puede expresar como una suma de escalones unitarios de la forma

$$\Pi\left(\frac{x}{2x_0}\right) = u(x + x_0) - u(x - x_0); \text{ por lo tanto, } z(x) = y(x) * Bu(x + x_0) - y(x) * Bu(x - x_0)$$

$$z(x) = B \int_{-\infty}^{\infty} y(x - \lambda) u(\lambda + x_0) d\lambda - B \int_{-\infty}^{\infty} y(x - \lambda) u(\lambda - x_0) d\lambda$$

$$\text{pero } u(\lambda + x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda < -x_0 \\ 1 & \text{para } -x_0 \leq \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad u(\lambda - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } \lambda < x_0 \\ 1 & \text{para } x_0 \leq \lambda \end{cases}$$

$$\text{de donde } z(x) = B \int_{-x_0}^{\infty} y(x - \lambda) d\lambda - B \int_{x_0}^{\infty} y(x - \lambda) d\lambda \quad (2.47)$$

Esta expresión nos permite determinar el producto de convolución (2.46). El límite superior de las integrales dependerá de la forma de $y(x)$, como veremos en los casos siguientes.

J. Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(a) Sea $y(x) = A \exp(-ax)u(x)$

$$z(x) = AB \int_{-x_0}^{\infty} \exp[-a(x-\lambda)]u(x-\lambda)d\lambda - AB \int_{x_0}^{\infty} \exp[-a(x-\lambda)]u(x-\lambda)d\lambda$$

$$z(x) = AB \exp(-ax) \left[\int_{-x_0}^x \exp(a\lambda)d\lambda - \int_{x_0}^x \exp(a\lambda)d\lambda \right]$$

La primera integral es válida para $-x_0 \leq x \leq x_0$, mientras que la segunda lo es para $x_0 < x$.

Por consiguiente, la expresión anterior se puede escribir en la forma compacta

$$z(x) = AB \exp(-ax) \left\{ \left[\int_{-x_0}^x \exp(a\lambda)d\lambda \right] \Pi\left(\frac{x}{2x_0}\right) - \left[\int_{x_0}^x \exp(a\lambda)d\lambda \right] u(x-x_0) \right\}$$

Resolviendo las integrales,

$$z(x) = \frac{AB}{a} \left\{ [1 - \exp[-a(x+x_0)]] \Pi\left(\frac{x}{2x_0}\right) - [1 - \exp[-a(x-x_0)]] u(x-x_0) \right\}$$

En la Fig. 2.6 se muestra la forma de $z(x)$.

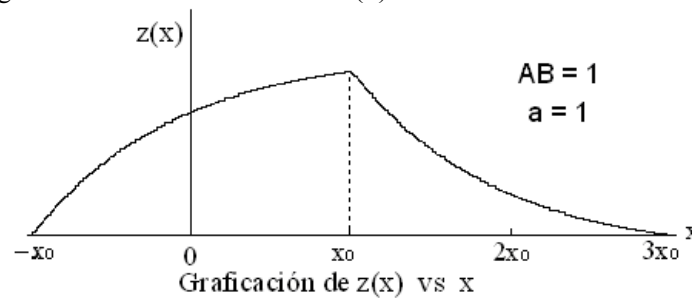


Fig. 2.6

(b) Sea $y(x) = A \text{sinc}(ax)$

$$z(x) = AB \int_{-x_0}^{\infty} \text{sinc}[a(x-\lambda)]d\lambda - AB \int_{x_0}^{\infty} \text{sinc}[a(x-\lambda)]d\lambda$$

$$z(x) = AB \int_{-x_0}^{\infty} \frac{\text{sen}[\pi a(x-\lambda)]}{\pi a(x-\lambda)} d\lambda - AB \int_{x_0}^{\infty} \frac{\text{sen}[\pi a(x-\lambda)]}{\pi a(x-\lambda)} d\lambda$$

Con el cambio de variables $\pi a(x-\lambda) = \lambda'$, las integrales se reducen a

$$z(x) = \frac{AB}{\pi a} \left\{ \int_{-\infty}^{\pi a(x+x_0)} \frac{\text{sen}(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' - \int_{-\infty}^{\pi a(x-x_0)} \frac{\text{sen}(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' \right\}$$

Como $\int_{-\infty}^0 \frac{\text{sen}(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' = \frac{\pi}{2}$, entonces

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$z(x) = \frac{AB}{\pi a} \left\{ \int_0^{\pi a(x+x_0)} \frac{\text{sen}(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' - \int_0^{\pi a(x-x_0)} \frac{\text{sen}(\lambda')}{\lambda'} d\lambda' \right\}$$

Estas integrales definidas se conocen con el nombre de Integral Seno, $\text{Si}(x)$, la cual está definida mediante la integral

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(y)}{y} dy$$

y que se muestra en la Fig. 2.7 para $|x| < \infty$.

La Integral Seno se puede expresar también como una serie de potencias de la forma

$$\text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \dots$$

y tiene las siguientes propiedades:

1. $\text{Si}(x) = -\text{Si}(-x)$; es una función impar de x .
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{Si}(x) = \pm \frac{\pi}{2}$;
3. $\text{Si}(0) = 0$

Como la Integral Seno no puede resolverse en forma analítica, normalmente se encuentra tabulada en la forma $\text{Si}(x)$ vs x . Desarrollando $\text{Si}(x)$ en serie de potencias, ella se puede aproximar tomando un número suficiente de términos, y se presta a ser calculada mediante cálculo numérico.

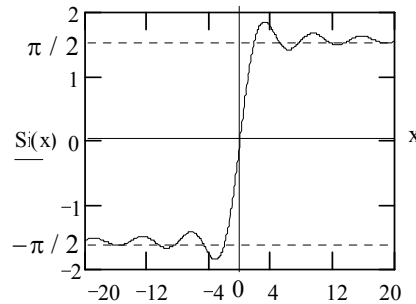


Fig. 2.7. La Integral Seno

Con ayuda de la Integral Seno en el problema que nos ocupa, obtenemos finalmente

$$z(x) = \frac{AB}{\pi a} [\text{Si}\{\pi a(x+x_0)\} - \text{Si}\{\pi a(x-x_0)\}]$$

Una gráfica de esta expresión se muestra en la Fig. 2.26(b) del Ejemplo 2.19.

(c) Sea $y(x) = A\Pi(\frac{x}{2x_1})$ con $x_1 < x_0 < 2x_1$

En este caso se tiene la convolución de dos rectángulos de diferente amplitud y anchura pero centrados en el origen. Entonces

$$y(x) = Au(x+x_1) - Au(x-x_1)$$

$$z(x) = AB \left\{ \int_{-x_0}^{\infty} [u(x+x_1-\lambda) - u(x-x_1-\lambda)] d\lambda - \int_{x_0}^{\infty} [u(x+x_1-\lambda) - u(x-x_1-\lambda)] d\lambda \right\}$$

$$z(x) = AB \left\{ \int_{-x_0}^{\infty} u(x+x_1-\lambda) d\lambda - \int_{-x_0}^{\infty} u(x-x_1-\lambda) d\lambda - \right.$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$\begin{aligned}
 z(x) = AB & \left\{ \left[\int_{-x_0}^{x+x_1} d\lambda \right] u[x + (x_0 + x_1)] - \left[\int_{-x_0}^{x-x_1} d\lambda \right] u[x + (x_0 - x_1)] \right\} - \\
 & \left\{ \left[\int_{x_0}^{x+x_1} d\lambda \right] u[x - (x_0 - x_1)] + \left[\int_{x_0}^{x-x_1} d\lambda \right] u[x - (x_0 + x_1)] \right\}
 \end{aligned}$$

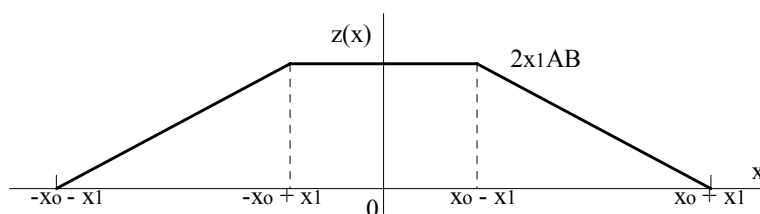
Resolviendo las integrales y agrupando términos,

$$\begin{aligned}
 z(x) = AB & \{ [x + (x_0 + x_1)] u[x + (x_0 + x_1)] - [x + (x_0 - x_1)] u[x + (x_0 - x_1)] - \\
 & - [x - (x_0 - x_1)] u[x - (x_0 - x_1)] + [x - (x_0 + x_1)] u[x - (x_0 + x_1)] \}
 \end{aligned}$$

Vemos que $z(x)$ está formada por la suma de cuatro rampas; tomando en cuenta los dominios de validez de estas rampas, se puede escribir finalmente

$$z(x) = AB \left\{ [x + (x_0 + x_1)] \Pi\left(\frac{x + x_0}{2x_1}\right) + 2x_1 \Pi\left[\frac{x}{2(x_0 - x_1)}\right] - [x - (x_0 + x_1)] \Pi\left(\frac{x - x_0}{2x_1}\right) \right\}$$

$z(x)$ tiene la forma dada en la Fig. 2.8.



Graficación de $z(x)$ vs x

Fig. 2.8.

En estos ejemplos, aparentemente sencillos, se puede ver lo laboriosa que puede ser la manipulación matemática cuando la resolución de la integral de convolución es puramente analítica y las funciones en juego no son continuas en t . Cuando no se requiere valores exactos, la resolución de la integral de convolución se puede efectuar en forma gráfica, que veremos en la próxima sección.



♣ Ejemplo 2.11. Convolución de Señales Periódicas

Consideremos dos señales periódicas $x_{T1}(t)$ y $x_{T2}(t)$ con el mismo período T . La convolución se efectúa dentro de un período T y se define en la forma

$$x_{T1}(t) * x_{T2}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{T1}(\tau) x_{T2}(t - \tau) d\tau \quad (2.48)$$

Reemplazando $x_{T2}(t - \tau)$ por su desarrollo en serie de Fourier,

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$x_{T1}(t) * x_{T2}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{T1}(\tau) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{n2} \exp[j2\pi n f_0(t - \tau)] \right] d\tau$$

Intercambiando los signos de integral y sumatoria

$$x_{T1}(t) * x_{T2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{n2} \exp(j2\pi n f_0 t) \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{T1}(\tau) \exp(-j2\pi n f_0 \tau) d\tau \right]$$

pero la integral dentro de los corchetes es igual a X_{n1} , entonces

$$x_{T1}(t) * x_{T2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{n1} X_{n2} \exp(j2\pi n f_0 t) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{n1} X_{n2} \delta(f - n f_0) \quad (2.49)$$

La expresión (2.49) es una forma del teorema de convolución para señales periódicas.

Como el período T es el mismo para X_{n1} y X_{n2} , entonces se puede escribir

$$X_{n1} X_{n2} = X_n = |X_n| \exp(j\theta_n) \quad \text{donde} \quad |X_n| = |X_{n1}| |X_{n2}| \quad \text{y} \quad \theta_n = \theta_{n1} + \theta_{n2} \quad (2.50)$$

Reemplazando (2.50) en (2.49),

$$x_{T1}(t) * x_{T2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_0 t) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - n f_0) \quad (2.51)$$

La convolución de dos señales periódicas de período T , es también periódica de período T . Nótese que si las señales periódicas son de diferente período, su convolución será cero.

♣

2.3.2. Interpretación Gráfica de la Convolución

La interpretación gráfica de la convolución es de mucha utilidad en el análisis de sistemas así como también en el análisis espectral de señales pues permite visualizar los resultados de muchas relaciones abstractas. Si en un sistema lineal sólo se conoce $x(t)$ y $h(t)$ en forma gráfica, entonces la convolución grafica resulta muy útil. Como ejemplo de esto supongamos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los impulsos rectangular y triangular mostrados en la Fig. 2.9(a). Vamos a determinar gráficamente el producto de convolución $x_1(t) * x_2(t)$.

$$\text{Por definición,} \quad x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \quad (2.52)$$

donde τ es la variable independiente y t el parámetro tiempo. En la Fig. 2.9(b) se muestra $x_1(\tau)$ y $x_2(-\tau)$. Nótese que $x_2(-\tau)$ se obtiene girando $x_2(t)$, con $t = \tau$, alrededor del eje vertical que pasa por el origen.

El término $x_2(t - \tau)$ representa la función $x_2(-\tau)$ desplazada t segundos a lo largo del eje τ ; en la Fig. 2.9(c) se muestra $x_2(t - \tau)$ y $x_1(\tau)$ y el sentido del desplazamiento. El valor de la integral de convolución para un t particular viene dado por la integral (2.52) evaluada en t y representa el área bajo la curva producto de $x_1(\tau)$ y $x_2(t - \tau)$, es decir, de su área de intersección. Por ejemplo, para $t = -t_2$, dicha área es la región sombreada de la Fig. 2.9(d); el valor de $x_1(t) * x_2(t)$ en $t = -t_2$ es igual a esa área sombreada y se ha representado como una amplitud en la Fig. 2.9(f). Lo mismo para $t = t_3$, Fig. 2.9(e).

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Para encontrar los valores del producto de convolución $x_1(t) * x_2(t)$ se selecciona diferentes valores de t , se desplaza la función $x_2(-\tau)$ según esos valores y se calcula el área de intersección correspondiente. Estas áreas representan los valores del producto de convolución en los valores respectivos de t . La gráfica de las áreas de intersección, expresadas como funciones de t , Fig. 2.9(f), representa el producto de convolución $x_1(t) * x_2(t)$.

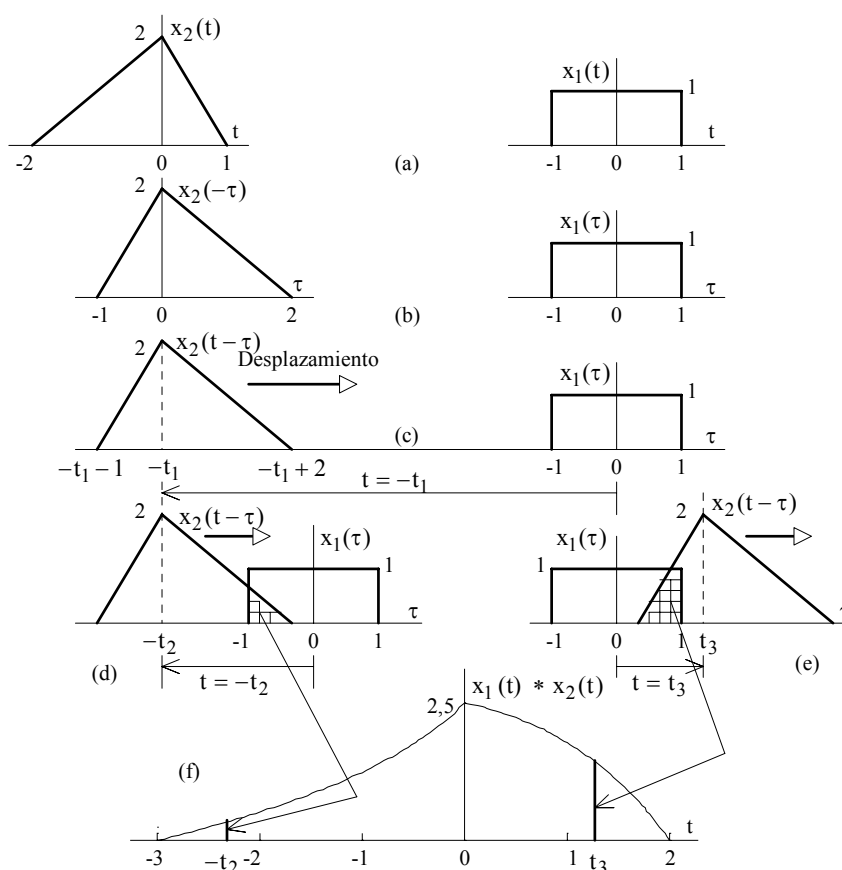


Fig. 2.9. Convolution Gráfica.

La integral de convolución, expresión (2.52), introduce el concepto de “función de ponderación (weighting function)” en la terminología del análisis de sistemas [Brown y Nilsson, 1962]. En efecto, la respuesta de un sistema al impulso unitario se ha denominado también “función de ponderación del sistema” porque multiplica la función de entrada en la integral de convolución. El concepto de ponderación se evidencia cuando la rotación y traslación de $x_2(t)$ es vista sobre una escala temporal (en τ) la cual se caracteriza como “pasado”, “presente” y “futuro”, Fig. 2.10; se supone que $x_2(t)$ es la excitación del sistema.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

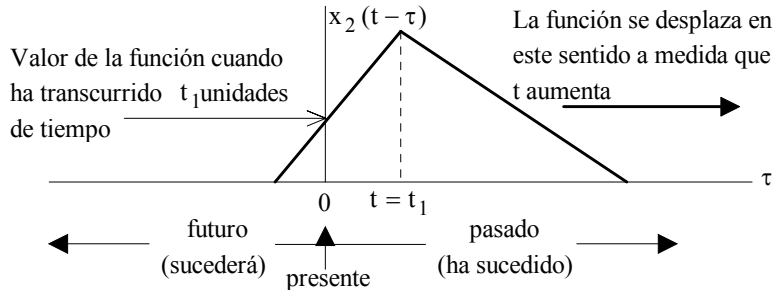


Fig. 2.10. Concepto de pasado, presente y futuro de la excitación $x_2(t)$

En el gráfico de $x_2(t - \tau)$, Fig. 2.10, el eje vertical representa el presente, el semiplano de la mano izquierda el futuro, y el semiplano de la mano derecha el pasado. Con referencia a la Fig. 2.9(d) y (e), y visualizando la multiplicación de $x_1(\tau)$ por $x_2(t - \tau)$, se puede ver que $x_1(\tau)$ “pesa” o pondera la función $x_2(t)$ de acuerdo con valores presentes y pasados. Para la función dada $x_1(\tau)$, los valores pasados de $x_2(t)$ son ponderados menos y menos a medida que pasa el tiempo. Dicho de otra manera, el sistema “recuerda” menos y menos acerca de los valores pasados de la entrada. Usando estas ideas, podríamos decir que una respuesta impulsional $h(t)$ que fuera plana daría igual peso o ponderaría por igual a todos los valores pasados y presentes de la excitación $x(t)$; éste sería un sistema con memoria perfecta. Por otro lado, si la respuesta impulsional fuera un impulso muy angosto, el sistema tendría poca memoria. Por ejemplo, $h(t) = u(t)$ caracterizaría un sistema de memoria perfecta, mientras que $h(t) = \delta(t)$ caracterizaría un sistema de memoria cero.

A la respuesta impulsional $h(t)$ se la ha designado entonces como la función memoria del sistema. Esta “memoria” es el tiempo necesario para que $h(t)$ se estabilice y vuelva prácticamente a cero y es el tiempo durante el cual el sistema “recuerda” las excitaciones a las cuales ha sido sometido. La función memoria indica, pues, hasta donde hay que remontarse en el tiempo para encontrar el momento desde donde una excitación sobrevenida en el pasado influye todavía en el momento considerado (o presente).

Podemos resumir la importancia de la integral de convolución mediante las siguientes observaciones:

- La integral de convolución se puede utilizar para determinar la respuesta de un sistema en situaciones donde la entrada $x(t)$ y la respuesta impulsiva $h(t)$ son conocidas, gráfica o analíticamente, pero no sus respectivas transformadas de Fourier.
- La integral de convolución introduce la posibilidad de aproximar la señal de entrada como una secuencia de impulsos, determinándose la respuesta total por superposición de las respuestas individuales de cada impulso.
- La integral de convolución introduce el concepto de “función de ponderación” o “memoria del sistema”.
- Como herramienta analítica, la integral de convolución proporciona recursos para una resolución alterna de las Integrales de Fourier.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.4. DISTORSIÓN EN SISTEMAS

2.4.1. Transmisión sin Distorsión

Sabiendo que la respuesta impulsional suministra información fundamental acerca del comportamiento general de un sistema, vamos a considerar esa respuesta en el caso de ciertos sistemas lineales ideales. Con el fin de introducir estas idealizaciones, vamos considerar primero el problema de la transmisión sin distorsión.

Sea un sistema lineal invariante en el tiempo en el cual

$$x(t) \Leftrightarrow X(f); \quad h(t) \Leftrightarrow H(f); \quad y(t) \Leftrightarrow Y(f)$$

$$\text{De (2.25) y (2.31),} \quad Y(f) = |H(f)| \exp[j\beta(f)] \cdot X(f) \quad (2.53)$$

$$\text{o también} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| X(f) \exp[j\beta(f)] \exp(-j2\pi f t) df \quad (2.54)$$

Se tiene ahora el problema de determinar las restricciones que existen sobre $|H(f)|$ y $\beta(f)$ para que la señal de salida $y(t)$ sea idéntica a la señal de entrada $x(t)$. Es evidente que si $H(f) = 1$, las dos formas de onda serían idénticas; sin embargo, ésta no es una condición necesaria. En cualquier sistema físico la señal siempre experimenta una cierta atenuación; si la atenuación es constante para todas las frecuencias, ella no representa ningún problema pues la amplitud original puede restaurarse mediante amplificación. Por otra parte, la transmisión no puede ser instantánea y la señal de salida tendrá un cierto retardo en relación con la señal de entrada. Se dice entonces que hay transmisión sin distorsión cuando la señal de salida está definida mediante la expresión

$$y(t) = h_0 x(t - t_0) \quad (2.55)$$

donde h_0 es la “**atenuación (o ganancia)**” y t_0 el “**retardo de transmisión**” de la señal a través del sistema.

Por transformada de Fourier, (2.55) queda en la forma

$$Y(f) = h_0 \exp(-j2\pi t_0 f) \cdot X(f) \quad (2.56)$$

Comparando (2.56) con (2.53), se puede decir que la condición necesaria y suficiente para que se efectúe la transmisión sin distorsión se verifica cuando

$$H(f) = h_0 \exp(-j2\pi t_0 f) \Leftrightarrow h(t) = h_0 \delta(t - t_0) \quad (2.57)$$

$$\text{En consecuencia,} \quad |H(f)| = h_0 \quad \text{y} \quad \beta(f) = -2\pi t_0 f \quad (2.58)$$

Si $X(f)$ es de banda limitada (pasabajo o pasabanda), es suficiente que estas condiciones se cumplan dentro de su intervalo de existencia.

Una expresión más general para la fase en (2.58) es

$$\beta(f) = -2\pi t_0 f \pm n\pi \quad \text{para todo } n \text{ entero} \quad (2.59)$$

Si n es par, se tiene que $\exp(\pm jn\pi) = 1$; mientras que si n es impar, $\exp(\pm jn\pi) = -1$, de tal manera que la condición de transmisión sin distorsión no cambia. Nótese que si n no es entero, se producirá distorsión de fase. Aún más, puede suceder que, para $n = 0$, en alguna gama de frecuencias la característica de fase sea lineal, pero si su prolongación no corta el eje $\beta(f)$ en cero o en múltiplos enteros de π , entonces aparecerá un término constante de distorsión de fase (ver Problema de Aplicación 2.13). Esta situación es común en la práctica.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La característica de fase en transmisión sin distorsión es entonces una familia de líneas paralelas de pendiente $-2\pi t_o$, que cortan al eje $\beta(f)$ en múltiplos enteros de π , y al eje de frecuencia en las frecuencias $f_n = n/2t_o$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ como se puede apreciar en la Fig. 2.11(b). Esto significa que en transmisión sin distorsión todas las componentes de frecuencia de una señal llegan a la salida al mismo tiempo, siendo t_o el tiempo de propagación o retardo de las componentes a través del sistema; en este caso se dice que no hay “**dispersión**” a la salida.

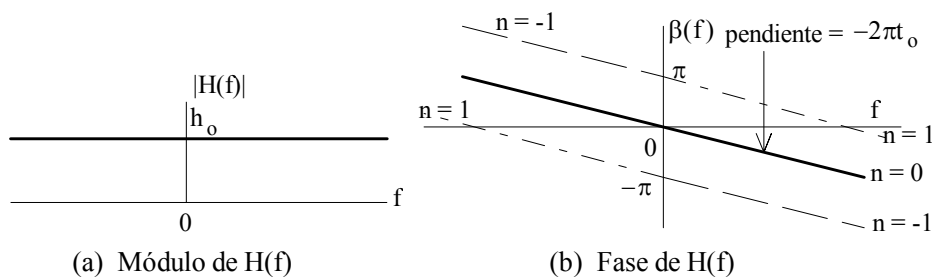


Fig. 2.11. Características de un Sistema para Transmisión sin Distorsión.

En resumen, la transmisión sin distorsión requiere que la magnitud o módulo de la función de transferencia sea constante e independiente de la frecuencia, y que la característica de fase sea una función lineal de la frecuencia, como se muestra en la Fig. 2.11.

♣ Ejemplo 2.12. Modelo de un Canal en Transmisión Multitrayecto

El concepto de transmisión sin distorsión permite entender y analizar los efectos de la transmisión de una señal por trayectorias múltiples producto de reflexiones en el trayecto transmisor-receptor, que es una perturbación muy común en los sistemas de transmisión por radio. Sea entonces el modelo de un canal en transmisión multitrayecto, mostrado en la Fig. 2.12.

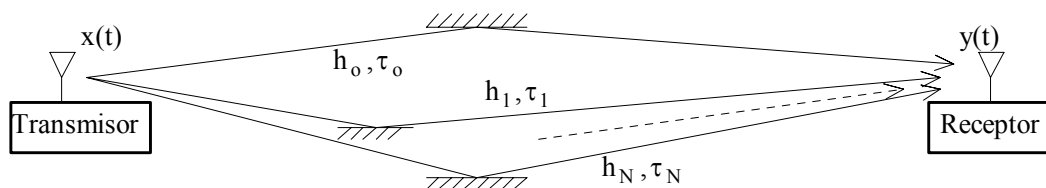


Fig. 2.12. Transmisión Multitrayecto.

La señal $x(t)$ se genera en el transmisor y llega al receptor sin experimentar distorsión pero por diferentes trayectorias que introducen atenuaciones h_i y retardos τ_i . La señal recibida $y(t)$ es

$$y(t) = h_0 x(t - \tau_0) + h_1 x(t - \tau_1) + h_2 x(t - \tau_2) + \dots + h_N x(t - \tau_N)$$

cuya transformada de Fourier es

$$Y(f) = h_0 X(f) \exp(-j2\pi\tau_0 f) + h_1 X(f) \exp(-j2\pi\tau_1 f) + \dots + h_N X(f) \exp(-j2\pi\tau_N f)$$

$$Y(f) = X(f) \sum_{n=0}^N h_n \exp(-j2\pi\tau_n f) = H_c(f) \cdot X(f)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La función de transferencia y la respuesta impulsional de un canal multitrayecto serán

$$H_c(f) = \sum_{n=0}^N h_n \exp(-j2\pi\tau_n f) \Leftrightarrow h_c(t) = \sum_{n=0}^N h_n \delta(t - \tau_n) \quad (2.60)$$

El efecto de $h_c(t)$ sobre la señal $x(t)$ produce en ésta una gran distorsión de tipo lineal. Esta distorsión se debe principalmente a la disminución y distorsión de la amplitud de la señal causadas por interferencia destructiva debido a las diferencias de fase y atenuación entre las diferentes componentes de la señal que llegan al receptor. En la práctica los valores de h_i y τ_i no son conocidos; en realidad, son cantidades aleatorias.

♣

♣ Ejemplo 2.13. El Filtro Transversal o Ecuador

Los efectos producidos por la transmisión multitrayecto se pueden contrarrestar mediante la utilización del llamado “Filtro Transversal o Ecuador”, el cual actúa sobre la señal recibida $y(t)$ para compensar la distorsión producida por el fenómeno de multitrayecto. El filtro transversal, como se muestra en la Fig. 2.13, utiliza una línea de retardos Δ , cuyas salidas se ponderan con ganancias α_i que luego se suman para producir la salida ecualizada $y_{eq}(t)$.

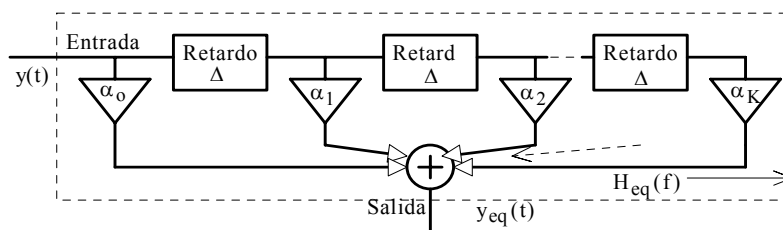


Fig. 2.13. Filtro Transversal o Ecuador

De la Fig. 2.13,

$$y_{eq}(t) = \alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t - \Delta) + \alpha_2 y(t - 2\Delta) + \dots + \alpha_K y(t - K\Delta)$$

cuya transformada de Fourier es

$$Y_{eq}(f) = \alpha_0 Y(f) + \alpha_1 Y(f) \exp(-j2\pi\Delta f) + \dots + \alpha_K Y(f) \exp(-j2\pi K\Delta f)$$

$$Y_{eq}(f) = \left[\sum_{k=0}^K \alpha_k \exp(-j2\pi k\Delta f) \right] \cdot Y(f) = H_{eq}(f) \cdot Y(f), \text{ de donde}$$

$$H_{eq}(f) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \exp(-j2\pi k\Delta f) \Leftrightarrow h_{eq}(t) = \sum_{k=0}^K \alpha_k \delta(t - k\Delta) \quad (2.61)$$

Estas son la función de transferencia y la respuesta impulsional del filtro transversal.

Como $Y(f)$ es el espectro de la señal recibida, entonces, del Ejemplo anterior, $Y(f)$ será

$Y(f) = H_c(f) \cdot X(f)$ y el espectro de la señal ecualizada será

$$Y_{eq}(f) = H_{eq}(f) \cdot H_c(f) \cdot X(f)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La señal ecualizada $y_{eq}(t)$ no presentará distorsión si $H_{eq}(f) \cdot H_c(f) = H_o$, donde H_o es una constante, es decir, cuando

$$H_{eq}(f) = \frac{H_o}{H_c(f)} \quad (2.62)$$

En la práctica, la red ecualizadora se coloca a la entrada del receptor. La realización física de la función de transferencia $H_{eq}(f)$ se complica por cuanto los parámetros h_i y τ_i de $H_c(f)$ en general son desconocidos. El filtro ecualizador tiene múltiples aplicaciones en todas las ramas de la ingeniería eléctrica.



Sistemas de Fase Lineal

Sea un sistema real cuyas características de amplitud y fase se muestran en la Fig. 2.14(a).

Este es un sistema que no posee distorsión de fase, es decir, es un sistema cuya característica de fase es lineal y en el cual el módulo de su función de transferencia tiene cualquier perfil simétrico respecto a $f = 0$. Estos sistemas se denominan **Sistemas de Fase Lineal**.

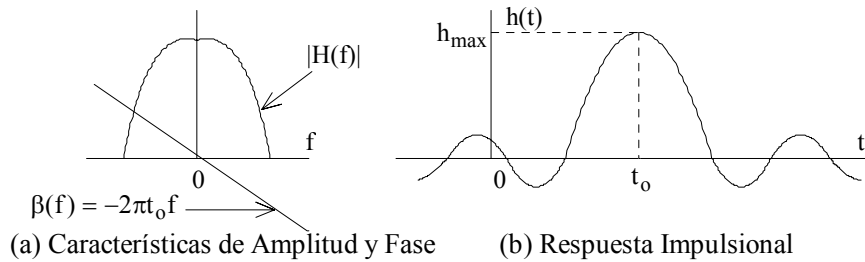


Fig. 2.14. Sistema de Fase Lineal.

Sea $H(f) = |H(f)| \exp(-j2\pi t_0 f)$ donde t_0 es el retardo de transmisión y

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| \exp(-j2\pi t_0 f) \exp(j2\pi f t) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| \exp[j2\pi(t - t_0)f] df$$

Puesto que $|H(f)|$ es una función par de f , entonces

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| \cos[2\pi(t - t_0)f] df \quad (2.63)$$

Sin necesidad de resolver la integral (2.63), podemos decir que la respuesta impulsional de un sistema de fase lineal es simétrica respecto a t_0 porque $h(t - t_0) = h(t_0 - t)$. Asimismo, el valor máximo h_{max} de $h(t)$ se alcanza cuando $t = t_0$. En efecto, para $t = t_0$, la expresión (2.63) queda en la forma

$$h_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df \quad (2.64)$$

donde h_{max} representa el área neta bajo $|H(f)|$.

Cualquier otro valor de t lo que hace es disminuir el valor del integrando en (2.63) porque $\cos[2\pi(t - t_0)f]$ tiene su valor máximo en $t = t_0$ para todo f . La respuesta impulsional $h(t)$ de un

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

sistema de fase lineal tiene entonces la forma general mostrada en la Fig. 2.14(b): simétrica respecto a $t = t_0$, con valor máximo $h_{\max}$ en $t = t_0$ y distinta de cero para $t < 0$. La dispersión de $h(t)$ alrededor de $t = t_0$ dependerá del ancho de banda de $H(f)$; además, si el retardo t_0 es lo suficientemente grande, podemos suponer que $h(t) \approx 0$ para $t < 0$, es decir, que $h(t)$ es causal. Una primera aplicación de estos conceptos la veremos más adelante al tratar los filtros ideales.

2.4.2. Tipos de Distorsión

En la práctica la transmisión sin distorsión se puede alcanzar solamente en forma aproximada, pues siempre se producirá un cierto grado de distorsión que es necesario cuantificar y, si es posible, minimizar mediante un diseño apropiado del sistema. A este efecto, la distorsión se ha clasificado en tres tipos:

1. Distorsión de Amplitud
2. Distorsión de Fase
3. Distorsión no Lineal

Los dos primeros tipos son formas de distorsión lineal.

Distorsión de Amplitud

La “**Distorsión de Amplitud**”, algunas veces llamada también “**Distorsión de Frecuencia**”, se produce cuando $|H(f)|$ no es constante dentro de la banda de paso del sistema, es decir, las componentes de frecuencia son atenuadas (o amplificadas) en forma diferente en las diferentes gamas de frecuencia. La manifestación más común de la distorsión de amplitud es el exceso de ganancia o de atenuación en los bordes de la banda y las ondulaciones o rizado de $|H(f)|$ dentro de la banda de paso. Por ejemplo, en un canal telefónico la atenuación en los bordes de la banda se debe a los filtros presentes en el sistema, a las características pasaalto de los transformadores y a los capacitores en serie presentes. El rizado dentro de la banda de paso es causado principalmente por desequilibrios de impedancia y las reflexiones consiguientes.

Distorsión de Fase

La “**Distorsión de Fase**”, más conocida como “**Distorsión de Retardo**”, se manifiesta como una deformación de la envolvente de las señales, efecto que se produce en los circuitos cuando la característica de fase $\beta(f)$ no es lineal. En este caso, las diferentes componentes de frecuencia tienen diferentes tiempos de propagación a través del sistema y como consecuencia se produce una dispersión de las señales a la salida. Para caracterizar esta situación, se consideran dos tipos de distorsión de retardo: la “**distorsión de retardo de fase**” y la “**distorsión de retardo de envolvente o de grupo**”, cada uno de los cuales define un tiempo de retardo dado.

Por definición, el retardo de fase es

$$t_p(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\beta(f)}{f} \text{ seg} \quad (2.65)$$

donde $\beta(f) / f$ es simplemente la pendiente, respecto al origen, de la característica de fase a una frecuencia dada [$t_p(f)$ es el tiempo de propagación, a través del sistema, de la componente de frecuencia f].

En la segunda forma de distorsión de retardo, el tiempo de retardo correspondiente se define como la derivada de la característica de fase. Sea $t_g(f)$ este retardo; entonces

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \beta(f) \text{ seg} \quad (2.66)$$

En muchos casos la característica de fase de un sistema se puede aproximar como una curva linealizada por tramos. Por ejemplo, si hay que operar en una pequeña gama de frecuencias alrededor de una frecuencia central f_c , como es el caso en sistemas pasabanda de banda angosta, la fase $\beta(f)$ se puede aproximar con los dos primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor, es decir,

$$\beta(f) = \beta(f_c) + (f - f_c) \frac{d}{df} \beta(f_c)$$

$$\text{De (2.65) y (2.66),} \quad \beta_+(f) = -2\pi f_c t_p(f_c) - 2\pi(f - f_c) t_g(f_c) \quad \text{para } 0 \leq f$$

Esta expresión se aplica para frecuencia positiva, y su negativo, con $f \rightarrow -f$, se aplica para frecuencia negativa. Esto se debe a que la fase es una función impar de la frecuencia. Entonces, para frecuencia negativa,

$$\beta_-(f) = -\beta_+(-f) = 2\pi f_c t_p(f_c) - 2\pi(f + f_c) t_g(f_c) \quad \text{para } f < 0$$

Supongamos ahora que la característica de amplitud es $|H(f)| = h_o$ y que a la entrada del sistema se aplica la señal modulada

$$x_c(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X_c(f) = \frac{1}{2} [X(f + f_c) + X(f - f_c)]$$

También, $H(f) = H_-(f) + H_+(f)$, donde

$$H_+(f) = h_o \exp[-j2\pi f_c t_p(f_c) - j2\pi(f - f_c) t_g(f_c)] \quad \text{para } 0 \leq f$$

$$H_-(f) = h_o \exp[j2\pi f_c t_p(f_c) - j2\pi(f + f_c) t_g(f_c)] \quad \text{para } f < 0$$

La salida $Y(f)$ del sistema será

$$Y(f) = H(f) \cdot X_c(f) = \frac{h_o}{2} X(f + f_c) \exp[j2\pi f_c t_p(f_c) - j2\pi(f + f_c) t_g(f_c)] + \\ + \frac{h_o}{2} X(f - f_c) \exp[-j2\pi f_c t_p(f_c) - j2\pi(f - f_c) t_g(f_c)]$$

$$Y(f) = \frac{h_o}{2} \left\{ X(f + f_c) \exp[-j2\pi(f + f_c) t_g(f_c)] \exp[j2\pi f_c t_p(f_c)] + \right. \\ \left. + X(f - f_c) \exp[-j2\pi(f - f_c) t_g(f_c)] \exp[-j2\pi f_c t_p(f_c)] \right\}$$

Para determinar la transformada inversa de esta expresión podemos utilizar el par de transformadas obtenido en el Problema de Aplicación 1.23(a):

$$x(t - t_o) \exp[\mp j2\pi f_c t] \Leftrightarrow X(f \pm f_c) \exp[-j2\pi t_o(f \pm f_c)]$$

Aplicando esta expresión a $Y(f)$ y agrupando términos se obtiene finalmente

$$y(t) = h_o x[t - t_g(f_c)] \cos[2\pi f_c [t - t_p(f_c)]] \quad (2.67)$$

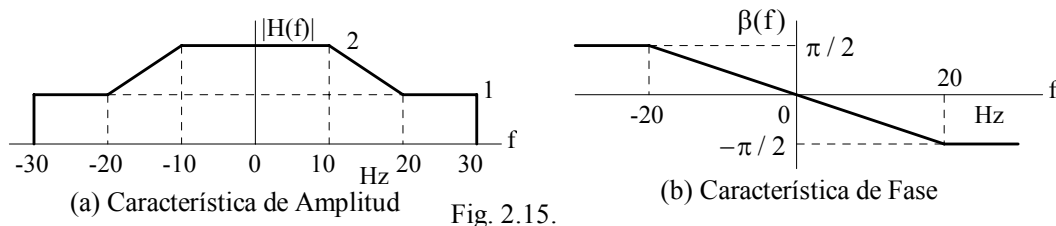
II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Este resultado indica que la amplitud o envolvente de la señal de salida del sistema está retardada en una cantidad igual al retardo de grupo o de envolvente $t_g(f)$, mientras que la fase de la portadora está retardada en una cantidad igual al retardo de fase $t_p(f)$. Tanto $t_g(f)$ como $t_p(f)$ están evaluados a la frecuencia f_c de la portadora. Este resultado es muy importante en la recepción de señales moduladas y es el principio utilizado en los instrumentos de medición de los retardos de grupo y de fase. El retardo de envolvente o retardo de grupo es la forma de retardo más utilizada en la caracterización de un canal de comunicaciones, pues representa el verdadero retardo de la señal, sobre todo si la señal está modulada.

En los canales telefónicos la distorsión de retardo de grupo se debe principalmente a los efectos capacitivos e inductivos que tienen los transformadores y amplificadores en las frecuencias bajas de la banda de voz, mientras que en la parte alta de la banda la distorsión de retardo de grupo es causada por las bobinas de carga y la capacitancia de las líneas de transmisión (aéreas y subterráneas).

♣ Ejemplo 2.14

Sea un sistema cuyas características de amplitud y fase se muestran en la Fig. 2.15.



Este sistema es excitado por las tres señales

(a) $x_1(t) = \cos(10\pi t) + \cos(12\pi t)$; (b) $x_2(t) = \cos(10\pi t) + \cos(30\pi t)$

(c) $x_3(t) = \cos(30\pi t) + \cos(50\pi t)$

Vamos a determinar las correspondientes salidas y los tipos de distorsión producidos.

(a) Frecuencias presentes: $f_1 = 5 \text{ Hz}$; $f_2 = 6 \text{ Hz}$; $t_o = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{40} = \frac{1}{80}$; ganancia = 2.

$$y_1(t) = 2 \cos\left[10\pi\left(t - \frac{1}{80}\right)\right] + 2 \cos\left[12\pi\left(t - \frac{1}{80}\right)\right] = 2x_1\left(t - \frac{1}{80}\right)$$

En el sistema hubo transmisión sin distorsión.

(b) Frecuencias presentes: $f_1 = 5 \text{ Hz}$; $f_2 = 15 \text{ Hz}$; $t_o = \frac{1}{80}$; ganancias: 2 y 1,5

$$y_2(t) = 2 \cos\left[10\pi\left(t - \frac{1}{80}\right)\right] + 1,5 \cos\left[30\pi\left(t - \frac{1}{80}\right)\right]$$

Hay distorsión de amplitud solamente: las componentes están amplificadas en forma diferente.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(c) Frecuencias presentes: $f_1 = 15 \text{ Hz}$; $f_2 = 25 \text{ Hz}$; $t_0 = \frac{1}{80}$; $t_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2 \cdot 25} = \frac{1}{100}$

Ganancias: 1,5 y 1

$$y_3(t) = 1,5 \cos[30\pi(t - \frac{1}{80})] + \cos[50\pi(t - \frac{1}{100})]$$

Hay distorsión de amplitud y de fase: las componentes están amplificadas en forma diferente y sus retardos son también diferentes.

Nótese que *cuando hay distorsión de retardo las componentes de frecuencia más altas llegan primero a la salida*. Esto es muy importante desde el punto de vista práctico, sobre todo en la transmisión de impulsos digitales, pues contribuye, junto con otros factores que veremos posteriormente, a la generación de una distorsión de las señales conocida como “interferencia intersímbolo”, como veremos en el Capítulo V.

♣

Distorsión no Lineal

Los canales prácticos y dispositivos electrónicos como, por ejemplo, los amplificadores, a menudo exhiben características no lineales y no pueden ser descritos mediante una función de transferencia pues no poseen una. Los sistemas no lineales se describen entonces mediante una curva $y(t) = g[x(t)]$, comúnmente denominada “**característica o curva de transferencia**”. En la Fig. 2.16 se muestra la característica de transferencia de un sistema no lineal sin memoria. Las líneas a trazos representan la aproximación lineal por tramos de la curva de transferencia.

En general, cuando $x(t)$ es pequeña, la característica de transferencia se puede considerar lineal. La naturaleza de la distorsión no lineal se puede cuantificar suponiendo que la curva de transferencia se puede aproximar mediante un polinomio de potencias de la forma

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots \quad (2.68)$$

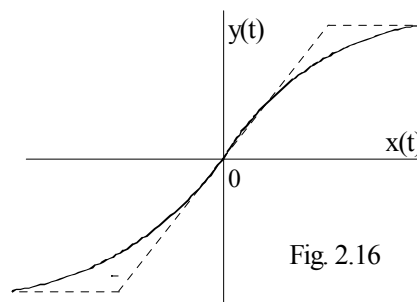


Fig. 2.16

La segunda y siguientes potencias de $x(t)$ son los términos que producen distorsión.

Aunque no se dispone de la función de transferencia, el espectro de la señal de salida se puede determinar mediante el teorema de la convolución que nos permite determinar el espectro de una señal cuyas características no son lineales. Nótese que una señal real, sin importar su naturaleza, siempre poseerá un espectro. En efecto, el espectro de $y(t)$ será

$$Y(f) = a_1 X(f) + a_2 [X(f) * X(f)] + a_3 [X(f) * X(f) * X(f)] + \dots \quad (2.69)$$

La distorsión armónica asociada con la salida de un sistema se determina aplicando un tono sinusoidal puro a la entrada del sistema. En el Ejemplo 2.15 consideramos este caso.

Por ejemplo, si la entrada $x(t)$ al sistema es la suma de dos señales sinusoidales de diferentes frecuencias de la forma $x(t) = \cos(2\pi f_c t) + \cos(2\pi f_x t)$, donde f_c es la frecuencia de interés y f_x una frecuencia desconocida o perturbadora, la salida contendrá, además de una componente continua, términos a las frecuencias armónicas de las frecuencias de entrada, y a la

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

suma y diferencia de las frecuencias de entrada y de las armónicas. Los primeros términos reciben el nombre de “**términos de distorsión armónica**”, y los segundos, “**términos de distorsión de intermodulación** (en inglés, cross-modulation)”. El lector puede demostrar, desarrollando (2.68), que los cuatro primeros términos contienen, además de una componente continua, términos a las siguientes frecuencias:

De Distorsión Armónica:

$$2f_c, 2f_x, 3f_c, 3f_x, 4f_c, 4f_x \rightarrow 6 \text{ frecuencias}$$

De Intermodulación:

$$f_c \pm f_x, 2f_c \pm f_x, 2f_x \pm f_c, 2f_c \pm 2f_x, 3f_c \pm f_x, 3f_x \pm f_c \rightarrow 12 \text{ frecuencias}$$

Las frecuencias de distorsión armónica y de intermodulación caracterizan la interacción mutua entre dos frecuencias f_c y f_x . En particular, los términos en $2f_c$ y $(2f_c \pm f_x)$ se utilizan en los cálculos de las interacciones entre estaciones de radiodifusión en AM, FM y TV, exigidas por las autoridades nacionales de comunicaciones en los proyectos correspondientes.

En general, si $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, entonces $y(t)$ contendrá los términos $x_1^2(t)$, $x_2^2(t)$, $x_1(t) \cdot x_2(t)$ y así sucesivamente. Es fácil de ver en el dominio de la frecuencia que aunque $X_1(f)$ y $X_2(f)$ puedan estar separados en frecuencia, el espectro de $[x_1(t) \cdot x_2(t)]$ puede solapar $X_1(f)$ o $X_2(f)$ o ambos. Esta forma de distorsión de intermodulación (conocida también como “cross-talk”) es de especial importancia, por ejemplo, en los sistemas telefónicos en donde un gran número de señales se han combinado para ser transmitidas por un mismo canal. Sin embargo, si el sistema no lineal se utiliza como modulador o demodulador, el término de intermodulación es el término útil o deseado. Esto lo veremos en el Capítulo VI.

♣ Ejemplo 2.15. Distorsión Armónica

Una medida cuantitativa de la distorsión armónica de un sistema no lineal se obtiene aplicando a su entrada una señal sinusoidal pura de la forma $x(t) = \cos(2\pi f_o t)$. Introduciendo esta señal en (2.68) el lector puede demostrar que la salida $y(t)$ tendrá la forma

$$y(t) = \left[\frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8} + \dots \right] + \left[a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots \right] \cos(2\pi f_o t) + \left[\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots \right] \cos[2\pi(2f_o)t] + \dots$$

$$y(t) = V_o + V_1 \cos(2\pi f_o t) + V_2 \cos[2\pi(2f_o)t] + \dots + V_n \cos[2\pi(nf_o)t]$$

donde V_n es el valor pico de la componente de salida de frecuencia nf_o .

La distorsión no lineal aparece como armónica de la frecuencia de entrada. El porcentaje de “distorsión armónica total”, ver Ejemplo 1.11, viene dado por

$$\text{Distorsión Armónica Total, } D_n \% = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |V_n|^2}{|V_1|^2}} 100$$

En particular, la cantidad o porcentaje de “Distorsión de Segunda Armónica” empleado en el análisis de sistemas de potencia viene dada por

$$D_2 \% = \frac{|\text{Amplitud de la Componente de Segunda Armónica}|}{|\text{Amplitud de la Componente Fundamental}|} 100$$

J. Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$D_2 \% = \frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{\left| \frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \dots \right|}{\left| a_1 + \frac{3a_3}{4} + \dots \right|} 100$$

♣

♣ Ejemplo 2.16

A la entrada de un sistema no lineal representado por $y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$ se aplica la señal $x(t) = 2AB \text{sinc}(2Bt)$. Dibujar el espectro de la salida.

Se tiene entonces que $y(t) = 2a_1 AB \text{sinc}(2Bt) + 4a_2 A^2 B^2 \text{sinc}^2(2Bt)$

cuya transformada de Fourier es $Y(f) = a_1 A \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) + 2a_2 A^2 B \Lambda\left(\frac{f}{2B}\right)$

El primer término es la salida deseada; pero el segundo término, considerado como distorsión, produce interferencias a todas las frecuencias ocupadas por la señal deseada. Nótese que el término de distorsión, Fig. 2.17(b), es la convolución de $X(f)$ consigo misma y ocupa el doble de ancho de banda. Como ambos términos se superponen en el intervalo $(-B, B)$, habrá distorsión y será imposible, en general, recuperar $X(f)$ a partir de $Y(f)$. Esto se puede apreciar en la Fig. 2.17(c).

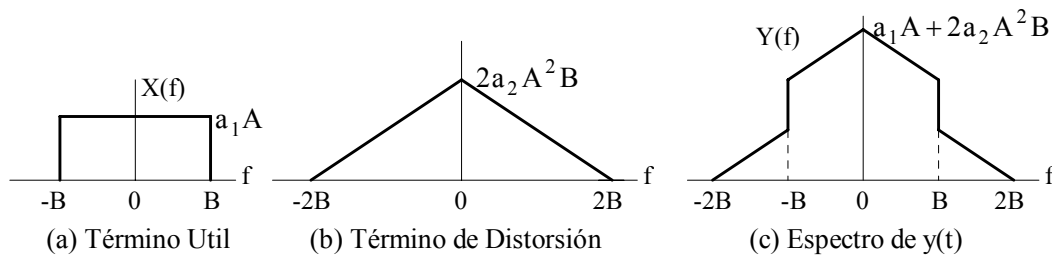


Fig. 2.17.

Obsérvese que *el espectro del producto de dos señales ocupa un ancho de banda igual a la suma de los anchos de banda individuales*. En general, mediante aplicación sucesiva del teorema de la convolución, se puede demostrar que *el ancho de banda del producto de n señales es igual a la suma de los n anchos de banda individuales*.

♣

Compansión

La característica de transferencia de la Fig. 2.16 sugiere un método para disminuir la distorsión no lineal. Con este método, conocido con el nombre de “compansión (**compresión-expansión**)”, la amplitud de la señal se mantiene dentro del rango de operación lineal de la característica de transferencia.

La compansión se efectúa mediante dos dispositivos no lineales: un “compresor” y un “expansor”, dispuestos en la forma mostrada en la Fig. 2.18.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

El compresor ajusta el rango de amplitudes de la señal de entrada de manera que caiga dentro del intervalo lineal del canal. Para una entrada positiva $x(t)$, se puede utilizar, por ejemplo, un compresor con una característica de transferencia $g_{\text{comp}}[x(t)] = \ln[x(t)]$. Como el compresor ajusta el rango de la señal de entrada, también ajustará el rango de la señal de salida. Es necesario, entonces, ajustar también la salida del sistema de tal manera que se compense el ajuste, es decir, que $g_{\text{exp}}\{g_{\text{comp}}[x(t)]\} = x(t)$, donde $g_{\text{exp}}\{\cdot\}$, la característica de transferencia del expansor, es el complemento de la característica de transferencia del compresor. Por ejemplo, si $y(t) = g_{\text{exp}}[\ln x(t)] = \exp[\ln x(t)]$, entonces $y(t) = x(t)$.

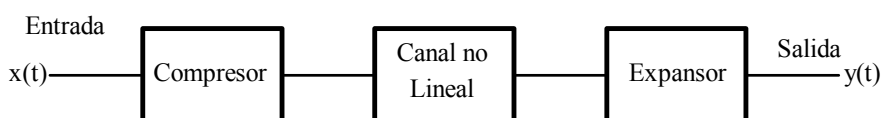


Fig. 2.18. Sistema de Compansión.

La compansión es ampliamente utilizada en sistemas telefónicos para reducir la distorsión no lineal y también para mejorar el rango dinámico de las señales, es decir, compensar la diferencia entre voces fuertes y voces débiles.

2.5. INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS

Normalmente un sistema de comunicación comprende numerosos subsistemas interconectados en diferentes formas. Si se conoce las funciones de transferencia de los diferentes subsistemas, puede ser posible y deseable combinarlas para constituir una sola función de transferencia total.

Las tres formas básicas de interconexión de sistemas son: en cascada o serie, en paralelo y retroalimentada. Estas tres formas básicas se muestran en la siguiente TABLA DE IDENTIDADES. Como los diagramas de bloques se utilizan mucho en el análisis de sistemas, a menudo es necesario reducir un diagrama de bloques dado a cualquiera de estas tres formas básicas.

En la reducción de diagramas de bloques hay que tener en cuenta las interacciones o efectos de carga y acoplamiento que ocurren cuando un subsistema se conecta a otro, a fin de que el sistema equivalente represente verdaderamente la interconexión de los subsistemas.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

TABLA DE IDENTIDADES DE DIAGRAMAS DE BLOQUES

No.	Diagrama Original	Diagrama Equivalente
1		
2		
3		

♣ Ejemplo 2.17. Circuito de Retención (Sample and Hold)

Consideremos el “circuito de retención (zero-order hold)” de la Fig. 2. 19. Este circuito tiene muchas aplicaciones en comunicaciones, sobretodo en el muestreo y procesamiento de señales. Este sistema es muy sencillo, pero lo vamos a utilizar para hallar su función de transferencia equivalente. Para analizarlo, debemos obtener primero la función de transferencia de los diferentes bloques. La rama superior, Fig. 2.19(a), tiene una función de transferencia $H_1(f) = 1$. La rama inferior tiene una función de transferencia $H_2(f) = \exp(-j2\pi\tau f)$, mientras que la rama del integrador tendrá $H_3(f) = 1/(j2\pi f)$. En términos de estas funciones, el diagrama de bloques tendrá la forma mostrada en (b).

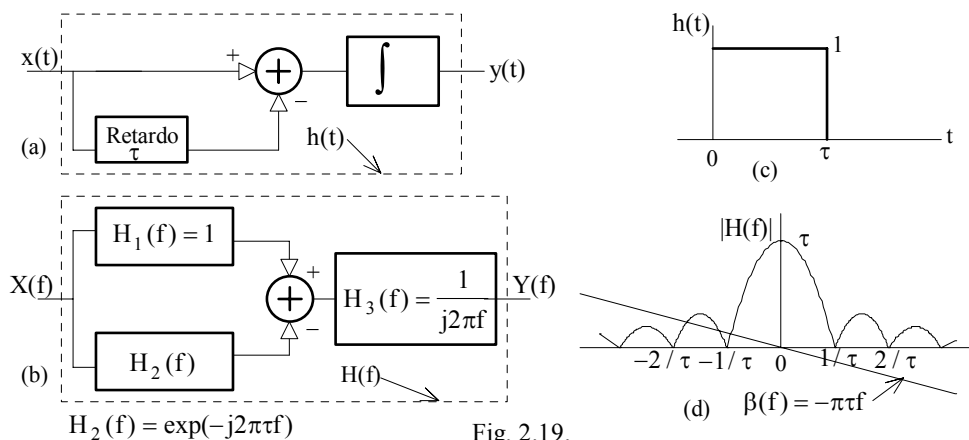


Fig. 2.19.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La función de transferencia total será

$$H(f) = [H_1(f) - H_2(f)]H_3(f) = [1 - \exp(-j2\pi\tau f)] \frac{1}{j2\pi f}$$

$$H(f) = \frac{\exp(-j\pi\tau f)}{j2\pi f} [\exp(j\pi\tau f) - \exp(-j\pi\tau f)] = \tau \text{sinc}(\tau f) \exp(-j\pi\tau f)$$

Por transformada inversa de Fourier, la respuesta impulsiva o impulsional $h(t)$ será

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right) \quad \text{que tiene la forma mostrada en (c). En (d) se muestra las características de la función de transferencia del circuito de retención.}$$

♣

2.6. FILTROS

2.6.1. Introducción

En su acepción general, un filtro es un dispositivo selectivo de frecuencia que se utiliza para limitar en alguna forma el espectro de una señal dentro de una gama específica de frecuencias.

De acuerdo con la dependencia funcional de $H(f)$ respecto a la frecuencia, ciertas componentes de frecuencia son amplificadas mientras que otras son atenuadas o rechazadas. Esta selectividad en frecuencia es lo que comúnmente se denomina “filtración”. Desde este punto de vista, los filtros básicos pueden ser pasabajo, pasabanda, pasaalto y eliminador de banda. La teoría de los filtros es un sujeto muy importante en la generación, procesamiento, transmisión y recepción de señales, y un estudio más completo de ellos está fuera de los objetivos de este texto. Sin embargo, para profundizar un poco más en el estudio de los sistemas lineales y visualizar algunas de sus características, vamos a considerar los filtros ideales que son sistemas de fase lineal que transmiten sin distorsión de fase dentro de una determinada banda de frecuencias.

2.6.2. Filtros Ideales

Aunque no son físicamente realizables, los filtros ideales permiten, por su descripción matemática sencilla, entender con menor dificultad sus efectos sobre las señales que se les aplican.

Para caracterizar estos filtros ideales, vamos a suponer que B es el ancho de banda de la banda de paso (frecuencias positivas) y t_o el retardo de transmisión (respuesta de fase lineal). Los filtros ideales son sistemas de fase lineal cuyas características generales hemos visto ya.

Para simplificar la descripción de algunos de los filtros ideales, vamos a considerar el sistema de transmisión sin distorsión, mostrado en la Fig. 2.11, como un “filtro pasatodo”, concepto que nos ayudará en la caracterización de algunos de los filtros ideales que veremos a continuación.

Filtro Ideal Pasabajo

En la Fig. 2.20(a) se muestran las características de amplitud y fase de un filtro ideal pasabajo.

$$\text{De la Fig. 2.20(a), } H_{PB}(f) = h_o \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \exp(-j2\pi t_o f) \quad (2.70)$$

$$\text{de donde } h_{PB}(t) = 2Bh_o \text{sinc}[2B(t - t_o)] \quad (2.71)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

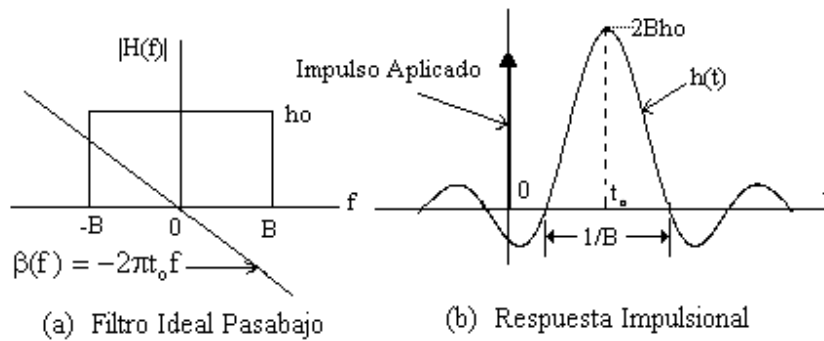


Fig. 2.20.

Obsérvese que la respuesta impulsional no es causal, pues hay una respuesta para $t < 0$: las colas de la función sinc(.) se extienden hasta $-\infty$, Fig. 2.20(b). Sin embargo, si $Bt_0 \gg 1$, la cola que se extiende para t negativo es de amplitud muy pequeña y podría ser despreciada. Por lo tanto, aunque la característica pasabajo ideal nunca puede ser causal, ella puede aproximarse para que sea causal haciendo t_0 lo suficientemente grande. Nótese que $h(t)$ es máxima y simétrica en $t = t_0$. Sin embargo, el lector no debe olvidar que en los filtros reales el valor del retardo t_0 generalmente es muy pequeño, casi despreciable, pero que nosotros hemos exagerado para conocer su efecto. En sistemas físicos siempre habrá un retardo, de modo que t_0 será pequeño pero jamás será cero.

La respuesta impulsional contiene también toda la información sobre el filtro. En efecto, el desplazamiento respecto al origen es el tiempo de retardo t_0 , la distancia entre los dos ceros del lóbulo principal de la característica nos da el valor del ancho de banda B , y como el valor máximo de la característica es $2Bh_0$, se obtiene también el valor h_0 de $|H(f)|$. El valor $f_c = B$ generalmente se denomina “**frecuencia de corte**”.

Filtro Ideal Pasabanda

Las características de amplitud y fase del filtro ideal pasabanda se muestran en la Fig. 2.21 (a).

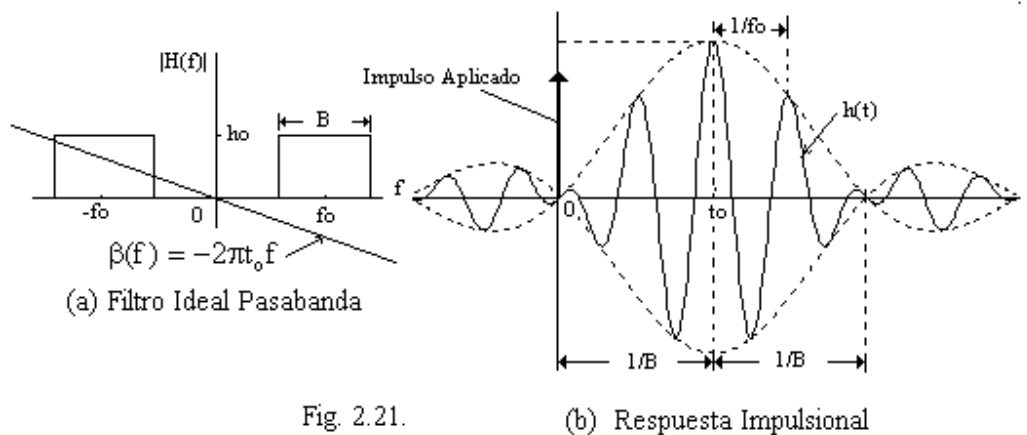


Fig. 2.21.

De la Fig. 2.21(a),

$$H_{BB}(f) = h_0 \left[\Pi\left(\frac{f + f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) \right] \exp(-j2\pi t_0 f) \quad (2.72)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

de donde
$$h_{BB}(t) = 2Bh_o \text{sinc}[B(t - t_o)] \cos[2\pi f_o(t - t_o)] \quad (2.73)$$

Igual que en el filtro pasabajo, la respuesta impulsional del filtro ideal pasabanda tampoco es causal, Fig. 2.21(b). Obsérvese que la envolvente de la respuesta es parecida a la respuesta del filtro ideal pasabajo; la respuesta impulsional tiene la forma de una señal modulada de frecuencia f_o .

Nótese que todos los parámetros del filtro (f_o , B , t_o y h_o) se pueden deducir también de la respuesta impulsional. Las frecuencias de corte son $f_{c1} = f_o - B/2$ y $f_{c2} = f_o + B/2$.

Filtro Ideal Pasaalto

En la Fig. 2.22(a) se muestran las características de amplitud y fase de este filtro.

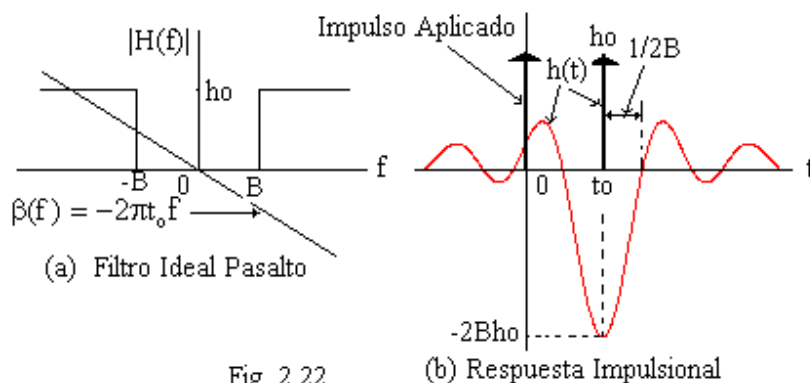


Fig. 2.22.

(b) Respuesta Impulsional

El filtro ideal pasaalto se puede considerar como la combinación de un filtro ideal pasatodo y un filtro ideal pasabajo, es decir,

$$H_{PA}(f) = H_{PT}(f) - H_{PB}(f) = h_o \exp(-j2\pi t_o f) - h_o \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \exp(-j\pi t_o f) \quad (2.74)$$

de donde
$$h_{PA}(t) = h_o \delta(t - t_o) - 2Bh_o \text{sinc}[2B(t - t_o)] \quad (2.75)$$

Esta respuesta se muestra en la Fig. 2.22(b).

Filtro Ideal Eliminador de Banda

Las características de amplitud y fase de este filtro se muestran en la Fig. 2.23(a).

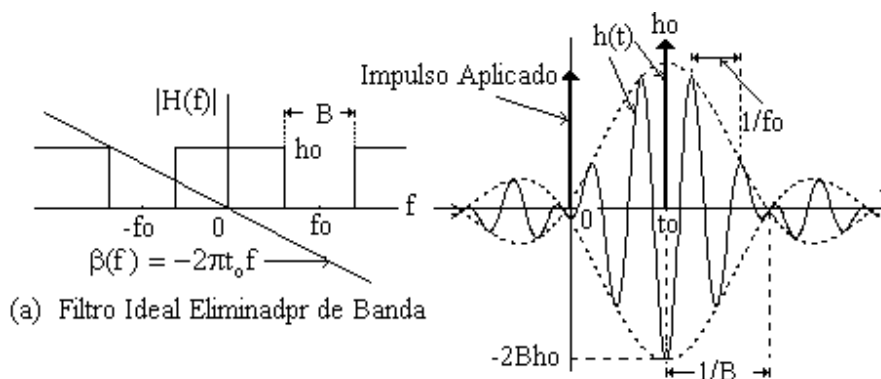


Fig. 2.23.

(b) Respuesta Impulsional

Este filtro se puede considerar como la combinación de un filtro ideal pasatodo y un filtro ideal pasabanda. En efecto, de la Fig. 2.23(a),

J. Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$H_{EB}(f) = H_{PT}(f) - H_{BB}(f) = h_o \left[1 - \Pi\left(\frac{f+f_o}{B}\right) - \Pi\left(\frac{f-f_o}{B}\right) \right] \exp(-j2\pi f_o f) \quad (2.76)$$

$$\text{de donde } h_{EB}(t) = h_o \delta(t - t_o) - 2Bh_o \text{sinc}[B(t - t_o)] \cos[2\pi f_o (t - t_o)] \quad (2.77)$$

Esta respuesta se muestra en la Fig. 2.23(b).

Ninguno de los filtros ideales considerados hasta ahora son causales debido a los bordes abruptos de las funciones de transferencia, cuyas respuestas impulsionales contienen funciones sinc(.) que se extienden para $t < 0$. Además, estos filtros no pueden ser realizados físicamente pues su característica de amplitud $|H(f)|$ viola el Criterio de Paley-Wiener.

Si se intentara generar una respuesta causal a partir de una respuesta no causal (como las halladas para los filtros ideales) haciendo $h(t) = 0$ para $t < 0$, entonces la respuesta de frecuencia se extenderá más allá de la banda de paso y contendrá rizados dentro de la misma banda. Esto podemos apreciarlo en el siguiente ejemplo.

♣ Ejemplo 2.18.

Consideremos la respuesta impulsional de un filtro ideal pasabajo que de alguna forma hemos limitado entre 0 y $2t_o$ para hacerla causal. En este caso vamos a investigar qué le sucede a su correspondiente función de transferencia.

De (2.71),

$$h_c(t) = 2Bh_o \text{sinc}[2B(t - t_o)] \Pi\left(\frac{t - t_o}{2t_o}\right) \Leftrightarrow H_c(f)$$

$h_c(t)$ se muestra en la Fig. 2.24(a).

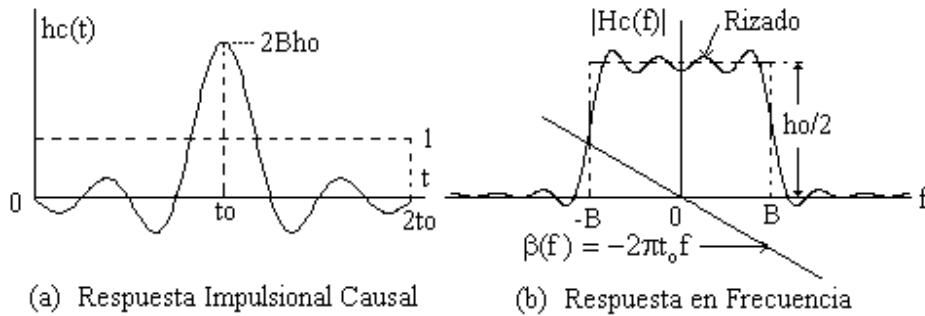


Fig. 2.24

La correspondiente función de transferencia se puede obtener en la forma siguiente. Sea

$$h_1(t) = \text{sinc}(2Bt) \Pi\left(\frac{t}{2t_o}\right) \Leftrightarrow H_1(f) = \mathcal{F}\left\{ \text{sinc}(2Bt) \Pi\left(\frac{t}{2t_o}\right) \right\}$$

$$\text{Entonces, } H_c(f) = 2Bh_o \mathcal{F}\{h_1(t)\} \exp(-j2\pi f_o f) = 2Bh_o H_1(f) \exp(-j2\pi f_o f)$$

Del teorema de la convolución,

$$H_1(f) = \mathcal{F}\left\{ \text{sinc}(2Bt) \Pi\left(\frac{t}{2t_o}\right) \right\} = \mathcal{F}\{ \text{sinc}(2Bt) \} * \mathcal{F}\left\{ \Pi\left(\frac{t}{2t_o}\right) \right\}$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$H_1(f) = \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) * 2t_o \text{sinc}(2t_o f) = \frac{t_o}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[2t_o(f - \lambda)] \Pi\left(\frac{\lambda}{2B}\right) d\lambda$$

Resolviendo esta integral siguiendo el procedimiento del Ejemplo 2.10(b), se obtiene

$$H_1(f) = \frac{1}{2\pi B} \left[\int_0^{2\pi t_o(f+B)} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy - \int_0^{2\pi t_o(f-B)} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy \right]$$

que con la ayuda de la Integral Seno queda en la forma

$$H_1(f) = \frac{1}{2\pi B} \left[\text{Si}\{2\pi t_o(f+B)\} - \text{Si}\{2\pi t_o(f-B)\} \right]$$

de donde
$$H_c(f) = \frac{h_o}{\pi} \left[\text{Si}\{2\pi t_o(f+B)\} - \text{Si}\{2\pi t_o(f-B)\} \right] \exp(-j2\pi t_o f)$$

En la Fig. 2.24(b) se muestra las características de $H_c(f)$; nótese que $|H_c(f)|$ se extiende más allá de la banda de paso. Obsérvese el rizado presente dentro de la banda de paso, lo cual resulta en un cierto grado de distorsión de amplitud que con un buen diseño se puede hacer muy pequeño. Nótese también que $H_c(f)$ ya no viola el Criterio de Paley-Wiener y por lo tanto es físicamente realizable.



♣ Ejemplo 2.19. Respuestas de un Filtro Pasabajo Ideal

En este Ejemplo vamos a considerar las respuestas de un filtro pasabajo ideal cuando se le aplica un escalón unitario o un impulso rectangular. Como un canal de transmisión se puede considerar como un filtro pasabajo, los resultados de este ejercicio nos permiten entender lo que sucede en la transmisión de impulsos por un canal que en la práctica se denomina “**canal de banda de base**”.

(a) Respuesta a un Escalón Unitario

En el Ejemplo 2.2 se demostró que la respuesta de un sistema a un escalón unitario en función de la respuesta impulsional era

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'$$

La respuesta al escalón unitario de un filtro pasabajo ideal será, de (2.71),

$$y(t) = \int_{-\infty}^t 2Bh_o \text{sinc}[2B(t-t_o)] dt'$$

$$y(t) = 2Bh_o \int_{-\infty}^t \frac{\text{sen}[2\pi B(t-t_o)]}{2\pi B(t-t_o)} dt'$$

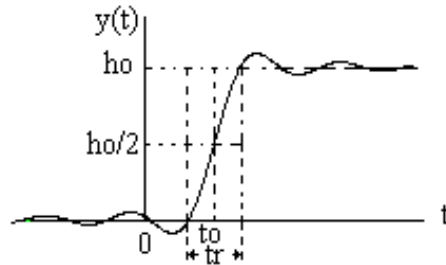
II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Con el cambio de variables $x = 2\pi B(t - t_0)$, la integral queda en la forma

$$y(t) = h_0 \int_{-\infty}^{2\pi B(t-t_0)} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$$

y con la ayuda de la Integral Seno,

$$y(t) = \frac{h_0}{2} + \frac{h_0}{\pi} \text{Si}\{2\pi B(t - t_0)\}$$



En la Fig. 2.25 se grafica esta respuesta. Nótese que la pendiente de $y(t)$ alrededor de $t = t_0$ depende del ancho de banda del filtro.

En efecto, si definimos el “**tiempo de alza** t_r ” en la forma mostrada en la figura, y tomando el primer término del desarrollo en serie de potencias de la Integral Seno, la pendiente de $y(t)$ en $t = t_0$ será, Fig. 2.25,

$$\left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=t_0} \approx \frac{h_0}{t_r}$$

Por consiguiente,

$$\frac{h_0}{t_r} \approx \frac{h_0}{\pi} 2\pi B, \text{ de donde } B \approx \frac{1}{2t_r} \text{ (relación ancho de banda-tiempo de alza)}$$

Obsérvese que cuanto mayor es el ancho de banda B , la salida del canal se parece más y más a la entrada (el tiempo de alza t_r es menor).

(b) Respuesta a un Impulso Rectangular

Consideremos ahora la salida del canal pasabajo ideal de ancho de banda B cuando se transmite por él un impulso rectangular de la forma $x(t) = \Pi(\frac{t}{T})$. Esta es la situación que se presenta en la transmisión de impulsos en banda de base.

$$\text{De (2.71), } h(t) = 2Bh_0 \text{sinc}[2B(t - t_0)].$$

$$\text{De (2.7), } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{\tau}{T})2Bh_0 \text{sinc}[2B(t - t_0 - \tau)]d\tau$$

$$y(t) = 2Bh_0 \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen}[2\pi B(t - t_0 - \tau)]}{2\pi B(t - t_0 - \tau)} d\tau$$

Con el cambio de variables $x = 2\pi B(t - t_0 - \tau)$, esta integral queda en la forma

$$y(t) = \frac{h_0}{\pi} \int_{2\pi B(t-t_0-\frac{T}{2})}^{2\pi B(t-t_0+\frac{T}{2})} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{h_0}{\pi} \int_0^{2\pi B(t-t_0+\frac{T}{2})} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx - \frac{h_0}{\pi} \int_0^{2\pi B(t-t_0-\frac{T}{2})} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$$

Con ayuda de la Integral Seno,

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$y(t) = \frac{h_0}{\pi} \left[\text{Si} \left\{ 2\pi B \left(t - t_0 + \frac{T}{2} \right) \right\} - \text{Si} \left\{ 2\pi B \left(t - t_0 - \frac{T}{2} \right) \right\} \right]$$

Por ejemplo, si hacemos $t_0 = \frac{T}{4}$, entonces $y(t) = \frac{h_0}{\pi} \left[\text{Si} \left\{ 2\pi B \left(t + \frac{T}{4} \right) \right\} - \text{Si} \left\{ 2\pi B \left(t - \frac{3T}{4} \right) \right\} \right]$

Hemos exagerado el valor de t_0 para que se pueda apreciar su efecto; sin embargo, en la práctica su valor es despreciable y las respuestas de la Fig. 2.26 en realidad están centradas en el origen (haciendo $t_0 = 0$).

En la Fig. 2.26 se muestra la respuesta $y(t)$ para diferentes valores del producto BT . Mostramos el perfil de $x(t)$ para efectos de la comparación entrada-salida.

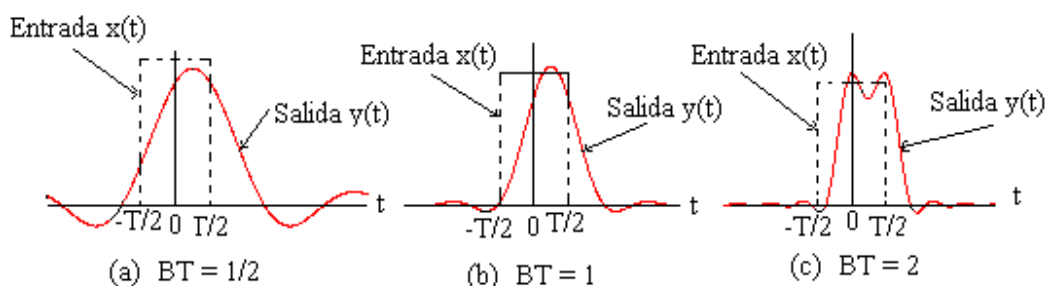


Fig. 2.26. Respuestas de un Filtro Pasabajo a un Impulso Rectangular

Obsérvese que la salida es simétrica respecto a $t = t_0 = T/4$ y existe para $t < 0$: la respuesta es no causal; es la salida típica de un sistema de fase lineal. Obsérvese también que la salida depende en forma apreciable del ancho de banda B del canal: cuanto mayor es el valor del producto BT , mejor es la fidelidad a la salida; por ejemplo, para $BT \gg 2$ la salida es casi igual a la entrada; sin embargo, en transmisión de datos esto no es necesario, pues lo que se quiere detectar a la salida es una “presencia” y no una “forma”. Si se quiere disminuir el ancho de banda B a valores menores que $1/2T$, la dispersión del impulso de salida es tal que puede interferir con impulsos adyacentes, como se puede observar en la Fig. 2.26(a). Esto es lo que se conoce con el nombre de “**interferencia intersímbolo**”. El efecto del ancho de banda B es entonces más crítico cuando se transmite secuencias de impulsos, como en los sistemas de transmisión digital en banda de base. En efecto, si el ancho de banda del canal es fijo, habrá un límite inferior sobre la duración permitida de los impulsos a transmitir, es decir, el ancho de banda del canal limitará la cantidad de impulsos que se pueden detectar por unidad de tiempo en la salida del canal; la cantidad de impulsos transmitidos por segundo (velocidad de modulación V_b) en el canal, como veremos en el Capítulo IV, depende entonces del ancho de banda. Si B es el ancho de banda del canal y T la duración de los impulsos, las relaciones más utilizadas en la transmisión de impulsos son $B = 1/T$ y $B = 1/2T$ ($BT = 1$ y $BT = 1/2$). La selección de una u otra relación dependerá de la interferencia intersímbolo permitida. Si $BT > 1$, no habrá problemas en la transmisión de impulsos y la interferencia intersímbolo será muy baja. Nótese que el retardo t_0 influye muy poco en la interferencia intersímbolo, pues t_0 es, en general, muy pequeño y en la práctica se descarta. La interferencia intersímbolo la trataremos con más detalle en el Capítulo V.



II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.6.3. Ancho de Banda en Filtros Reales

En los filtros reales la respuesta en frecuencia no presenta bordes abruptos sino que el paso de una región a otra se verifica en forma gradual en las llamadas “bandas de transición”, las cuales separan las “bandas de paso” de las “bandas de atenuación o rechazo”, como se muestra en la Fig. 2.27 para un filtro pasabanda típico.

Cuando se trabaja con filtros reales usualmente se define como ancho de banda “la gama de frecuencias positivas sobre la cual $|H(f)|$ se mantiene dentro de $1/\sqrt{2}$ (0,707) de su valor máximo en la banda de paso”. Esta convención se denomina “**Ancho de Banda de Potencia Mitad**” o “**Ancho de Banda de 3 decibeles (3 dB)**”. En este caso, el ancho de banda B_{3dB} se define a partir de la expresión

$$|H(B_{3dB})| = \frac{|H(f)|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (2.78)$$

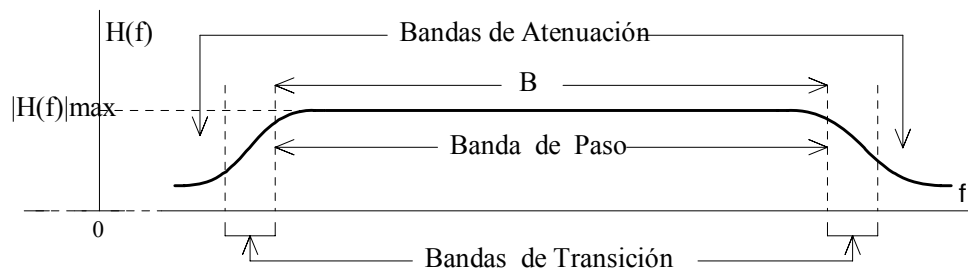


Fig. 2.27. Filtro Pasabanda Típico.

Como ejemplo de esta convención, el ancho de banda de 3 dB de un filtro pasabajo RC es $B_{3dB} = 1/2\pi RC$ puesto que $|H(f)|_{\max} = |H(0)| = 1$ y $|H(B_{3dB})| = 1/\sqrt{2}$. La banda de paso se extiende en este caso desde $f = 0$ hasta $f = B_{3dB}$.

Si el filtro es pasabanda o eliminador de banda, se determinan las frecuencias f_1 y f_2 (con $f_2 > f_1$) para las cuales se verifica que $|H(f_i)| = |H(f)|_{\max}/\sqrt{2}$, con $i = 1, 2$. El ancho de banda de 3 dB vendrá dado entonces por $B_{3dB} = |f_2 - f_1|$.

El ancho de banda de un filtro puede definirse también en la misma forma utilizada para definir el ancho de banda de una señal, expresión (1.117). En este caso,

$$B = \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df}{|H(f)|_{\max}} \quad (2.79)$$

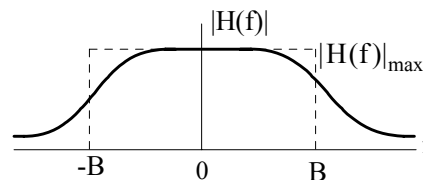


Fig. 2.28

La expresión (2.79) es equivalente a reemplazar el espectro $|H(f)|$ por un rectángulo cuya área es igual al área bajo $|H(f)|$ y cuya altura es $|H(f)|_{\max}$, como se muestra en la Fig. 2.28 en el caso de un filtro pasabajo. Para filtros pasabanda, el procedimiento es el mismo. Más adelante se definirá otro ancho de banda denominado “Ancho de Banda Equivalente de Ruido”.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

♣ Ejemplo 2.20. Filtros Sinusoidales y Filtro RLC

En el procesamiento, transmisión y recepción de señales en banda de base se utilizan algunos filtros cuyas funciones de transferencia tienen envolventes sinusoidales. Vamos a definir tres de estos tipos de filtro. Definiremos también el conocido filtro pasabajo RLC.

(a) Filtro de Nyquist. Primera Forma.

Consideremos la primera forma del denominado “**Filtro de Nyquist**”, que es un filtro con características en coseno elevado, como se muestra en la Fig. 2.29(a). Vamos a determinar su ancho de banda de 3 dB, el ancho de banda definido por la expresión (2.79) y su respuesta impulsional. Supongamos que el retardo de transmisión t_0 es despreciable.

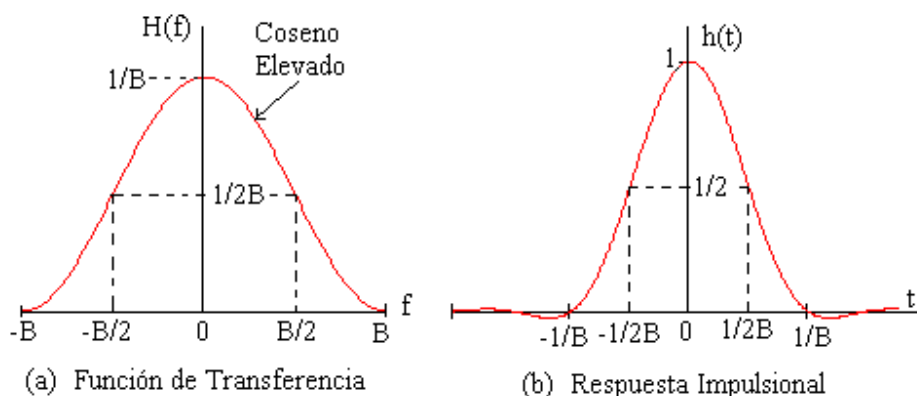


Fig. 2.29. Características del Filtro de Nyquist.

De la Fig. 2.29(a), $H(f) = \frac{1}{2B} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{f}{2B}\right) \right] \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$; $|H(f)|_{\max} = \frac{1}{B}$

El ancho de banda de 3 dB se obtiene a partir de

$$\frac{1}{2B} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{B} B_{3dB}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot B}, \text{ de donde } \cos\left(\frac{\pi}{B} B_{3dB}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Resolviendo $\cos\left(\frac{\pi}{B} B_{3dB}\right) = \sqrt{2} - 1 = 0,4142$ para B_{3dB} , obtenemos $\frac{\pi}{B} B_{3dB} = 0,364\pi$,

de donde

$$B_{3dB} = 0,364 \cdot B$$

$$\text{También, } \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df = \int_{-B}^B \frac{1}{2B} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi f}{B}\right) \right] df = 1$$

El ancho de banda del Filtro de Nyquist es, según la expresión (2.79): $B_c = 0,5 \cdot B$

Obsérvese que $B_c > B_{3dB}$

Calculemos ahora su respuesta impulsional. De la Fig. 2.29(a),

$$H(f) = \frac{1}{2B} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{f}{2B}\right) \right] \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) = \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cos\left(2\pi \frac{f}{2B}\right)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

pero $\frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \Leftrightarrow \sin c(2Bt)$. Aplicando el dual del teorema de la modulación,

$$\frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \cos\left(\frac{2\pi f}{2B}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{t + 1/2B}{1/2B}\right) + \text{sinc}\left(\frac{t - 1/2B}{1/2B}\right) \right]$$

La respuesta impulsional del Filtro de Nyquist será

$$h(t) = \sin c(2Bt) + \frac{1}{2} \{ \sin c[2B(t + 1/2B)] + \sin c[2B(t - 1/2B)] \}$$

Desarrollando las funciones sinc(..) y reorganizando, se obtiene finalmente

$$h(t) = \frac{\text{sinc}(2Bt)}{1 - (2Bt)^2}$$

En la Fig. 2.29(b) se muestra la forma de $h(t)$.

(b) Filtro de Nyquist. Segunda Forma

La segunda forma del Filtro de Nyquist se muestra en la Fig. 2.29(c).

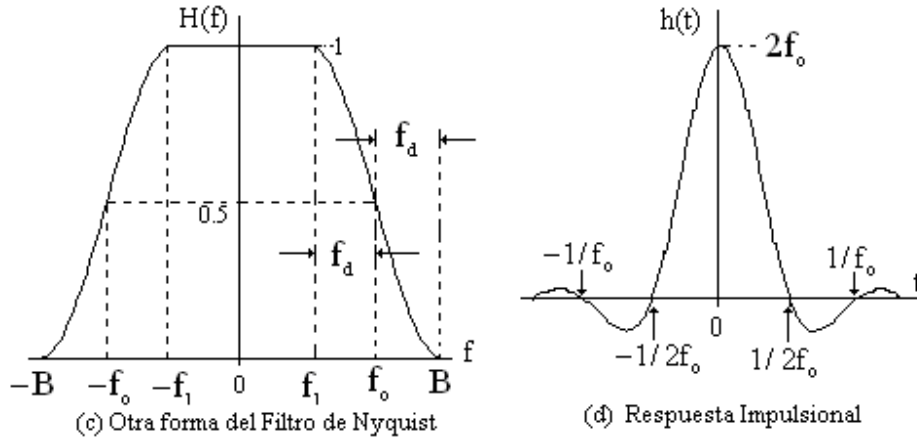


Fig. 2.29 (Cont) Características de los Filtros de Nyquist

La función de transferencia $H(f)$ de este filtro, mostrada en la Fig. 2.29(c), es

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{para } -f_1 \leq |f| < f_1 \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(f - f_0 + f_d)}{2f_d} \right] \right\} & \text{para } f_1 \leq f < B \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(f + f_0 - f_d)}{2f_d} \right] \right\} & \text{para } -B \leq f < -f_1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde $B = f_0 + f_d$ y $f_1 = f_0 - f_d$

La correspondiente respuesta impulsional es

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$h(t) = 2 \int_0^{f_0-f_d} \cos(2\pi t f) df + 2 \int_{f_0-f_d}^{f_0+f_d} \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left[\frac{\pi(f-f_0+f_d)}{2f_d}\right] \right] \cos(2\pi t f) df$$

Efectuando la integración, se obtiene

$$h(t) = 2 \sin(\pi f_0 t) \cos(\pi f_d t) \frac{[1 - 2 \cos^2(\pi f_d t)]}{\pi t (4^2 f_d^2 t^2 - 1)}$$

$$h(t) = 2 f_0 \sin c(2 f_0 t) \frac{\cos(2 \pi f_d t)}{1 - (4 f_d t)^2}$$

Esta respuesta impulsional se muestra en la Fig. 2.29(d).

Veamos el ancho de banda de 3 dB.

El ancho de banda de 3 dB se obtiene a partir de

$$\frac{1}{2} \left[1 + \cos\left[\frac{\pi(B_{3dB} - f_0 + f_d)}{2f_d}\right] \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ de donde } \cos\left[\frac{\pi(B_{3dB} - f_0 + f_d)}{2f_d}\right] = \sqrt{2} - 1 = 0,4142.$$

Resolviendo para B_{3dB} , obtenemos:

$$\frac{\pi(B_{3dB} - f_0 + f_d)}{2f_d} = 0,364\pi, \text{ de donde } B_{3dB} = 0,728f_d + f_0 - f_d = f_0 - 0,272f_d$$

o también $B_{3dB} = B - 1,272f_d$

En cuanto al ancho de banda dado por (2.79), $|H(f)|_{\max} = 1$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df = 2 \int_0^{f_0-f_d} df + 2 \int_{f_0-f_d}^{f_0+f_d} \frac{1}{2} \{1 + \cos\left[\frac{\pi(f-f_0+f_d)}{2f_d}\right]\} df = 2f_0$$

de donde, $B_c = f_0 = B - f_d$

La variación de f_d y f_0 permite ajustar el perfil de $H(f)$ de acuerdo con la aplicación. Este ajuste es lo que en la práctica se conoce con el nombre de “*roll-off*”, definido en la forma $\beta = f_d/f_0$. Nótese que cuando $f_d=f_0$ ($\beta = 1$), este filtro se convierte en la primera forma del Filtro de Nyquist; mientras que si $f_d = 0$, ($\beta = 0$) la segunda forma del Filtro de Nyquist se convierte en un filtro rectangular de la forma $H(f) = \Pi(\frac{f}{2f_1})$. Los valores intermedios de β se ajustan según la aplicación.

Los Filtros de Nyquist son de gran utilización en la transmisión de impulsos en banda de base para la eliminación de la Interferencia Intersímbolo, como veremos en el Capítulo V.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(c) Filtro de Respuesta Parcial

En la transmisión en banda de base se emplean las “**técnicas de respuesta parcial**” en los llamados sistemas duobinarios, en los cuales los filtros exhiben características en coseno de la forma

$$H(f) = \frac{1}{B} \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

como se muestra en la Fig. 2.29(e) (Este ejercicio ya lo tratamos en el Ejemplo 1.24).

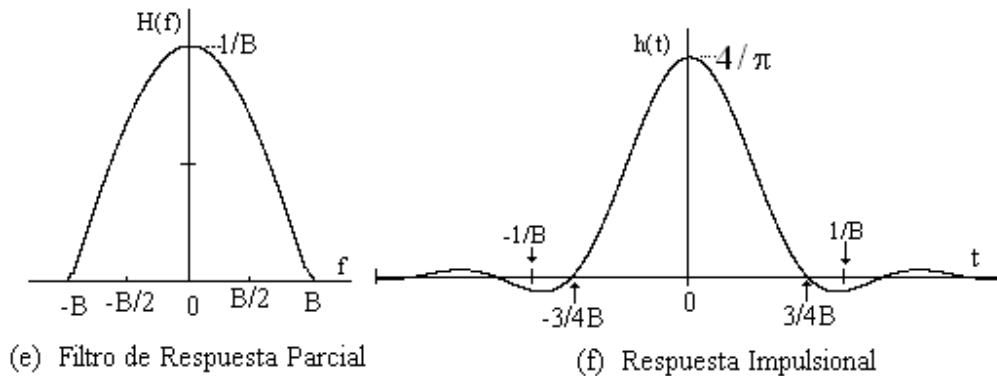


Fig. 2.29(Cont) Características del Filtro de Respuesta Parcial

La respuesta impulsional de este filtro es

$$h(t) = 2 \int_0^B \frac{1}{B} \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \cos(2\pi f t) df = \frac{4[1 - 2\cos^2(\pi B t)]}{\pi[(4Bt)^2 - 1]}$$

$$h(t) = \frac{4 \cos(2\pi B t)}{\pi (1 - 16B^2 t^2)}$$

Esta respuesta se muestra en la Fig. 2.29(f).

Veamos el ancho de banda de 3 dB.

El ancho de banda de 3 dB se obtiene a partir de

$$\frac{1}{B} \cos\left(\frac{\pi B_{3dB}}{2B}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}B}, \text{ de donde } \cos\left(\frac{\pi B_{3dB}}{2B}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resolviendo para B_{3dB} , obtenemos:

$$\frac{\pi B_{3dB}}{2B} = \frac{\pi}{4}, \text{ de donde } B_{3dB} = 0,5B$$

En cuanto al ancho de banda dado por (2.79), $|H(f)|_{\max} = \frac{1}{B}$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)| df = 2 \int_0^B \frac{1}{B} \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) df = \frac{4}{\pi}$$

de donde, $B_c = \frac{2}{\pi} B = 0,637B$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Nótese que, en general, el ancho de banda dado por la expresión (2.79) es mayor que el ancho de banda de 3 dB.

(d) Filtro Pasabajo RLC

Consideremos el filtro real pasabajo RLC mostrado en la Fig. 2.29(g).

La función de transferencia de este filtro es

$$H(f) = \frac{1}{1 - (2\pi f)^2 LC + j2\pi \frac{L}{R} f}$$

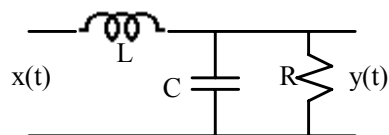


Fig. 2.29(g) Filtro Real Pasabajo RLC

Si hacemos $B = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $H(f)$ queda en la forma $H(f) = \frac{1}{1 - (\frac{2\pi f}{B})^2 + j(\frac{2\pi f}{B})}$

Por antitransformada de Fourier, la correspondiente respuesta impulsiva será

$$h(t) = \frac{2B}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{B}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}B}{2}t\right) u(t)$$

En la Fig. 2.29(h) y 2.29(i) se muestran $H(f)$ y $h(t)$ para el filtro pasabajo RLC para $B = 3000$.

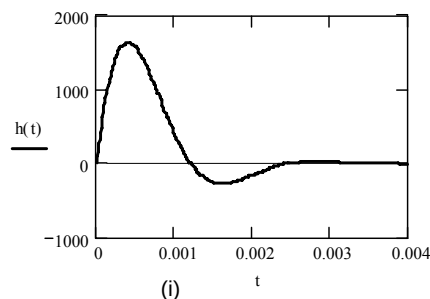
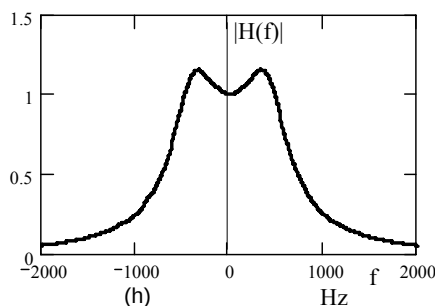


Fig. 2.29(Cont). Características del Filtro Real RLC

Se deja como ejercicio para el lector la determinación de los correspondientes anchos de banda de este filtro. ♣

Un estudio más detallado de los filtros reales está fuera de los límites que nos hemos impuesto.

2.7. SEÑALES Y SISTEMAS PASABANDA

2.7.1. La Transformada de Hilbert

En la Sección 2.4.1 se consideró un sistema con distorsión de amplitud pero con fase lineal y se dedujo algunas propiedades muy interesantes acerca de su respuesta impulsional y su aplicación en la caracterización de los filtros ideales. Ahora vamos a considerar un sistema sin distorsión de amplitud pero con una distorsión de fase tal que produce un desfase de $\pi/2$ a todas las

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

señales de entrada. Esto quiere decir que si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, entonces el espectro de salida del sistema, que representaremos con $\hat{X}(f)$, será

$$\hat{X}(f) = X(f) \exp(-j\frac{\pi}{2}) = -jX(f) \quad \text{para } 0 \leq f$$

$$\hat{X}(f) = X(f) \exp(j\frac{\pi}{2}) = jX(f) \quad \text{para } f < 0$$

Entonces, para todo f , $\hat{X}(f) = -jX(f)u(f) + jX(f)u(-f) = jX(f)[u(-f) - u(f)]$

$$\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \quad (2.80)$$

$$\text{y también } X(f) = j \operatorname{sgn}(f) \hat{X}(f) \quad (2.81)$$

Si hacemos $\hat{X}(f) = H_h(f)X(f)$, donde $H_h(f)$ es la función de transferencia del sistema, entonces, de (2.80),

$$H_h(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \quad (2.82)$$

que se representa en la Fig. 2.30(b). Este sistema se conoce con el nombre de “Transformador de Hilbert”, “Filtro de Hilbert” o “Filtro de Cuadratura”, Fig. 2.30(a). Podemos considerar entonces al filtro de Hilbert como un filtro de banda ancha. En la Fig. 2.30(d) se muestra en forma gráfica la formación del espectro de la transformada de Hilbert, ecuación (2.80).

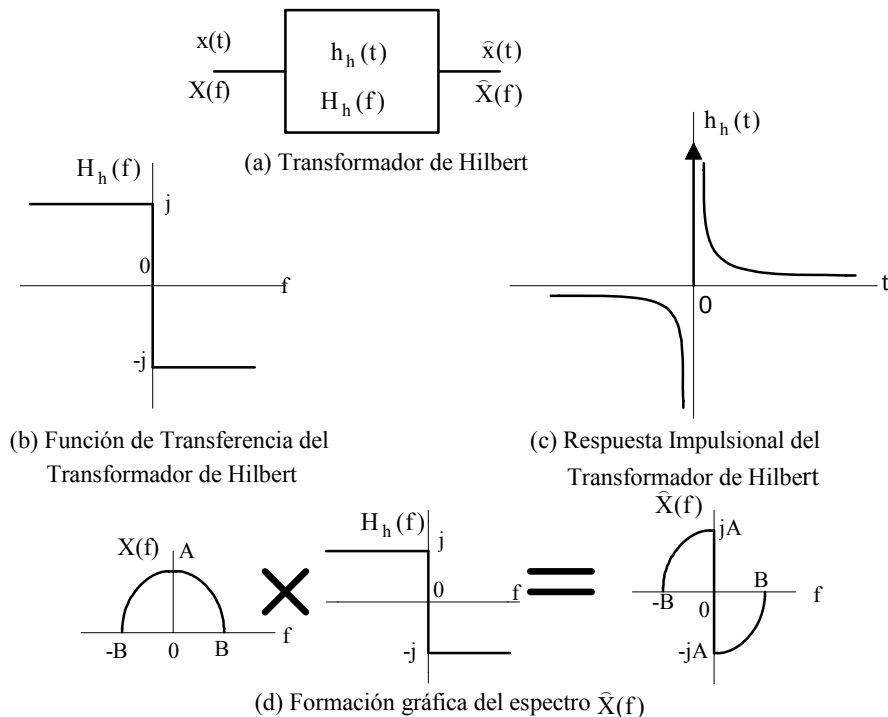


Fig. 2.30. Características de la Transformada de Hilbert

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

De (2.82), la respuesta impulsional del transformador de Hilbert es

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_h(f)\} = h_h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (2.83)$$

Que se muestra en la Fig. 2.3(c) (El área del Impulso es $\frac{1}{\pi}$).

$$\text{En consecuencia, } \bar{x}(t) = h_h(t) * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t - \tau)}{\tau} d\tau \quad (2.84)$$

La señal $\bar{x}(t)$ se conoce con el nombre de “**Transformada de Hilbert**” o “**función conjugada de $x(t)$** ” y es de gran aplicación en la representación de señales y sistemas pasabanda y en el estudio de señales moduladas en banda lateral única, cuyos principios básicos veremos más adelante. La transformación (2.84) generalmente se representa en la forma

$$\bar{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

De (2.81),

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = j\left(\frac{-1}{j\pi t}\right) * \bar{x}(t) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(t - \tau)}{\tau} d\tau \quad (2.85)$$

$$\text{y en virtud de (2.80), } |\bar{X}(f)| = |X(f)| \quad (2.86)$$

$$H_h(f) = |H_h(f)| \exp[j\phi_h(f)]; \quad |H_h(f)| = 1; \quad \phi_h(f) = \phi_x(f) \pm \frac{\pi}{2} \quad (2.87)$$

La expresión (2.86) demuestra que $x(t)$ y $\bar{x}(t)$ tienen la misma densidad espectral de energía o la misma densidad espectral de potencia (en el límite); mientras que las expresiones (2.87) explican el cambio de fase en $\pm \frac{\pi}{2}$, es decir, que si por ejemplo, $x(t) = A \cos(\omega_c t + \theta)$, entonces $\bar{x}(t) = A \sin(\omega_c t + \theta)$; pero si $x(t) = \sin(\omega_c t + \theta)$, entonces $\bar{x}(t) = -A \cos(\omega_c t + \theta)$.

Otras propiedades de la Transformada de Hilbert, que no demostraremos aquí, son:

- $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = -x(t)$
- Si $x(t)$ es par, entonces $\bar{x}(t)$ es impar, y viceversa.
- $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\bar{x}(t)$ son ortogonales, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\bar{x}(t)dt = 0$.
- $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\bar{x}(t)$ tienen la misma función de autocorrelación (La función de autocorrelación la trataremos más adelante).
- La transformada de Hilbert es lineal, es decir $\mathcal{H}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = a\hat{x}_1(t) + b\hat{x}_2(t)$.
- La transformada de Hilbert de una constante es cero.
- $\mathcal{H}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \hat{x}_1(t) * x_2(t) = x_1(t) * \hat{x}_2(t)$
- $\mathcal{H}\{x(t - t_0)\} = \hat{x}(t - t_0)$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

- $\mathcal{H}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = \frac{d}{dt}\hat{x}(t)$

En el Problema de Aplicación 2.27 se deducen algunas relaciones muy interesantes aplicando la Transformada de Hilbert.

♣ Ejemplo 2.21

Determinar la transformada de Hilbert de un impulso rectangular $x(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$.

Solución

De (2.84),
$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi\left(\frac{\tau - T/2}{T}\right) \frac{d\tau}{t - \tau} = -\frac{A}{\pi} \int_0^T \frac{d\tau}{t - \tau}$$

$$\hat{x}(t) = -\frac{A}{\pi} \ln|\tau - t|_0^T = \frac{A}{\pi} [\ln|t| - \ln|T - t|] = \frac{A}{\pi} \ln\left|\frac{t}{T - t}\right|$$

La señal $x(t)$ y su transformada de Hilbert se muestran en la Fig. 2.31. A los lugares donde $\hat{x}(t)$ se hace infinito algunas veces se les denomina “cuernos”; estos cuernos pueden causar problemas (silbidos de alta frecuencia) en sistemas de comunicación que utilizan transformadas de Hilbert, por ejemplo, en sistemas telefónicos que son sistemas donde se aplica el concepto de banda lateral única. En general, las discontinuidades de una señal producirán cuernos en su transformada de Hilbert correspondiente.

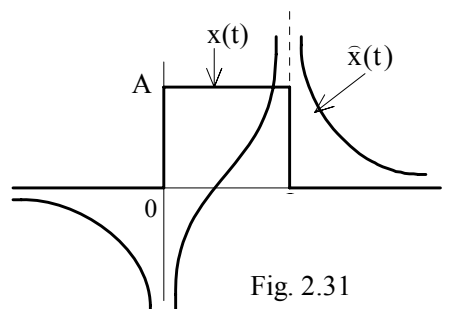


Fig. 2.31

♣

♣ Ejemplo 2.22

Determinar la transformada de Hilbert de la señal pasabaja $x(t) = 2AB\text{sinc}(2Bt)$.

Solución

Evidentemente, $X(f) = A\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$. De (2.80) o según el procedimiento gráfico mostrado en la Fig. 2.30(c), el espectro de la transformada de Hilbert es

$$\hat{X}(f) = -j\text{sgn}(f)X(f) = -jA\text{sgn}(f)\left[\Pi\left(\frac{f+B/2}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f-B/2}{B}\right)\right]$$

$$\hat{X}(f) = jA\left[\Pi\left(\frac{f+B/2}{B}\right) - \Pi\left(\frac{f-B/2}{B}\right)\right]$$

Por transformada de Fourier inversa,

$$\hat{x}(t) = jA[B\text{sinc}(Bt)\exp(-j\pi Bt) - B\text{sinc}(Bt)\exp(j\pi Bt)]$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$\bar{x}(t) = 2AB \operatorname{sinc}(Bt) \sin(\pi Bt) = 2A \frac{\sin^2(\pi Bt)}{\pi t}$$

♣

♣ Ejemplo 2.23

Determinar la transformada de Hilbert de la señal pasabanda

$$x(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{con} \quad f_c \geq B$$

Solución

Sea $m(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) \Leftrightarrow M(f) = A \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$; $m(t)$ es una señal pasabajo.

Del teorema de la modulación,

$$X(f) = \frac{A}{2} \left[\Pi\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) \right], \text{ y según el procedimiento gráfico de la Fig. 2.30(c),}$$

$$\bar{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f) = -j \frac{A}{2} \operatorname{sgn}(f) \left[\Pi\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) \right]$$

$$\bar{X}(f) = j \frac{A}{2} \left[\Pi\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) - \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) \right]$$

Por transformada de Fourier inversa,

$$\bar{x}(t) = j \frac{A}{2} [2B \operatorname{sinc}(2Bt) \exp(-j2\pi f_c t) - 2B \operatorname{sinc}(2Bt) \exp(j2\pi f_c t)]$$

$$\bar{x}(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) \sin(2\pi f_c t)$$

En general, si $m(t)$ es una señal pasabajo de banda limitada B y $f_c \geq B$, se cumple que si $x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$, entonces $\bar{x}(t) = m(t) \sin(2\pi f_c t)$, y si $x(t) = m(t) \sin(2\pi f_c t)$, entonces $\hat{x}(t) = -m(t) \cos(2\pi f_c t)$. Estos resultados son muy importantes en el análisis de sistemas de comunicación y los estaremos utilizando constantemente.

♣

♣ Ejemplo 2.24

Determinar la transformada de Hilbert de la señal $x(t) = m(t) \cdot c(t)$, donde se cumple que $M(f)C(f) = 0$ para todo f . Esto quiere decir que los espectros $M(f)$ y $C(f)$ no se solapan. Vamos a suponer entonces que $M(f) = 0$ para $|f| > W$ y $C(f) = 0$ para $|f| < W$ ($M(f)$ es pasabajo y $C(f)$ pasabanda o pasaalto) donde W es una frecuencia cualquiera.

$$\text{Entonces, } x(t) = m(t)c(t) \Leftrightarrow X(f) = M(f) * C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} M(v)C(f-v)dv$$

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \exp(j2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{\infty} -j \operatorname{sgn}(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} M(v)C(f-v)dv \right] \exp(j2\pi ft) df$$

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} -j \operatorname{sgn}(f) M(v)C(f-v) \exp(j2\pi ft) df \right] dv$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Haciendo el cambio de variables $u = f - v$, la integral dentro de los corchetes queda en la forma

$$\bar{x}(t) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(u+v) M(v) C(u) \exp[j2\pi t(u+v)] du \right] dv$$

pero como $M(v)C(u)$ es diferente de cero solamente para $|v| < W$ y $|u| > W$, entonces $\text{sgn}(u+v) = \text{sgn}(u)$ y las integrales se pueden separar en la forma siguiente:

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M(v) \exp(j2\pi tv) dv \cdot \int_{-\infty}^{\infty} -j \text{sgn}(u) C(u) \exp(j2\pi tu) du$$

pero $\int_{-\infty}^{\infty} M(v) \exp(j2\pi tv) dv = m(t)$ y $\int_{-\infty}^{\infty} -j \text{sgn}(u) C(u) \exp(j2\pi tu) du = \bar{c}(t)$

entonces $\bar{x}(t) = m(t) \cdot \bar{c}(t)$ (2.88)

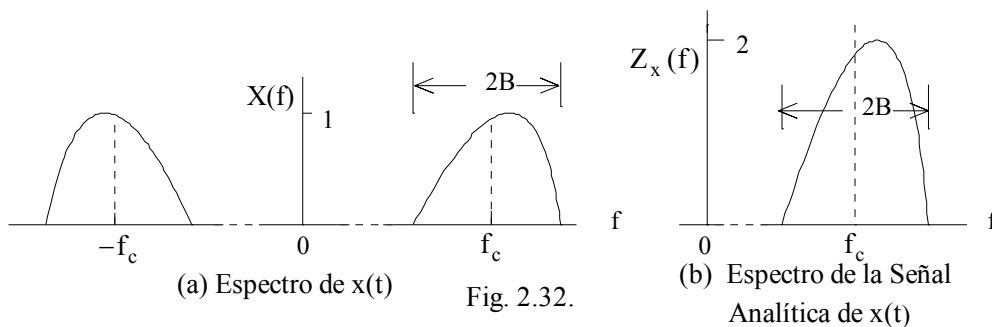
La transformada de Hilbert del producto de dos señales, una pasabaja y la otra pasaalto (o pasabanda), que no se solapan en frecuencia, es igual al producto de la señal pasabaja por la transformada de Hilbert de la señal pasaalto (o pasabanda). Este resultado también es importante en el análisis de señales y sistemas pasabanda.

♣

2.7.2. La Señal Analítica

Consideremos ahora el concepto de señal analítica. Sea $x(t)$ una señal real pasabanda cuyo espectro $X(f)$, de ancho de banda $2B$, está concentrado alrededor de las frecuencias $\pm f_c$, como se muestra en la Fig. 2.32(a).

En la mayoría de las señales pasabanda empleadas en las comunicaciones, el ancho de banda $2B$ es pequeño en comparación con f_c , es decir, $f_c \gg B$; en este caso se dice que estas señales son “**señales de banda angosta**”. Nótese que, en general, estas señales no tienen espectros simétricos respecto a $\pm f_c$, pero sí respecto al origen, pues siendo $x(t)$ real, su espectro $X(f)$ tendrá simetría hermitica. Prácticamente, todos los sistemas de comunicación (radio, TV, comunicación civil, militar y aficionado) utilizan señales y sistemas de banda angosta.



Si $\bar{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$, se puede formar la siguiente señal compleja

$$z_x(t) = x(t) + j\bar{x}(t) \quad (2.89)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La señal $z_x(t)$ se denomina “**señal analítica de $x(t)$** ” o “**preenvolvente de $x(t)$** ”. La señal analítica es muy útil en el análisis de señales y sistemas pasabanda, como lo veremos de inmediato.

Una característica muy importante de la señal analítica es el comportamiento de su transformada de Fourier. En efecto, la transformada de Fourier de $z_x(t)$ es

$$Z_x(f) = X(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)X(f)] = [1 + \operatorname{sgn}(f)]X(f) \quad (2.90a)$$

$$\text{o también } Z_x(f) = 2X(f)u(f) \quad (2.90b)$$

El espectro de la señal analítica de $x(t)$ es idénticamente nulo para $f < 0$, como se muestra en la Fig. 2.32(b). La señal analítica $z_x(t)$ no tiene existencia física, pero nos facilita el análisis de señales y sistemas pasabanda.

Como $z_x(t)$ es compleja, ella puede expresarse en la forma

$$z_x(t) = |z_x(t)| \exp[j\phi_z(t)] \quad (2.91)$$

$$\text{Por consiguiente, } x(t) = \operatorname{Re}\{z_x(t)\} = |z_x(t)| \cos[\phi_z(t)] \quad (2.92a)$$

$$\hat{x}(t) = \operatorname{Im}\{z_x(t)\} = |z_x(t)| \sin[\phi_z(t)] \quad (2.92b)$$

$$\text{donde } |z_x(t)| = E_z(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad \text{y} \quad \phi_z(t) = \arctg \frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \quad (2.93)$$

$E_z(t)$ y $\phi_z(t)$ se conocen con los nombres de “**envolvente**” y “**fase**” de $z_x(t)$, respectivamente. La envolvente $E_z(t)$ se aproximará bastante a la salida de un detector de envolvente físico para señales de banda angosta. Nótese que la envolvente $E_z(t)$ sola no caracterizará por completo a la señal pasabanda $x(t)$ porque el resto de la información está en la fase $\phi_z(t)$. Como a una señal $x(t)$ corresponde de manera unívoca la señal analítica $z_x(t)$, la representación de $x(t)$ en la forma (2.92a), y de acuerdo con las expresiones (2.93), es también unívoca, es decir, la señal $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ son unívocas.

Obsérvese que el concepto de señal analítica o preenvolvente se aplica a cualquiera señal que posea un espectro. Nosotros hemos dado preferencia a señales pasabanda de banda angosta, donde $f_c \gg B$, pues estas señales son de gran utilización en comunicaciones; sin embargo, no necesariamente las señales tienen que ser de banda angosta, es suficiente que se cumpla que $f_c \geq B$.

♣ Ejemplo 2.25

Calcular la preenvolvente, la envolvente y la fase de la señal del Ejemplo 2.23.

Del Ejemplo 2.23 y con $f_c \geq B$,

$$x(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{y} \quad \hat{x}(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{De (2.89), } z_x(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) [\cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)]$$

$$z_x(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt) \exp(j2\pi f_c t), \text{ de donde}$$

$$E_z(t) = 2AB |\operatorname{sinc}(2Bt)| \quad \text{y} \quad \phi_z(t) = 2\pi f_c t$$

♣

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.7.3. Señales Pasabanda

Consideremos ahora el producto $z_x(t) \exp(-j2\pi f_c t)$ y definamos una nueva señal

$$\tilde{z}_x(t) = z_x(t) \exp(-j2\pi f_c t) = x_c(t) + jx_s(t) \quad (2.94)$$

donde $x_c(t)$ y $x_s(t)$ son dos señales cuyas características determinaremos a continuación.

La señal compleja $\tilde{z}_x(t)$ se conoce con el nombre de “**envolvente compleja de $x(t)$** ”.

De (2.89) y (2.94),

$$z_x(t) = \tilde{z}_x(t) \exp(j2\pi f_c t) = x(t) + j\tilde{x}(t) \quad (2.95)$$

En consecuencia, para $f_c \geq B$,

$$x_c(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{z}_x(t)\} = x(t) \cos(2\pi f_c t) + \tilde{x}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.96)$$

$$x_s(t) = \operatorname{Im}\{\tilde{z}_x(t)\} = \tilde{x}(t) \cos(2\pi f_c t) - x(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.97)$$

de donde

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.98)$$

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) \sin(2\pi f_c t) + x_s(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.99)$$

Por transformada de Fourier, podemos ver que, Figs. 2.32 y 2.33,

$$\tilde{Z}_x(f) = Z_x(f + f_c), \text{ siendo su conjugado } [\tilde{Z}_x(f)]^* = \tilde{Z}_x^*(-f) = Z_x^*(-f + f_c) \quad (2.100)$$

$$Z_x(f) = \tilde{Z}_x(f - f_c) = [1 + \operatorname{sgn}(f)]X(f); \quad Z_x(-f) = \tilde{Z}_x(-f - f_c) \quad (2.101)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}[\tilde{Z}_x(-f - f_c) + \tilde{Z}_x(f - f_c)] = \frac{1}{2}[Z_x(-f) + Z_x(f)] \quad (2.102)$$

La envolvente compleja $\tilde{z}_x(t)$ de una señal real pasabanda $x(t)$ es una señal compleja pasabajo cuyo espectro $\tilde{Z}_x(f)$ se muestra en la Fig. 2.33(a). Nótese que el espectro $\tilde{Z}_x(f)$ no es simétrico respecto al origen, como tampoco lo es su conjugado $\tilde{Z}_x^*(-f)$, Fig. 2.33(b).

Vamos a demostrar que si $x(t)$ es una señal real pasabanda, entonces $x_c(t)$ y $x_s(t)$ serán señales reales pasabajo de banda limitada B .

De (2.94), $\tilde{Z}_x(f) = X_c(f) + jX_s(f)$, y puesto que $\tilde{z}_x(t)$ es compleja, se verifica que

$$\operatorname{TF}\{\tilde{z}_x^*(t)\} = \tilde{Z}_x^*(-f) = X_c(f) - jX_s(f)$$

$X_c(f)$ y $X_s(f)$ se pueden expresar entonces en función de $\tilde{Z}_x(f)$ y $\tilde{Z}_x^*(-f)$. En efecto,

$$X_c(f) = \frac{1}{2}[\tilde{Z}_x(f) + \tilde{Z}_x^*(-f)] \quad (2.103)$$

$$X_s(f) = -j\frac{1}{2}[\tilde{Z}_x(f) - \tilde{Z}_x^*(-f)] \quad (2.104)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Como $\tilde{Z}_x(f)$ es una señal pasabajo, $\tilde{Z}_x^*(-f)$ lo será también, y de (2.103) y (2.104), $x_c(t)$ y $x_s(t)$ serán también señales pasabajo. En la Fig. 2.33(c), (d) y (e), se muestra la formación de $X(f)$ a partir de $Z_x(f)$ y $Z_x(-f)$, y $X_c(f)$ y $X_s(f)$ a partir de $\tilde{Z}_x(f)$ y $\tilde{Z}_x^*(-f)$.

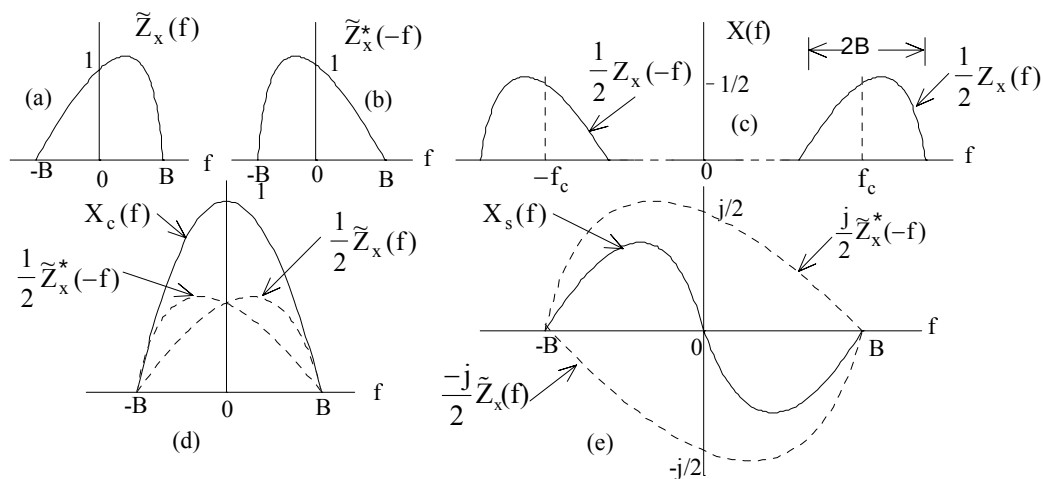


Fig. 2.33. Formación de $X(f)$, $X_c(f)$ y $X_s(f)$

$X_c(f)$ y $X_s(f)$ son las componentes simétricas y antisimétricas, respectivamente, del espectro $\tilde{Z}_x(f)$ de la envolvente compleja. Vemos también que $X_c(f)$ y $X_s(f)$ están relacionadas con las partes de $X(f)$ que son simétricas y antisimétricas, respectivamente, en relación con la frecuencia central f_c . De aquí resulta que, de (2.96) y (2.97),

$$X_c(f) = \begin{cases} [X(f+f_c) + X(f-f_c)] & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } B < |f| \end{cases} \quad (2.105)$$

$$X_s(f) = \begin{cases} -j[X(f+f_c) - X(f-f_c)] & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } B < |f| \end{cases} \quad (2.106)$$

Con esto demostramos finalmente que las señales $x_c(t)$ y $x_s(t)$ son señales reales pasabajo de banda limitada B . Generalmente, $x_c(t)$ y $x_s(t)$ contienen información.

Nótese que si $X(f)$ es también simétrica respecto a la frecuencia central f_c , entonces $\tilde{Z}_x(f)$ será simétrica respecto al origen y no tendrá componente antisimétrica [$\tilde{Z}_x(t)$ será real]. Así que

$$\tilde{Z}_x(f) = \tilde{Z}_x(-f); \quad \tilde{Z}_x(-f-f_c) = \tilde{Z}_x(f+f_c) \quad (2.107a)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} [\tilde{Z}_x(f+f_c) + \tilde{Z}_x(f-f_c)]; \quad X_s(f) = 0 \quad (2.107b)$$

$$x_s(t) = 0; \quad \tilde{z}_x(t) = x_c(t); \quad x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.107c)$$

que es el caso de las señales moduladas, en el sentido visto en la Sección 1.7.5.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

En resumen, una señal real pasabanda $x(t)$ con un ancho de banda $2B$ y centrada en la frecuencia f_c , se puede expresar en términos de dos señales pasabajo $x_c(t)$ y $x_s(t)$ reales (que pueden contener información), cada una de banda limitada B , mediante la expresión

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) - x_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad \text{con} \quad f_c \geq B \quad (2.108)$$

La expresión (2.108) es una generalización del teorema de la modulación que vimos anteriormente. Esta expresión es básica en todos los sistemas de modulación lineal, como veremos en los próximos capítulos.

Las señales pasabajo $x_c(t)$ y $x_s(t)$ se denominan “**componentes ortogonales de $x(t)$** ” y pueden contener información. En particular, $x_c(t)$ es la “**componente en fase**”, mientras que $x_s(t)$ es la “**componente en cuadratura**” o “**componente ortogonal**”. La expresión (2.108) se conoce también con el nombre de “**forma canónica de $x(t)$** ”. Los mismos argumentos se aplican a la transformada de Hilbert de $x(t)$, como se desprende de la expresión (2.99). Nótese que las asimetrías del espectro $X(f)$ en relación con la frecuencia f_c son producidas por la componente en cuadratura $x_s(t)$; en efecto, si el espectro $X(f)$ es simétrico respecto a f_c , la correspondiente señal $x(t)$ pasabanda no poseerá una componente en cuadratura, es decir, $x_s(t) = 0$.

La señal $x(t)$ dada por (2.108) se puede escribir en la forma polar

$$x(t) = E(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)] \quad (2.109)$$

$$\text{donde} \quad E(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \quad \text{es la “**envolvente natural**” de } x(t) \quad (2.110)$$

$$\text{y} \quad \psi(t) = \arctg \frac{x_s(t)}{x_c(t)} \quad \text{es la “**fase natural**” de } x(t) \quad (2.111)$$

$$\text{pero, de (2.94), vemos que} \quad |\tilde{z}_x(t)| = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} = E(t)$$

$$\text{de donde} \quad x(t) = |\tilde{z}_x(t)| \cos[2\pi f_c t + \psi(t)] \quad (2.112)$$

La envolvente natural de una señal pasabanda real $x(t)$ viene dada por el módulo de su correspondiente envolvente compleja $\tilde{z}_x(t)$.

Desde el punto de vista de la interpretación física de la envolvente compleja, algunas veces es conveniente definir la “**frecuencia instantánea**” de la señal pasabanda $x(t)$. Entonces, por definición, la frecuencia instantánea de $x(t)$ es, de (2.109),

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \psi(t)] \\ f_i(t) &= f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Esta función corresponderá aproximadamente a lo que da a la salida un circuito discriminador de frecuencias, utilizado para demodular señales moduladas en frecuencia. El concepto de frecuencia instantánea es de gran aplicación en los sistemas de modulación angular, como veremos en el Capítulo VI.

La preenvolvente $z_x(t)$ de una señal real pasabanda $x(t)$ es entonces una señal compleja pasabanda cuyo valor depende de la frecuencia f_c . Por otra parte, la envolvente natural $E(t)$ es siempre una señal pasabajo que en los sistemas de comunicación contiene la información a transmitir, mientras que la envolvente compleja $\tilde{z}_x(t)$ es una señal compleja pasabajo cuyos

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

valores son independientes de la frecuencia f_c . Estos conceptos son de gran aplicación en comunicaciones, pues, mediante una técnica conocida como “**detección sincrónica o coherente**”, se puede extraer de $x(t)$ su envolvente natural $E(t)$ portadora de información, es decir, se puede aislar o extraer, juntas o separadamente, las bandas de frecuencia sobre y bajo la frecuencia f_c , que son las que poseen la información. Esto lo trataremos más adelante.

En general, cualquiera señal $x(t)$ que se pueda representar en la forma canónica

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) \pm x_s(t)\sin(2\pi f_c t + \theta) \quad (2.114)$$

donde $x_c(t)$ y $x_s(t)$ son señales reales pasabajo de banda limitada B portadoras de información, con $f_c \geq B$, siendo θ un ángulo o desfase arbitrario y $x_c(t) \neq x_s(t)$, será una señal real pasabanda con un espectro $X(f)$ asimétrico respecto a f_c , de ancho de banda $2B$ y centrado en las frecuencias $\pm f_c$. Los diferentes tipos de modulación lineal que se estudiarán en los Capítulos V y VI son casos particulares de la expresión (2.114) o (2.108), en los cuales generalmente $f_c \gg B$, caso de la transmisión en banda angosta.

Los resultados anteriores se pueden resumir en los dos esquemas de la Fig. 2.34.

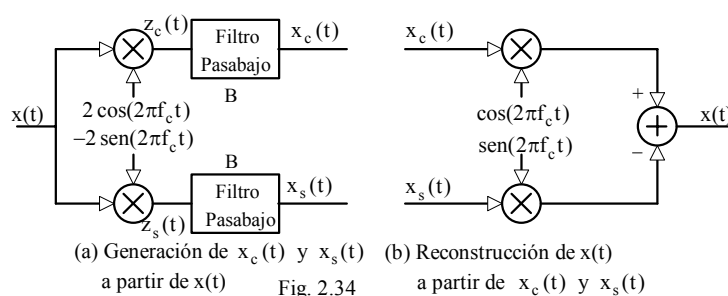


Fig. 2.34

Las señales pasabajo $x_c(t)$ y $x_s(t)$ se pueden deducir mediante el diagrama de bloques de la Fig. 2.34(a), que es consecuencia directa de las expresiones (2.105) y (2.106). Los filtros pasabajo son idénticos y de ancho de banda B .

La señal pasabanda $x(t)$ se puede reconstituir a partir de sus componentes ortogonales $x_c(t)$ y $x_s(t)$ en la forma mostrada en la Fig. 2.34(b), que es una realización término a término de la expresión (2.108). Los dos esquemas de la Fig. 2.34 son básicos en el análisis de todos los sistemas de modulación lineal, como veremos en los Capítulos V y VI.

♣ Ejemplo 2.26

Calcular las componentes ortogonales del espectro $X(f)$ de la Fig. 2.35(a).

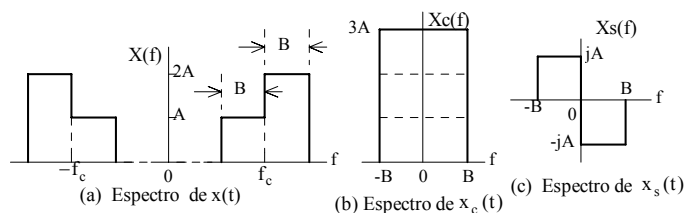


Fig. 2.35

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

El espectro $X(f)$ se puede expresar en la forma, Fig. 2.35(a),

$$X(f) = 2A \left[\Pi \left(\frac{f + f_c + B/2}{B} \right) + \Pi \left(\frac{f - f_c - B/2}{B} \right) \right] + A \left[\Pi \left(\frac{f + f_c - B/2}{B} \right) + \Pi \left(\frac{f - f_c + B/2}{B} \right) \right]$$

$$Z_x(f) = [1 + \text{sgn}(f)]X(f) = 4A \Pi \left(\frac{f - f_c - B/2}{B} \right) + 2A \Pi \left(\frac{f - f_c + B/2}{B} \right)$$

$$\tilde{Z}_x(f) = Z_x(f + f_c) = 4A \Pi \left(\frac{f - B/2}{B} \right) + 2A \Pi \left(\frac{f + B/2}{B} \right)$$

$$\tilde{Z}_x(-f) = 4A \Pi \left(\frac{-f - B/2}{B} \right) + 2A \Pi \left(\frac{-f + B/2}{B} \right)$$

En este caso particular se verifica que

$$\Pi \left(\frac{-f - B/2}{B} \right) = \Pi \left(\frac{f + B/2}{B} \right) \quad \text{y} \quad \Pi \left(\frac{-f + B/2}{B} \right) = \Pi \left(\frac{f - B/2}{B} \right)$$

entonces $\tilde{Z}_x(-f) = 4A \Pi \left(\frac{f + B/2}{B} \right) + 2A \Pi \left(\frac{f - B/2}{B} \right)$

Los espectros de las componentes ortogonales serán

$$X_c(f) = \frac{1}{2} [\tilde{Z}_x(f) + \tilde{Z}_x(-f)] = 3A \left[\Pi \left(\frac{f + B/2}{B} \right) + \Pi \left(\frac{f - B/2}{B} \right) \right] = 3A \Pi \left(\frac{f}{2B} \right), \text{ de donde}$$

$$x_c(t) = 6AB \text{sinc}(2Bt)$$

$$X_s(f) = -j \frac{1}{2} [\tilde{Z}_x(f) - \tilde{Z}_x(-f)] = -j \left[-A \Pi \left(\frac{f + B/2}{B} \right) + A \Pi \left(\frac{f - B/2}{B} \right) \right]$$

$$X_s(f) = jA \left[\Pi \left(\frac{f + B/2}{B} \right) - \Pi \left(\frac{f - B/2}{B} \right) \right], \text{ de donde}$$

$$x_s(t) = jAB \text{sinc}(Bt) \exp(-j\pi Bt) - jAB \text{sinc}(Bt) \exp(j\pi Bt)$$

$$x_s(t) = 2AB \text{sinc}(Bt) \sin(\pi Bt) = \frac{2A}{\pi t} \sin^2(\pi Bt)$$

Los espectros de $x_c(t)$ y $x_s(t)$ se muestran en la Fig. 2.35 (b) y (c), respectivamente. Como $X(f)$ es asimétrica respecto a f_c , $x(t)$ contiene una componente en cuadratura $x_s(t)$.

♣

♣ Ejemplo 2.27

Sea la señal pasabanda $x(t) = A[1 + 2\sin(2\pi f_a t)]\cos(2\pi f_c t)$. Determinar sus componentes ortogonales $x_c(t)$, $X_c(f)$, $x_s(t)$ y $X_s(f)$ en los siguientes casos:

- A partir de la envolvente compleja de $x(t)$
- A partir de la Fig. 2.34(a)

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Solución

(a) Sea $x(t) \Leftrightarrow X(f)$

Desarrollando, $x(t) = A \cos(2\pi f_a t) + A \sin[2\pi(f_c + f_a)t] - A \sin[2\pi(f_c - f_a)t]$

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + j \frac{A}{2} [\delta(f + f_c + f_a) - \delta(f - f_c - f_a)] \\ - j \frac{A}{2} [\delta(f + f_c - f_a) - \delta(f - f_c + f_a)]$$

$$Z_x(f) = 2X(f)u(f) = A\delta(f - f_c) - jA\delta(f - f_c - f_a) + jA\delta(f - f_c + f_a)$$

$$\tilde{Z}_x(f) = Z_x(f + f_c) = A\delta(f) - jA\delta(f - f_a) + jA\delta(f + f_a)$$

$$\tilde{Z}_x^*(-f) = Z_x^*(-f + f_c) = A\delta(f) + jA\delta(-f - f_a) - jA\delta(-f + f_a) \\ = A\delta(f) + jA\delta(f + f_a) - jA\delta(f - f_a)$$

$$X_c(f) = \frac{1}{2} [\tilde{Z}_x(f) + \tilde{Z}_x^*(-f)] = A \left\{ \delta(f) + 2 \frac{j}{2} [\delta(f + f_a) - \delta(f - f_a)] \right\}$$

$$x_c(t) = A[1 + 2\sin(2\pi f_a t)] \quad \text{Componente en fase}$$

$$X_s(f) = \frac{1}{2} [\tilde{Z}_x(f) - \tilde{Z}_x^*(-f)] = 0 \Leftrightarrow x_s(t) = 0 \quad \text{No tiene componente en cuadratura}$$

En la Fig. 2.36 se muestran $Z_x(f)$, $\tilde{Z}_x(f)$ y $\tilde{Z}_x^*(-f)$.

(b) De la Fig. 2.34(a),

$$z_c(t) = x(t)2 \cos(2\pi f_c t) = 2A[1 + 2\sin(2\pi f_a t)]\cos^2(2\pi f_c t) \\ = A[1 + 2\sin(2\pi f_a t)]\{1 + \cos[2\pi(2f_c)t]\} \\ = A\{1 + \cos[2\pi(2f_c)t] + 2\sin(2\pi f_a t) + \sin[2\pi(2f_c + f_a)t] - \sin[2\pi(2f_c - f_a)t]\}$$

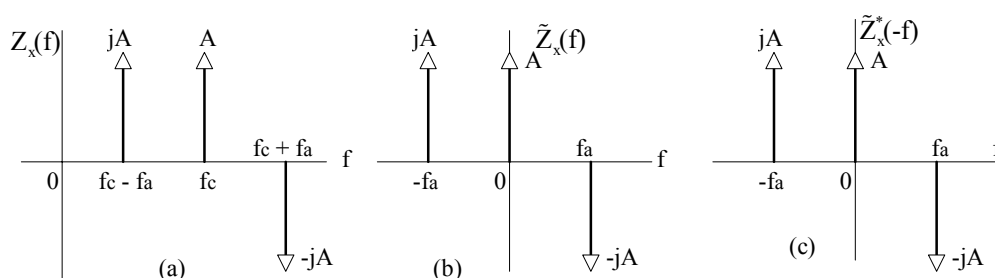


Fig. 2.36. Espectros $Z_x(f)$, $\tilde{Z}_x(f)$ y $\tilde{Z}_x^*(-f)$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

El filtro pasabajo elimina todas las componentes de alta frecuencia (alrededor de $2f_c$). La salida $x_c(t)$ será entonces

$$x_c(t) = A[1 + 2\text{sen}(2\pi f_a t)], \text{ igual al valor obtenido en (a)}$$

De la Fig. 2.34(a),

$$\begin{aligned} z_s(t) &= -x(t)2\text{sen}(2\pi f_c t) = -2A[1 + 2\text{sen}(2\pi f_a t)]\cos(2\pi f_c t)\text{sen}(2\pi f_a t) \\ &= -A\{\text{sen}[2\pi(f_c + f_a)t] - \text{sen}[2\pi(f_c - f_a)t] + 2\text{sen}(2\pi f_a t)\text{sen}[2\pi(f_c + f_a)t] - \\ &\quad - 2\text{sen}(2\pi f_a t)\text{sen}[2\pi(f_c - f_a)t]\} \end{aligned}$$

Todas las componentes son de alta frecuencia y son eliminadas por el filtro pasabajo; por lo tanto,

$$x_s(t) = 0 \Leftrightarrow X_s(f) = 0$$

Nótese lo fácil que es operar directamente con la Fig. 2.34.

♣

2.7.4. Señales Moduladas y Bandas Laterales

Modulación en Doble Banda Lateral

El concepto de señal analítica permite entender en profundidad la noción de “Banda Lateral” en el estudio de las señales moduladas. Aunque la aplicación práctica de estos conceptos no la veremos sino en los Capítulos V y VI, conviene en este punto conocer el significado de “**Banda Lateral Doble**” y “**Banda Lateral Única**”, de gran importancia en los sistemas de modulación lineal.

Sea $m(t) \Leftrightarrow M(f)$ una señal real pasabajo de banda limitada B que contiene alguna información a transmitir: $m(t)$ es un mensaje. Hagamos el producto

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}[M(f + f_c) + M(f - f_c)]$$

Si $f_c \geq B$, se cumple que

$$\bar{x}(t) = m(t)\text{sen}(2\pi f_c t) \Leftrightarrow j\frac{1}{2}[M(f + f_c) - M(f - f_c)]$$

$$\text{Es evidente que } \begin{cases} M(f - f_c) = 0 & \text{para } f \leq 0 \\ M(f + f_c) = 0 & \text{para } f \geq 0 \end{cases}$$

Podemos definir entonces una señal $z_x(t) \Leftrightarrow Z_x(f)$ en la forma

$$Z_x(f) = M(f - f_c) \Leftrightarrow z_x(t) = m(t)\exp(j2\pi f_c t)$$

Puesto que $m(t)$ es real, $M(f)$ será simétrico respecto al origen, y $Z_x(f)$ será simétrico respecto a f_c . Por lo tanto, $z_x(t)$ será la función analítica de $x(t)$, siendo $x(t)$ una señal real pasabanda. Se tiene entonces que

$$z_x(t) = x(t) + j\bar{x}(t) = m(t)\exp(j2\pi f_c t) \quad (2.115)$$

$$Z_x(-f) = M(-f - f_c) = M(-f + f_c) = M(f + f_c) \quad (2.116)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$X(f) = \frac{1}{2} [Z_x(-f) + Z_x(f)] = \frac{1}{2} [M(f + f_c) + M(f - f_c)]$$

resultado que ya habíamos obtenido, expresión (1.95), que es el Teorema de la Modulación.

En la Fig. 2.37 se muestra $M(f)$, $Z_x(f)$ y $X(f)$. Se sombrea una de las bandas de $M(f)$ para mostrar su ubicación al ser modulada.

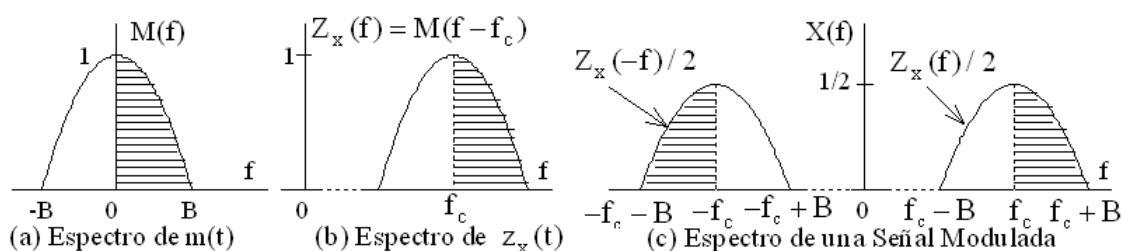


Fig. 2.37 en Doble Banda Lateral

Si $M(f)$ no tiene simetría hermitica [$m(t)$ no es real], entonces $Z_x(-f) \neq M(f + f_c)$ y el espectro de $x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$ tampoco tendrá simetría hermitica. Pero si $M(f)$ tiene simetría hermitica, entonces representará al espectro de una señal real modulada y tendrá la forma de la Fig. 2.37(c). Nótese que el espectro $M(f)$ aparece ahora centrado en las frecuencias $\pm f_c$. La banda de frecuencias de $X(f)$ o de $Z_x(f)$ en el intervalo de frecuencias $f_c < |f| < [f_c + B]$ se denomina “**Banda Lateral Superior**”; mientras que la banda de frecuencias en el intervalo $[f_c - B] < |f| < f_c$ se denomina “**Banda Lateral Inferior**”. La banda lateral inferior y la banda lateral superior son imágenes especulares respecto a f_c . Como en el espectro $X(f)$ de la señal modulada $x(t)$ aparecen ambas bandas laterales, se dice entonces que $x(t)$ es una señal modulada de “**Doble Banda Lateral**”.

La señal $x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$ es entonces una señal modulada de doble banda lateral cuyo espectro es simétrico alrededor de f_c y cuya componente en cuadratura es cero. Esto significa que la envolvente natural de $x(t)$ es simplemente el mensaje a transmitir y la fase natural es cero, lo cual en términos prácticos equivale a decir que toda la información está contenida en su envolvente natural y bastará extraer la envolvente natural para recuperar la información en ella contenida.

Obsérvese que la señal $m(t)$, que es la envolvente natural de $x(t)$, se puede determinar, “extraer” o “detectar” a partir de $x(t)$ formando el producto (Ver Problema de Aplicación 2.28) $x(t)2 \cos(2\pi f_c t) = m(t) + m(t) \cos(4\pi f_c t)$ y pasándolo por un filtro pasabajo que elimina las componentes de alta frecuencia (alrededor de $\pm 2f_c$). Esta operación, denominada “**detección sincrónica o coherente**”, está representada en la rama superior de la Fig. 2.34(a). La Modulación en Doble Banda Lateral es muy utilizada en la transmisión de señales digitales.

♣ Ejemplo 2.28. Modulación Ortogonal o en Cuadratura (QAM)

Cuando se transmite una señal pasabajo de banda limitada B en doble banda lateral, la señal modulada ocupa una gama de frecuencias de ancho $2B$ centrada en la frecuencia f_c de la portadora, y cualquiera otra señal que aparezca dentro de ese ancho de banda constituirá una distorsión o una interferencia. Sin embargo, si se aplica las propiedades de la forma canónica de una señal pasabanda, puede enviarse simultáneamente dos señales diferentes por el mismo canal, como se muestra en la Fig. 2.38. Este es el sistema de modulación QAM muy utilizado en la práctica.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

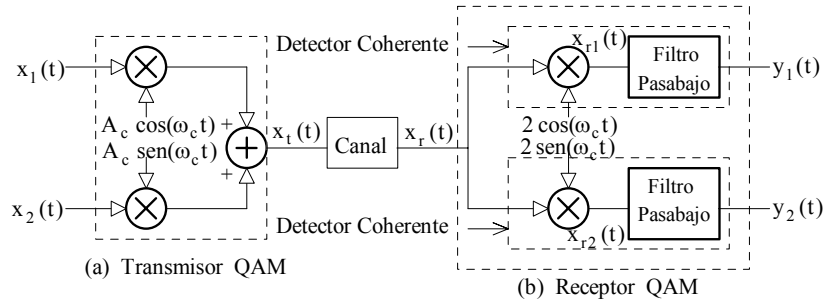


Fig. 2.38. Modulación QAM.

Dispongamos la Fig. 2.34 en la forma mostrada en la Fig. 2.38, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos señales pasabajo diferentes, de banda limitada B , con $f_c \gg B$ y que contienen información; los filtros son pasabajo de ancho de banda B . En la práctica este tipo de modulación se denomina “**Modulación Ortogonal o en Cuadratura (Quadrature Amplitude Modulation, QAM)**”.

Puesto que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son diferentes, el espectro de $x_t(t)$ estará centrado en $\pm f_c$ pero será asimétrico, es decir, sus dos bandas laterales tendrán perfiles diferentes.

Para simplificar el análisis, supongamos que $x_r(t) = x_t(t)$; entonces,

$$x_r(t) = x_1(t)A_c \cos(\omega_c t) + x_2(t)A_c \sin(\omega_c t)$$

Por la rama superior del receptor se tendrá

$$x_{r1}(t) = x_r(t)2 \cos(\omega_c t) = 2A_c x_1(t) \cos^2(\omega_c t) + 2A_c x_2(t) \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t)$$

$$x_{r1}(t) = A_c x_1(t) + A_c x_1(t) \cos(2\omega_c t) + A_c x_2(t) \sin(2\omega_c t)$$

El filtro pasabajo de ancho de banda B rechaza todas las frecuencias superiores a su banda de paso, de modo que la salida del detector coherente será

$$y_1(t) = A_c x_1(t)$$

Igualmente, por la rama inferior del receptor se obtiene

$$y_2(t) = A_c x_2(t)$$

y hemos recuperado las dos señales diferentes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que fueron transmitidas por el mismo ancho de banda.

Con la modulación QAM el rendimiento del canal aumenta al doble. Este tipo de modulación es muy utilizado en la transmisión de impulsos y señales continuas, como veremos en los Capítulos V y VI.

♣

Modulación en Banda Lateral Unica

Sea $z_m(t)$ la señal analítica de una señal mensaje $m(t)$, es decir,

$$Z_m(f) = [1 + \text{sgn}(f)]M(f) \Leftrightarrow z_m(t), \quad \text{donde} \quad z_m(t) = m(t) + j\hat{m}(t)$$

$Z_m(f)$ tendrá la forma mostrada en la Fig. 2.39(a).

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

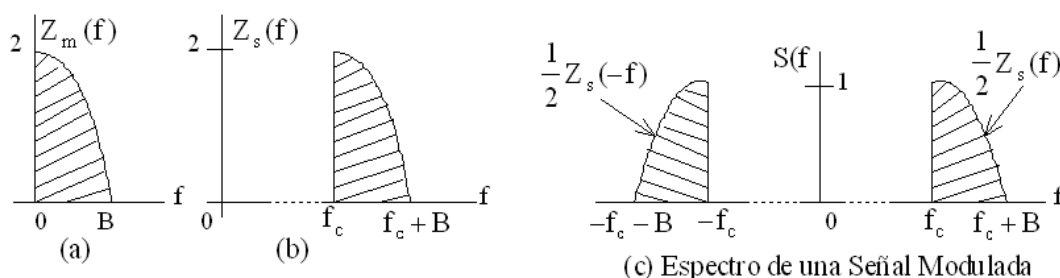


Fig. 2.39.

(c) Espectro de una Señal Modulada en Banda Lateral Unica.

Formemos ahora la señal $z_s(t) = z_m(t) \exp(j2\pi f_c t) \Leftrightarrow Z_s(f) = Z_m(f - f_c)$ donde podemos considerar a $z_s(t)$ como la señal analítica de una señal real pasabanda $s(t)$, es decir, $z_s(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$; por lo tanto,

$$s(t) = \operatorname{Re}\{z_s(t)\} = \operatorname{Re}\{[m(t) + j\hat{m}(t)] \exp(j2\pi f_c t)\}, \text{ de donde}$$

$$s(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t) \quad \text{con } f_c \geq B \quad (2.117)$$

Veamos ahora qué forma tiene el espectro $S(f)$ de $s(t)$, expresión (2.117).

De las Figs. 2.37(b) y 2.39(b), podemos escribir

$$Z_s(f) = 2M(f - f_c)u(f - f_c) \quad (2.118)$$

$$Z_s(-f) = 2M(f + f_c)u(-f - f_c) \quad (2.119)$$

Asimismo, por transformada de Fourier de (2.117),

$$S(f) = \frac{1}{2} [M(f + f_c) + M(f - f_c)] - j \frac{1}{2} [\hat{M}(f + f_c) - \hat{M}(f - f_c)]$$

Como $\hat{M}(f) = -j \operatorname{sgn}(f)M(f)$, entonces $S(f)$ queda en la forma

$$S(f) = \frac{1}{2} \{ M(f + f_c)[1 - \operatorname{sgn}(f + f_c)] + M(f - f_c)[1 + \operatorname{sgn}(f - f_c)] \}$$

pero $1 - \operatorname{sgn}(f + f_c) = 2u(-f - f_c)$ y $1 + \operatorname{sgn}(f - f_c) = 2u(f - f_c)$, de donde

$$S(f) = \frac{1}{2} [2M(f + f_c)u(-f - f_c) + 2M(f - f_c)u(f - f_c)]$$

De (2.118) y (2.119),

$$S(f) = \frac{1}{2} [Z_s(-f) + Z_s(f)] \quad (2.120)$$

Este espectro tiene la forma mostrada en la Fig. 2.39(c). En este caso se dice que $s(t)$, dada por la expresión (2.117), es una señal modulada en “**Banda Lateral Unica**”, pues solamente aparecen las bandas laterales superiores. Se puede demostrar que si el signo de la componente en cuadratura de la expresión (2.117) es positivo, el espectro $S(f)$ contendrá solamente las bandas laterales inferiores. Obsérvese que la eliminación completa de una de las bandas laterales ocurre solamente cuando la componente en cuadratura de la señal modulada es la transformada de Hilbert de la componente en fase. Esto tiene una gran importancia de tipo práctico pues, como veremos en el Capítulo VI, el ancho de banda de transmisión se reduce a la mitad y el rendimiento del canal

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

aumenta al doble. Los sistemas telefónicos, como veremos en su oportunidad, son sistemas de banda lateral única.

Expresando (2.117) en forma polar

$$s(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \quad (2.121a)$$

$$\text{donde } A(t) = \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \quad \text{y} \quad \theta(t) = \arctg \frac{\hat{m}(t)}{m(t)} \quad (2.121b)$$

En resumen, en lo que se refiere a la transmisión de una señal mensaje $m(t)$, se puede utilizar la señal modulada $x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t)$ de doble banda lateral, o la señal de banda lateral única $s(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$. Sin embargo, como podemos ver en (2.121a) y (2.121b), la señal $s(t)$ de banda lateral única posee envolvente y fase, siendo las dos necesarias para la completa recuperación de $m(t)$; mientras que la señal $x(t)$ de doble banda lateral necesita solamente la envolvente, que en este caso es el mensaje $m(t)$. Por esta razón, los sistemas prácticos de modulación de doble banda lateral y los de banda lateral única no son completamente compatibles, como veremos en el Capítulo VI.

La recuperación de $m(t)$ a partir de $s(t)$ se puede efectuar también mediante detección coherente (Ver Problema de Aplicación 2.28).

2.7.5. Señales Pasabanda de Potencia

Consideremos el caso de señales de potencia, que son señales que no poseen una transformada de Fourier, como es el caso de las señales aleatorias. Se trata entonces de determinar la distribución de la potencia entre las componentes ortogonales de una señal pasabanda de potencia y puesto que no se puede utilizar la transformada de Fourier, utilizaremos las correspondientes densidades espectrales de potencia. Con la notación que hemos establecido para las señales de potencia, hagamos

$$x(t) \Rightarrow S_x(f); \quad x_c(t) \Rightarrow S_{xc}(f); \quad x_s(t) \Rightarrow S_{xs}(f)$$

donde $S_x(f)$, $S_{xc}(f)$ y $S_{xs}(f)$ son las densidades espectrales de potencia de $x(t)$, $x_c(t)$ y $x_s(t)$, respectivamente.

Con referencia a la Fig. 2.34(a) y del teorema de modulación para señales de potencia,

$$z_c(t) = x(t) 2 \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_{zc}(f) = [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)] \quad \text{para todo } f \quad (2.122)$$

Al pasar $z_c(t)$ por el filtro pasabajo se eliminan las componentes de alta frecuencia; por consiguiente,

$$S_{xc}(f) = \begin{cases} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)] & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{para } B < |f| \end{cases} \quad (2.123)$$

La deducción de $S_{xs}(f)$ es similar verificándose que $S_{xc}(f) = S_{xs}(f)$, lo cual está de acuerdo con el teorema de la modulación para señales de potencia. En la Fig. 2.40(b) se muestra el proceso de formación de $S_{xc}(f)$ y $S_{xs}(f)$.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

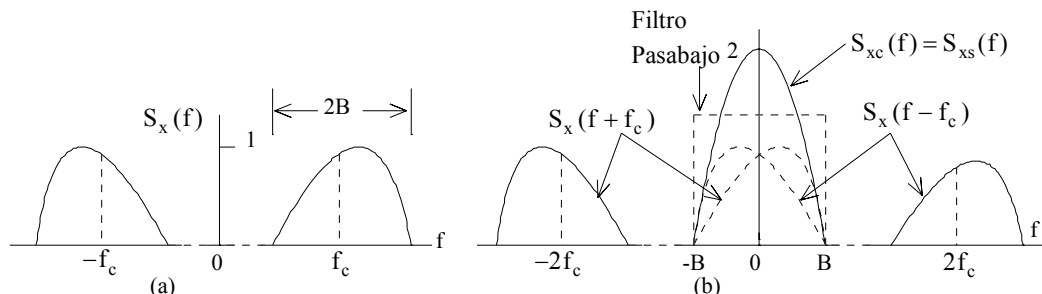


Fig. 2.40. Densidades Espectrales en Señales Pasabanda

Como el área bajo $S_x(f)$ es igual al área bajo $S_{xc}(f)$ o $S_{xs}(f)$, entonces

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x_c^2(t) \rangle = \langle x_s^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xc}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xs}(f) df \quad (2.124)$$

Las potencias contenidas en cada una de las componentes ortogonales son iguales entre sí e iguales a la potencia total de la señal pasabanda.

Estos resultados son muy importantes y se aplican sobre todo en señales pasabanda aleatorias como, por ejemplo, el ruido en el cálculo de las relaciones Señal/Ruido. La naturaleza aleatoria del ruido tiende a distribuir la potencia entre sus dos componentes ortogonales y esto es en contraste directo con las señales determinísticas en las cuales se puede controlar la fase a fin de obtener solamente términos en seno o en coseno.

La potencia promedio de una señal aleatoria pasabanda, de acuerdo con las expresiones (2.108) y (2.124), será entonces

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle x_c^2(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x_s^2(t) \rangle \quad (2.125)$$

La potencia promedio de una señal aleatoria se divide por igual entre sus dos componentes ortogonales.

2.7.6. Sistemas Pasabanda

Gran parte de la utilidad de la representación en envolvente compleja de una señal pasabanda se perdería si no fuera posible caracterizar directamente en función de ella los efectos del filtrado pasabanda. En efecto, resulta que el análisis del filtrado pasabanda de una señal pasabanda puede efectuarse mucho más fácilmente a través del análisis del filtrado pasabaja complejo de señales pasabaja complejas, como se demuestra a continuación [L. E. Franks, 1975].

Consideremos el filtro pasabanda de la Fig. 2.41(a), cuya función de transferencia es $H(f)$. Se supone que $h(t)$ es real, es decir, que $H(f)$ tiene simetría hermitica. La entrada al filtro es una señal pasabanda real $x(t) \Leftrightarrow X(f)$, Fig. 2.41(c); el ancho de banda del filtro es igual o mayor que el ancho de banda de la señal $x(t)$.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

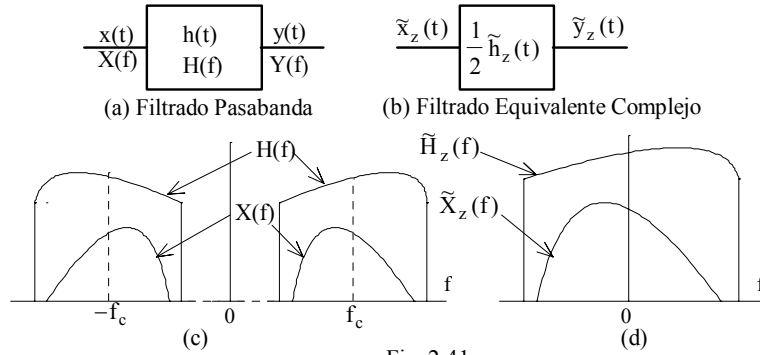


Fig. 2.41.

Sea entonces,

$$x_z(t) = x(t) + j\hat{x}(t); \quad \tilde{x}_z(t) = x_z(t) \exp(-j2\pi f_c t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

$$h_z(t) = h(t) + j\hat{h}(t); \quad \tilde{h}_z(t) = h_z(t) \exp(-j2\pi f_c t) = h_c(t) + jh_s(t)$$

$$y_z(t) = y(t) + j\hat{y}(t); \quad \tilde{y}_z(t) = y_z(t) \exp(-j2\pi f_c t) = y_c(t) + jy_s(t)$$

$\tilde{x}_z(t)$, $\tilde{h}_z(t)$ y $\tilde{y}_z(t)$ son las envolventes complejas de la entrada $x(t)$, respuesta impulsional $h(t)$ y salida $y(t)$, respectivamente. Se tiene entonces que

$$X_z(f) = [1 + \text{sgn}(f)]X(f) = \tilde{X}_z(f - f_c) \quad \text{y} \quad X(f) = \frac{1}{2} [\tilde{X}_z(-f - f_c) + \tilde{X}_z(f - f_c)]$$

$$H_z(f) = [1 + \text{sgn}(f)]H(f) = \tilde{H}_z(f - f_c) \quad \text{y} \quad H(f) = \frac{1}{2} [\tilde{H}_z(-f - f_c) + \tilde{H}_z(f - f_c)]$$

La salida del filtro será

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{4} [\tilde{H}_z(-f - f_c)\tilde{X}_z(-f - f_c) + \tilde{H}_z(f - f_c)\tilde{X}_z(f - f_c)]$$

$$Y(f) = \frac{1}{2} [\tilde{Y}_z(-f - f_c) + \tilde{Y}_z(f - f_c)]$$

Estas dos últimas expresiones implican que

$$\tilde{Y}_z(f) = \frac{1}{2} [\tilde{H}_z(f) \cdot \tilde{X}_z(f)] \quad (2.126)$$

cuya transformada de Fourier inversa es
$$\tilde{y}_z(t) = \frac{1}{2} [\tilde{h}_z(t) * \tilde{x}_z(t)] \quad (2.127)$$

Por lo tanto, la envolvente compleja de la señal filtrada $y(t)$ viene dada por el producto de convolución de la envolvente compleja de la señal de entrada $x(t)$ por la envolvente compleja de la respuesta impulsional $h(t)$ del filtro, con un factor de escala de $1/2$.

La importancia de este resultado estriba en el hecho de que al tratar con señales y sistemas pasabanda, se puede trabajar con las envolventes complejas pasabajo $\tilde{x}_z(t)$, $\tilde{h}_z(t)$ y $\tilde{y}_z(t)$. Por consiguiente, el análisis de un sistema pasabanda, complicado por el factor $\exp(j2\pi f_c t)$, se

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

reemplaza por un análisis equivalente en pasabajo que retiene por completo toda la esencia del proceso de filtrado.

Reemplazando en (2.127) las envolventes complejas por sus respectivas componentes, se tiene

$$\tilde{y}_z(t) = y_c(t) + jy_s(t) = \frac{1}{2} [h_c(t) + jh_s(t)] * [x_c(t) + jx_s(t)]$$

Desarrollando esta expresión, la componente en fase de la salida $y(t)$ es

$$y_c(t) = \frac{1}{2} [h_c(t) * x_c(t)] - \frac{1}{2} [h_s(t) * x_s(t)] \quad (2.128)$$

y la componente en cuadratura de la salida $y(t)$,

$$y_s(t) = \frac{1}{2} [h_s(t) * x_c(t)] + \frac{1}{2} [h_c(t) * x_s(t)] \quad (2.129)$$

Estas expresiones permiten establecer el modelo equivalente pasabajo de un filtro pasabanda, mostrado en la Fig. 2.42. Este modelo equivalente proporciona una base práctica para la simulación del filtrado pasabanda o de un canal de comunicaciones en una computadora digital.

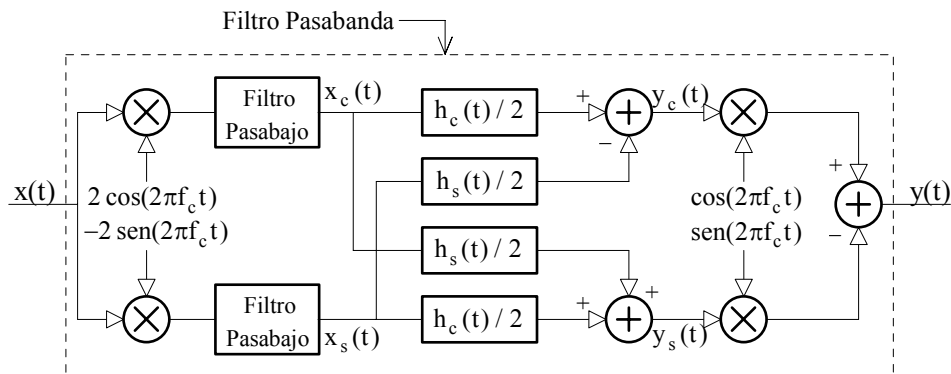


Fig. 2.42. Equivalente Pasabajo del Filtrado Pasabanda.

Nótese que si $H(f)$ y $X(f)$ son simétricos respecto a la frecuencia central f_c , entonces $\tilde{H}_z(f)$ y $\tilde{X}_z(f)$ serán simétricos respecto al origen [$\tilde{h}_z(t)$ y $\tilde{x}_z(t)$ serán reales]. En este caso,

$$x_s(t) = 0; \quad \tilde{x}_z(t) = x_c(t); \quad x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.130a)$$

$$h_s(t) = 0 \quad \tilde{h}_z(t) = h_c(t); \quad h(t) = h_c(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.130b)$$

y respecto a la salida,

$$y_s(t) = 0; \quad y_c(t) = \frac{1}{2} [h_c(t) * x_c(t)]; \quad y(t) = y_c(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (2.130c)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

♣ Ejemplo 2.28. Respuesta de un Filtro Pasabanda a un Impulso de Radiofrecuencia

Consideremos un filtro ideal pasabanda de ancho de banda $2B$, centrado en la frecuencia f_c , cuya entrada es un impulso de radiofrecuencia (RF) de la forma $x(t) = A\Pi(t/T)\cos(2\pi f_c t)$, donde $f_c \gg 1/T$ y $f_c \gg B$. Esta es la situación que se presenta a la entrada del filtro de radiofrecuencia en los receptores de radio y televisión, de señales digitales y de radar. Vamos a determinar la respuesta $y(t)$ del filtro. En la Fig. 2.43(a) se muestra la forma del impulso de radiofrecuencia.

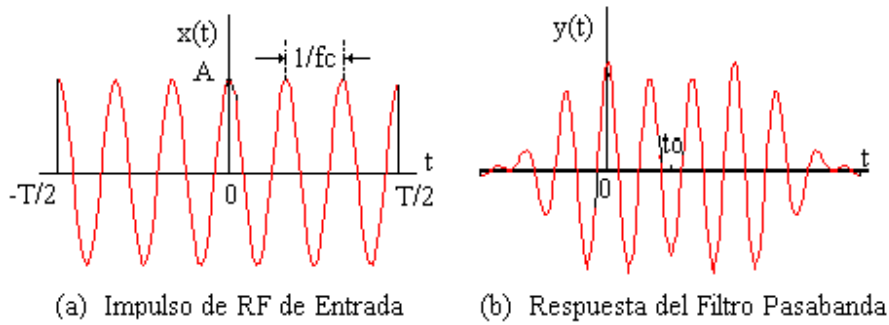


Fig. 2.43.

De (2.72) y (2.73),

$$H(f) = h_o \left[\Pi\left(\frac{f+f_c}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f-f_c}{2B}\right) \right] \exp(-j2\pi t_o f)$$

$$h(t) = 4Bh_o \text{sinc}[2B(t-t_o)] \cos[2\pi f_c(t-t_o)]$$

$$\tilde{H}_z(f) = 2h_o \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \exp(-j2\pi t_o f)$$

$$\tilde{h}_z(t) = 4Bh_o \text{sinc}[2B(t-t_o)] = h_c(t) \quad \text{pues } \tilde{h}_z(t) \text{ es real}$$

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{f+f_c}{1/T}\right) + \text{sinc}\left(\frac{f-f_c}{1/T}\right) \right]$$

$$\tilde{X}_z(f) = AT \text{sinc}\left(\frac{f}{1/T}\right) \Leftrightarrow \tilde{x}_z(t) = 2A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = x_c(t) \quad \text{pues } \tilde{x}_z(t) \text{ es real}$$

Puesto que $\tilde{x}_z(t)$ y $\tilde{h}_z(t)$ son reales, $\tilde{y}_z(t)$ será también real, de modo que

$$\tilde{y}_z(t) = y_c(t) = \frac{1}{2} [h_c(t) * x_c(t)] = \frac{1}{2} 4Bh_o \text{sinc}[2B(t-t_o)] * 2A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$y_c(t) = 4ABh_o \text{sinc}[2B(t-t_o)] * \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$y_c(t) = 4ABh_o \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) \text{sinc}[2B(t-t_o-\tau)] d\tau$$

Esta expresión es igual a la ya obtenida en el Ejemplo 2.20(b) cuya solución es

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$y_c(t) = \frac{2Ah_o}{\pi} \left[\text{Si} \left\{ 2\pi B(t - t_o + \frac{T}{2}) \right\} - \text{Si} \left\{ 2\pi B(t - t_o - \frac{T}{2}) \right\} \right]$$

De (2.248), la salida del filtro pasabanda será

$$y(t) = \frac{2Ah_o}{\pi} \left[\text{Si} \left\{ 2\pi B(t - t_o + \frac{T}{2}) \right\} - \text{Si} \left\{ 2\pi B(t - t_o - \frac{T}{2}) \right\} \right] \cos(2\pi f_c t)$$

Si hacemos por ejemplo, $T = 4t_o$, $B = 2/T$ y $f_c = 6$, entonces, para $T = 1$,

$$y(t) = \frac{2Ah_o}{\pi} \left[\text{Si} \left\{ 4\pi(t + \frac{1}{4}) \right\} - \text{Si} \left\{ 4\pi(t - \frac{3}{4}) \right\} \right] \cos(12\pi f_c t)$$

En la Fig. 2.43(b) se muestra la forma de esta salida. En la práctica el valor t_o es despreciable pero aquí lo exageramos para ver su efecto. Se sugiere al lector que trate de determinar la salida $y(t)$ sin utilizar el concepto de envolvente compleja para que constate la utilidad de este procedimiento. ♣

2.8. FUNCIONES DE CORRELACIÓN EN SISTEMAS LINEALES

2.8.1. Autocorrelación Entrada/Salida

Consideremos las funciones de correlación en un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT), Fig. 2.44.

Sea entonces

$$x(t) \Rightarrow S_x(f) \Leftrightarrow R_x(\tau); \quad y(t) \Rightarrow S_y(f) \Leftrightarrow R_y(\tau)$$

$$h(t) \Leftrightarrow H(f); \quad S_{xy}(f) \Leftrightarrow R_{xy}(\tau)$$

Por definición, la función de autocorrelación de la salida $y(t)$ es

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)y(t+\tau)dt$$

$$R_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$$

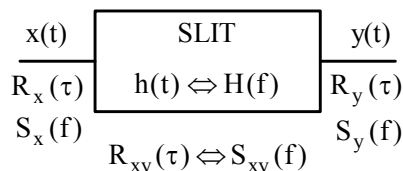


Fig. 2.44

pero en un SLIT:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du; \quad y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)x(t+\tau-v)dv$$

Reemplazando estas expresiones en $R_y(\tau)$,

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)x(t+\tau-v)dv \right] dt$$

Intercambiando el orden de integración,

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t-u)x(t+\tau-v)dt \right] dudv$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Con el cambio de variables $t' = t - u$, la integral dentro de los corchetes se hace igual a $R_x(\tau + u - v)$, de donde

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + u - v) h(u) h(v) du dv$$

Con un nuevo cambio de variables $z = v - u$, nos queda

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - z) h(u) h(z + u) du dz = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(u + z) du \right] dz$$

pero la integral dentro de los corchetes es la “integral de correlación de $h(t)$ ”, es decir,

$$g_h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(u + z) du \quad \text{donde} \quad g_h(z) \Leftrightarrow G_h(f) \quad (2.131)$$

La función de autocorrelación de la salida $y(t)$ será entonces

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau - z) g_h(z) dz = R_x(\tau) * g_h(\tau) \quad (2.132)$$

La función de autocorrelación $R_y(\tau)$ de la salida de un SLIT es el producto de convolución de la función de autocorrelación $R_x(\tau)$ de la entrada $x(t)$ por la integral de correlación de la respuesta impulsional $h(t)$ del SLIT.

Del teorema de convolución, $S_y(f) = S_x(f) \cdot G_h(f)$, pero, de acuerdo con (2.35), $G_h(f)$ debe ser igual a $|H(f)|^2$: vamos a verificarlo. En efecto, de la definición de transformada de Fourier,

$$G_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(u + \tau) du \right] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u + \tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \right] du$$

Con el cambio de variables $\tau' = u + \tau$, la segunda integral dentro de los corchetes queda en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') \exp[-j2\pi f(\tau' - u)] d\tau' = \exp(j2\pi u f) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau') \exp(-j2\pi f\tau') d\tau' = H(f) \exp(j2\pi u f)$$

entonces
$$G_h(f) = H(f) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \exp(j2\pi f u) du = H(f) \cdot H(-f) = |H(f)|^2$$

Hemos verificado entonces que $G_h(f) = |H(f)|^2$, por lo tanto,

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$$

resultado ya obtenido anteriormente, expresión (2.35). Este resultado es muy importante en muchas aplicaciones en procesamiento de señales, radar, etc.

Nótese que
$$G_h(f) = |H(f)|^2 = H(f) \cdot H(-f) \Leftrightarrow g_h(\tau) = h(\tau) * h(-\tau)$$

La densidad espectral $S_y(f)$ de la salida del SLIT se puede escribir entonces en la forma

$$S_y(f) = S_x(f) H(f) H(-f)$$

y por el teorema de convolución,

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (2.133)$$

que es la forma más utilizada para representar la función de autocorrelación de la salida de un SLIT.

En cuanto a la potencia de salida $\langle y^2(t) \rangle$, ella vendrá dada por

$$\langle y^2(t) \rangle = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) g_h(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df$$

Podemos demostrar también que el valor promedio $\langle y(t) \rangle$ de la salida $y(t)$ es

$$\langle y(t) \rangle = H(0) \langle x(t) \rangle$$

donde $H(0) = H(f)|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$ es el área de la respuesta impulsional $h(t)$.

2.8.2. Intercorrelación Entrada/Salida

Por definición, la intercorrelación entrada/salida es

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau) dt = \langle x(t)y(t+\tau) \rangle$$

como $y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v)h(t+\tau-v)dv$, entonces

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(v)h(t+\tau-v)dv \right] dt$$

Intercambiando el orden de integración,

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(v)dt \right] h(t+\tau-v)dv$$

Con el cambio de variables $u = v - t$, tenemos

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+u)dt \right] h(\tau-u)du$$

La integral dentro de los corchetes es la función de autocorrelación $R_x(\tau)$ de $x(t)$, entonces,

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(u)h(\tau-u)du, \text{ de donde}$$

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) \quad (2.134)$$

La función de intercorrelación entrada-salida $R_{xy}(\tau)$ de un SLIT, es el producto de convolución entre la función de autocorrelación $R_x(\tau)$ de la entrada $x(t)$ por la respuesta impulsional $h(t)$ del SLIT.

Del teorema de la convolución,

$$S_{xy}(f) = S_x(f) \cdot H(f) \quad (2.135)$$

La densidad interespectral $S_{xy}(f)$ entrada-salida de un SLIT es simplemente el producto de la densidad espectral de la entrada $x(t)$ por la función de transferencia del SLIT.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Todas estas expresiones se aplican tanto a señales determinísticas como aleatorias (señales de energía y de potencia) y son muy utilizadas en el análisis de sistemas lineales y en sistemas de comunicación en presencia de ruido. Un análisis más avanzado de estas técnicas está fuera de los objetivos de este texto.

♣ Ejemplo 2.29. Estimación de la Respuesta Impulsional de un SLIT mediante Correlación

Sea el diagrama de bloques mostrado en la Fig. 2.45, donde $x(t)$ es una señal aleatoria cuya densidad espectral de potencia es constante e igual a K . Este es un tipo especial de ruido (ruido blanco) que se caracterizará más adelante.

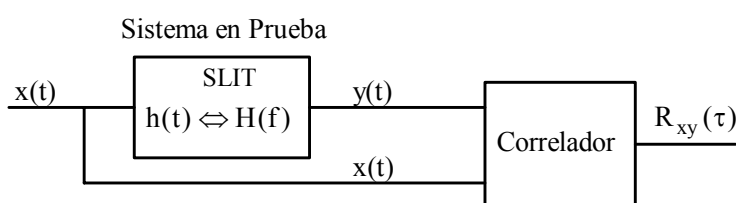


Fig. 2.45. Estimador de la Respuesta Impulsional de un SLIT.

El “Sistema en Prueba” es un SLIT cuya respuesta impulsional se desea estimar.

Sea $x(t) \Rightarrow S_x(f) = K$; pero de (2.135), $S_{xy}(f) = H(f)S_x(f) = K \cdot H(f)$;

pero como $R_{xy}(\tau) \Leftrightarrow S_{xy}(f)$, entonces

$$R_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xy}(f)\} = K \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = K \cdot h(\tau)$$

La salida del correlador es proporcional a la respuesta impulsional del SLIT en prueba. El montaje de la Fig. 2.45 se utiliza en la práctica para estimar la respuesta impulsional de un sistema lineal invariante en el tiempo; este montaje es relativamente fácil de instrumentar físicamente o simular en una computadora digital.

♣

En resumen, es muy importante que se entienda que para una señal dada existe una función de autocorrelación única, mientras lo contrario no necesariamente es cierto. Esto es debido a que la función de autocorrelación no es una medida completa de un proceso sino que es una de sus estadísticas de segundo orden, como se puede ver en el Capítulo III; igual argumento se aplica a la densidad espectral de potencia, como lo señalamos en su oportunidad. Se concluye entonces que una función de autocorrelación o una densidad espectral de potencia dadas no especifican unívocamente una señal o un proceso. Existe, en general, un gran número de señales o procesos que pueden tener la misma función de autocorrelación y la misma densidad espectral de potencia. Conclusiones similares se aplican a la función de intercorrelación y su correspondiente densidad interespectral de potencia. En el Capítulo III se tratan estos conceptos con un poco más de detalle.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.9. RUIDO EN SISTEMAS

2.9.1. Introducción

En el proceso de transmisión por un canal de comunicaciones, las señales que contienen información llegan a su destino tan distorsionadas que muchas veces es prácticamente imposible extraer la información que ellas poseen. Esta distorsión se debe principalmente a dos factores que siempre están presentes en los canales físicos: la distorsión producida por las características físicas del canal que producen distorsión de fase y de amplitud, y la distorsión producida por señales aleatorias o interferentes que se suman a las señales útiles distorsionándolas severamente. Este tipo de señales espurias de naturaleza aleatoria es lo que conocemos con el nombre genérico de “ruido”. El zumbido y la estática en un receptor de radio, los destellos blancos en una pantalla de televisión, las oscilaciones en un sistema retroalimentado, etc., son diferentes manifestaciones del ruido. La distorsión producida por las características físicas del canal la trataremos con más detalle en los Capítulos V y VI.

En la práctica se encuentra que existen muchas fuentes potenciales de ruido en un sistema de comunicación: las fuentes de ruido externas (naturales y producidas por el hombre) y las fuentes de ruido internas al sistema. En particular, el ruido interno incluye una clase importante de señales perturbadoras que se generan por fluctuaciones espontáneas de corriente o voltaje en los circuitos y elementos eléctricos, y que representan una limitación básica en la transmisión o detección de señales.

2.9.2. Ruido Interno

Ruido de Disparo

El ruido de disparo se genera en los dispositivos electrónicos debido a la naturaleza discreta de la corriente circulante. Por ejemplo, los electrones que fluyen entre el cátodo y el ánodo en un tubo de rayos catódicos, los electrones y huecos que fluyen en semiconductores, los fotones emitidos en algunos lasers, los fotoelectrones emitidos por un fotodiodo, etc., son fuentes de este tipo de ruido, en las cuales se observa que la corriente fluctúa alrededor de un valor promedio. El mecanismo que origina las fluctuaciones depende de cada proceso en particular; por ejemplo, en un tubo al vacío es la emisión errática de los electrones desde el cátodo; en los semiconductores se debe a la difusión errática de las portadoras minoritarias y a la generación y recombinación erráticas de los pares electrón-hueco. En consecuencia, el proceso que produce los valores promedio tiene variaciones propias de tipo estadístico que fluctúan alrededor de esos valores promedio. Una característica de este tipo de ruido es que la potencia promedio de las fluctuaciones es proporcional al valor promedio de las mismas. Como en este proceso las fuerzas que producen el flujo de partículas no están en equilibrio termodinámico, no se puede aplicar la termodinámica clásica para analizarlas. Este tipo de ruido no lo trataremos aquí.

Ruido Térmico

El ruido térmico es producido por el movimiento errático de los electrones libres en un elemento conductor como, por ejemplo, una resistencia. La energía térmica mantiene los electrones libres en constante movimiento; pero este movimiento es de tipo aleatorio debido a las múltiples colisiones que los electrones experimentan dentro del entramado atómico. El movimiento neto de los electrones constituye una corriente eléctrica cuya dirección de flujo es también aleatoria y cuyo valor promedio es cero.

Históricamente, J. B. Johnson y H. Nyquist [Johnson, 1928; Nyquist, 1928] fueron los primeros en estudiar el ruido térmico en resistencias metálicas, de ahí que al ruido térmico se le

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

denomine “ruido de Johnson” o “ruido de resistencias”. Johnson y Nyquist demostraron, independientemente, a partir de consideraciones teóricas y experimentales, que la potencia promedio del voltaje (valor eficaz al cuadrado) a través de una resistencia R viene dada por

$$\langle v_n^2(t) \rangle = 4kTRB \quad (2.136)$$

y con referencia a la corriente térmica,

$$\langle i_n^2(t) \rangle = 4kTGB \quad (G = 1/R) \quad (2.137)$$

donde T es la temperatura en la resistencia, en kelvins; k es la constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$ joules/K), y B un ancho de banda arbitrario, en Hz. La correspondiente densidad espectral de potencia del ruido térmico es

$$S_n(f) = \frac{\langle v_n^2(t) \rangle}{2B} = 2kTR \quad (2.138)$$

Vemos que esta densidad espectral de potencia es constante para todas las frecuencias. Sin embargo, cálculos más avanzados [Schwartz, 1980] que incluyen consideraciones de tipo mecánico-cuántico, demuestran que la densidad espectral de potencia del voltaje térmico es

$$S_n(f) = 2Rh f \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} \right] \quad (2.139)$$

donde f es la frecuencia, en Hz, y h la constante de Planck ($6,625 \times 10^{-34}$ joules/seg). El primer término de (2.139) es despreciable para frecuencias $f \ll (kT/h) \approx 10^{13}$ Hz. En efecto, para $f \ll 10^{13}$ Hz, vemos que $\exp(hf/kT) \approx 1 + hf/kT$, de modo que la expresión (2.139) se puede aproximar en la forma $S_n(f) = 2kTR$ que es el mismo resultado (2.138) de Johnson y Nyquist. Por consiguiente, para las frecuencias normales en comunicaciones, exceptuando la gama de transmisión óptica (fibras y lasers), la densidad espectral de ruido se puede considerar constante e independiente de la frecuencia. Por otro lado, como el ruido térmico es el resultado de un gran número de interacciones esencialmente independientes, su distribución tiende a ser gaussiana. El ruido térmico es, pues, un ruido gaussiano de valor promedio cero. El ruido gaussiano es aquel cuya distribución de amplitudes sigue la curva de Gauss. Las distribuciones gaussianas las estudiaremos con un poco más de detalle en el Capítulo III.

Circuitos Equivalentes del Ruido

Una resistencia ruidosa se puede representar mediante un circuito equivalente que consiste en una resistencia sin ruido en serie con una fuente de ruido con un voltaje eficaz v_{ef} , como se muestra en la Fig. 2.46(a), que es el “**circuito equivalente de Thévenin**”. En la Fig. 2.46(b) se muestra el correspondiente “**circuito equivalente de Norton**”.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

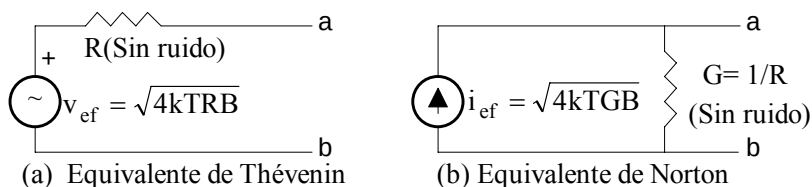


Fig. 2.46. Circuitos Equivalentes del Ruido Térmico.

Cuando se calculan los efectos del ruido térmico en redes que contienen muchas resistencias, la utilización de los circuitos equivalentes hace que los cálculos sean muy largos y engorrosos. Estos cálculos se pueden simplificar mediante la llamada “**Fórmula de Nyquist**”, la cual expresa que la potencia promedio de ruido producida en los terminales de un dipolo que contenga elementos pasivos (R, L y C), todos a la misma temperatura, viene dada por la integral

$$\langle v_n^2(t) \rangle = v_{ef}^2 = 2kT \int_{-B}^B R(f) df \quad (2.140)$$

donde $R(f)$ es la parte real de la impedancia compleja vista en los terminales del dipolo y B un ancho de banda arbitrario. Si la red contiene solamente elementos resistivos y dentro de un ancho de banda arbitrario B , la expresión (2.140) se reduce a

$$\langle v_n^2(t) \rangle = v_{ef}^2 = 4kTR_{eq} B \quad (2.141)$$

$$\text{o también, } v_{ef} = \sqrt{4kTR_{eq} B} \quad (2.142)$$

donde R_{eq} es la resistencia equivalente del dipolo y v_{ef} el correspondiente voltaje eficaz de ruido. Si las resistencias están a temperaturas diferentes, hay que utilizar los circuitos equivalentes.

♣ Ejemplo 2.30

Vamos a calcular el voltaje eficaz de ruido térmico de la red mostrada en la Fig. 2.47(a), donde $B = 100$ kHz, $T = 290$ kelvins, $R_1 = 1$ k Ω , $R_2 = 2$ k Ω y $R_3 = 3$ k Ω . También,

$$V_1 = \sqrt{4kTR_1 B}; \quad V_2 = \sqrt{4kTR_2 B} \quad \text{y} \quad V_3 = \sqrt{4kTR_3 B}$$

El circuito equivalente de ruido de la red se muestra en (b). La potencia promedio de ruido a la salida es igual a la suma de las potencias de salida contribuidas por cada fuente. En efecto, sea

$$v_{ef}^2 = v_{1ef}^2 + v_{2ef}^2 + v_{3ef}^2, \quad \text{de donde} \quad v_{ef} = \sqrt{v_{1ef}^2 + v_{2ef}^2 + v_{3ef}^2}$$

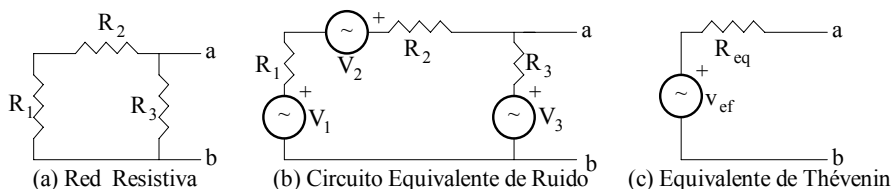


Fig. 2.47.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

De la Fig. 2.47(b), por superposición, se obtiene

$$v_{1ef} = V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \sqrt{1000} \cdot \sqrt{kTB}; \quad v_{1ef}^2 = 1000(kTB)$$

$$v_{2ef} = V_2 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \sqrt{2000} \cdot \sqrt{kTB}; \quad v_{2ef}^2 = 2000(kTB)$$

$$v_{3ef} = V_3 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \sqrt{3000} \cdot \sqrt{kTB}; \quad v_{3ef}^2 = 3000(kTB)$$

$$v_{ef}^2 = 6000(kTB) = 6 \times 10^3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 290 \times 10^5 = 2,401 \times 10^{-12}$$

El voltaje eficaz de ruido a la salida de la red será

$$v_{ef} = 1,55 \times 10^{-6} \text{ V}$$

Como se trata de un red puramente resistiva, se puede aplicar la fórmula de Nyquist (2.141). La resistencia equivalente vista desde los terminales **ab** de salida del dipolo es

$$R_{eq} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = 1500 \text{ Ohm}$$

De acuerdo con (2.142), el voltaje eficaz de ruido a la salida de la red es

$$v_{ef} = \sqrt{4 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 290 \times 1500 \times 10^5} = 1,55 \times 10^{-6} \text{ V}$$

resultado idéntico al obtenido más arriba pero con un mínimo de cálculos.



Potencia de Ruido Disponible

Algunas veces es deseable describir el ruido térmico mediante el concepto de “potencia disponible”. La potencia disponible es la potencia máxima que se puede entregar a una carga desde una fuente con una resistencia interna constante. De acuerdo con el “teorema de la máxima transferencia de potencia”, se transfiere el máximo posible de potencia desde una fuente de resistencia interna R_i a una carga de resistencia R_L cuando $R_L = R_i$. En este caso se dice que la carga está acoplada a la fuente, y la potencia que produce la fuente se divide por igual entre su resistencia interna R_i y la resistencia de carga R_L ; la potencia que se entrega a la carga es la potencia disponible.

Con referencia a la Fig. 2.46(a), en condiciones de acoplamiento la fuente ve una resistencia de $2R$ y la densidad espectral será $S_n(f)/2R$; la densidad espectral correspondiente a la potencia entregada a la carga será la mitad, es decir, $S_n(f)/4R$. Esta es entonces la máxima densidad espectral de potencia que se puede extraer de la fuente v_{ef} . Por esta razón, esta densidad se denomina “**densidad espectral disponible**, $S_{nd}(f)$ ”. Entonces,

$$S_{nd}(f) = \frac{S_n(f)}{4R} = \frac{kT}{2} \text{ W / Hz} \quad (2.143)$$

La potencia de ruido disponible en una resistencia ruidosa R dentro de un ancho de banda arbitrario B será entonces

$$N = \int_{-B}^B S_{nd}(f) df = kTB \text{ W} \quad (2.144)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Nótese que en una resistencia ruidosa R la densidad espectral disponible y la potencia promedio disponible son independientes de R , pero son proporcionales al ancho de banda B . Cuanto más alto es el ancho de banda en un sistema, más alta será la potencia de ruido presente en el mismo; debido a esto, uno de los objetivos en el diseño de sistemas de comunicación es el de minimizar u optimizar el ancho de banda B .

2.9.3. Ruido Blanco

Además de las fuentes de ruido térmico, hay otros tipos de fuentes de ruido que son gaussianas, de valor promedio cero y que tienen una densidad espectral de potencia que es constante dentro de una extensa gama de frecuencias. Ruido que tenga una densidad espectral de este tipo se denomina “**Ruido Blanco**”, por analogía con la luz blanca la cual contiene iguales cantidades de todas las frecuencias que pertenecen al espectro visible de la radiación electromagnética. En general, la densidad espectral del ruido blanco gaussiano se representa en la forma

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2} \quad \text{para todo } f \quad (2.145)$$

El factor $\frac{1}{2}$ se incluye para indicar que la mitad de la potencia está asociada con las frecuencias positivas, y la otra mitad con las frecuencias negativas. Las dimensiones de η son W/Hz y su valor depende del tipo de fuente de ruido y de la densidad espectral disponible.

Aunque muchas fuentes de ruido físicas se pueden modelar como fuentes de ruido blanco, una vez que el ruido ha sido filtrado (por ejemplo, mediante un ecualizador en un receptor digital), ya no tendrá una densidad espectral de amplitud constante sino que tomará la forma espectral del filtro. Este ruido se denomina comúnmente “**ruido coloreado**”. En efecto, si $H(f)$ es la función de transferencia de un filtro dado al cual se le aplica ruido blanco, la salida del filtro será ruido coloreado cuya densidad espectral será

$$S_{nc}(f) = |H(f)|^2 S_n(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$$

La potencia disponible a la entrada del sistema será entonces, de (2.138) y (2.145),

$$N_i = \langle v_n^2(t) \rangle = \eta B = 4kTRB \quad (2.146)$$

de donde $\eta = 4kTR = kT_e$

El término T_e se conoce con el nombre de “**temperatura efectiva o temperatura equivalente de ruido**” del sistema, y se define mediante la expresión

$$T_e = 4RT \quad (2.147)$$

La temperatura equivalente de ruido especifica la potencia de ruido térmico disipada en una resistencia acoplada, y es la “*temperatura efectiva de una fuente de ruido térmico blanco a la entrada de un sistema con ruido que se requeriría para producir la misma potencia de ruido a la salida de un sistema equivalente sin ruido*”. Obsérvese que la temperatura equivalente de ruido no es la temperatura ambiente del sistema, pero sí es proporcional a ella. Asimismo, en una red que contiene solamente elementos R , L y C , la temperatura efectiva T_e es igual a la temperatura ambiente T de la red. En lo sucesivo, hablaremos siempre en términos de “temperatura efectiva”, excepto cuando se exprese directamente la temperatura física.

La potencia disponible de ruido blanco generada en el sistema dentro de un ancho de banda arbitrario B , será entonces

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$N_i = kT_e B \quad (2.148)$$

que sería la potencia disponible a la entrada si el sistema fuera sin ruido.

Del Teorema de Wiener-Kintchine, la función de autocorrelación del ruido blanco es

$$R_n(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau)$$

$S_n(f)$ y $R_n(f)$ se muestran en la Fig. 2.48.

Puede observarse que la función de autocorrelación del ruido blanco gaussiano es cero para $\tau \neq 0$, lo que significa que dos valores o muestras diferentes de la señal de ruido blanco, no importa lo cercanas que estén, no están correlacionadas y por lo tanto son independientes, como demostraremos en el Capítulo III. Por otro lado, puede verse también que, en un sentido estricto, el ruido blanco tiene una potencia infinita y, como tal, no existe físicamente.

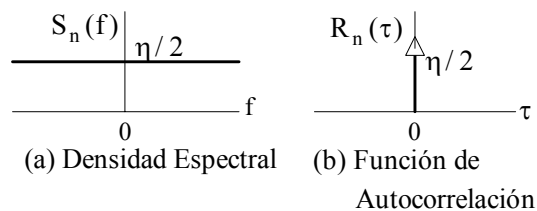


Fig. 2.48. Características del Ruido Blanco.

Las propiedades matemáticas del ruido blanco gaussiano son muy convenientes en el análisis y comportamiento de sistemas de comunicación; en efecto, dentro de las gamas de frecuencia utilizadas en la práctica, el uso del concepto de ruido blanco es consistente con su definición porque la densidad espectral de potencia puede considerarse constante en esas gamas.

Por otro lado, Shannon ha demostrado que el ruido blanco gaussiano es el peor ruido entre todos los ruidos posibles, y que su potencia en un ancho de banda dado es también la más alta posible. La potencia de ruido blanco gaussiano representa entonces un límite superior que se utiliza como referencia en el cálculo de las Relaciones Señal/Ruido en sistemas de comunicación.

♣ Ejemplo 2.31

A la entrada de un filtro pasabajo RC, Fig. 2.49(a), se aplica ruido blanco gaussiano cuya densidad espectral de potencia es $\eta/2$. Se trata de determinar la función de autocorrelación, la densidad espectral de potencia y la potencia de ruido a la salida del filtro.

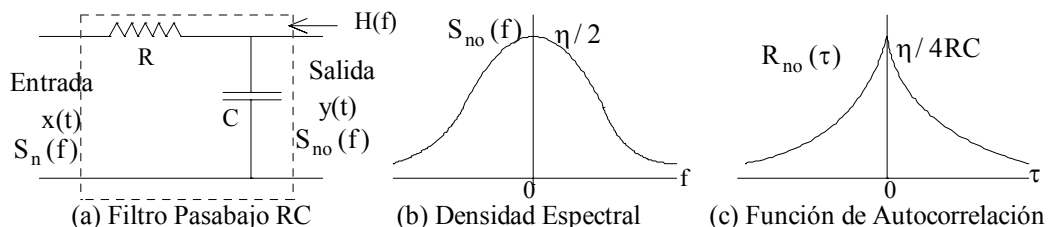


Fig. 2.49

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Solución

La función de transferencia de este filtro es bien conocida; por lo tanto,

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} = \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f}; \quad S_{no}(f) = |H(f)|^2 S_n(f) = \frac{\eta}{2(RC)^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Mediante el Teorema de Wiener-Kintchine la correspondiente función de autocorrelación es

$$R_{no}(\tau) = \frac{\eta}{4RC} \exp\left(-\frac{|\tau|}{RC}\right). \quad \text{También,} \quad \langle y^2(t) \rangle = R_{no}(0) = \frac{\eta}{4RC}$$

$S_{no}(f)$ y $R_{no}(\tau)$ se muestran en la Fig. 2.49(b) y (c), respectivamente.

Nótese la rapidez de caída de la función de autocorrelación. Para valores de τ superiores a un tiempo de correlación $\tau_c = RC \ln(100)$, la función de autocorrelación cae a menos del 1% de su valor máximo y podemos despreciarla. Esto significa que dos muestras de la señal de salida que estén separadas en más de τ_c segundos no estarán correlacionadas.

En cuanto a la densidad espectral de potencia de la salida, si se desprecian aquellas componentes con amplitudes menores del 1% del valor máximo, entonces $S_{no}(f)$ es despreciable para frecuencias $f \geq 1,5844 / RC$.

♣

Ruido Blanco Pasabanda de Banda Angosta

El modelo del ruido blanco es una aproximación razonable cuando se trata de determinar la potencia de salida de un sistema de banda angosta, por cuanto la densidad espectral de ruido es más o menos constante dentro de la banda de paso, situación que es muy común en los sistemas de comunicación. De particular importancia es el ruido presente en un sistema de recepción de señales moduladas, como se muestra en la Fig. 2.50.

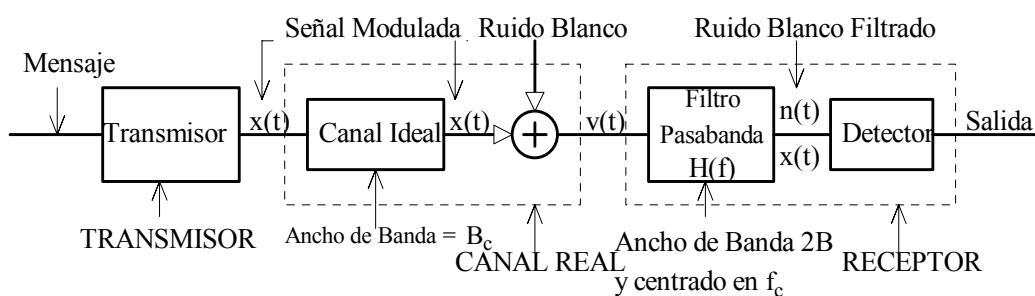


Fig. 2.50. Transmisión y Recepción de Señales Moduladas

En la Fig. 2.50 el canal real se modela como un canal ideal de ancho de banda $B_c \geq 2B$ más una fuente aditiva de ruido blanco que se suma a la señal modulada transmitida $x(t)$. El receptor se modela mediante un filtro pasabanda de entrada seguido de un detector que extrae de la señal compuesta $[x(t) + n(t)]$, la señal que lleva la información. El tipo de detector depende del sistema

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

de modulación empleado. En la Fig. 2.51 se muestran las características del Ruido Blanco Pasabanda.

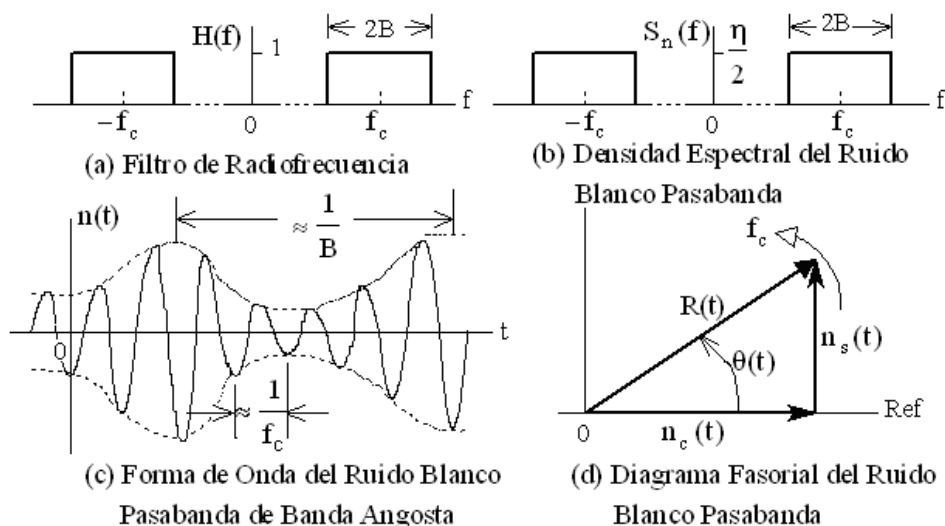


Fig. 2.51. Características del Ruido Blanco Pasabanda

Tanto el canal real como el filtro de entrada del receptor (filtro de RF) dejan pasar completa la señal modulada $x(t)$; en este caso se dice que el canal y el filtro son “transparentes” para $x(t)$, apareciendo esta señal, salvo por algún factor de escala, a la entrada del detector. La situación es distinta respecto al ruido, como se puede observar en la Fig. 2.51.

En efecto, el filtro pasabanda, Fig. 2.51(a), deja pasar solamente aquellas componentes dentro de su banda pasante. Como en general se cumple que $f_c \gg B$, el ruido a la salida del filtro comúnmente se denomina “**ruido blanco pasabanda de banda angosta**”, cuya densidad espectral tiene la forma dada en la Fig. 2.51(b).

En el dominio del tiempo, el ruido blanco filtrado se parece a una señal modulada en la cual la frecuencia varía alrededor de una frecuencia promedio f_c , como se muestra en la Fig. 2.51(c). En estas condiciones, la forma canónica del ruido será, de (2.108),

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.149)$$

donde $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son las componentes ortogonales del ruido. Como se considera que el ruido pasabanda $n(t)$ es una señal gaussiana aleatoria de valor promedio cero, diremos sin demostrarlo que $n_c(t)$ y $n_s(t)$ serán también gaussianas de valor promedio cero e independientes entre sí. Recuérdese que $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son señales reales pasabajo cuyo ancho de banda (igual a B) está determinado por el ancho de banda del filtro de RF (igual a $2B$).

La forma polar de $n(t)$ es

$$n(t) = R(t) \cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \quad (2.150)$$

$$\text{donde } R(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \quad \text{y} \quad \theta(t) = \arctg \frac{n_s(t)}{n_c(t)} \quad (2.151)$$

son la envolvente y fase naturales del ruido, respectivamente.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Las componentes ortogonales del ruido serán

$$n_c(t) = R(t)\cos[\theta(t)] \quad \text{y} \quad n_s(t) = R(t)\sin[\theta(t)] \quad (2.152)$$

y $n(t)$ se puede representar en forma fasorial como se muestra en la Fig. 2.51(d).

Como $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son señales aleatorias, entonces $n_c(t) \Rightarrow S_{nc}(f)$ y $n_s(t) \Rightarrow S_{ns}(f)$, y de acuerdo con (2.123) y (2.124),

$$S_{nc}(f) = S_{ns}(f) = \begin{cases} [S_n(f+f_c) + S_n(f-f_c)] & \text{para } |f| \leq B \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.153)$$

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle n_c^2(t) \rangle = \langle n_s^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nc}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ns}(f) df \quad (2.154)$$

Consideremos ahora la función de autocorrelación del ruido blanco pasabanda, expresión (2.149). Por definición,

$$R_n(\tau) = \langle n(t)n(t+\tau) \rangle \quad (2.155)$$

Si $R_{nc}(\tau) \Leftrightarrow S_{nc}(f)$ y $R_{ns}(\tau) \Leftrightarrow S_{ns}(f)$, entonces desarrollando (2.155) con ayuda de (2.149) se obtiene la función de autocorrelación del ruido pasabanda $n(t)$. En efecto,

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2} [R_{nc}(\tau) + R_{ns}(\tau)] \cos(2\pi f_c \tau)$$

$$\text{Para } \tau = 0, \quad R_n(0) = \frac{1}{2} R_{nc}(0) + \frac{1}{2} R_{ns}(0)$$

$$\text{Por consiguiente,} \quad \langle n^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle n_c^2(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle n_s^2(t) \rangle$$

que es la misma expresión (2.125) obtenida anteriormente.

Estos conceptos se aplicarán para analizar el efecto del ruido en sistemas de comunicación y en el cálculo de las relaciones Señal/Ruido (S/N).

♣ Ejemplo 2.32

Consideremos la densidad espectral de ruido pasabanda mostrada en la Fig. 2.52(a) (frecuencias positivas solamente). Se desea determinar la forma y la potencia de las componentes ortogonales del ruido.

De la expresión (2.153), por inspección, las densidades $S_{nc}(f)$ o $S_{ns}(f)$ tendrán la forma mostrada en la Fig. 2.52(b) para $|f| \leq B$.

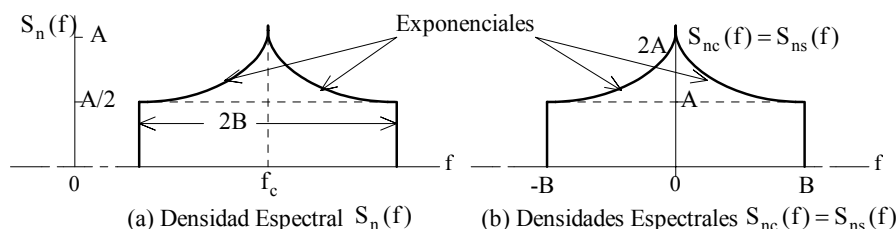


Fig. 2.52

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

De acuerdo con los datos de la Fig. 2.52(a), la densidad espectral $S_n(f)$ se puede expresar en la forma

$$S_n(f) = A \left[\exp\left(-\ln 2 \frac{|f + f_c|}{B}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f + f_c}{2B}\right) + \exp\left(-\ln 2 \frac{|f - f_c|}{B}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f - f_c}{2B}\right) \right]$$

De (2.153), las correspondientes densidades espectrales $S_{nc}(f)$ o $S_{ns}(f)$ serán

$$S_{nc}(f) = S_{ns}(f) = 2A \exp\left(-\ln 2 \frac{|f|}{B}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

que tienen, en efecto, la forma mostrada en la Fig. 2.52(b). Las correspondientes potencias son

$$\langle n^2(t) \rangle = \langle n_c^2(t) \rangle = \langle n_s^2(t) \rangle = 4A \int_0^B \exp\left(-\ln 2 \frac{f}{B}\right) df = \frac{2}{\ln 2} AB \text{ W}$$

♣

2.9.4. Ancho de Banda Equivalente del Ruido

Algunas veces es conveniente definir el “**ancho de banda equivalente del ruido**” de un sistema pasabanda. En un sistema cuya función de transferencia es $H(f)$ y cuya densidad espectral de potencia de ruido a la entrada es $S_n(f)$, la potencia promedio de ruido a la salida viene dada por (2.36), es decir,

$$\langle n_o^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df$$

En la mayoría de los sistemas el ancho de banda es de un orden tal que nos permite suponer que el ruido a la entrada es blanco de densidad espectral constante $\eta/2$. En estas condiciones,

$$\langle n_o^2(t) \rangle = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Consideremos ahora un sistema ideal pasabanda de ganancia de potencia $|H(f)|_{\max}^2$ y de ancho de banda B_N , Fig. 2.53(b). La potencia de ruido a su salida será

$$\langle n_o^2(t) \rangle = \eta B_N |H(f)|_{\max}^2 \quad (2.156)$$

Si estas potencias son iguales, entonces B_N será, por definición, el “ancho de banda equivalente del ruido” y vendrá dado por

$$B_N = \frac{1}{2|H(f)|_{\max}^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (2.157)$$

Estas definiciones se ilustran en la Fig. 2.53(a) y (b).

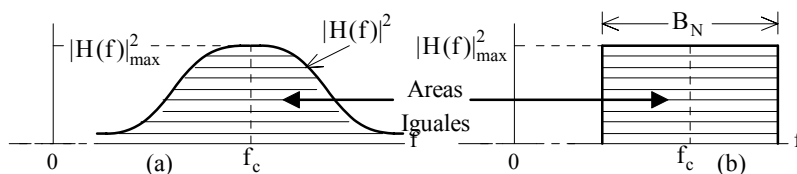


Fig. 2.53. Definición del Ancho de Banda Equivalente del Ruido.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

B_N es el ancho de banda de un sistema ideal pasabanda de ganancia de potencia $|H(f)|_{\max}^2$ que dejará pasar la misma potencia de ruido blanco que el sistema en cuestión, es decir, *el ancho de banda de ruido de un filtro ideal es equivalente al ancho de banda de un filtro real*. Esto se ilustra en la Fig. 2.53.

Las expresiones (2.156) y (2.157) se aplican también a sistemas pasabajo.

♣ Ejemplo 2.33

El ancho de banda equivalente del ruido a menudo se relaciona con el ancho de banda de 3 dB de un sistema. Consideremos el filtro pasabajo cuya función de transferencia es

$H(f) = \frac{10^4}{10^3 + j2\pi f}$. El ancho de banda equivalente del ruido es, en este caso,

$$B_N = \frac{1}{2|H(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$\text{Pero } |H(f)| = \frac{10^4}{\sqrt{10^6 + 4\pi^2 f^2}}; \quad |H(0)| = 10; \quad |H(0)|^2 = 100$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10^8}{10^6 + 4\pi^2 f^2} df = 5 \times 10^4$$

$$\text{y de (2.157), } B_N = \frac{5 \times 10^4}{200} = 250 \text{ Hz}$$

El ancho de banda de 3 dB se puede obtener a partir de su definición, es decir, de

$$|H(B_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(0)| \quad \text{o} \quad |H(B_{3dB})|^2 = \frac{1}{2} |H(0)|^2 = 50,$$

$$\text{Entonces, } \frac{10^8}{10^6 + 4\pi^2 B_{3dB}^2} = 50, \quad \text{de donde } B_{3dB} = 159,15 \text{ Hz}$$

Comparando los anchos de banda, vemos que para este filtro en particular el ancho de banda equivalente del ruido es un 57% más grande que el ancho de 3 dB. El lector puede verificar que si se aumenta el orden del filtro, los valores de B_N y B_{3dB} se hacen cada vez más cercanos.

♣

2.9.5. Caracterización del Ruido en Sistemas

Relaciones Señal/Ruido en Sistemas de Comunicación

Para cuantificar el efecto del ruido sobre la inteligibilidad de un mensaje, hay que definir el ruido en términos cuantitativos o matemáticos. Pero como el ruido es una señal aleatoria, no es posible establecer una expresión algebraica que defina explícitamente una relación amplitud vs tiempo para el ruido. Sin embargo, hay una manera de cuantificar o caracterizar el efecto del ruido en los sistemas de comunicación y esto se verifica mediante el “criterio de la relación señal/ruido, S/N”.

Una relación señal/ruido se puede definir en diferentes formas; esto es, pueden ser relaciones entre valores eficaces, valores instantáneos, valores pico o potencia. Por eso, al hablar de

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

relación señal/ruido hay que especificar qué tipo de valores se está utilizando. La caracterización más empleada para la relación señal/ruido es aquella definida como “la razón entre el valor promedio de la potencia de la señal útil respecto al valor promedio de la potencia de ruido”; para conveniencia, estas potencias están normalizadas en base a una resistencia de 1 Ohm. Este criterio de la relación S/N es el que hemos venido aplicando a todo lo largo del texto.

El criterio de la relación S/N, así definido, es particularmente útil en el diseño y comparación de sistemas analógicos y digitales. Por ejemplo, la relación S/N en un canal telefónico no debe bajar de 26 dB, mientras que para una reproducción de alta fidelidad aceptable la relación S/N debe ser de por lo menos 50 dB.

La relación S/N es entonces uno de los parámetros de calidad más importantes en los sistemas de comunicación. El ingeniero de comunicaciones debe conocer perfectamente la influencia que sobre ella ejercen otros parámetros del sistema (ganancia, ancho de banda, distorsión, etc.) para poder optimizar la relación S/N. Como veremos en los Capítulos IV, V y VI, la relación S/N es un parámetro o factor de calidad o mérito que nos permitirá la comparación del comportamiento de diferentes sistemas de comunicación.

Relaciones Señal/Ruido en un Receptor con Detección Coherente o Sincrónica

Consideremos el modelo de receptor de señales moduladas de la Fig. 2.54 en el cual el detector coherente tiene la forma dada y cuya operación ya conocemos. Este receptor nos permite recuperar o extraer un mensaje $m(t)$ portador de información contenido en una señal modulada $x(t)$, la cual suponemos es de doble banda lateral. Vamos a determinar las relaciones S/N a la entrada y salida del detector y estableceremos algunas definiciones que estaremos utilizando constantemente.

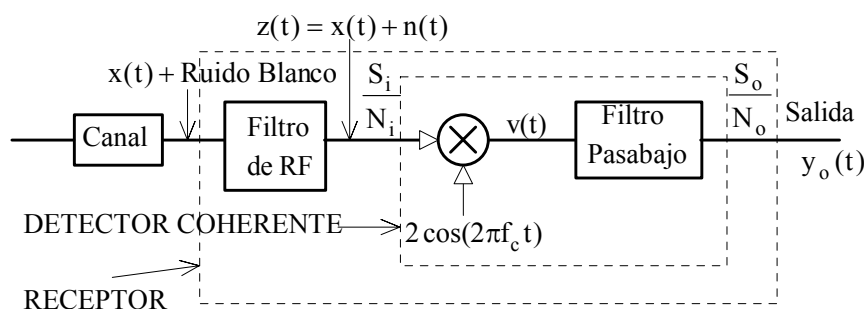


Fig. 2.54. Receptor con Detector Coherente.

Puesto que $x(t)$ es una señal modulada de doble banda lateral, entonces

$$x(t) = m(t)A_c \cos(2\pi f_c t)$$

donde $m(t)$ es una señal pasabajo de banda limitada B portadora de información, y $f_c \geq B$.

La señal a la entrada del detector es $z(t) = x(t) + n(t) = m(t)A_c \cos(2\pi f_c t) + n(t)$

donde $n(t)$ es ruido blanco pasabanda de banda angosta representado por su forma canónica

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

y cuya densidad espectral es constante e igual a $\eta/2$.

Si el ancho de banda del filtro de RF es $2B$, la potencia de ruido a la entrada del detector es

$$\langle n^2(t) \rangle = N_i = 2\eta B \quad (2.158)$$

La potencia de la señal modulada será, de (1.113),

$$\langle x^2(t) \rangle = S_i = \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (2.159)$$

donde $\langle m^2(t) \rangle$ es la potencia promedio de la señal mensaje $m(t)$.

La relación S/N a la entrada del detector, denominada “**Relación Señal/Ruido de Predetección**” será, de (2.158) y (2.159),

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A_c^2}{4\eta B} \langle m^2(t) \rangle \quad (2.160)$$

A la salida del multiplicador se tiene

$$v(t) = z(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = [m(t)A_c \cos(2\pi f_c t) + n(t)] \cdot 2 \cos(2\pi f_c t)$$

$$v(t) = [A_c m(t) + n_c(t)] + [A_c m(t) + n_c(t)] \cdot \cos(4\pi f_c t) - n_s(t) \cdot \sin(4\pi f_c t)$$

El filtro pasabajo rechaza los términos de alta frecuencia quedando

$$y_o(t) = A_c m(t) + n_c(t) \quad (2.161)$$

Solamente la componente en fase del ruido aparece en la salida, mientras que la señal mensaje $m(t)$ aparece completa. *La detección coherente o sincrónica elimina entonces la componente en cuadratura del ruido y la potencia de ruido a su salida se habrá reducido a la mitad.*

$$\text{De (2.161), } S_o = A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = 2S_i \text{ y } N_o = \langle n_c^2(t) \rangle$$

Obsérvese que la potencia útil de salida S_o es el doble de la potencia útil de entrada S_i .

La relación S/N a la salida del detector, denominada “**Relación Señal/Ruido de Postdetección**”, será

$$\frac{S_o}{N_o} = A_c^2 \frac{\langle m^2(t) \rangle}{\langle n_c^2(t) \rangle}$$

pero de (2.154) y (2.158), $\langle n_c^2(t) \rangle = \langle n^2(t) \rangle = 2\eta B$, entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{A_c^2}{2\eta B} \langle m^2(t) \rangle = 2 \frac{S_i}{N_i} \quad (2.162)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Ganancia de Conversión o de Detección

En la práctica se suele definir la “**Ganancia de Conversión o de Detección**” de un sistema de modulación en la forma

$$\text{Ganancia de Conversión o de Detección} = \frac{\text{Relación S / N de Postdetección}}{\text{Relación S / N de Predetección}} = \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \quad (2.163)$$

La ganancia de conversión se utiliza como una cifra de mérito en la comparación entre diferentes sistemas de modulación.

De (2.162), la ganancia de conversión en el caso de detección coherente o sincrónica de señales moduladas de doble banda lateral será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2 \quad (2.164)$$

Vemos que en el caso de detección coherente en doble banda lateral, la relación S/N de la salida es el doble que la de la entrada, o lo que es lo mismo, la ganancia de conversión es igual a 2. Aunque la detección o demodulación no es nada más que un desplazamiento de las bandas laterales hacia el origen, las componentes de la señal mensaje se suman como amplitudes, mientras que el ruido se suma como potencia. Se dice entonces que las señales útiles se suman coherentemente, mientras que el ruido se suma en forma incoherente, lo que hace que las componentes que no estén en fase se pierdan. La potencia de la señal útil aumenta al doble, mientras que la potencia de ruido se mantiene igual. Esta es la causa del incremento de 3 dB en las relaciones S/N.

En el cálculo de las relaciones S/N se puede aplicar el teorema de la modulación para señales de potencia cuando las señales en juego están caracterizadas por sus densidades espectrales de potencia. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el teorema se aplica a cualquiera señal pasabajo y a señales pasabanda aleatorias. Si la señal útil portadora de información es pasabanda, no se le puede aplicar el teorema, de modo que su potencia debe ser determinada con cualquiera de los métodos vistos en el dominio del tiempo.

En los Capítulos V y VI utilizaremos estos conceptos para caracterizar el comportamiento en presencia de ruido de diferentes sistemas de modulación prácticos.

♣ Ejemplo 2.34

Consideremos el receptor mostrado en la Fig. 2.54. Supongamos que el ruido a la entrada del filtro de RF no es blanco pero está caracterizado por una densidad espectral triangular de la forma

$$S_n(f) = 10^{-6} \Lambda\left(\frac{f}{2 \times 10^6}\right) \text{ W / Hz}$$

Igualmente, sea $x(t) = 10 \cos(10^4 \pi t) \cdot \cos(2\pi \times 10^6 t)$

El filtro de RF tiene una ganancia unitaria, ancho de banda de 10 kHz y está centrado en la frecuencia $f_c = 1 \text{ MHz}$. El filtro pasabajo de salida tiene también ganancia unitaria y un ancho de banda de 5 kHz.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Cálculo de la potencia de la señal útil

Los filtros son transparentes para $x(t)$, de modo que a la entrada del detector la señal útil seguirá siendo $x(t)$, es decir,

$$\begin{aligned} x_i(t) = x(t) &= 10\cos(10^4\pi t) \cdot \cos(2\pi \times 10^6 t) \\ &= 5\cos[2\pi(10^6 + 5 \times 10^3)t] + 5\cos[2\pi(10^6 - 5 \times 10^3)t] \end{aligned}$$

cuya potencia es $S_i = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 25 \text{ W} = 43,98 \text{ dBm}$

A la salida del multiplicador la señal útil es

$$v(t) = x(t) \cdot 2\cos(2\pi \times 10^6 t) = 20\cos(10^4\pi t) \cdot \cos^2(2\pi \times 10^6 t)$$

$$v(t) = 10\cos(10^4\pi t) + 10\cos(10^4\pi t) \cdot \cos(4\pi \times 10^6 t)$$

El filtro pasabajo elimina los términos de alta frecuencia, quedando a la salida

$$y_o(t) = 10\cos(10^4\pi t) \quad \text{cuya potencia es}$$

$$S_o = \frac{100}{2} = 50 \text{ W} = 46,98 \text{ dBm} = 2S_i$$

Nótese que la potencia útil de salida es el doble de la potencia útil de entrada.

Cálculo de la potencia de ruido

A la salida del filtro de RF la densidad espectral de potencia del ruido tiene la forma dada en la Fig. 2.55(a).

La correspondiente potencia de ruido a la entrada del detector será, de la Fig. 2.55(a),

$$N_i = 10 \times 10^3 \times 10^{-6} = 10^{-2} \text{ W} = 10 \text{ dBm}$$

Aplicando el teorema de la modulación para señales de potencia, se obtiene el espectro mostrado en la Fig. 2.55(b), cuya porción alrededor del origen es $S_{no}(f)$. La potencia correspondiente será

$$N_o = 10 \times 10^3 \times 10^{-6} = 10^{-2} \text{ W} = N_i$$

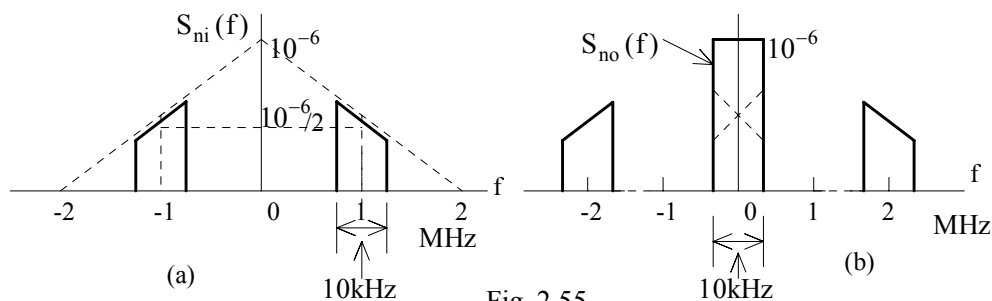


Fig. 2.55.

Nótese que las potencias de ruido de entrada y salida del detector son iguales.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Las relaciones S/N en juego serán

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{25}{10^{-2}} = 2500 \quad \text{y} \quad \frac{S_o}{N_o} = \frac{50}{10^{-2}} = 5000$$

La ganancia de conversión será $\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2$

Se confirma entonces que la ganancia de conversión en la detección coherente de una señal modulada de banda lateral doble es igual a 2.



Cifra de Ruido

Durante el procesamiento y recuperación de una señal a través de un sistema lineal invariante en el tiempo sucede que la señal a la salida del sistema aparece con un cierto grado de distorsión. Como ya lo hemos señalado, esta distorsión es causada, primero por las características de amplitud y fase del sistema, y segundo por el ruido introducido durante el proceso. Este ruido de salida se puede considerar como la suma del ruido generado en el propio sistema más el ruido de entrada al mismo. Por supuesto, este ruido compuesto deteriora la relación S/N a la salida comparada con la relación S/N a la entrada. Esta situación se puede cuantificar mediante la llamada “**Cifra o Factor de Ruido del Sistema, F**”. La cifra de ruido es también otro factor de calidad o de mérito en la comparación entre, por ejemplo, amplificadores de señales de muy bajo nivel.

La cifra de ruido F de un sistema se define entonces como “la razón entre la potencia promedio total de ruido N_o a la salida de un sistema, respecto a la potencia promedio de ruido N_{io} debida al ruido de entrada del sistema y determinadas a la temperatura normalizada de referencia $T_o = 290$ kelvins”. Por lo tanto,

$$F = \frac{N_o}{N_{io}} \quad \text{para} \quad T = T_o = 290 \text{ kelvins} \quad (2.165)$$

Si N_{so} es la potencia de ruido presente en la salida y generada en el mismo sistema y N_{io} la correspondiente debida al ruido de entrada, entonces $N_o = N_{io} + N_{so}$, de donde

$$F = \frac{N_{io} + N_{so}}{N_{io}} = 1 + \frac{N_{so}}{N_{io}} \quad (2.166)$$

Nótese que la impedancia de carga también contribuye al ruido en la salida. Esta contribución está incluida en N_{so} . Sin embargo, como generalmente es muy pequeña comparada con el ruido de los elementos activos del sistema, ella se puede despreciar. Es evidente que la cifra de ruido F de un sistema es una medida relativa del ruido generado internamente en el sistema respecto al ruido de entrada al mismo.

La cifra de ruido se puede expresar en función de las relaciones S/N de entrada y salida del sistema. En efecto, sea S_i y S_o las potencias útiles a la entrada y salida del sistema, respectivamente. Entonces,

$$S_o = S_i G_p \quad (2.167)$$

donde G_p es la ganancia de potencia del sistema. Asimismo,

$$N_{io} = N_i G_p \quad (2.168)$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Reemplazando (2.168) en (2.165) y con ayuda de (2.167), obtenemos finalmente

$$F = \frac{S_i / N_i}{S_o / N_o} \quad (2.169)$$

Hay que tener cuidado de no confundir, dado su parecido, las expresiones (2.163) y (2.169), pues la relación (2.163), que es la ganancia de conversión, se aplica a sistemas lineales variantes en el tiempo (moduladores y detectores, por ejemplo), mientras que la relación (2.169) es un número o cifra de mérito que se aplica a sistemas lineales invariantes en el tiempo (filtros, amplificadores, etc.) para cuantificar el ruido interno generado.

De la definición de la cifra de ruido es evidente que F será siempre mayor que la unidad. Desde el punto de vista del ruido, cuanto más cercana a la unidad sea la cifra de ruido, mejor será el comportamiento del sistema, es decir, el ruido generado internamente es menor.

Cuando en el sistema existe solamente ruido térmico, la cifra de ruido puede simplificarse aún más. Supongamos que se aplica al sistema una señal útil $s(t)$ más un ruido térmico $n(t)$ a una temperatura efectiva T_s , siendo B el ancho de banda del sistema. La potencia de ruido disponible a la entrada es, de (2.148),

$$N_i = kT_s B \quad (2.170)$$

También $S_o = S_i G_p$, de donde

$$\frac{S_o}{S_i} = G_p \quad (2.171)$$

En el sistema se genera una cierta cantidad de ruido térmico. Si representamos este ruido mediante su temperatura equivalente referida a la entrada, tendremos que

$$N_o = kT_s B G_p + kT_e B G_p = G_p k(T_s + T_e) B = G_p kT_i B \quad (2.172)$$

$$\text{donde } T_i = T_s + T_e \quad (2.173)$$

T_i es la temperatura neta de entrada y representa la temperatura total efectiva de entrada. Entonces, de (2.172),

$$N_o = G_p \left(1 + \frac{T_e}{T_s}\right) kT_s B, \text{ y de (2.170),}$$

$$N_o = G_p \left(1 + \frac{T_e}{T_s}\right) N_i, \text{ de donde}$$

$$\frac{N_o}{N_i} = G_p \left(1 + \frac{T_e}{T_s}\right) \quad (2.174)$$

De (2.169), (2.171), (2.174) y referida a la temperatura de referencia $T_s = T_o = 290$ kelvins, la cifra de ruido será

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_o} \quad (2.175)$$

La temperatura equivalente o efectiva será entonces

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$T_e = (F - 1)T_o \quad (2.176)$$

Estos resultados son bien sencillos y fáciles de aplicar, pues aunque no todas las fuentes de ruido son térmicas, sus efectos a menudo se incluyen en una temperatura T_e obtenida experimentalmente.

Hay que tener cuidado al utilizar las ecuaciones (2.175) y (2.176). En su deducción hemos utilizado la temperatura física T_s de la fuente, la cual puede ser muy diferente de T_o ; pero la cifra de ruido del sistema debe calcularse siempre referida a la temperatura de referencia T_o y a la temperatura efectiva T_e del sistema, expresión (2.175). El valor de la temperatura T_e , calculado a partir de la cifra de ruido, expresión (2.176), estará referido entonces a la temperatura de referencia $T_o = 290$ kelvins. En resumen, al efectuar cálculos en los que interviene la cifra de ruido de un sistema, se considera que esta cifra de ruido está referida a T_o , y la temperatura efectiva T_e del sistema puede calcularse entonces a partir de (2.176).

La relaciones S/N y las cifras de ruido F se expresan comúnmente en dB en la forma

$$\left[\frac{S}{N} \right]_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N} \right) \quad \text{y} \quad [F]_{dB} = 10 \log_{10} (F)$$

Obsérvese que la cifra de ruido de un sistema ideal sin ruido es igual a la unidad, mientras que la parte de la cifra de ruido de un sistema producida por el ruido interno es (F-1).

La Cifra de Ruido de la mayoría de sistemas prácticos, por ejemplo, transmisores de radio, es proporcionada por los fabricantes de los sistemas.

♣ Ejemplo 2.35

Un amplificador tiene una cifra de ruido de 9,031 dB, una ganancia de potencia de 40 dB y un ancho de banda equivalente de ruido de 10 kHz. Vamos a determinar la temperatura efectiva del ruido y la potencia disponible a la salida cuando el amplificador está acoplado a una resistencia de entrada cuya temperatura efectiva es de 2900 kelvins. La resistencia de entrada puede representar, por ejemplo, una antena y su correspondiente línea de transmisión.

Se tiene entonces,

$$F = 9,031 \text{ dB} = 8; \quad G_p = 40 \text{ dB} = 10^4; \quad T_s = 2900 \text{ kelvins}; \quad T_o = 290 \text{ kelvins}$$

$$\text{De (2.176),} \quad T_e = (F - 1)T_o = (8 - 1)290 = 2030 \text{ kelvins}$$

$$\text{De (2.172),} \quad N_o = G_p k (T_s + T_e) B = 10^4 \times 1,38 \times 10^{-23} (2900 + 2030) \times 10^4 = 6,8 \times 10^{-12} \text{ W}$$

$$N_o = -51,67 \text{ dB}\mu \quad (\text{dB respecto a un } \mu\text{W})$$

♣

Cifra de Ruido en Sistemas en Cascada

Las expresiones (2.175) y (2.176) han sido deducidas para un sistema individual, pero se pueden extender para sistemas en cascada, como es el caso de un amplificador de varias etapas, cada una de las cuales tiene su propia temperatura y cifra de ruido, como se muestra en la Fig. 2.56.

En la Fig. 2.56 se tiene n amplificadores en cascada y se desea determinar la temperatura y la cifra de ruido del sistema compuesto. Se supone que los amplificadores están acoplados y que su ancho de banda efectivo es B; la temperatura efectiva del ruido de entrada es T_s .

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

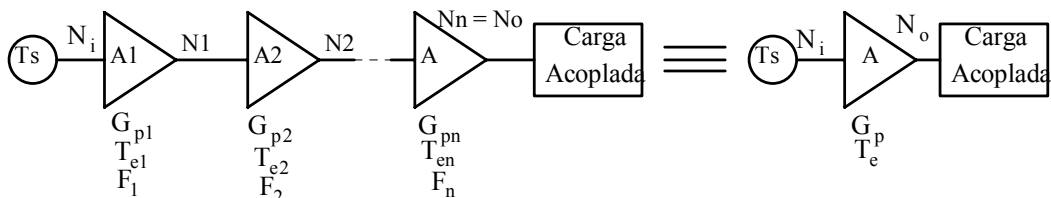


Fig. 2.56. Amplificadores en Cascada.

Para no hacer tediosa la demostración, vamos a considerar solamente tres amplificadores.

La potencia de ruido a la entrada es, de (2.170),

$$N_i = kT_s B$$

También, de (2.172),

$$N_1 = G_{p1}N_i + G_{p1}kT_{e1}B \implies \text{Potencia total de ruido a la salida de A1}$$

$$N_2 = G_{p2}N_1 + G_{p2}kT_{e2}B \implies \text{“ “ “ “ “ “ “ “ A2}$$

$$N_3 = N_o = G_{p3}N_2 + G_{p3}kT_{e3}B \implies \text{“ “ “ “ “ “ “ “ A3}$$

Reemplazando N_1 y N_2 en $N_3 = N_o$, se obtiene finalmente

$$N_o = G_{p1}G_{p2}G_{p3}k \left[T_s + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}} + \frac{T_{e3}}{G_{p1}G_{p2}} \right] B = G_p k [T_s + T_e] B \quad (2.177)$$

$$\text{donde} \quad T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}} + \frac{T_{e3}}{G_{p1}G_{p2}} \quad (2.178a)$$

$$\text{y} \quad G_p = G_{p1}G_{p2}G_{p3} \quad (2.178b)$$

T_e es la temperatura efectiva de ruido, referida a la entrada, del amplificador compuesto; G_p es la ganancia total de potencia.

Se puede determinar ahora la cifra de ruido del amplificador compuesto. En efecto, reemplazando (2.176) en (2.178),

$$(F-1)T_o = (F_1-1)T_o + \frac{(F_2-1)T_o}{G_{p1}} + \frac{(F_3-1)T_o}{G_{p1}G_{p2}}$$

$$\text{de donde} \quad F = F_1 + \frac{F_2-1}{G_{p1}} + \frac{F_3-1}{G_{p1}G_{p2}} \quad (2.179)$$

Estos resultados se pueden extender para n etapas. Siguiendo el mismo procedimiento efectuado para tres etapas, se puede demostrar que

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La temperatura efectiva total:

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}} + \frac{T_{e3}}{G_{p1}G_{p2}} + \dots + \frac{T_{en}}{G_{p1}G_{p2}G_{p3}\dots G_{p(n-1)}} \quad (2.180)$$

la llamada “Fórmula de Friis”:

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{p1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{p1}G_{p2}} + \dots + \frac{F_n - 1}{G_{p1}G_{p2}G_{p3}\dots G_{p(n-1)}} \quad (2.181)$$

y la ganancia de potencia total:

$$G_p = G_{p1} \cdot G_{p2} \cdot G_{p3} \cdot \dots \cdot G_{pn} \quad (2.182)$$

Nótese que los términos individuales de las sumas se hacen cada vez más pequeños (suponiendo que las ganancias de potencia son mayores que la unidad) a medida que aumenta el número de etapas. Esto significa que en amplificadores en cascada la primera etapa es la que más contribuye tanto a la temperatura T_e como a la cifra de ruido totales. Una buena práctica en el diseño de amplificadores en cascada es la de diseñar la primera etapa con el mínimo valor de T_e (o F) y la máxima ganancia de potencia posibles.

Cifra de Ruido en Redes Atenuadoras

La cifra de ruido se puede aplicar también para caracterizar los efectos de elementos atenuadores sobre el ruido total de un sistema. A este efecto podemos definir una red que cumpla con los siguientes requisitos: (a) que sus impedancias (de entrada y salida) estén acopladas, (b) que solamente contenga elementos pasivos y resistivos (la única fuente de energía en la red es la producida por efectos térmicos), y (c) que parte de la potencia de entrada sea absorbida en la red, es decir, que su ganancia de potencia sea menor que la unidad. Una red que satisface estas condiciones se denomina “**Red Acoplada Pasiva**”.

Los ejemplos más comunes de redes acopladas pasivas son las líneas de transmisión (en RF) y los atenuadores acoplados. Por ejemplo, la línea de transmisión entre una antena y su receptor es una red acoplada pasiva que introduce pérdidas de potencia e influye en la cifra de ruido total del sistema.

La manera más conveniente para representar las pérdidas en una red acoplada pasiva es mediante el “**factor de pérdidas de inserción o factor de atenuación, L** ”, el cual se define como “la razón entre la potencia disponible a la entrada de la red respecto a la potencia disponible a la salida”, es decir,

$$L = \frac{P_{di}}{P_{do}}, \quad \text{en general} \quad L > 1 \quad (2.183)$$

Consideremos la red acoplada pasiva mostrada en la Fig. 2.57. El ruido de entrada se caracteriza por su temperatura efectiva T_s y puede representar, por ejemplo, una antena cuya temperatura efectiva es el resultado de diferentes contribuciones. T_p es la temperatura física de la red acoplada pasiva.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

La potencia de ruido disponible a la entrada de la red es, de (2.148),

$$N_i = kT_s B$$

donde B es el ancho de banda efectivo del sistema.

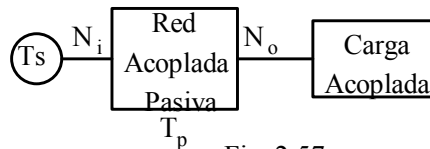


Fig. 2.57.

La potencia de ruido a la salida se puede escribir en la forma [Schwartz, 1980]

$$N_o = \alpha_1 kT_s B + \alpha_2 kT_p B \quad (2.184)$$

donde α_1 y α_2 son factores de ponderación relativos de las dos potencias disponibles definidas en (2.184). Aplicando principios de la termodinámica se ha demostrado [Schwartz, 1980] que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Entonces, de acuerdo con la definición del factor de atenuación L , se puede decir que

$$\alpha_1 = \frac{1}{L} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \quad (2.185)$$

Reemplazando (2.185) en (2.184),

$$N_o = \frac{kT_s B}{L} + \left(1 - \frac{1}{L}\right) kT_p B = \frac{1}{L} k \left[T_s + (L - 1) T_p \right] B \quad (2.186)$$

$$N_o = \frac{1}{L} k (T_s + T_{eL}) B = G_{pL} k (T_s + T_{eL}) B \quad (2.187)$$

donde $G_{pL} = \frac{1}{L} \quad \text{y} \quad T_{eL} = (L - 1) T_p \quad (2.188)$

Las expresiones (2.187) y (2.188) indican que una red acoplada pasiva se puede tratar en la misma forma que un amplificador mediante la definición de su temperatura efectiva T_{eL} .

Nótese que T_{eL} aumenta linealmente en función de L . Esto significa que cuanto mayor es la atenuación, mayor será la temperatura efectiva de ruido de la red acoplada pasiva y, por supuesto, mayor será la cifra de ruido. En efecto, la cifra de ruido de la red acoplada pasiva se obtiene reemplazando (2.176) en (2.178),

$$F_L = 1 + (L - 1) \frac{T_p}{T_o} \quad (2.189)$$

En el caso especial cuando $T_p = T_o$, la cifra y temperatura de ruido se reducen a

$$F_L = L \quad (2.190)$$

$$T_{eL} = (L - 1) T_o \quad (2.191)$$

Cuando en una línea de transmisión no se conoce exactamente su temperatura física T_p , y puesto que, en general, T_p no es muy distinta de la temperatura de referencia $T_o = 290$ kelvins, las expresiones (2.190) y (2.191) permiten aproximar los valores de la cifra de ruido y temperatura de ruido, pues L es un parámetro que se puede determinar fácilmente a partir de las características técnicas o especificaciones de la línea de transmisión. En efecto, en la teoría de las líneas de transmisión se suele expresar la atenuación L en la forma $L = \exp(2\alpha x)$, donde α es la constante de

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

atenuación en nepers por unidad de longitud y x la longitud de la línea; por lo tanto, $F_L = \exp(2\alpha x)$ y $T_{eL} = [\exp(2\alpha x) - 1]T_0$. Por ejemplo, las pérdidas típicas de un cable coaxial de 75 Ohm, expresadas en dB por cada 30 metros, son: 1 dB a 25 MHz, 2 dB a 85 MHz, 4 dB a 300 MHz, 8 dB a 900 MHz y 10 dB a 1200 MHz. Estos valores los dan los fabricantes de los cables en sus respectivos catálogos.

Un caso muy frecuente en la práctica es la conexión en cascada de una red atenuadora seguida de un amplificador. Consideremos un atenuador (que puede ser una línea de transmisión) cuya pérdida de inserción es L , seguido de un amplificador con una cifra de ruido F_a . La cifra de ruido total F de la combinación atenuador-amplificador viene dada por (2.181),

$$F = F_L + \frac{F_a - 1}{G_{pL}}, \text{ pero como } F_L = L \text{ y } G_{pL} = \frac{1}{L}, \text{ entonces}$$

$$F = F_a \cdot L \quad (2.192)$$

Este resultado demuestra la gran deterioración en la cifra de ruido total. Cuanto más alto es el factor de atenuación L , peor será el valor de la cifra de ruido total.

En el Ejemplo 2.36 se muestran dos casos de considerable interés práctico (Sugerimos al lector estudiar este ejemplo con mucha atención).

♣ Ejemplo 2.36.

Consideremos las dos configuraciones de un sistema de recepción mostradas en la Fig. 2.58.

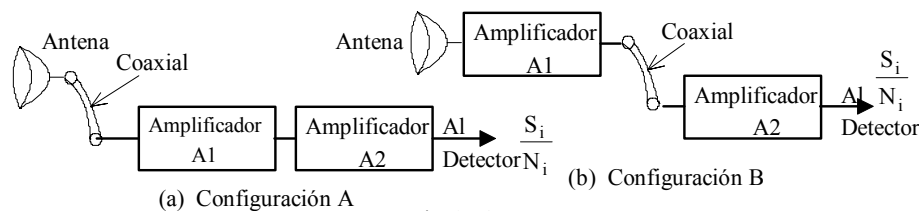


Fig. 2.58.

Estos dos montajes son muy utilizados en la práctica. Vamos a determinar las relaciones S/N de predetección en ambas configuraciones. Las especificaciones generales del sistema son:

Frecuencia de trabajo f_c :	900 MHz
Ancho de banda efectivo B :	2 MHz
Temperatura efectiva de ruido en la antena T_a :	100 kelvins
Potencia de la señal útil recibida en antena, S_a :	10^{-9} W
Cable coaxial de 75 Ohm, longitud	60 metros
Temperatura física de la línea de transmisión, T_p :	310 kelvins
Ganancia de potencia del amplificador A1, G_{p1}	50 dB
Temperatura efectiva de ruido del amplificador A1, T_{e1} :	200 kelvins
Ganancia de potencia del amplificador A2, G_{p2} :	40 dB

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Cifra de ruido del amplificador A2, F_2 : 6 dB

Estos son valores que se suele encontrar en los sistemas prácticos.

(a) Cálculos para la línea de transmisión

El cable coaxial de 75 Ohm y 60 m de longitud a 900 MHz tiene una pérdida de inserción de 16 dB. Entonces,

$$L = 16 \text{ dB} = 39,811. \text{ De donde } G_{pL} = \frac{1}{L} = 2,512 \times 10^{-2}$$

$$\text{De (2.188), } T_{eL} = (L - 1)T_p = (39,811 - 1)310 = 12031,32 \text{ kelvins}$$

$$\text{De (2.189), } F_L = 1 + (L - 1) \frac{T_p}{T_o} = 1 + (39,81 - 1) \frac{310}{290} = 42,487 = 16,28 \text{ dB}$$

(b) Cálculos para el Amplificador A1

$$G_{p1} = 50 \text{ dB} = 10^5; \quad T_{e1} = 200 \text{ kelvins}; \quad F_1 = 1 + \frac{T_{e1}}{T_o} = 1 + \frac{200}{290} = 1,69 = 2,778 \text{ dB}$$

(c) Cálculos para el Amplificador A2

$$G_{p2} = 40 \text{ dB} = 10^4; \quad F_2 = 6 \text{ dB} = 3,981; \quad T_{e2} = (F_2 - 1)T_o = (3,981 - 1)290 = 864,51 \text{ kelvins}$$

(d) Cálculo de la relación de predetección S_i / N_i para la Configuración A

$$T_e = T_{eL} + \frac{T_{e1}}{G_{pL}} + \frac{T_{e2}}{G_{pL}G_{p1}} = 12031,32 + \frac{200}{2,512 \times 10^{-2}} + \frac{864,51}{2,512 \times 10^{-2} \times 10^5}$$

$$T_e = 19993,45 \text{ kelvins}$$

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_o} = 1 + \frac{19993,45}{290} = 69,94 = 18,447 \text{ dB}$$

La potencia de ruido a la entrada del detector (salida de A1) será

$$N_i = G_p k(T_a + T_e)B = 2,512 \times 10^7 \times 1,38 \times 10^{-23} (100 + 19993,45) 2 \times 10^6$$

$$N_i = 1,393 \times 10^{-5} \text{ W} = -18,56 \text{ dBm}$$

y la potencia de la señal,

$$S_i = G_p \cdot S_a = 2,512 \times 10^7 \times 10^{-9} = 2,512 \times 10^{-2} \text{ W} = 14 \text{ dBm}$$

La relación de predetección S_i / N_i para la Configuración A será entonces

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{2,512 \times 10^{-2}}{1,393 \times 10^{-5}} = 1803,3; \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{dB}} = 32,561 \text{ dB}$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(e) Cálculo de la relación de predetección S_i / N_i para la Configuración B

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{eL}}{G_{p1}} + \frac{T_{e2}}{G_{p1}G_{pL}} = 200 + \frac{12031,32}{10^5} + \frac{864,51}{10^5 \times 2,512 \times 10^{-2}}$$

$$T_e = 200,46 \text{ kelvins}$$

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1 + \frac{200,46}{290} = 1,69 = 2,282 \text{ dB}$$

$$N_i = 2,512 \times 10^7 \times 1,38 \times 10^{-23} (100 + 200,46) 2 \times 10^6$$

$$N_i = 2,083 \times 10^{-7} \text{ W}$$

$$S_i = 2,512 \times 10^{-2} \text{ W}$$

La relación de predetección S_i / N_i para la Configuración B será

$$\frac{S_i}{N_i} = 120588; \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{dB}} = 50,81 \text{ dB}$$

Puede observarse que esta relación de predetección es 18,252 dB más alta que la relación de predetección de la Configuración A.

Es evidente que la Configuración B es preferible a la Configuración A, aunque no siempre es práctica la instalación de un preamplificador acoplado directamente a la antena. Sin embargo, en aplicaciones en que las señales recibidas son de muy bajo nivel, como es el caso en comunicaciones vía satélite y en radioastronomía, se coloca un preamplificador de muy bajo ruido (low noise amplifier, LNA) directamente acoplado a la antena, generalmente parabólica, para mejorar la relación S_i / N_i a la entrada del detector. La relación de postdetección S_o / N_o dependerá del tipo de modulación empleado en el sistema, como veremos en los Capítulos V y VI.



Medida del Ruido

En la literatura técnica, sobre todo de los países europeos, se utiliza a menudo la denominada “**Medida del Ruido, M**” para caracterizar el efecto del ruido en un sistema lineal invariante en el tiempo. La medida del ruido de un sistema se define en la forma

$$M = \frac{F - 1}{1 - \frac{1}{G_p}} \quad \text{con } M > 0 \quad (2.193)$$

donde F es la cifra de ruido del sistema y G_p su correspondiente ganancia de potencia. La condición $M > 0$ implica que $G_p > 1$, lo que significa que la medida del ruido M no se aplica en redes atenuadoras.

El significado físico de la medida del ruido se comprende mejor si consideramos una cascada de n amplificadores idénticos. Por ejemplo, si en (2.181) hacemos

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n = F_a \quad \text{y} \quad G_{p1} = G_{p2} = \dots = G_{pn} = G_p, \text{ se tiene que}$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$F = F_a + \frac{F_a}{G_p} - \frac{1}{G_p} + \frac{F_a}{G_p^2} - \frac{1}{G_p^2} + \frac{F_a}{G_p^3} - \frac{1}{G_p^3} + \dots + \frac{F_a}{G_p^{n-1}} - \frac{1}{G_p^{n-1}}$$

Agrupando términos

$$F = 1 + (F_a - 1) \left[1 + \frac{1}{G_p} + \frac{1}{G_p^2} + \frac{1}{G_p^3} + \dots + \frac{1}{G_p^{n-1}} \right]$$

La secuencia dentro de los corchetes es igual a $\frac{1}{1 - 1/G_p}$; en consecuencia,

$$F = 1 + \frac{F_a - 1}{1 - 1/G_p} = 1 + M \quad (2.194)$$

Resolviendo (2.194) para M obtenemos (2.193).

Cuando la cantidad de etapas es grande, la expresión (2.194) permite determinar la cifra de ruido total F mucho más rápido que si se utilizara la expresión (2.181). Aún más, si G_p es lo suficientemente grande, es decir, si $G_p \gg 1$, entonces $M \approx F_a - 1$, en cuyo caso no se necesita la medida del ruido M puesto que $F \approx F_a$. Si $G_p > 1$ pero cercano a la unidad, la medida del ruido es bastante alta y $F \approx M$. Si $G_p < 1$, las etapas atenúan y la medida del ruido M no tiene sentido. Finalmente, si comparamos (2.194) con (2.166), vemos que $M = N_{so} / N_{io}$, lo que equivale a decir que M es una medida relativa del ruido generado internamente en el sistema respecto al ruido de entrada al mismo, y que la relación N_{so} / N_{io} se puede cuantificar mediante la expresión (2.193).

♣ Ejemplo 2.37

Se puede demostrar otra propiedad muy interesante de la medida del ruido M si se consideran dos amplificadores diferentes que hay que conectar en cascada y cuyas medidas de ruido son M_1 y M_2 , cifras de ruido F_1 y F_2 , y ganancias de potencia G_{p1} y G_{p2} , respectivamente. Sea F_{12} la cifra de ruido de la cascada A1-A2 (primero A1, después A2), y F_{21} la cascada A2-A1 (primero A2, después A1). El diseño requiere que la cifra de ruido de la cascada A1-A2 sea menor que la cifra de ruido de la cascada A2-A1, es decir, que $F_{12} < F_{21}$. Se desea saber la relación entre las temperaturas efectivas y ganancias de potencia de los amplificadores A1 y A2.

De (2.181),

$$F_{12} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{p1}} < F_{21} = F_2 + \frac{F_1 - 1}{G_{p2}}$$

Restando la unidad a cada miembro de la desigualdad y reorganizando, se obtiene

$$(F_1 - 1) \cdot (1 - 1/G_{p2}) < (F_2 - 1) \cdot (1 - 1/G_{p1}), \text{ de donde}$$

$$\frac{F_1 - 1}{1 - 1/G_{p1}} < \frac{F_2 - 1}{1 - 1/G_{p2}}, \text{ y de la definición de la medida del ruido, expresión (2.193),}$$

$$M_1 < M_2$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

De manera que $F_{12} < F_{21}$ implica que $M_1 < M_2$, lo cual significa que la menor cifra de ruido de la combinación se obtiene cuando el amplificador con la menor cifra de ruido se coloca de primero. En este caso se diseñará la cascada A1-A2 en la cual debe cumplirse que $T_{e1} < T_{e2}$ y $G_{p1} > G_{p2}$.



En resumen, el ruido en un sistema se puede caracterizar mediante sus relaciones S/N, su cifra de ruido F, su temperatura efectiva de ruido T_e o su medida del ruido M. En particular, la temperatura de ruido se utiliza ampliamente para caracterizar el ruido en sistemas que trabajan con señales de muy bajo nivel, como es el caso de amplificadores paramétricos, antenas de radioastronomía y dispositivos similares. La tendencia actual en esta aplicación es la de utilizar cada vez más la temperatura de ruido para caracterizar el ruido, en detrimento de la cifra de ruido F o la medida de ruido M. Las relaciones S/N son de aplicación general.

2.10. RESUMEN

El objetivo principal de este capítulo es la representación de sistemas en los dominios tiempo-frecuencia con énfasis en sus aplicaciones en el área de las comunicaciones. Es necesario, por lo tanto, el desarrollo de modelos matemáticos que representen los sistemas físicos para comprender el análisis de las interrelaciones señales-sistemas.

El análisis espectral de sistemas es esencial para comprender muchos fenómenos no perceptibles en el dominio del tiempo. Este análisis lo enfocamos desde el punto de vista de las Series y Transformadas de Fourier, que nos proveen de las herramientas analíticas necesarias para emprender el estudio de sistemas en el dominio de la frecuencia. Esto nos permite, a partir del Análisis de Fourier, de sus propiedades y teoremas derivados (Parseval, Raleigh, Wiener-Kintchine, etc.), establecer el concepto de sistema y definir la respuesta impulsional y la función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo, y los efectos de las interacciones señales-sistemas.

Un aspecto de considerable importancia en el campo de las telecomunicaciones es el ruido. Con el fin de poderlo analizar, al ruido lo hemos representado como una señal aleatoria, generalmente gaussiana, y expresado mediante su ecuación canónica o su densidad espectral de potencia. Para su aplicación en el análisis de sistemas, el ruido se ha caracterizado como relación Señal/Ruido, Temperatura Efectiva de Ruido, Cifra de Ruido y Medida del Ruido, conceptos que nos permiten analizar y cuantificar sus efectos en la transmisión y recepción de señales.

Igual que el Capítulo I, el Capítulo II es ejemplo de la cantidad de herramientas matemáticas y conceptuales necesarias para un estudio más avanzado de la Teoría de la Comunicación más allá del nivel de pregrado, pero que es suficiente para comprender los conceptos que se estudiarán en el resto del texto.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

2.1. Demuestre que el sistema caracterizado mediante la ecuación diferencial

$$y(t) = t^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + t \frac{d}{dt} x(t), \text{ es un sistema lineal variante en el tiempo.}$$

2.2. La relación entrada-salida de un SLIT se puede representar mediante la ecuación diferencial

$$x(t) = \frac{d}{dt} y(t) + y(t). \text{ Para este sistema demuestre que:}$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(a) $h(t) = \exp(-t)u(t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$

b) Si $x(t)$ es una señal periódica como la de la Fig. 2.59, $|Y_n|$ y ϕ_{yn} tendrán los valores dados.

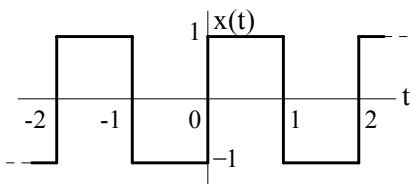


Fig. 2.59

$$|Y_n| = \frac{2}{n\pi\sqrt{1+n^2\pi^2}}$$

$$\phi_{yn} = -\left[\frac{\pi}{2} + \arctan(n\pi)\right]$$

(c) Si $x(t) = A\delta(t - t_0)$, entonces $y(t) = A \exp[-(t - t_0)]u(t - t_0)$

(d) Si $x(t) = Au(t)$, entonces $y(t) = 2A \sinh\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot u(t) + \frac{A}{2}$

(e) Si $x(t) = A \cos(2\pi t)$, entonces $y(t) = \frac{A}{1 + 4\pi^2} [\cos(2\pi t) + 2\pi \sin(2\pi t)]$

(f) Si $x(t) = A \exp(-t)u(t)$, entonces $y(t) = A \exp(-t)u(t)$

(g) Si $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Lambda\left(\frac{t - nT}{T/2}\right)$, entonces

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A \exp[j(2\pi f_0 t) - \arctan(2\pi f_0 t)]}{n^2 \pi^2 \sqrt{1 + (2\pi f_0)^2}} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

2.3. La entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un SLIT están relacionadas mediante la ecuación integrodiferencial

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t - \tau)d\tau + \frac{d}{dt}u(t)$$

Si $x(t) = \exp(-2t)u(t)$, demuestre que $y(t) = \exp(-t)u(t) + \delta(t)$ y que la respuesta impulsional del SLIT es $h(t) = \exp(-t)u(t) + 3\delta(t) + \delta'(t)$, donde $\delta'(t)$ es un doblete.

2.4. La entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ de un SLIT vienen dadas por

$$x(t) = \exp[-(t - \pi)]u(t - \pi); \quad y(t) \Leftrightarrow Y(f) = \frac{\exp(-j4\pi^2 f)}{1 - (2\pi f)^2 + j4\pi f}$$

Demuestre que la respuesta impulsional del SLIT es $h(t) = x(t)$

2.5. Sea el sistema mostrado en la Fig. 2.60. El cursor oscila a una velocidad constante entre los puntos A y B, siendo T_0 el tiempo de ir de A a B, y viceversa.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

Demuestre:

- (a) Que éste es un sistema lineal variante en el tiempo.
 (b) Que su respuesta impulsional y salida son, respectivamente

$$h(t, \tau) = \Lambda\left(\frac{\tau_0}{T_0}\right)\delta(t - \tau)$$

para $\tau = 2nT_0 \pm \tau_0$, con $\tau_0 < T_0$

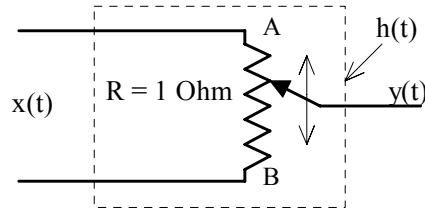


Fig. 2.60

$$y(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t - 2nT_0}{T_0}\right)$$

2.6. La respuesta impulsional de un SLIT es $h(t) = [3 \exp(-2t) - 1]u(t)$. Demuestre que

(a) Su función de transferencia es $H(f) = \frac{j2\pi f - 1}{j2\pi f(1 + j\pi f)}$

(b) Si $x(t) = \exp(t)u(-t)$, entonces $y(t) = [\exp(-2t) - 1]u(t)$

2.7. La respuesta impulsional de un SLIT es $h(t) = \delta(t) + 2 \exp(-3t)u(t)$. Demuestre que

(a) Su función de transferencia es $H(f) = \frac{5 + j2\pi f}{3 + j2\pi f}$

(b) Si $x(t) = 3 \cos(2t)$, entonces $y(t) = 3\sqrt{\frac{29}{13}} \cos(2t - 11,88^\circ)$

(c) Si $x(t) = 4 \cos^2(2t)$, entonces $y(t) = \frac{10}{3} + 2\sqrt{\frac{41}{25}} \cos(4t - 14,47^\circ)$

(d) Si $x(t) = \Pi(\frac{t}{2})$, entonces $y(t) = \frac{2}{3}[1 - \exp[-3(t+1)]]\Pi(\frac{t}{2}) - \frac{2}{3}[1 - \exp[-3(t-1)]]u(t-1)$

2.8. La función de transferencia de un SLIT es $H(f) = 10 \left[1 - \frac{1}{1 + j2\pi f} \right] \cdot \exp(-j4\pi f)$.

Demuestre que la respuesta del SLIT cuando se le aplica la excitación $x(t) = 5u(t - 2)$ es $y(t) = 50 \exp[-(t - 4)] \cdot u(t - 4)$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.9. Sea el circuito de la Fig. 2.61 y $v(t) = \exp(-t)u(t)$.

Suponga que la corriente $i(0^-) = 0$. Demuestre que la corriente es

$$i(t) = \frac{\exp(-\frac{R}{L}t) - \exp(-t)}{L - R} u(t); \quad |L - R| > 0$$

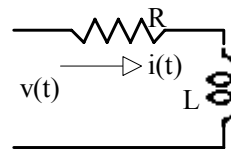


Fig. 2.61

2.10. Demuestre, mediante convolución puramente analítica, la salida $y(t)$ para los $x(t)$ y $h(t)$ dados, y verifique la respuesta mediante convolución gráfica.

(a) $x(t) = 5\Pi(\frac{t-5}{10})$; $h(t) = -2\delta(t+30) + 4\delta(t-50)$; $y(t) = -10\Pi(\frac{t+25}{10}) + 20\Pi(\frac{t-55}{10})$

(b) $x(t) = 10\Lambda(t)$; $h(t) = 5 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-4n)$; $y(t) = 50 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t-4n)$

(c) $x(t) = 10u(t)$; $h(t) = 10\Pi(\frac{t-10}{20})$; $y(t) = 100t\Pi(\frac{t-10}{20}) + 2000u(t-20)$

(d) $x(t) = 10u(t)$; $h(t) = 10(10-t)\Pi(\frac{t-5}{10})$; $y(t) = 50(20t-t^2)\Pi(\frac{t-5}{10}) + 5000u(t-10)$

(e) $x(t) = 10\Pi(\frac{t-1}{4})$; $h(t) = 10\Pi(\frac{t-3}{4})$; $y(t) = 400\Lambda(\frac{t-4}{4})$

2.11. Dibuje el espectro de las siguientes señales:

(a) $x_s(t) = 10\text{sinc}^2(\frac{t}{2T}) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

(b) $x_s(t) = \left[2\text{sinc}(2t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-\frac{n}{3}) \right] * 4\Pi(4t)$

2.12. Demuestre que en una red de transmisión sin distorsión el retardo de fase y el retardo de envolvente son iguales cuando $\beta(0) = 0$. ¿Qué sucede cuando $\beta(0) \neq 0$?

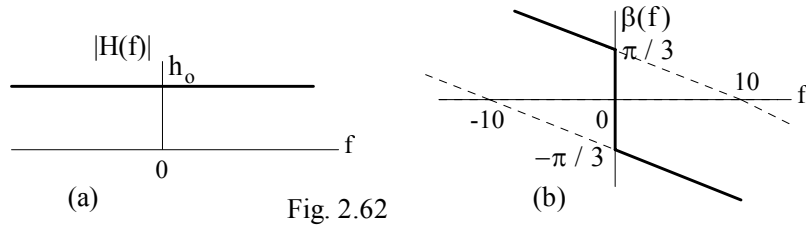
2.13. En la Fig. 2.62 se muestra las características de amplitud y fase de una red dada.

(a) Demuestre que esta red produce un término de distorsión de fase.

(b) Demuestre que el retardo de fase y el retardo de grupo son, respectivamente,

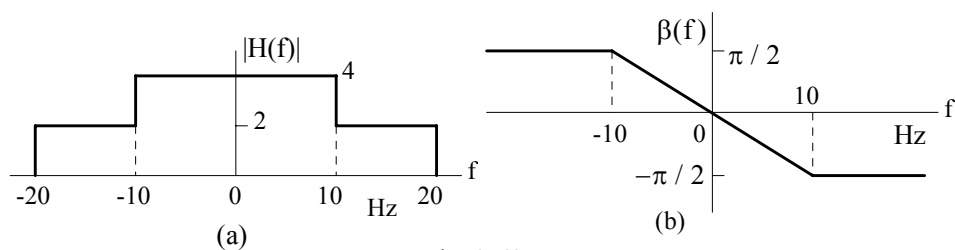
$$t_p(f) = \frac{1}{60} + \frac{1}{6f}; \quad t_g(f) = \frac{1}{60}$$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS



(c) Grafique $t_p(f)$ y explique el comportamiento de la red cuando la frecuencia varía desde $f=0$ hasta $f \rightarrow \infty$.

- 2.14. La señal $x(t) = 10\text{sinc}(10t) + 10\text{sinc}^2(5t)\cos(30\pi t)$ se aplica a un filtro cuyas características de amplitud y fase se muestran en la Fig. 2. 63.



Demuestre que la salida del filtro es $y(t) = 40\text{sinc}[10(t - \frac{1}{40})] + 20\text{sinc}^2(5t)\sin(30\pi t)$

¿Qué tipos de distorsión hay presentes en la salida?

- 2.15. En la Fig. 2.64 se muestra las características de amplitud y fase de un filtro dado. Determine la salida $y(t)$ del filtro para cada una de las señales siguientes, y especifique el tipo de distorsión producido.



- (a) $x(t) = 4\text{sinc}(2 \times 10^5 t) \cdot \cos(2\pi \times 10^6 t)$; (b) $x(t) = 4\text{sinc}(2 \times 10^6 t) \cdot \cos(2\pi \times 10^7 t)$
 (c) $x(t) = 16\text{sinc}(8 \times 10^5 t) \cdot \cos(28\pi \times 10^6 t) + 2\text{sinc}(10^6 t) \cdot \cos(10^7 \pi t)$

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

2.16. Un sistema lineal está representado mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = b_1 \frac{d}{dt}x(t) + b_0x(t)$$

(a) Demuestre que $|H(f)| = \sqrt{\frac{b_0^2 + (2\pi b_1 f)^2}{a_0^2 + (2\pi f)^2}}$; $\beta(f) = \arctan\left(\frac{2\pi b_1 f}{b_0}\right) - \arctan\left(\frac{2\pi f}{a_0}\right)$

$$y(t) = [b_0 - a_0 b_1] \exp(-a_0 t) u(t) + b_1 \delta(t)$$

(b) Grafique $|H(f)|$ y $\beta(f)$ para $b_0 = 0$. ¿Qué tipo de filtro es?

(c) Grafique $|H(f)|$ y $\beta(f)$ para $b_1 = 0$. ¿Qué tipo de filtro es?

(d) Determine y grafique el retardo de envolvente cuando $b_1 = 0$ y $a_0 = 1$.

2.17. La red mostrada en la Fig. 2.65 es un sistema muy utilizado en instrumentos de medición.

(a) Demuestre que cuando $R_1 C_1 = R_2 C_2$ la red se comporta como una red sin distorsión con retardo cero.

(b) Si $R_1 = 2R_2 = 1000 \text{ Ohm}$ y

$C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$, grafique las características de amplitud y fase de $H(f)$. ¿Cómo es el comportamiento de esta red para frecuencias de entrada superiores a 1 kHz?

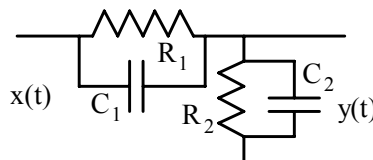


Fig. 2.65

2.18. Un sistema no lineal tiene la característica de transferencia

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$$

La salida deseada es la correspondiente a $x(t)$.

(a) Sea $x(t) = \cos(10\pi t) + \cos(100\pi t)$; $a_1 = 11$; $a_2 = 6$; $a_3 = 4$

Determine los términos de distorsión armónica y los de intermodulación.

Demuestre que la potencia promedio de la salida deseada es $\langle y^2(t) \rangle = 400 \text{ W}$

(b) Sea $x(t) = 10\cos(100\pi t)$; $a_1 = 2$; $a_2 = 10^{-2}$; $a_3 = 10^{-3}$

Calcule el porcentaje de distorsión de tercera armónica.

(c) Sea $x(t) = 2 \times 10^3 \text{sinc}(2 \times 10^3 t)$; $a_1 = 10$; $a_2 = -10^{-2}$; $a_3 = 0$

Determine $Y(f)$ y dibuje su espectro $|Y(f)|$.

2.19. Sea una señal $x(t)$ de banda limitada f_m . ¿Es $x^2(t)$ también de banda limitada? Si lo es, determine su frecuencia máxima. En general, ¿Qué puede decirse del espectro de $x^n(t)$? (Utilice el teorema de la convolución). Determine y dibuje, en cada caso, el espectro del cuadrado de las siguientes señales, y observe y compare sus correspondientes anchos de banda.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(a) $x(t) = 4Af_m \text{sinc}(2f_m t)$; (b) $x(t) = 4Af_m \text{sinc}(2f_m t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$ con $f_c \gg f_m$

- 2.20. En la Fig. 2.66 se muestra las características ideales de un filtro conocido con el nombre de “filtro de ranura (notch filter)”. Este filtro se utiliza para eliminar frecuencias indeseables.

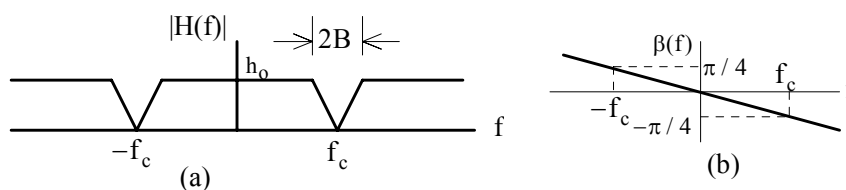


Fig. 2.66

Demuestre que su respuesta impulsional es

$$h(t) = h_0 \delta(t - t_0) - 2h_0 B \text{sinc}^2[B(t - t_0)] \cdot \cos[2\pi f_c(t - t_0)] \quad \text{donde} \quad t_0 = \frac{1}{8f_c}$$

- 2.21. Sea un filtro cuya función de transferencia es $H(f) = h_0 \text{sinc}(\tau f) \exp(-j2\pi t_0 f)$. Si se le aplica la señal $x(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau})$, demuestre que su salida es $y(t) = Ah_0 \Lambda(\frac{t - t_0}{\tau})$.

- 2.22. Sea los filtros reales mostrados en la Fig. 2.67.

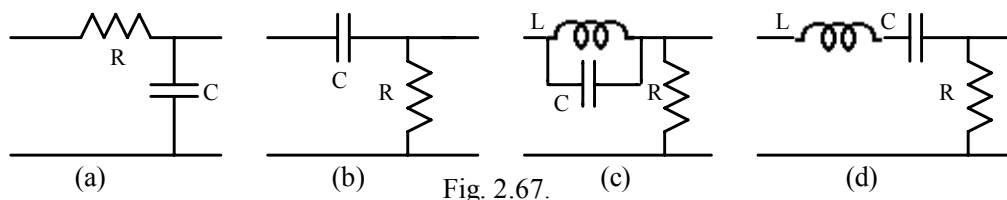


Fig. 2.67.

- Determine y grafique las correspondientes características de amplitud y fase.
- Determine los anchos de banda de 3 dB.
- Determine las ecuaciones diferenciales o integrodiferenciales que los caracterizan.
- Para los filtros (a) y (b), determine el retardo de envolvente y el ancho de banda de acuerdo con la definición dada en la expresión (2.79).

- 2.23. Se tiene una señal $x(t)$ diente de sierra creciente cuyo período es de 1 ms, con un valor máximo de 15 V y mínimo de 5 V. Se dispone también de tres filtros ideales: $H_1(f)$ pasabajo de ancho de banda de 500 Hz; $H_2(f)$ pasabajo de ancho de banda de 1500 Hz; y $H_3(f)$ pasaalto de frecuencia de corte de 500 Hz. Todos los filtros tienen ganancia unitaria. Si la entrada es $x(t)$, dibuje la señal de salida $y(t)$ en los siguientes casos:

- Salida de $H_1(f)$ solamente;
- Salida de $H_2(f)$ solamente;
- Salida de $H_3(f)$ solamente;
- Salida de la combinación $H_1(f)$ y $H_2(f)$ en cascada;
- Salida de la combinación $H_1(f)$ y $H_3(f)$ en cascada;
- Salida de la combinación $H_2(f)$ y $H_3(f)$ en cascada;
- Salida de la combinación $H_1(f)$, $H_2(f)$ y $H_3(f)$ en cascada;
- Salida de la combinación $H_1(f)$, $H_2(f)$ y $H_3(f)$ en cascada;

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

de la combinación $H_1(f)$ y $H_2(f)$ en paralelo (Configuración 2 de la Tabla de Identidades de Diagramas de Bloque, dada en la Sección 2.5).

2.24. Sea el circuito mostrado en la Fig. 2.68.

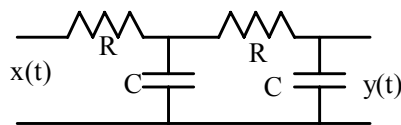


Fig. 2.68.

(a) Determine sus características de amplitud y de fase.

(b) Demuestre que si $R = 1 \text{ M}\Omega$ y $C = 1 \text{ pF}$, su ancho de banda de 3 dB es de 102,431 kHz.

(c) Demuestre que su respuesta impulsional es $h(t) = \frac{t}{(RC)^2} \exp(-\frac{t}{RC})u(t)$

(d) Demuestre que si se le aplica una excitación de la forma $x(t) = \Pi(\frac{t-T/2}{T})$, la salida es

$$y(t) = \left[1 - \exp(-\frac{t}{RC}) \right] \Pi(\frac{T-T/2}{T}) - \left[1 + \exp(-\frac{-t+T}{T}) \right] \Pi(\frac{-t+T-RC}{RC}) u(t-T)$$

2.25. Transformada de Hilbert. Demuestre que

(a) Si $x(t) = 2Af_m \text{sinc}(2f_m t)$, entonces $\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi t} [1 - \cos(2\pi f_m t)]$

(b) Si $x(t) = 2Af_m \text{sinc}^2(f_m t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$, entonces, para $f_c \geq f_m$

$$\hat{x}(t) = -2Af_m \text{sinc}^2(f_m t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

(c) Si $x(t) = \frac{At}{T} \Pi(\frac{t-T/2}{T})$, entonces $\hat{x}(t) = \frac{At}{\pi T} \ln \left| \frac{t}{T-t} \right| - \frac{A}{\pi}$

(d) Determine la envolvente compleja de $x(t)$ y sus componentes ortogonales $x_c(t)$ y $x_s(t)$ para la parte (b).

(e) Demuestre, para las partes (a) y (b), que las duplas $[x(t), \hat{x}(t)]$ y $[x_c(t), x_s(t)]$ son ortogonales, es decir, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \hat{x}(t) dt = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \cdot x_s(t) dt = 0$$

2.26. Sea $m_1(t) = AB \text{sinc}^2(Bt)$ y $m_2(t) = 2AB \text{sinc}(2Bt)$.

Si $f_c = \frac{5B}{2}$, dibuje el espectro de las señales

(a) $x(t) = m_1(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{m}_1(t) \sin(2\pi f_c t)$;

(b) $x(t) = m_1(t) \cos(2\pi f_c t) + \hat{m}_2(t) \sin(2\pi f_c t)$

2.27. Si $R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$; $R_{\hat{x}}(\tau) = \langle \hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau) \rangle$; $R_{x\hat{x}}(\tau) = \langle x(t)\hat{x}(t+\tau) \rangle$;

$R_{\hat{x}x}(\tau) = \langle \hat{x}(t)x(t+\tau) \rangle$ y $z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$, demuestre que

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$R_x(\tau) = R_{\hat{x}}(\tau); \quad R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$

$$R_z(\tau) = 2[R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)]; \quad \hat{R}_x(0) = 0$$

donde $\hat{R}_x(\tau)$ es la Transformada de Hilbert de $R_x(\tau)$.

- 2.28. Sea el “**detector sincrónico o coherente**” mostrado en el Problema de Aplicación 1.40. Nótese que este detector tiene la misma forma que la rama superior de la Fig. 2.34(a). Sea entonces $m(t)$ una señal mensaje pasabajo portadora de información. El filtro es ideal y de ganancia unitaria.

(a) Demuestre que si $x(t)$ es una señal modulada en doble banda lateral de la forma

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t), \text{ entonces, } y(t) = m(t)$$

(b) Demuestre también que si $x(t)$ es una señal modulada en banda lateral única de la forma

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{entonces } y(t) = m(t)$$

El detector sincrónico permite entonces extraer o detectar una señal mensaje $m(t)$ pasabajo contenida en una señal modulada en doble banda lateral o en banda lateral única. La única restricción existente es que si la frecuencia máxima de la señal mensaje es f_m y el ancho de banda del filtro pasabajo es B , entonces debe verificarse siempre que $f_c \geq B \geq f_m$, para no perder la información contenida en la señal mensaje $m(t)$. En la práctica, generalmente $f_c \gg f_m$, $f_c \gg B$ y $B \geq f_m$.

- 2.29. Considere la combinación RC mostrada en la Fig. 2.69.

Demuestre que el voltaje eficaz de ruido térmico en sus terminales es, para $B \rightarrow \infty$

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

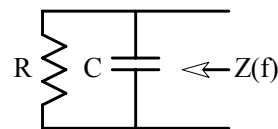


Fig. 2.69

Obsérvese que el voltaje eficaz de ruido resulta ser independiente de la resistencia R . La razón es que, mientras que el voltaje eficaz por unidad de ancho de banda es proporcional a R , el ancho de banda equivalente sobre el cual aparece el ruido en los terminales es inversamente proporcional a R y los dos efectos se cancelan.

- 2.30. Sea la red sin ruido de la Fig. 2.70 a cuya entrada se conecta una resistencia ruidosa R . Determine el valor eficaz del voltaje de ruido en los terminales de salida cuando $H(f)$ representa:

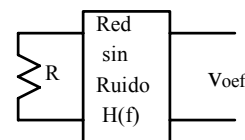


Fig. 2.70

- (a) Un filtro pasabajo ideal de ganancia h_0 y ancho de banda B .

$$[\text{Respuesta: } v_{oef} = h_0 \sqrt{4kTRB}]$$

- (b) Un filtro pasabanda ideal de ganancia h_0 , ancho de banda $2B$ y centrado en la frecuencia f_c , donde $f_c > B$. [Respuesta: $v_{oef} = h_0 \sqrt{8kTRB}$]

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

(b) Un filtro exponencial de la forma $H(f) = h_o \exp(-\frac{|f|}{B})$

[Respuesta: $v_{\text{of}} = h_o \sqrt{\frac{kTB}{2}}$]

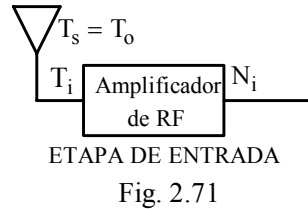
(d) Un filtro gaussiano de la forma $H(f) = h_o \exp(-\frac{f^2}{B^2})$

[Respuesta: $v_{\text{of}} = h_o \sqrt{\frac{kTB}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$]

- 2.31. Demuestre que el valor eficaz de la corriente de ruido en un circuito RL serie es $i_{\text{ef}} = \sqrt{kT/L}$
- 2.32. Demuestre que la densidad espectral de potencia de la tensión de ruido en un circuito RL paralelo es $S_n(f) = 2kTR$.
- 2.33. Dos resistencias, de 1000 Ohm cada una, están a una temperatura de 300 y 400 kelvins, respectivamente. Determinar el voltaje eficaz de ruido cuando (a) las resistencias están en serie y (b) cuando están en paralelo. El ancho de banda en ambos casos es de 100 kHz.
- 2.34. Determine el ancho de banda equivalente B_N del ruido de las redes cuyas funciones de transferencia son:
- (a) $H(f) = h_o \exp(-\frac{|f|}{B})$; [Respuesta: $B_N = \frac{B}{2}$]
 - (b) $H(f) = h_o \exp(-\frac{f^2}{B^2})$; [Respuesta: $B_N = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B}{2}$]
 - (c) $H(f) = h_o \sin c(\frac{f}{B})$; [Respuesta: $B_N = \frac{B}{2}$]
 - (d) $H(f) = h_o \left[\text{sinc}(\frac{f+f_c}{B}) + \text{sinc}(\frac{f-f_c}{B}) \right]$ $f_c \gg B$ [Respuesta: $B_N = B$]
 - (e) $H(f) = h_o \left[\exp(-\frac{|f+f_c|}{B}) + \exp(-\frac{|f-f_c|}{B}) \right]$ $f_c \gg B$ [Respuesta: $B_N = B$]
- 2.35. Un amplificador de alta ganancia tiene una cifra de ruido de 9,031 dB, una ganancia de potencia de 50 dB y un ancho de banda equivalente del ruido de 10 kHz.
- (a) Demuestre que la temperatura efectiva de ruido es $T_e = 2030$ kelvins
 - (b) Determine la potencia disponible de salida si la resistencia de la fuente a la entrada del amplificador tiene una temperatura de ruido $T_s = T_o = 290$ kelvins. Repetir cuando $T_s = \frac{T_o}{4}$, $T_s = 10T_o$ y $T_s = 100T_o$.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

- 2.36. En la Fig. 2.71 se muestra la etapa de entrada (amplificador de RF) de un receptor. La cifra de ruido del amplificador es de 10 dB y ganancia de potencia de 80 dB. El ancho de banda equivalente del ruido es de 6 MHz y se supone que la temperatura de ruido de la antena es



$$T_s = T_o = 290 \text{ kelvins}$$

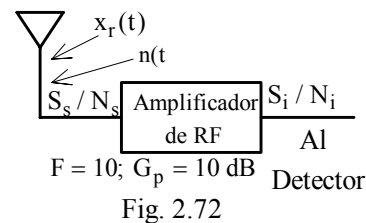
Demuestre que la temperatura neta T_i de entrada al amplificador es de 2900 kelvins, y que la potencia disponible de ruido a su salida es $N_i = -16,196 \text{ dBm}$.

- 2.37. Sea el sistema de la Fig. 2.72, donde

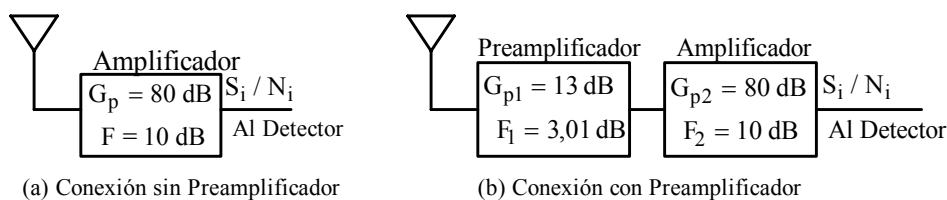
$$x_r(t) = \sqrt{2} \times 10^{-6} \cos(2\pi \times 10^4 t) \cos(2\pi \times 10^6 t)$$

$$n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-19} \exp[-10^{-6} \ln 2 \cdot |f|]$$

El sistema es pasabanda, de ancho de banda de 20 kHz y centrado en $f_c = 1 \text{ MHz}$. Demuestre:



- (a) Que la relación S_s / N_s a la entrada del amplificador es de 23,585 dB.
- (b) Que la contribución del ruido a la salida debida al ruido propio del amplificador es de $7,204 \times 10^{-15} \text{ W}$.
- (c) Que la relación de predetección S_i / N_i es de 22,35 dB.
- 2.38. Sean los dos sistemas representados en la Fig. 2.73. En antena, la potencia de señal es de 10^{-12} W y la potencia de ruido de $2,4 \times 10^{-14} \text{ W}$. El ancho de banda es de 6 MHz.
- (a) Demuestre que para la configuración (a), $\frac{S_i}{N_i} = 6,2 \text{ dB}$.

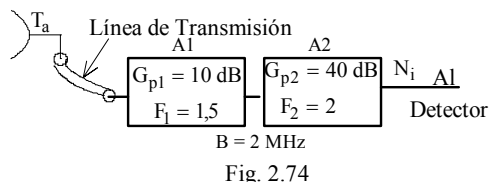


- (b) Demuestre que para la configuración (b), $\frac{S_i}{N_i} = 12,305 \text{ dB}$, y que la cifra de ruido total de los dos amplificadores se ha reducido a $F_{12} = 2,45$. Demuestre también que la temperatura total efectiva de ruido es ahora 420,5 kelvins.

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

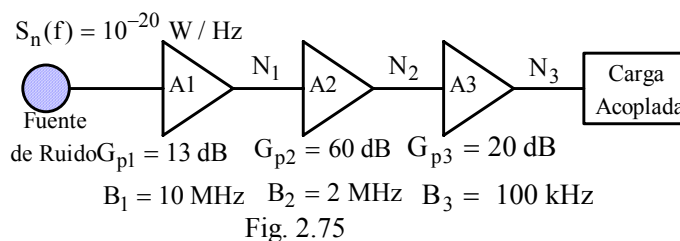
Repita la parte (b) si $F_1 = 13,01$ dB. Compare estos resultados con los ya obtenidos. ¿Qué se puede decir al respecto?

- 2.39. Sea el sistema de recepción de la Fig. 2.74. La temperatura efectiva de la antena es de 100 kelvins. La línea de transmisión tiene un factor de atenuación $L = 2$ dB y una temperatura física de 310 kelvins. Demuestre:



- (a) Que la potencia de ruido N_i a la entrada del detector es de -60,315 dBm.
- (b) Repetir la parte (a) pero intercalando entre la antena y la línea de transmisión un amplificador con una ganancia de potencia de 15 dB y una temperatura efectiva de 40 kelvins.
[Respuesta: $N_i = 8,506 \times 10^{-9}$ W]

- 2.40. Sea una cadena de tres amplificadores cuyas características se muestran en la Fig. 2.75.



- (a) Suponiendo que el ruido individual de los amplificadores es despreciable frente al ruido de entrada, demuestre que

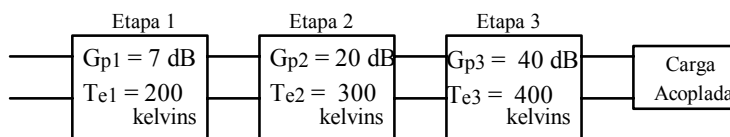
$$N_1 = -83,99 \text{ dBm}; N_2 = -30,979 \text{ dBm} \text{ y } N_3 = -23,99 \text{ dBm}.$$

- (c) Si las temperaturas efectivas de los amplificadores son $T_{e1} = 300$ kelvins, $T_{e2} = 400$ kelvins y $T_{e3} = 500$ kelvins, demuestre que

$$N_1 = -83,172 \text{ dBm}, N_2 = -30,113 \text{ dBm} \text{ y } N_3 = -23,123 \text{ dBm}.$$

¿Por qué no puede determinarse la temperatura efectiva de ruido, referida al amplificador compuesto?

- 2.41. Sea el sistema de tres etapas mostrado en la Fig. 2.76.



El ancho de banda es el mismo en las tres etapas

Fig. 2.76

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

- (a) Demuestre que la temperatura efectiva de ruido, referida a la entrada del sistema de tres etapas, es $T_e = 260,66$ kelvins
- (b) Usando el resultado de la parte (a), demuestre que la cifra de ruido total del sistema es $F = 1,899$.
- (c) Verifique la cifra de ruido total calculada en (b) determinando las cifras de ruido individuales y combinando sus efectos.

Se le sugiere al lector repetir este problema intercambiando las diferentes etapas a fin de conseguir una configuración óptima, es decir, aquella con la mínima cifra de ruido total.

- 2.42. Un cierto receptor tiene una temperatura efectiva de ruido T_{e1} . Suponga que a la entrada del receptor se agrega una línea de transmisión de pérdidas L y temperatura física T_{pL} . Demuestre que la nueva temperatura de ruido, referida a la entrada del sistema línea-receptor es

$$T'_e = T_{e1} + (L - 1)(T_{pL} + T_{e1}) = LT_{e1} + (L - 1)T_{pL}$$

Nótese que en la Teoría de las Líneas de Transmisión se demuestra que si v_{ief} y v_{oef} son los valores eficaces del voltaje al principio y al final de una línea acoplada, entonces se verifica que $v_{oef} = v_{ief} \exp(-\alpha x)$, donde α es la constante de atenuación y x la longitud de la línea. En términos de potencia (normalizadas respecto a $R = 1$ Ohm), se puede escribir entonces $v_{oef}^2 = v_{ief}^2 \exp(-2\alpha x)$. Definiendo $v_{ief}^2 = P_{di}$ y $v_{oef}^2 = P_{do}$, y de acuerdo con la definición del factor de atenuación L , expresión (2.183), se tiene que $L = \exp(2\alpha x)$; vemos que el valor de L aumenta al aumentar la longitud de la línea. En este caso, la nueva temperatura de ruido a la entrada del sistema línea-receptor es

$$T'_e = T_{e1} \exp(2\alpha x) + [\exp(2\alpha x) - 1]T_{pL}$$

- 2.43. Sea T_{e1} la temperatura efectiva de ruido de un receptor, y T_{pL} la temperatura física de la línea de transmisión que interconecta la antena con el receptor.
- (a) Demuestre que el incremento ΔT_e en la temperatura efectiva T_e , referida a la entrada de la línea de transmisión, y el incremento ΔL de la atenuación L de la línea de transmisión, están relacionados mediante la ecuación

$$\frac{\Delta T_e}{\Delta L} = T_{e1} + T_{pL}$$

- (d) Si $T_{e1} = 150$ kelvins y $T_{pL} = 290$ kelvins, demuestre que por cada incremento de 0,1 dB en la atenuación L de la línea de transmisión, la temperatura efectiva de ruido del sistema aumenta aproximadamente en 10 kelvins. Verifique este resultado para valores arbitrarios de la atenuación L .

- 2.44. Sea el sistema de comunicaciones de la Fig. 2.77.

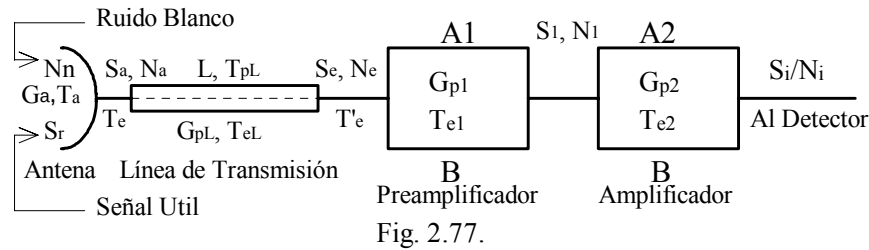
Datos: $L = 2$ dB = 1,585; $T_o = 290$ kelvins; $T_{pL} = T_o$; $T_a = 100$ kelvins

$G_a = 50$ dB = 10^5 ; $G_{p1} = 40$ dB = 10^4 ; $T_{e1} = 150$ kelvins;

$G_{p2} = 20$ dB = 100; $T_{e2} = 300$ kelvins; $B = 10^5$ Hz; $S_r = 10^{-8}$ W

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

$$G_{pL} = \frac{1}{L}; \quad T_{eL} = (L-1)T_{pL}$$



- Demuestre que la temperatura efectiva de ruido T_e referida a la entrada de la línea de transmisión es $T_e = 407,448$ kelvins
- Demuestre que la temperatura efectiva de ruido T_e' a la entrada del primer amplificador es $T_e' = 150,03$ kelvins
- Suponga que la temperatura de ruido de entrada a la antena es $T_n = 100$ kelvins. Demuestre que
 - La temperatura equivalente total del sistema es $T_e = 200,004$ kelvins
 - La cifra de ruido total es $F = 1,69$
 - La relación S_i/N_i de predetección es $\frac{S_i}{N_i} = 3,623 \times 10^7 = 75,591$ dB

II REPRESENTACION ESPECTRO-TEMPORAL DE SISTEMAS

CAPÍTULO III

VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

3.1. INTRODUCCIÓN

En el presente texto se estudian varios tipos de señal, tanto periódicas como no periódicas, cuyos valores son conocidos en todo instante ya sea en forma gráfica ya sea en forma analítica. Estos tipos de señal se denominan señales determinísticas. Pero también hay otras clases de señales como, por ejemplo, el ruido, acerca de las cuales sólo conocemos algunos parámetros, por cuanto ellas varían en forma muy compleja; éstas son las señales aleatorias. El comportamiento de estas señales solamente se puede predecir en forma aproximada porque en los mecanismos aleatorios que las producen hay elementos de ignorancia o de incertidumbre sobre los cuales no se tiene ningún control.

Matemáticamente, una señal aleatoria se puede considerar como la realización de un proceso aleatorio y el valor que ella toma en un instante dado t_i como una variable aleatoria. El interés de la noción de señal aleatoria es el de permitir la modelización de numerosos fenómenos físicos, como por ejemplo:

- ° La llegada de partículas en un acelerador de partículas
- ° El ruido térmico dentro de un conductor
- ° Las perturbaciones debidas a los astros (que no interesan a los astrofísicos)
- ° Todas las perturbaciones que limitan la transmisión de información en comunicaciones
- ° Etc.

En la Teoría de las Comunicaciones las señales y procesos aleatorios desempeñan un papel muy importante; en efecto, en cada canal de comunicación siempre habrá señales espurias (ruido) que contaminan las señales mensaje (portadoras de información). En la Teoría Estadística de las Comunicaciones tanto las señales mensaje como las señales espurias se tratan como variables aleatorias, cuyo comportamiento se puede predecir a partir de algunas de sus propiedades probabilísticas o estadísticas.

En este Capítulo se presentarán las ideas y conceptos básicos y esenciales de las variables y procesos aleatorios que complementarán el enfoque determinístico que hemos empleado hasta ahora. Como es normal en un texto introductorio de comunicaciones, no se profundizará en consideraciones teóricas avanzadas, pero sí se mostrarán aquellos aspectos de aplicación inmediata en el análisis y diseño de sistemas de comunicación prácticos. De la Teoría de la Probabilidad, de las Variables y Procesos Aleatorios y de la Teoría Estadística de las Comunicaciones hay una inmensa bibliografía que el lector interesado puede consultar.

3.2. NOCIONES DE LA PROBABILIDAD

3.2.1. Definiciones de la Probabilidad

La teoría de la probabilidad es una rama de las matemáticas aplicadas que trata de los efectos de la suerte o de la casualidad. El resultado de un experimento cualquiera, por ejemplo, cuando lanzamos un dado o una moneda, depende de la combinación de muchos factores completamente impredecibles. Sin embargo, es posible predecir en cierta manera el comportamiento promedio de un número grande de experimentos. En consecuencia, la idea de

J.Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

“suerte” está ligada con la de “**probabilidad**” o “**posibilidad**”. Por ejemplo, cuando lanzamos una moneda podemos decir que las probabilidades de que caiga cara o sello son “**igualmente posibles**” o “**igualmente probables**”.

Definición Empírica de la Probabilidad

En un experimento repetido N veces, si el suceso A ocurre m veces, entonces $P(A)$, la probabilidad de que el suceso A ocurra, se define en la forma

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} \quad (3.1)$$

Esta definición de la probabilidad se conoce con el nombre de “**definición empírica de la probabilidad**”. Se conoce también como “**la definición de la frecuencia relativa**”, por cuanto define la probabilidad como la frecuencia relativa de ocurrencia del suceso. Nótese que al definir $P(A)$ como en (3.1), se supone implícitamente que el límite $N \rightarrow \infty$ existe. Es evidente también, de la definición, que la probabilidad es siempre una magnitud positiva y menor o igual que la unidad, es decir,

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (3.2)$$

Sucesos Mutuamente Excluyentes o Disjuntos

Se dice que en un conjunto de sucesos los sucesos son mutuamente excluyentes, disjuntos o incompatibles, si la ocurrencia de cualquier suceso impide la ocurrencia simultánea de cualquier otro suceso del conjunto. Por ejemplo, consideremos dos sucesos A y B , y un suceso que puede considerarse como resultado de uno cualquiera de los sucesos A y B . Este suceso será la unión de los sucesos A y B , es decir, $(A + B)$. Cuando el suceso $(A + B)$ ocurre, es porque el suceso A o el suceso B o ambos han ocurrido. Si el experimento se lleva a cabo N veces, y si m_1 y m_2 son los resultados favorables a A y B , respectivamente, entonces la probabilidad del suceso $(A + B)$ cuando A y B son disjuntos es

$$P(A + B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_1 + m_2}{N} = P(A) + P(B) \quad (3.3)$$

Si A y B no son disjuntos, entonces

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (3.4)$$

donde $P(AB)$ es la probabilidad conjunta de la ocurrencia simultánea de los sucesos A y B .

Estos resultados se pueden extender para un número cualquiera de sucesos; en efecto, si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son sucesos disjuntos, entonces

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) \quad (3.5)$$

Si un experimento tiene N resultados $A_1, A_2, \dots, A_n$ solamente, entonces esos N elementos se denominan “sucesos exhaustivos”. Se sigue entonces que si N sucesos A_n son disjuntos y exhaustivos, entonces

$$\sum_{n=1}^N P(A_n) = 1 \quad (3.6)$$

Puesto que $A_1, A_2, \dots, A_n$ son disjuntos y exhaustivos, entonces el suceso $\{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}$ es el suceso cierto, que simbolizaremos con S ; por lo tanto,

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$P(S) = P(\text{suceso cierto}) = 1 \quad (3.7)$$

Definición Axiomática de la Probabilidad

La definición empírica de la probabilidad tiene la ventaja de ser muy intuitiva pero no es suficiente desde el punto de vista matemático. La probabilidad se puede definir desde un punto de vista axiomático, pero los axiomas que se postulan deben estar de acuerdo con el punto de vista de la frecuencia relativa, es decir, con aquellas relaciones que se observan en el mundo físico. El punto de vista axiomático de la probabilidad se puede resumir en la forma siguiente [Papoulis, 1965].

La probabilidad $P(A)$ de un suceso A es un número que se asigna a dicho suceso. La única restricción que se impone sobre la función de probabilidad es que obedezca los siguientes postulados o axiomas:

$$\text{AXIOMA I: } P(A) \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\text{AXIOMA II: } P(S) = 1 \quad (3.9)$$

donde S es el suceso cierto formado por todos los sucesos disjuntos y exhaustivos.

$$\text{AXIOMA III: } P(A + B) = P(A) + P(B) \quad (3.10)$$

La extensión para un número infinito de sucesos no se sigue de (3.10) sino que es un nuevo axioma:

$$\text{AXIOMA IIIa: } P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots \quad (3.11)$$

si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ son disjuntos.

3.2.2. Probabilidad Conjunta. Probabilidad Condicional. Independencia**Probabilidad Conjunta**

Si en un experimento hay dos conjuntos de sucesos o resultados, entonces la probabilidad de observar un resultado particular A de un conjunto y un resultado B de otro conjunto, se denomina la “**probabilidad conjunta del suceso AB** ”, donde $AB \neq 0$ es la intersección de los sucesos A y B .

Si un experimento se repite N veces, y si N_{AB} es el número de veces que A y B ocurren simultáneamente, entonces la probabilidad del suceso AB se define en la forma

$$P(AB) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{AB}}{N} \quad (3.12)$$

Probabilidad Condicional

A menudo se presenta la situación donde la probabilidad de un suceso es influenciada por otro suceso, es decir, la probabilidad de un suceso A depende de si el suceso B ha o no ocurrido. Esta es la probabilidad condicional, la cual vamos a definir en la forma siguiente:

Sea un suceso B tal que $P(B) \neq 0$. Por definición, la “**probabilidad del suceso A suponiendo el suceso B** ” es

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (3.13)$$

$$\text{O también, si } P(A) \neq 0, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (3.14)$$

donde $P(AB)$ es la probabilidad conjunta de los sucesos A y B .

$$\text{Combinando (3.13) y (3.14), } P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A) \quad \text{si } P(B) \neq 0 \quad (3.15a)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} P(A|B) \quad \text{si } P(A) \neq 0 \quad (3.15b)$$

Las expresiones (3.15a) y (3.15b) son conocidas con el nombre de “Ecuaciones de Bayes” o “Regla de Bayes”.

♣ Ejemplo 3.1

Una caja contiene 5 resistencias de 100 Ω y 7 resistencias de 50 Ω . De la caja se extrae una resistencia y después otra sin reponer la primera. Vamos a determinar las siguientes probabilidades.

- (a) La probabilidad de que las dos resistencias sean de 100 Ω
- (b) La probabilidad de que la primera fue de 100 Ω y la segunda de 50 Ω
- (c) La probabilidad de que las dos resistencias son de 50 Ω

Solución

Sean los sucesos $A = \{\text{sacar una resistencia de 100 } \Omega\}$

$B = \{\text{sacar una resistencia de 50 } \Omega\}$

$A|A = \{\text{sacar una de 100 } \Omega \text{ habiendo sacado previamente una de 100 } \Omega\}$

$B|B = \{\text{sacar una de 50 } \Omega \text{ habiendo sacado previamente una de 50 } \Omega\}$

- (a) $P\{\text{sacar primero de 100, segunda de 100}\} = P(A)P(A|A) = \frac{5}{12} \frac{4}{11} = 0,15$
- (b) $P\{\text{sacar primero de 100, segunda de 50}\} = P(A)P(B|A) = \frac{5}{12} \frac{7}{11} = 0,27$
- (c) $P\{\text{sacar primero de 50, segunda de 50}\} = P(B)P(B|B) = \frac{7}{12} \frac{6}{11} = 0,32$

♣

Independencia Estadística

El concepto de independencia es básico. Pudiera decirse que es debido a este concepto que la Teoría de la Probabilidad se ha desarrollado como una disciplina anexa y no ser considerada como un tópico más en la Teoría de las Medidas [Papoulis, 1965].

Definición

Se dice que dos sucesos A y B son estadísticamente independientes si y sólo si

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (3.16)$$

Esto quiere decir que si A y B son independientes, entonces la ocurrencia del suceso A no influencia en absoluto la ocurrencia del suceso B, y viceversa. Si esto es cierto, entonces la probabilidad condicional $P(A|B)$ es simplemente la probabilidad $P(A)$; esto es, si A y B son independientes, entonces

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{y} \quad P(B|A) = P(B) \quad (3.17)$$

Nótese que si A y B son independientes y disjuntos, entonces, por definición,

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$P(AB) = 0 \quad \text{para } A \text{ y } B \text{ independientes y disjuntos} \quad (3.18)$$

La noción de independencia se puede extender a más de dos sucesos. En efecto, si los sucesos $A, B, C, D, \dots$ son estadísticamente independientes, la probabilidad de ocurrencia conjunta es

$$P(ABCD \dots) = P(A) P(B) P(C) P(D) \dots \quad (3.19)$$

Nótese que si los sucesos son independientes por pares, es decir, si

$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$ para todo j, i y con $j \neq i$, no se sigue que los sucesos sean todos independientes.

Probabilidad Total

Vamos ahora a obtener una expresión conocida con el nombre de “**Teorema de la Probabilidad Total**”, el cual se utiliza para evaluar la probabilidad $P(B)$ en términos de la probabilidad condicional $P(B|A_i)$ y de la probabilidad $P(A_i)$, donde A_i será definida a continuación [Papoulis, 1965].

Se tiene un conjunto de n sucesos disjuntos y exhaustivos $A_1, A_2, \dots, A_n$ cuya suma es igual al suceso cierto S , Fig. 3.1, y sea B un suceso cualquiera contenido en S , es decir, $B \subset S$. Entonces, de la Fig. 3.1,

$$B = BS = B(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

$$\text{De donde } B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$$

Como estos elementos son todos disjuntos,

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n) \quad (3.20)$$

Pero de la probabilidad condicional, expresiones (3.13) o (3.14),

$$P(BA_i) = P(B|A_i)P(A_i) \quad (3.21)$$

$$\text{Entonces, } P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) \quad (3.22)$$

Este es el teorema sobre la probabilidad total. Hay que hacer notar que este teorema es válido aún cuando los n sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ no sean exhaustibles, pero sí debe cumplirse que $B \subset \{A_1 + A_2 + \dots + A_n\}$

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes nos permite evaluar las llamadas “probabilidades a posteriori $P(A_i|B)$ ” de los sucesos A_i en términos de las “probabilidades a priori $P(A_i)$ ” y de la probabilidad condicional $P(B|A_i)$. En efecto, de las expresiones (3.13) y (3.14), se tiene

$$P(A_i|B) = P(A_i|B)P(B) = P(B|A_i)P(A_i), \text{ de donde}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)}{P(B)} P(B|A_i) \quad (3.23)$$

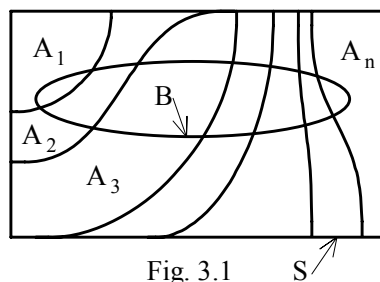


Fig. 3.1

Reemplazando $P(B)$ de (3.22), se obtiene

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j)P(A_j)} \quad (3.24)$$

Este es el llamado “**Teorema de Bayes**”.

3.2.3. Pruebas de Bernoulli

Consideremos el experimento de lanzar monedas. Se supone que los lanzamientos sucesivos son estadísticamente independientes. Podemos escribir entonces,

$$C = \{\text{sacar caras}\}; \quad S = \{\text{sacar sellos}\}$$

Sea, entonces, $P(C) = p$; $P(C) + P(S) = 1$; $P(S) = 1 - p = q$. De donde, $p + q = 1$

Si las monedas fueran correctas, $P(C) = P(S) = 1/2$

Experimentos de este tipo se denominan “Pruebas de Bernoulli”.

Supongamos que la moneda se tira N veces o, lo que es lo mismo, se tiran N monedas de una sola vez. ¿Cuál es la probabilidad $P(nC)$ de que aparecerán n caras con $N \geq n$? A fin de responder esta pregunta, consideremos primero una secuencia “particular” de N tiros (ó N monedas) en los cuales aparecieron caras $\{C\}$ n veces. Como los experimentos sucesivos que forman esta secuencia particular se supone que son estadísticamente independientes, la probabilidad de ocurrencia de nuestra secuencia particular $P_i(nC)$ es simplemente el producto de la ocurrencia de las n caras y de $(N - n)$ sellos, es decir, [Papoulis, 1965]:

$$P_i(nC) = p^n q^{(N-n)}$$

Pero esta secuencia no es la única secuencia posible que tenga n caras en N tiros (o n caras en las monedas). La probabilidad de obtener cualquiera de las varias secuencias de este tipo es igual al número total de dichas secuencias multiplicado por la probabilidad de obtener una secuencia en particular, ya que estamos tratando con sucesos mutuamente compuestos que tienen todos la misma probabilidad.

Vamos a determinar ahora el número de diferentes secuencias posibles de los N tiros, cada una de los cuales produce n caras. Si los resultados de los N tiros fueran todos diferentes, habría habido $N(N-1)(N-2)(N-3)\dots\dots\dots 3 \times 2 \times 1 = N!$ diferentes secuencias posibles. Sin embargo, no todos los resultados de los N tiros son diferentes: n son caras y $(N - n)$ son sellos. Por consiguiente, en las $N!$ secuencias hay $n!$ duplicaciones de caras, ya que no es posible distinguir una cara de la otra, y habrá $(N - n)!$ duplicaciones de sellos, ya que no es posible distinguir un sello de otro. El número total posible de las diferentes secuencias en las cuales se obtiene n caras en N tiros viene dada entonces por el coeficiente binomial o de Newton:

$$\text{Número total de secuencias para obtener } n \text{ caras en } N \text{ tiros} = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

De modo que la probabilidad conjunta de obtener cualquiera de las posibles secuencias de n caras en N tiros será

$$P(nC) = \binom{N}{n} p^n q^{(N-n)} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{(N-n)} \quad (3.25)$$

♣ Ejemplo 3.2. Coeficiente de Actividad en un Sistema Telefónico Multicanal

El “**coeficiente de actividad**” de un sistema telefónico multicanal es la relación “*número de canales activos/número de canales del multicanal*”. Mediante mediciones experimentales efectuadas por diferentes entidades, se ha determinado que un canal simple está ocupado un 70% a 80% durante la hora más cargada, con un 25% máximo de ocupación en promedio, tomado sobre un período largo. En sistemas con un gran número de canales, este valor de 0,25 es muy raras veces sobrepasado aún durante las horas de más tráfico. En efecto, si un canal está activo, en promedio, un 25%, el porcentaje de tiempo en que todos los canales estarán activos es de esperarse que sea muy pequeño. En sistemas de alta densidad ($N > 2700$ canales) el coeficiente de actividad teórico (calculado) es ligeramente superior a 0,27. Sin embargo, el UIT-T toma un valor de 0,25 para el coeficiente de actividad, un nivel que puede esperarse que sea excedido el 1% del tiempo y que equivale a una potencia promedio, por canal, de -15 dBm0 (Recomendación UIT-T G.223).

Sea entonces,

N = número de canales del multicanal

n = número de canales activos en un instante dado

p = {probabilidad de que un canal esté activo}

q = {probabilidad de que un canal esté inactivo}

Es evidente que $p + q = 1$; $q = 1 - p$

El coeficiente de actividad de un sistema multicanal se define mediante la relación

$$C_a = \frac{n}{N} \text{ para un porcentaje de tiempo dado.}$$

La probabilidad de ocurrencia de una secuencia individual de n canales activos y $(N - n)$ canales inactivos será $P_i(nA) = p^n q^{(N-n)}$, y la probabilidad conjunta de que haya n canales activos y $(N - n)$ canales inactivos será [Papoulis, 1965]

$$P(nA) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{(N-n)}$$

Relacionemos esta expresión con los coeficientes de actividad. Es evidente que p representa el coeficiente de actividad de **un** canal y $P(nA)$ la probabilidad de que n canales estén activos en un instante dado. Entonces, la probabilidad de que N o menos canales estén activos todo el tiempo es una certitud, es decir,

$$p(0A) + p(1A) + p(2A) + \dots + p(NA) = 1$$

Por consiguiente, la probabilidad de que n o menos canales estén activos será menor que 1. Sea $P_n(A)$ esta probabilidad; se puede escribir entonces,

$$P_n(A) = p(0A) + p(1A) + p(2A) + \dots + p(nA) = \sum_{m=0}^n p(mA) < 1$$

Por lo tanto, la probabilidad de que n o menos canales estén activos será:

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^n \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m q^{(N-m)}$$

$P_n(A)$ representa entonces el porcentaje de tiempo en que n o menos canales están activos.

El coeficiente de actividad de un sistema multicanal se define entonces mediante la relación

$$C_a = \frac{n}{N} \text{ para un porcentaje de tiempo } P_n(A) \text{ dado.}$$

De particular interés es el caso cuando n o menos canales están activos el 99% del tiempo; o dicho de otra manera, que n es excedido solamente un 1% del tiempo. En este caso, $P_n(A) = 0,99$. Igualmente, el UIT-T establece el valor $q = 0,25 = 1/4$ como coeficiente de actividad de un canal individual. En este caso, la expresión anterior queda en la forma

$$0,99 = \sum_{m=0}^n \frac{N!}{m!(N-m)!} \left(\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{3}{4}\right)^{(N-m)} \text{ para el 1\% del tiempo}$$

En la Tabla siguiente se calculan, a partir de esta expresión, algunos valores del coeficiente de actividad C_a en función de la capacidad N del sistema multicanal para el 1% del tiempo.

N	n	C_a	Observaciones
12	7	0,583	GRUPO
60	23	0,383	SUPERGRUPO
300	99	0,310	GRUPO MASTER
900	256	0,284	SUPERGRUPO MASTER
960	272	0,283	
1200	335	0,279	
1800	493	0,274	
2700	728	0,270	



3.2.4. Otras Probabilidades

En un experimento se obtiene un conjunto de N resultados $E_1, E_2, \dots, E_N$, que supondremos estadísticamente independientes. Queremos determinar las siguientes probabilidades:

- La probabilidad de realizar “*por lo menos uno*” de los sucesos $E_1, E_2, \dots, E_N$.
Nótese que “*por lo menos uno*” quiere decir “*uno o más*”.
- La probabilidad de realizar “*por lo menos m*” de los sucesos $E_1, E_2, \dots, E_N$.
Nótese que “*por lo menos m*” quiere decir “*m o más*”.
- La probabilidad de realizar “*exactamente m*” de los sucesos $E_1, E_2, \dots, E_N$.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

(a) Probabilidad de realizar “por lo menos uno” de los sucesos $E_1, E_2, \dots, E_N$.

En general, la unión (o suma lógica) $\{E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N\}$ de un conjunto de sucesos $E_1, E_2, \dots, E_N$, es el suceso de realizar “por lo menos uno” de los sucesos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$. Entonces, [Papoulis, 1965],

$$P(E_1 + E_2 + \dots + E_N) = P(\text{realizar ‘por lo menos uno’ de los sucesos } E_1, E_2, E_3, \dots, E_N)$$

$$P(E_1 + E_2 + E_3, \dots, + E_N) = 1 - [1 - P(E_1)][1 - P(E_2)] \dots [1 - P(E_N)] \quad (3.26)$$

Vamos a desarrollar (3.26) para algunos valores de N.

$$\text{Para } N = 2, \quad P(E_1 + E_2) = [P(E_1) + P(E_2)] - [P(E_1)P(E_2)]$$

Para $N = 3$,

$$P(E_1 + E_2 + E_3) = [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] - [P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3)] + [P(E_1)P(E_2)P(E_3)]$$

Para $N = 4$,

$$\begin{aligned} P(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) &= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4)] - \\ &- [P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_1)P(E_4) + P(E_2)P(E_3) + P(E_2)P(E_4) + P(E_3)P(E_4)] + \\ &+ [P(E_1)P(E_2)P(E_3) + P(E_1)P(E_2)P(E_4) + P(E_1)P(E_3)P(E_4) + P(E_2)P(E_3)P(E_4)] - \\ &- [P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)] \end{aligned}$$

Los desarrollos anteriores permiten escribir la probabilidad de realizar “por lo menos uno” de los sucesos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$ en la forma

$$P(E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N) = P_1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots \pm S_m \pm \dots \pm S_N \quad (3.27)$$

El signo de S_N es negativo (-) cuando N es par, y positivo (+) cuando N es impar.

Definiendo los términos de (3.27), tenemos:

$S_1 = \sum_{i=1}^N P(E_i)$ es la suma de las probabilidades individuales $P(E_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Es una suma de N términos.

$S_2 = \sum_{i,j} P(E_i)P(E_j)$ es la suma de los productos de las probabilidades del suceso conjunto $P(E_1)P(E_2)P(E_3) \dots P(E_N)$ tomados de dos en dos (N sucesos tomados de dos en dos). Nótese que S_2 tiene $\binom{N}{2}$ términos o duplas. Por ejemplo, para $N = 3$, S_2 tendrá $\binom{3}{2} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 1} = 3$ duplas en la forma $S_2 = P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3)$.

$S_3 = \sum_{i,j,k} P(E_i)P(E_j)P(E_k)$ es la suma de los productos de las probabilidades del suceso conjunto $P(E_1)P(E_2)P(E_3)\dots P(E_N)$ tomados de tres en tres. S_3 contiene $\binom{N}{3}$ términos o tripletas.

Por ejemplo, para $N = 4$, S_3 tendrá $\binom{4}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 1} = 4$ tripletas en la forma

$$S_3 = P(E_1)P(E_2)P(E_3) + P(E_1)P(E_2)P(E_4) + P(E_1)P(E_3)P(E_4) + P(E_2)P(E_3)P(E_4)$$

$S_m = \sum_{i,j,k,\dots} P(E_i)P(E_j)P(E_k)\dots P(E_N)$ es la suma de los productos del suceso compuesto

$P(E_1)P(E_2)P(E_3)\dots P(E_N)$ tomados de m en m , donde $N > m$. El valor máximo de m es

$\max(m) = N - 1$. S_m contiene $\binom{N}{m}$ términos o m -pletas. Por ejemplo, para $N = 10$ y

$m = 6$, S_6 contendrá $\binom{10}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210$ 6-pletas.

Por último,

$S_N = \prod_i^N P(E_i)$ es el producto de las probabilidades individuales $P(E_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Es un producto de N términos o factores. Por ejemplo, para $N = 5$, impar,

$S_5 = P(E_1)P(E_2)P(E_3)P(E_4)P(E_5)$ y su signo será positivo.

♣ Ejemplo 3.3.

Vamos a determinar la probabilidad de sacar un 6 por lo menos una sola vez al tirar un dado dos veces (o dos dados simultáneamente).

Solución:

$N = 2$. En un dado la probabilidad de sacar un símbolo cualquiera es $P(E_i) = 1/6$ para

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, es decir, $P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_6) = 1/6$.

De la expresión (3.27), $P_1 = S_1 - S_2 = [P(E_1) + P(E_2)] - [P(E_1)P(E_2)] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \frac{1}{6} = 0,3056$

Esta es la probabilidad esperada.

Vamos a repetir el experimento pero ahora con cuatro tiros de un dado (o cuatro dados simultáneamente)

En este caso, $N = 4$. La probabilidad de sacar por lo menos un 6 al tirar 4 dados es

$$P_1 = 4 \frac{1}{6} - 6 \frac{1}{36} + 4 \frac{1}{216} - \frac{1}{1296} = 0,5177$$

Nótese que esta probabilidad es mayor que cuando se tiraron dos dados; es evidente que cuantas más tiradas se hagan, la probabilidad de obtener un símbolo dado es mayor. La menor probabilidad es aquella cuando se tira un solo dado: en este caso la probabilidad es $1/6 = 0,1667$. ♣

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

(b) Probabilidad de realizar “por lo menos m” de N sucesos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$.

Para el caso de realizarse “por lo menos m” de N sucesos se tiene el siguiente teorema [Papoulis, 1965]:

La probabilidad P_m de que “m o más” (o “por lo menos m”) de los N sucesos independientes $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$ ocurran simultáneamente, viene dada por la expresión

$$P_m = S_m - \binom{m}{m-1} S_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} S_{m+2} - \binom{m+2}{m-1} S_{m+3} + \dots \pm \binom{N-1}{m-1} S_N \quad (3.28)$$

El signo de S_N es negativo (-) cuando N es par, y positivo (+) cuando N es impar. También, $N > m$.

Definiendo los términos de (3.28),

$S_m = \sum_{i,j,k,\dots,m} P(E_i)P(E_j)P(E_k)\dots P(E_m)$ es la suma de los productos del suceso conjunto

$P(E_1)P(E_2)P(E_3)\dots P(E_m)$ tomados de m en m. S_m contiene $\binom{N}{m}$ términos o m-pletas.

$S_N = \prod_i^N P(E_i)$ es el producto de las probabilidades individuales $P(E_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

♣ Ejemplo 3.4.

Se tiran tres dados simultáneamente (o un dado tres veces). Determinar la probabilidad de que aparecerán “por lo menos dos” símbolos iguales (dos 6, por ejemplo).

Solución:

$$P(E_i) = 1/6; \quad N = 3; \quad m = 2 \quad N = 3 = m + 1, \quad N \text{ impar}$$

$$P_2 = S_2 + \binom{2}{1} S_3 = P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3) + \binom{2}{1} P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

$$P_2 = 3 \frac{1}{6} \frac{1}{6} + \frac{1 \times 2}{1 \times 1} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{3}{36} + \frac{2}{216} = 0,0926$$

♣

(c) Probabilidad de realizar “exactamente m” de los sucesos independientes $E_1, E_2, \dots, E_N$.

Para el caso de realizar “exactamente m” de los N sucesos, se tiene el siguiente teorema [Papoulis, 1965]:

La probabilidad P_m de que “exactamente m” de los sucesos independientes $E_1, E_2, \dots, E_N$ ocurran simultáneamente, viene dada por la expresión

$$P_{[m]} = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - \dots \pm \binom{N}{m} S_N \quad (3.29)$$

La notación es la misma que en los casos anteriores.

Nota: De acuerdo con este teorema, la probabilidad $P_{[0]}$ de que “no ocurra ninguno

($m = 0$)” de los sucesos $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$, viene dada por

$$P_{[0]} = 1 - \binom{1}{0} S_1 + \binom{2}{0} S_2 - \dots \pm \binom{N}{0} S_N$$

pero $\binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \binom{3}{0} = \dots = \binom{N}{0} = 1$, y para $m = 0$, $S_m = 1$, de donde,

$$P_{[0]} = 1 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots \pm S_N = 1 - [S_1 - S_2 + S_3 - \dots \pm S_N] \quad (3.30)$$

y de la expresión (3.27), la probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos $E_1, E_2, \dots, E_N$, será:

$$P_{[0]} = 1 - P_1 \quad (3.31)$$

♣ Ejemplo 3. 5.

Se tiran tres dados simultáneamente (o se tira un dado tres veces). Vamos a determinar:

a) La probabilidad de que aparecerán exactamente dos 6.

b) La probabilidad de que no aparecerá ningún 6.

Solución:

(a) $N = 3$; $m = 2$; $P(E_i) = 1/6$; N impar, S_3 positivo; $N = 3 = m + 1$.

$P(\text{sacar exactamente dos 6}) = P_{[2]} = S_2 - \binom{3}{2} S_3$, pero

$$S_2 = P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3) = 3 \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$$

$$S_3 = S_N = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{216}; \quad \binom{3}{2} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 1} = 3$$

La probabilidad de sacar exactamente dos 6 será

$$P(\text{sacar exactamente dos 6}) = \frac{3}{36} - \frac{3}{216} = 0,0694$$

(b) Veamos ahora la probabilidad de que no aparecerá ningún 6 al tirar tres dados.

En este caso, $m = 0$; $N = 3$, positivo; S_3 es positivo.

$$P_{[0]} = 1 - [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)] + [P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3)] + [P(E_1)P(E_2)P(E_3)]$$

$$P_{[0]} = 1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{36} + \frac{1}{216} = 0,5872$$

$P(\text{no sacar ningún 6 al tirar tres dados}) = 0,5872$

♣

3.2.5. Modelo Probabilístico de un Canal de Comunicaciones

Consideremos el modelo probabilístico de un canal discreto de comunicaciones con M posibles mensajes de entrada $\{m_i\}$, con $0 \leq i \leq M-1$, y J posibles símbolos de salida $\{r_j\}$, $0 \leq j \leq J-1$. En lo que concierne a este ejemplo, el modelo del canal se puede describir completamente [Wozencraft y Jacobs, 1967] mediante un conjunto de MJ probabilidades condicionales $P(r_j|m_i)$ que especifica la probabilidad de recibir cada salida j condicionada a cada entrada i . Para valores pequeños de MJ es conveniente hacer un diagrama de estas probabilidades, a menudo llamadas “**probabilidades de transición**”, como se muestra en la Fig. 3.2(a). Este modelo describe un sistema de comunicación como el mostrado en la Fig. 3.2(b); sin embargo, hay que hacer notar que en un sistema de comunicación real generalmente no se conocen las probabilidades de transición.

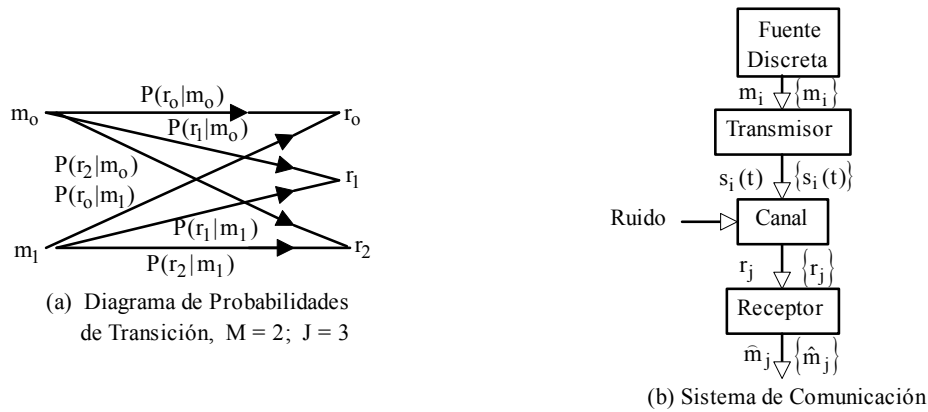


Fig. 3. 2

Supongamos que conocemos el conjunto de las M probabilidades $\{P(m_i)\}$ con las cuales ocurren los mensajes $\{m_i\}$. Estas probabilidades son las probabilidades “**a priori**” de los mensajes, es decir, las probabilidades antes de la recepción. Nuestro problema es especificar un receptor que, de acuerdo con el símbolo r_j recibido, formule una decisión óptima en relación a qué mensaje m_i fue transmitido. Cuando decimos “**óptimo**”, queremos decir que la probabilidad de una decisión correcta $P(\mathcal{C})$ es máxima.

En una larga secuencia de mensajes independientes puede esperarse que el receptor óptimo decida correctamente más a menudo que un receptor no óptimo; por ejemplo, el filtro acoplado que se verá en el Capítulo V es un receptor óptimo.

La operación del canal se puede describir como un conjunto S que comprende MJ elementos o puntos cada uno identificado mediante la dupla (m_i, r_j) y cuyas probabilidades son, de la expresión (3.13),

$$P(m_i, r_j) = P(m_i)P(r_j|m_i) \quad (3.32)$$

$$\text{También, } P(m_i|r_j) = \frac{P(m_i, r_j)}{P(r_j)} \quad (3.33)$$

En la Fig. 3.3 se muestra la distribución de las

probabilidades en un sistema típico con $M = 2$ y $J = 3$. La probabilidad de cada par (m_i, r_j) está representada por su correspondiente área. La suma de todas estas áreas es la unidad

Antes de la transmisión, la probabilidad “a priori” de que un mensaje m_i sea transmitido es $P(m_i)$. Después de la transmisión, para un r_j dado recibido, la probabilidad de que m_i fue transmitido es $P(m_i|r_j)$, la cual es la probabi-

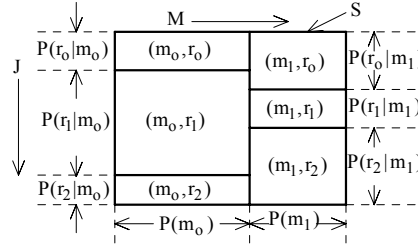


Fig. 3.3

lidad “a posteriori”, una probabilidad condicional. El efecto de la transmisión sobre el canal es entonces el de alterar la probabilidad de cada mensaje de entrada de su valor “a priori” a su valor “a posteriori”.

La especificación de un receptor es simplemente la especificación de una transformación desde el conjunto o espacio de salida del canal $\{r_j\}$, es decir, cada símbolo recibido r_j debe ser atribuido a una y sólo una de las posibles entradas m_i . Sea $\hat{m}(j)$ una entrada dada en el conjunto $\{m_i\}$ a la cual el receptor atribuye el símbolo recibido r_j . Entonces la probabilidad condicional $P(\mathcal{C}|r_j)$ de una decisión correcta para un r_j recibido, es justamente la probabilidad de que el mensaje $\hat{m}(j)$ fue en efecto transmitido.

Podemos escribir entonces

$$P(\mathcal{C}|r_j) = P(\hat{m}(j)|r_j) \quad (3.34)$$

Es evidente que $P(\mathcal{C}|r_j)$ puede ser maximizada si se elige el elemento $\hat{m}(j)$ de $\{m_i\}$ con la probabilidad “a posteriori” más alta. Esta “regla o algoritmo de decisión”, es decir, la elección de la máxima probabilidad “a posteriori”, aplicada independientemente a cada símbolo recibido r_j , determina el receptor óptimo. Si varios m_i tienen la misma (máxima) probabilidad “a posteriori”, entonces r_j puede ser asignado a cualquiera de los m_i correspondientes sin pérdida de optimalidad.

Del teorema de la probabilidad total, expresión (3.22), la probabilidad incondicional de una decisión correcta $P(\mathcal{C})$ para un r_j recibido dado es

$$P(\mathcal{C}) = \sum_{j=0}^{J-1} P(\mathcal{C}|r_j)P(r_j) \quad (3.35)$$

Las cantidades positivas $P(r_j)$ son independientes de la regla de asignación; por lo tanto, la suma sobre j es maximizada sólo y solamente si cada uno de los términos $P(\mathcal{C}|r_j)$ es máximo, y por lo tanto la regla de decisión es la óptima.

No es necesario calcular la probabilidad $P(r_j)$ a fin de determinar la transformación óptima $\{\hat{m}(j)\}$ y la probabilidad de error resultante. En efecto, de la expresión (3.33), sea m_k el mensaje cuya probabilidad “a posteriori” es la máxima; entonces,

$$P(m_k|r_j) \geq P(m_i|r_j) \quad \text{para todo } i \neq k \quad (3.36)$$

de donde $\hat{m}(j) = m_k$ si y solamente si

$$P(m_k)P(r_j|m_k) \geq P(m_i)P(r_j|m_i) \quad \text{para todo } i \neq k \quad (3.37)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Una vez que el conjunto $\{\hat{m}(j)\}$, con $j=0, 1, 2, \dots, J-1$, se ha determinado a partir de la expresión (3.37), la probabilidad de una decisión correcta $P(\mathcal{C})$ se puede calcular a partir de las expresiones (3.33), (3.34) y (3.35), es decir,

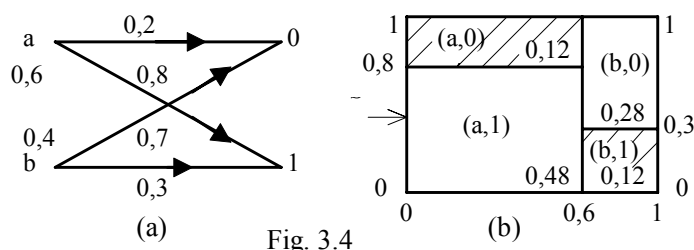
$$P(\mathcal{C}) = \sum_{j=0}^{J-1} P(\hat{m}(j), r_j) \quad (3.38)$$

donde $P(\hat{m}(j), r_j)$ representa la probabilidad de que $\hat{m}(j)$ fue transmitido y r_j recibido. Finalmente, la probabilidad de error, es decir, la probabilidad de una decisión falsa es

$$P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{C}) \quad (3.39)$$

♣ Ejemplo 3.6

Consideremos un canal binario con dos símbolos de entrada $\{a, b\}$ y dos símbolos de salida $\{0, 1\}$, como se muestra en la Fig. 3.4.



Las probabilidades de entrada o probabilidades “a priori” son: $P(a) = 0,6$ y $P(b) = 0,4$

Las probabilidades de transición del canal son:

$$P(0|a) = 0,2; \quad P(1|a) = 0,8; \quad P(0|b) = 0,7; \quad P(1|b) = 0,3$$

Entonces,

$$P(a,0) = P(a) P(0|a) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$$

$$P(a,1) = P(a) P(1|a) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

$$P(b,0) = P(b) P(0|b) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$$

$$P(b,1) = P(b) P(1|b) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$$

Vemos que $P(b,0) > P(a,0)$ y $P(a,1) > P(b,1)$

Por consiguiente, $\hat{m}(0) = b$ y $\hat{m}(1) = a$; y de la expresión (3.38), la probabilidad de una decisión correcta es

$$P(\mathcal{C}) = P(b,0) + P(a,1) = 0,28 + 0,48 = 0,76, \text{ de donde}$$

$$P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{C}) = 1 - 0,76 = 0,24$$

Los puntos o áreas correspondientes al error se muestran marcados en la Fig. 3.4.

♣

3.3. VARIABLES ALEATORIAS. FUNCIONES DE PROBABILIDAD

3.3.1. Variables Aleatorias Discretas

Un experimento dado puede tener un cierto número de resultados, y cada uno de ellos se puede considerar como un elemento de un conjunto o espacio. Por ejemplo, en el caso del lanzamiento de un dado, el espacio consiste de seis elementos: las seis caras del dado. El conjunto de elementos que consiste de todos los resultados posibles y distintos de un experimento se denomina entonces “espacio de las muestras” del experimento. En este caso la palabra “espacio” se usa como sinónimo de la palabra “conjunto”. Los elementos individuales o puntos del espacio de las muestras se denominan “puntos de muestra”. Por consiguiente, cada punto de muestra corresponde a un resultado distinto del experimento. En un experimento dado la elección del espacio de las muestras no es unívoca sino que dependerá primordialmente de lo que consideremos como resultados del experimento.

En general, se asigna un número real a cada resultado o punto de muestra del experimento. Si hay n resultados, se asigna los números reales $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a estos resultados, uno a cada uno. El resultado de un experimento aleatorio es, entonces, una “**variable aleatoria X**”, la cual puede tomar cualquiera de los n valores discretos $x_1, x_2, \dots, x_n$ (Nota: la variable aleatoria (VA) se representará con letras mayúsculas, y los valores particulares que dicha variable tome se representarán con letras minúsculas). En realidad, una VA es una función en el sentido convencional; por ejemplo, una función $f(t)$ asigna valores a t de acuerdo con una cierta regla; similarmente, una VA X asigna valores numéricos (números reales) a cada punto de muestra. En otras palabras, X es la representación general de los valores observados, mientras que x_i representa los valores posibles asignados.

Se asigna también una probabilidad a cada punto de muestra X_i de la VA X . Por lo tanto, $P_X(x_i)$ es la probabilidad del resultado o suceso X_i al cual fue asignado el valor x_i . En esta notación el subíndice se refiere a la VA X y el argumento es el valor particular de la VA. El subíndice es esencial para indicar la asociación de las funciones de probabilidad con una VA dada. Esto es muy importante, sobre todo cuando se trabaja con varias VA; en este caso, cada subíndice identifica la función o VA dada. Nótese que si en el experimento hay un total de n resultados x_i disjuntos y exhaustivos, entonces, de acuerdo con la expresión (3.6), se verifica que

$$\sum_{i=1}^n P_X(x_i) = 1 \quad (3.40)$$

Esta distribución se muestra en el Cuadro siguiente:

Asignación de Valores y Probabilidades

Punto de Muestra X_i	Valor x_i	Probabilidad $P_X(x_i)$
X_1	x_1	$P_X(x_1)$
X_2	x_2	$P_X(x_2)$
X_3	x_3	$P_X(x_3)$
-	-	-
-	-	-
-	-	-
X_n	x_n	$P_X(x_n)$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Una VA discreta se puede describir entonces mediante la llamada “**función de frecuencia**”

$$P_X(x_i) = P(X = x_i) \quad (3.41)$$

donde x_i son los valores que X puede tomar y $P(X = x_i)$ su probabilidad correspondiente.

A menudo es conveniente describir en forma gráfica las probabilidades asignadas en relación con los valores de la VA asignados. Esto nos lleva al concepto de función de distribución de probabilidad de X . En efecto, la “**función de distribución acumulativa de una VA X** ”, se define en la forma

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3.42)$$

Nótese que la función de distribución $F_X(x)$ depende tanto de la VA X como del valor del argumento. La función $F_X(x)$ es simplemente la probabilidad de que un valor observado sea igual o menor que cierta cantidad x , y se aplica tanto en procesos discretos como en procesos continuos.

Como $F_X(x)$ está basada directamente en el concepto de probabilidad, ella tiene las siguientes propiedades, que daremos sin demostrarlas:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ si $x_1 < x_2$
3. $F_X(-\infty) = 0$
4. $F_X(+\infty) = 1$

Para una VA X discreta con probabilidades $P_X(x_i)$, la función $F_X(x)$ se puede expresar en la forma

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) \cdot u(x - x_i) \quad (3.43)$$

La función de distribución $F_X(x)$ de una VA X discreta consta entonces de una serie de discontinuidades en los puntos $x = x_i$; es una función en escalera donde la altura de cada escalón es $P_X(x_i)$. Entre discontinuidades el valor de $F_X(x_i)$ es constante, y en los puntos de discontinuidad se supone continuidad hacia la derecha.

La “**función de frecuencia**” de una VA X discreta, que en adelante se denominará “**densidad de probabilidad**”, vendrá dada entonces por

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \sum_{i=1}^n P_X(x_i) \delta(x - x_i) \quad (3.44)$$

♣ Ejemplo 3.7

El experimento es el tiro de un dado, pero para efectos del presente ejemplo vamos a suponer que las probabilidades $P_X(x_i)$ asignadas a cada cara x_i son diferentes. En la Fig. 3.5 se dan los datos del experimento y se grafican las funciones de probabilidad $p_X(x)$ y $F_X(x)$.

Cara x_i	$P_X(x_i)$	$F_X(x_i)$
1	0,2	0,2
2	0,15	0,35
3	0,15	0,50
4	0,3	0,80
5	0,1	0,90
6	0,1	1,00

(a) Tabla de Valores

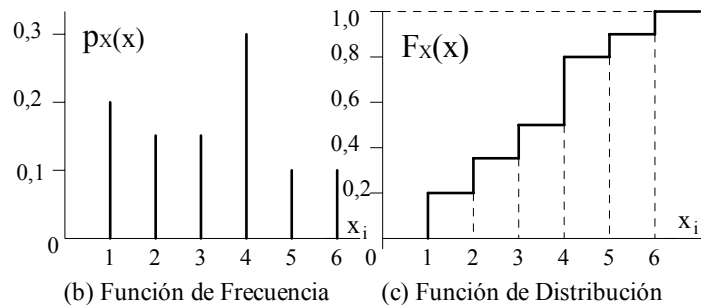


Fig. 3.5



3.3.2. Variables Aleatorias Continuas

Hemos visto el caso en que el espacio de las muestras consistía de elementos discretos (puntos de muestra) y como resultado la VA respectiva solamente podía tomar valores discretos. Pero hay muchos casos, sobre todo en el mundo físico, en los cuales el espacio de las muestras es continuo y contiene infinitos (no contables) puntos de muestra y no puede ser representado por un conjunto de puntos discretos. Si el espacio de las muestras es continuo, entonces la respectiva VA, definida en este espacio, será una “**variable aleatoria continua**”. Sin embargo, en el caso de un espacio de muestras continuo, el problema de asignación de probabilidades a la correspondiente VA se hace más complicado. Un espacio de muestras continuo contiene infinitos puntos (no contables) y es evidente que la probabilidad de observar un punto dado es cero. Por ejemplo, sea T la temperatura de una sala; esta temperatura puede tomar cualquier valor dentro de la gama de infinitas temperaturas comprendidas dentro de un intervalo de temperaturas (T_1, T_2) , y, por lo tanto, la probabilidad de observar una temperatura dada es cero. De otra manera, si se asignara una probabilidad a un punto dado, la suma de todas las probabilidades sería infinita, lo cual estaría en contradicción con la condición (3.6).

Una VA continua puede tomar valores en el intervalo continuo $(-x_1, x_2)$. En el caso más general, es evidente que la gama de valores puede extenderse desde $-\infty$ a $+\infty$. Como ya lo hemos observado, la probabilidad de que la VA X tome un cierto valor es cero, lo cual no tiene significado; pero sí lo tiene cuando nos preguntamos cuál es la probabilidad de que la VA X tome valores iguales o menores que cierto valor x . En este caso, el concepto de función de distribución es aún válido, pero es más conveniente definir una función cuya “área” sea la probabilidad de ocurrencia dentro de una gama dada. Como se está igualando una área con probabilidad, la función en cuestión se denomina “función de densidad de probabilidad”, y es el equivalente, en el caso continuo, de la función de frecuencia $P(X = x_i)$ del caso discreto, expresión (3.41).

La “**función de densidad de probabilidad, $p_X(x)$** ” de una VA X continua se define entonces en la forma

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \quad (3.45)$$

La probabilidad de observar la VA X en el intervalo $(x, x + dx)$ es igual a $p_X(x)\Delta x$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Esta probabilidad es simplemente el área encerrada por la curva $p_X(x)$ en el respectivo intervalo, como puede observarse en la Fig. 3.6.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Integrando (3.45), se tiene

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x') dx' = P(X \leq x) \quad (3.46)$$

Podemos demostrar también que

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx \quad (3.47) \end{aligned}$$

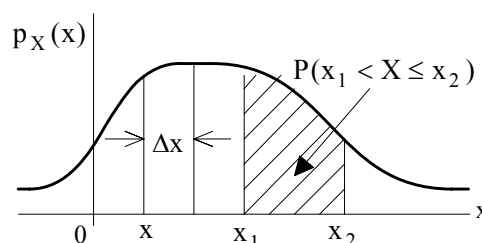


Fig. 3.6. Densidad de Probabilidad

La probabilidad de observar X en cualquier intervalo (x_1, x_2) viene dada por el área bajo dicho intervalo, como se muestra en la Fig. 3.6.

$$\text{Puesto que } F_X(+\infty) = 1, \text{ entonces, } \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (3.48)$$

Esta expresión, equivalente a la (3.40) en el caso discreto, es evidente por el hecho de que la integral (3.48) representa la probabilidad de observar X en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, lo cual es una certitud. Nótese también que para que una función de x se pueda considerar como una densidad de probabilidad, ella debe cumplir con la condición (3.48). Como la probabilidad es una magnitud positiva (AXIOMA I), la densidad de probabilidad deberá ser siempre positiva; la función de densidad de probabilidad deberá cumplir entonces con las condiciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad p_X(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \quad (3.49)$$

Nótese que el hecho de que la probabilidad de observar X a cierto valor x es cero, no necesariamente significa que la VA X no tomará jamás ese valor particular. Por ejemplo, la probabilidad de que la temperatura T de la sala tome un cierto valor T_0 es cero, pero eso no significa que la temperatura de la sala nunca podrá ser T_0 .

♣ Ejemplo 3.8

Sea una VA X cuya función de distribución es $F_X(x) = \frac{1}{4}[r(x-2) - r(x-6)]$ es una rampa como se muestra en la Fig. 3.7(a).

La correspondiente función de densidad es, de (3.44) y (1.13)

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{4}[u(x-2) - u(x-6)] = \frac{1}{4}\Pi\left(\frac{x-4}{4}\right)$$

Puesto que $p_X(x)$ es constante en el intervalo $(2, 6)$, en este caso se dice que la VA X está distribuida uniformemente en ese intervalo. En la Fig. 3.7 se muestra $F_X(x)$ y $p_X(x)$.

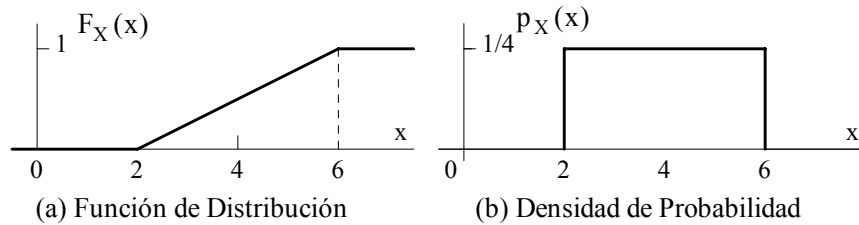


Fig. 3.7.

Por ejemplo, de la Fig. 3.7(b), podemos ver que

$$P(X \leq 3) = \frac{1}{4}; \quad P(3 < X \leq 5) = \frac{1}{2}$$

♣

Se tiene también la situación donde la función de probabilidad es mixta, es decir, que $p_X(x)$ es continua pero contiene impulsos. Esta situación la podemos considerar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9

Consideremos el caso de una VA X cuya densidad de probabilidad se muestra en la Fig. 3.8(a). Si esta señal se pasa por un limitador que recorta el voltaje en cierto valor $+A$, la nueva densidad de probabilidad aparecerá en la forma mostrada en la Fig. 3.8(b). El impulso que aparece en $x = A$ tiene un área o intensidad

$$k = \int_A^\infty p_X(x) dx = F_X(\infty) - F_X(A) = 1 - F_X(A)$$

La Fig. 3.8(c) es para el caso cuando el limitador recorta el voltaje dentro de los valores $-B$ y $+A$.

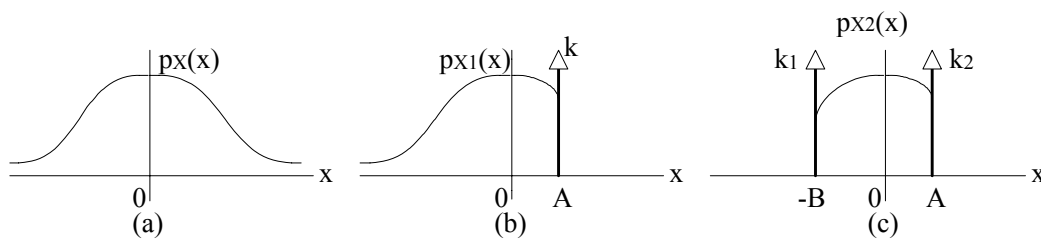


Fig. 3.8

El área de los impulsos es

$$k_1 = \int_{-\infty}^{-B} p_X(x) dx = F_X(-B) - F_X(-\infty) = F_X(-B)$$

$$k_2 = \int_A^\infty p_X(x) dx = 1 - F_X(A)$$

Como $p_X(x)$ es una función par de x , y si $B = A$, entonces

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$p_X(A) = p_X(-A) \quad \text{y} \quad F_X(A) = 1 - F_X(-A), \text{ de donde}$$

$$F_X(-A) = 1 - F_X(A)$$

Entonces el impulso en $-B = -A$ tendrá un área $k_1 = F_X(-A) = 1 - F_X(A) = k_2$

Por consiguiente, el área de los impulsos es la misma.

De lo anterior se desprende que la probabilidad de observar un voltaje dado es cero en la región donde $p_X(x)$ es continuo. Tal es el caso para los intervalos $(-\infty, \infty)$ como en la Fig. 3.8(a); en el intervalo $(-\infty < x < A)$ como en la Fig. 3.8(b), y en el intervalo $-B < x < A$ como en la Fig. 3.8(c). Sin embargo, en la Fig. 3.8(b) la probabilidad de observar el voltaje de amplitud A es k ; y en la Fig. 3.8(c) la probabilidad de observar los voltajes de amplitud $-B$ y A es k_1 y k_2 , respectivamente.



3.3.3. Distribuciones Conjuntas

Un experimento aleatorio puede tener dos resultados. Los puntos de muestra de tal experimento tienen dos atributos o grados de libertad. Por ejemplo, consideremos el experimento aleatorio del tiro al blanco. La posición de cada disparo es un punto aleatorio que se puede describir mediante dos números en un sistema de coordenadas apropiado. Por lo tanto, cada punto de muestra se puede describir mediante una dupla de números. Podemos asociar entonces dos VA continuas en este espacio y hacer que la VA X sea la coordenada x , y que la VA Y sea la coordenada y de cada disparo. Cada punto de muestra se describirá entonces mediante la dupla (x, y) .

La “**función de distribución conjunta de dos VA X e Y , $F_{XY}(x, y)$** ” se define en la forma

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{XY}(x', y') dx' dy' \quad (3.50)$$

La correspondiente “**función de densidad de probabilidad conjunta, $p_{XY}(x, y)$** ”, es

$$p_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \quad (3.51)$$

El suceso de observar X en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y de observar Y en el mismo intervalo, evidentemente es una certitud, o sea que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (3.52)$$

El volumen total dentro de la curva de la densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ debe ser siempre la unidad. Debe cumplirse también que $p_{XY}(x, y) \geq 0$ para todo x e y .

Cuando se trabaja con probabilidades conjuntas de dos VA X e Y , las densidades de probabilidad individuales $p_X(x)$ y $p_Y(y)$, llamadas “**densidades marginales**”, se pueden obtener a partir de $p_{XY}(x, y)$. En efecto, se demuestra [Papoulis, 1965] que las densidades marginales son

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dy \quad \text{y} \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx \quad (3.53)$$

y si las VA X e Y son independientes, entonces

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \text{y} \quad p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad (3.54)$$

y en general, para n VA independientes,

$$p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

♣ Ejemplo 3.10

Vamos a definir la función de densidad conjunta de dos VA X e Y en la forma

$$p_{XY}(x, y) = K \exp[-(x + y)] \cdot u(x) \cdot u(y)$$

Primero vamos a determinar el valor de K para que $p_{XY}(x, y)$ sea verdaderamente una función de densidad de probabilidad conjunta. De (3.52),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K \exp[-(x + y)] u(x) u(y) dx dy &= K \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-x) \exp(-y) dx dy = 1 \\ K \int_0^{\infty} \exp(-x) dx \cdot \int_0^{\infty} \exp(-y) dy &= 1 \end{aligned}$$

pero cada una de estas integrales es igual a la unidad, de donde

$$K = 1 \quad \text{y} \quad p_{XY}(x, y) = \exp[-(x + y)] \cdot u(x) \cdot u(y)$$

La función de distribución conjunta es, de (3.47),

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x \exp[-(x' + y')] u(x') u(y') dx' dy' = \int_0^x \exp(-x') dx' \int_0^y \exp(-y') dy' \\ F_{XY}(x, y) &= [1 - \exp(-x)] u(x) \cdot [1 - \exp(-y)] u(y) \end{aligned}$$

y las densidades de probabilidad marginales, de (3.53),

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x + y)] u(x) u(y) dy = \exp(-x) u(x) \int_0^{\infty} \exp(-y) dy \\ p_X(x) &= \exp(-x) u(x), \quad \text{y de la misma forma,} \\ p_Y(y) &= \exp(-y) u(y) \end{aligned}$$

Nótese que se cumple que $p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$; por lo tanto las VA X e Y son independientes.

También, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x') dx' = [1 - \exp(-x)] u(x)$ y de la misma forma

$$F_Y(y) = [1 - \exp(-y)] u(y)$$

Se verifica, puesto que las VA X e Y son independientes, que

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

♣

Distribución Condicional

El concepto de probabilidad condicional de un suceso A dado un suceso B , expresión (3.13), se puede extender a la función de distribución y densidad de probabilidad [Lathi, 1968].

Sean dos variables aleatorias X e Y . Se puede definir la función de distribución condicional de X dada $Y \leq y$ en la forma

J.Briceño M., Dr. Ing. -- Profesor Titular, ULA -- Mérida, Venezuela

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{F_{XY}(x, y)}{F_Y(y)} \quad \text{para } F_Y(y) \neq 0 \quad (3.55)$$

Si la condición es que $Y = y$ en vez de $Y \leq y$, se tiene

$$F_{X|Y}(x|Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^x p_{XY}(x', y) dx'}{p_Y(y)} \quad (3.56)$$

Mediante diferenciación de (3.56) respecto a x , se obtiene

$$p_{X|Y}(x|Y = y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)} \quad (3.57)$$

y en forma similar, $p_{Y|X}(y|X = x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)} \quad (3.58)$

Combinando (3.57) y (3.58) obtenemos la Regla de Bayes para señales aleatorias continuas.

$$p_{X|Y}(x|Y = y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|X = x) \cdot p_X(x) \quad (3.59a)$$

o también $\frac{p_{X|Y}(x|Y = y)}{p_X(x)} = \frac{p_{Y|X}(y|X = x)}{p_Y(y)} \quad (3.59b)$

♣ Ejemplo 3.11

La densidad de probabilidad conjunta de dos VA X e Y viene dada por

$$p_{XY}(x, y) = (x + y) \cdot \Pi(x - \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2})$$

Vamos a determinar todas las funciones de distribución y densidades de probabilidad asociadas.

De (3.50), $F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x (x' + y') \Pi(x' - 1/2) \Pi(y' - 1/2) dx' dy'$

$$F_{XY}(x, y) = \int_0^y \int_0^x (x' + y') dx' dy' \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$$

Efectuando la integración obtenemos

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} (x + y) & \text{para } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{para } 1 \leq x; 1 \leq y \\ 0 & \text{para } x < 0; y < 0 \end{cases}$$

$F_{XY}(x, y)$ se puede escribir en una forma más compacta:

$$F_{XY}(x, y) = \frac{xy}{2} (x + y) \cdot \Pi(x - \frac{1}{2}) \cdot \Pi(y - \frac{1}{2}) + u(x - 1) \cdot u(y - 1)$$

$$\text{De (3.53), } p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\Pi(x-1/2)\Pi(y-1/2)dy$$

$$p_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

$$p_X(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{y de la misma manera, } p_Y(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

De (3.57),

$$p_{X|Y}(x|Y=y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{x+y}{y+1/2} \cdot \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{De (3.58), } p_{Y|X}(y|X=x) = \frac{x+y}{x+1/2} \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

♣

3.4. FUNCIONES DE PROBABILIDAD ESPECIALES

En los problemas que se presentan en el análisis de sistemas de comunicación aparecen con frecuencia ciertas funciones de probabilidad que describen situaciones o procesos físicos. Por considerarlo de importancia, vamos a examinar algunas de estas funciones especiales y daremos, sin demostrarlos, algunos de sus parámetros.

3.4.1. Distribución Normal o Gaussiana

Se dice que una VA X está distribuida normalmente o en forma gaussiana, si su función de densidad de probabilidad es la curva de Gauss [Korn y Korn, 1968], es decir,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.60)$$

$$\text{También, } F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma^2}\right) dx' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (3.61)$$

donde σ es la desviación de la VA X . En este caso σ se conoce con el nombre de “**desviación normal**”, mientras que σ^2 en la “**varianza**” o valor eficaz de la VA X . La función $\operatorname{erf}(x)$ se define en el Apéndice E.4. En la Fig. 3.9 se muestran las formas típicas centradas de $p_X(x)$ y $F_X(x)$.

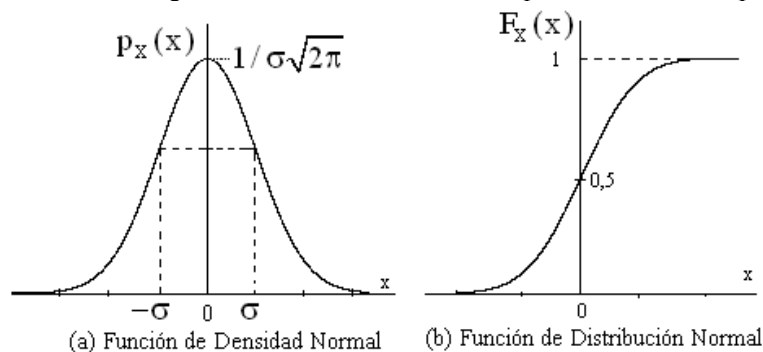


Fig. 3.9. Distribuciones Normales Centradas

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

En las distribuciones no centradas $p_X(x)$ y $F_X(x)$ están desplazadas a lo largo del eje x en una cantidad x_0 ; en este caso,

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]; F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \quad (3.62)$$

Estas distribuciones no centradas se muestran en la Fig. 3.10.

También, por definición,

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_2-x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-x_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \quad (3.63)$$

La distribución gaussiana se determina completamente a partir de su valor promedio x_0 y la desviación estándar σ . Se demuestra también que cualquier combinación lineal de variables aleatorias gaussianas es también gaussiana.

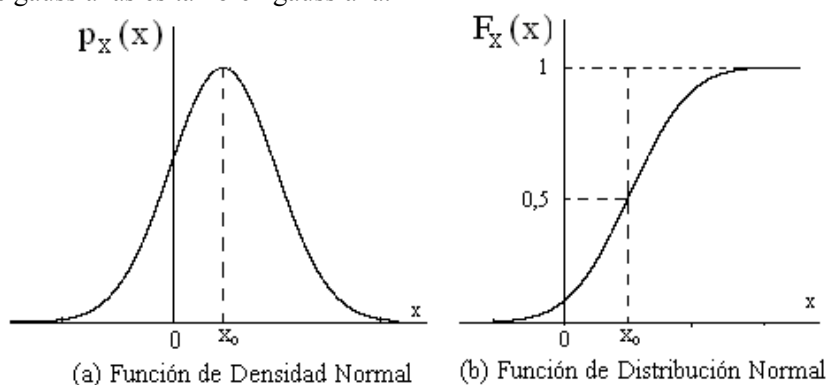


Fig. 3.10. Distribuciones Normales no Centradas

♣ Ejemplo 3.12. Probabilidad de Error en un Sistema de Comunicación Binario

Como sabemos, un sistema de comunicación binario es aquel que transmite solamente dos posibles mensajes. La forma más sencilla de modulación binaria es la modulación OOK, que veremos en el Capítulo V, en la cual se transmite una señal de 0 ó A volts (V). Durante la transmisión, la señal se contamina con ruido (que suponemos blanco, gaussiano, de valor promedio cero y densidad espectral $\eta/2$), y el algoritmo de detección establece que si la señal recibida y demodulada es igual o mayor que un cierto umbral V_s , se supone que un “UNO” (A V) fue transmitido; en caso contrario, se supone que un “CERO” (0 V) fue transmitido. En el receptor, la señal recibida es aleatoria (por su contenido de ruido) con una función de densidad de probabilidad normal de valor promedio A y varianza σ^2 . El ancho de banda del canal es B.

Vamos a determinar la probabilidad de error en el receptor, es decir, la probabilidad de que un “UNO” transmitido sea interpretado como un “CERO” en el receptor, o viceversa.

La varianza σ^2 es la potencia promedio de ruido que, de acuerdo con la expresión (2.146) es $\sigma^2 = \eta B$, donde B es el ancho de banda de la señal. Sea X la señal recibida; si el valor promedio de la señal recibida es A, la densidad de probabilidad de la señal recibida será

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\eta B}} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\eta B}\right] \quad (3.64)$$

Suponiendo que toda señal recibida de amplitud mayor o igual que $V_s = A/2$ es un “UNO”, entonces la probabilidad de que un “UNO” transmitido sea interpretado como un “CERO” en el receptor es simplemente la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor que $A/2$. La probabilidad de error P_e será entonces,

$$P_e = P\left\{X < \frac{A}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\eta B}} \int_{-\infty}^{A/2} \exp\left[-\frac{(x-A)^2}{2\eta B}\right] dx \quad (3.65)$$

Con el cambio de variables $u = \frac{x-A}{\sqrt{2\eta B}}$ y haciendo $K = \sqrt{\frac{A^2}{8\eta B}}$, la integral queda en la forma

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-K} \exp(-u^2) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^K \exp(-u^2) du$$

De la definición de $\text{erf}(x)$ y $\text{erfc}(x)$ dadas en el Apéndice E.4,

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(K) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2}{8\eta B}}\right) \quad (3.66)$$

Nótese que este enfoque es más realista que el enfoque tratado en el Ejemplo 3.2, en donde se considera conocidas las probabilidades de transición, cosa que en la práctica no es posible. ♣

♣ Ejemplo 3.13.

Sea una VA X gaussiana no centrada, con $x_0 = 1000$ y $\alpha = 50$. Determine la probabilidad de que X esté entre 900 y 1050.

De (3.63), con $x_2 = 1050$ y $x_1 = 900$,

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[\text{erf}\left(\frac{1050-1000}{50\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{900-1000}{50\sqrt{2}}\right) \right] = 0,819$$

♣

3.4.2. Distribución de Poisson

Si una VA X es de tipo discreto y toma valores en los puntos $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ con probabilidades

$$P_k(\tau) = \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} \exp(-\alpha\tau) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y } \alpha > 0, \quad (3.67)$$

entonces se dice que la VA X tiene una “distribución de Poisson”, cuyo parámetro es la constante positiva α .

La correspondiente densidad de probabilidad es una secuencia de impulsos de la forma

$$p_X(x) = \exp(-\alpha\tau) \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha\tau)^k}{k!} \delta(x-k) \quad (3.68)$$

En la Fig. 3.11 se muestra $p_X(x)$ y $F_X(x)$ de la distribución de Poisson.

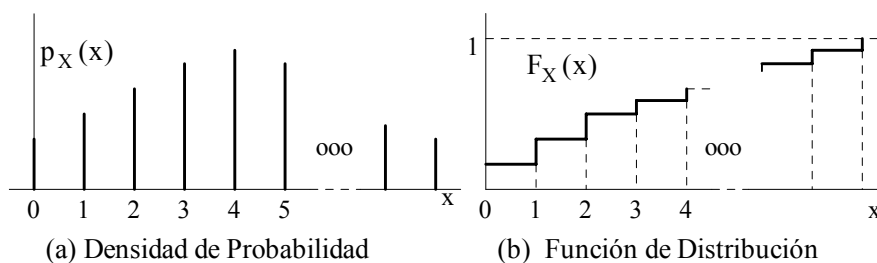


Fig.3.11. Distribución de Poisson

Si $\alpha\tau < 1$, entonces $P_k(\tau)$ es máxima para $k = 0$. Si $\alpha\tau > 1$, pero no es un número entero, entonces $P_X(\tau)$ es máxima para $k = \lfloor \alpha\tau \rfloor$. Si $\alpha\tau$ es un número entero, entonces $P_X(\tau)$ tiene dos puntos máximos para $k = \alpha\tau$ y $k = \alpha\tau - 1$.

3.4.3. Distribución Binomial

Si una VA X es de tipo discreto y toma valores en los puntos $k = 0, 1, 2, \dots, n$ con probabilidades definidas mediante la expresión

$$P_k(x_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (3.69)$$

se dice que tiene una “Distribución Binomial”.

La densidad de probabilidad de la distribución binomial es

$$p_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cdot \delta(x - k) \quad (3.70)$$

donde, por definición, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

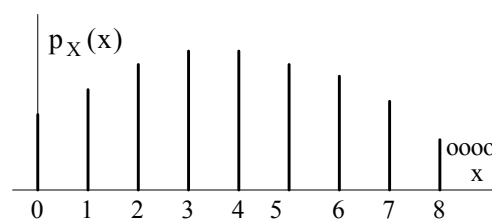


Fig. 3.12. Distribución Binomial

La densidad de probabilidad de la distribución binomial es una secuencia de impulsos, como se muestra en la Fig. 3.12.

3.4.4. Distribución Uniforme

Si la densidad de probabilidad de una VA X es una función rectangular de la forma

$$p_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \Pi\left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_1}\right) \quad (3.71)$$

donde $x_0 = (x_2 + x_1)/2$, se dice entonces que la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (x_1, x_2) con $x_2 > x_1$, Fig. 3.13(a). En este caso la VA X es de tipo continuo y su función de distribución será una rampa de la forma dada en la Fig. 3.13(b).

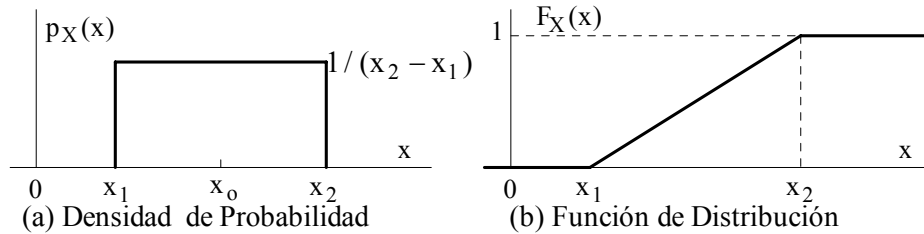


Fig. 3.13. Distribución Uniforme

Por inspección de la Fig. 3.13(b), aplicando la función rampa $r(x)$,

$$F_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} [r(x - x_1) - r(x - x_2)] \quad (3.72)$$

3.4.5. Distribución de Laplace

La función de densidad de probabilidad de Laplace de una VA X es, Fig. 3.14(a),

$$p_X(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha|x|) \quad (3.73a)$$

donde α es el parámetro de la distribución.

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.27),

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \exp(\alpha x) u(-x) + \frac{1}{2} [1 - \exp(-\alpha x)] u(x) \quad (3.73b)$$

En la Fig. 3.14(b) se muestra esta función.

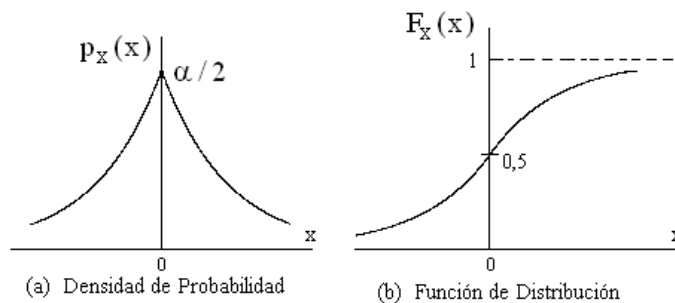


Fig. 3.14. Distribución de Laplace

3.4.6. Distribución de Cauchy

La función de densidad de Cauchy es

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \quad (3.74a)$$

donde α es el parámetro de la distribución, la cual se muestra en la Fig. 3.15(a).

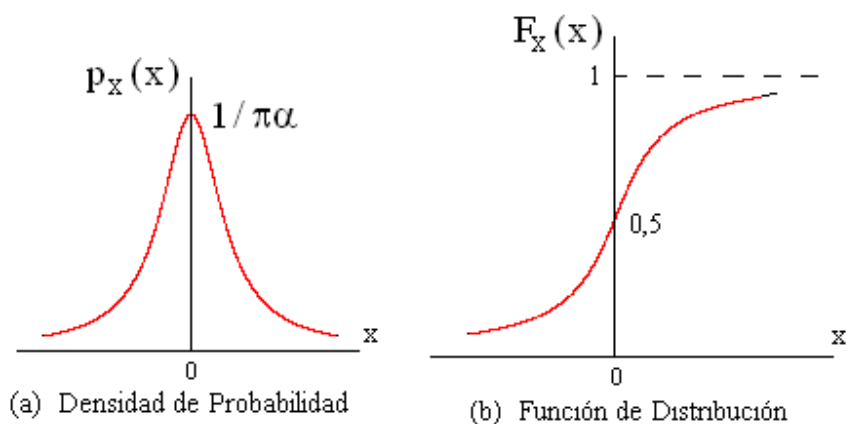


Fig. 3.15. Distribución de Cauchy.

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.25),

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad (3.74b)$$

En la Fig. 3.15(b) se muestra esta función.

3.4.7. Distribución de Raleigh

La función de densidad de Raleigh de una VA X es, Fig. 3.16(a),

$$p_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) u(x) \quad (3.75a)$$

El valor máximo de $p_X(x)$ ocurre cuando $x = \alpha$.
 α es el parámetro de la distribución

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.28)

$$F_X(x) = \left[1 + \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right] u(x) \quad (3.75b)$$

En la Fig. 3.16(b) se muestra esta función.

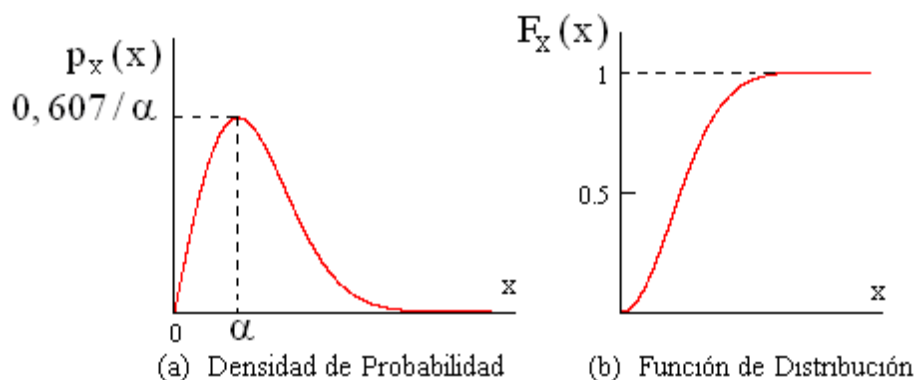


Fig. 3.16. Distribución de Raleigh.

3.4.8. Distribución de Maxwell

La función de densidad de Maxwell de una VA X es, Fig. 3.17(a),

$$p_X(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) u(x) \quad (3.76a)$$

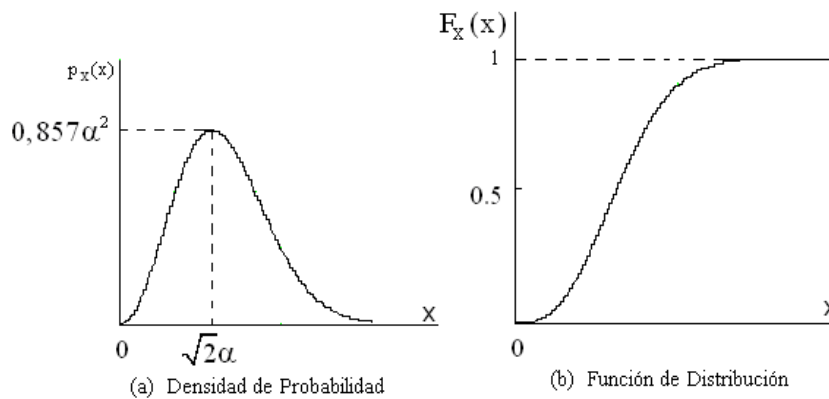


Fig. 3.17. Distribución de Maxwell

El valor máximo de $p_X(x)$ ocurre cuando $x = \alpha\sqrt{2}$.

α es el parámetro de la distribución

La correspondiente función de distribución es (ver Problema 3.29),

$$F_X(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3} \int_0^x x'^2 \exp\left(-\frac{x'^2}{2\alpha^2}\right) dx' = \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right] u(x) \quad (3.76b)$$

En la Fig. 3.17(b) se muestra esta función,

3.5. FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Muy a menudo nos interesa conocer las funciones de probabilidad de una VA después que ella ha experimentado alguna transformación. Si, por ejemplo, la función de densidad de probabilidad de una VA X es $p_X(x)$, quisiéramos ahora determinar la función de densidad de probabilidad de una VA Y relacionada con X mediante la ecuación

$$Y = g(X) \quad (3.77)$$

Sea, entonces, $p_Y(y)$ la densidad de probabilidad de la VA Y . Vamos a suponer que X es continua y que $g(x)$ lo es también, pero con la condición de que $g(x)$ no sea igual a una constante en ningún intervalo. Esto significa que para un valor y dado, la ecuación $y = g(x)$ tiene, cuando más, un número contable de raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$. El siguiente teorema [Papoulis, 1965] es válido cuando $y = g(x)$ tiene un número contable de n raíces o soluciones x_n y que $F_X(x)$ sea diferenciable en los puntos x_n .

Teorema Fundamental

Para encontrar la función de densidad $p_Y(y)$ para un valor dado de y , se resuelve la ecuación $y = g(x)$ en términos de y . Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son todas sus raíces reales, es decir, si

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \dots = g(x_n) \quad (3.78)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$y \quad g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{dy}{dx} \quad (3.79)$$

$$\text{Entonces,} \quad p_Y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i=1}^n p_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right| \quad (3.80)$$

En muchas aplicaciones es necesario determinar la función de probabilidad conjunta de transformaciones de variables aleatorias conjuntamente distribuidas. En este caso consideremos la función de densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ de dos VA X e Y , y sea U y V otras dos VA relacionadas con X e Y mediante las ecuaciones

$$U = g(X, Y) \quad y \quad V = h(X, Y) \quad (3.81)$$

Se trata ahora de determinar la función de densidad conjunta $p_{UV}(u, v)$ de las VA U y V .

En forma similar al caso anterior, se resuelven simultáneamente las ecuaciones (3.81) en términos de x e y . La densidad de probabilidad conjunta $p_{UV}(u, v)$ de las VA U y V viene dada por [Papoulis, 1965],

$$p_{UV}(u, v) = \sum_{i=1}^n \frac{p_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|} \quad (3.82)$$

donde x_i e y_i son las soluciones simultáneas o raíces de las ecuaciones (3.81), y $J(x, y)$ es el Jacobiano de la transformación (3.82) definido mediante el determinante

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} h(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} h(x, y) \end{vmatrix} \quad (3.83)$$

La extensión de este método para más de dos VA es directa.

♣ Ejemplo 3.14

La función de densidad conjunta de dos VA X e Y es $p_{XY}(x, y) = \exp[-(x+y)]u(x)u(y)$ y queremos determinar la función de densidad conjunta $p_{UV}(u, v)$ de dos VA U y V relacionadas con X e Y mediante las ecuaciones

$$U = X + 2Y \quad y \quad V = 2X + Y$$

$$\text{Resolviendo simultáneamente para } x \text{ e } y, \text{ se obtiene } x = \frac{2v-u}{3} \quad ; \quad y = \frac{2u-v}{3}$$

$$\text{y el Jacobiano,} \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = [1-4] = -3 \quad y \quad |J| = 3$$

$$\text{También,} \quad \exp[-(x+y)]|_{x=(2v-u)/3; y=(2u-v)/3} = \exp\left[-\left(\frac{2v-u}{3} + \frac{2u-v}{3}\right)\right] = \exp\left[-\frac{1}{3}(u+v)\right]$$

Suponiendo que $u \geq 0$, se tiene:

$$\text{si } x \geq 0, \text{ entonces } \frac{2v-u}{3} \geq 0 \quad y \quad v \geq \frac{u}{2}$$

si $y \geq 0$, entonces $\frac{2u-v}{3} \geq 0$ y $2u \geq v$

de donde $2u \geq v \geq \frac{u}{2}$

La densidad de probabilidad conjunta $p_{UV}(u, v)$ de las VA U y V será entonces

$$p_{UV}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{3} \exp\left[-\frac{1}{3}(u+v)\right] & \text{para } u \geq 0 \text{ y } 2u \geq v \geq \frac{u}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

♣

3.6. PROMEDIOS ESTADÍSTICOS

3.6.1. Definición

El concepto de “**promedio**” o “**valor promedio**” tiene una gran importancia en el estudio de los procesos aleatorios. Un proceso aleatorio se caracteriza por su “regularidad estadística”, lo cual quiere decir que el proceso no puede predecirse en detalle sino en base de “promedios”. Por ejemplo, la definición empírica de la probabilidad, expresión (3.1), representa una forma de promedio.

Consideremos una VA X que puede tomar los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ con probabilidades $P_X(x_i)$ con $i = 1, 2, \dots, n$. Repitamos el experimento (representado por X) N veces ($N \rightarrow \infty$) y sea $m_1, m_2, \dots, m_n$ los números de pruebas favorables a los resultados $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente. Entonces *el valor promedio de la VA X (que representaremos con una barra sobre la variable) es*

$$\bar{X} = \frac{1}{N} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) = \frac{m_1}{N} x_1 + \frac{m_2}{N} x_2 + \dots + \frac{m_n}{N} x_n \quad (3.84)$$

En el límite, cuando $N \rightarrow \infty$, la relación m_i/N tiende a $P_X(x_i)$ de acuerdo con la definición empírica de la probabilidad. Entonces, el valor promedio de una VA X se define en la forma

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i P_X(x_i) \quad \text{para variables aleatorias discretas} \quad (3.85)$$

Si la VA X es continua, entonces su valor promedio es

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = E\{X\} \quad \text{para variables aleatorias continuas} \quad (3.86)$$

donde $E\{X\}$ es otra forma de representación del valor promedio de X .

El valor promedio de una VA X se conoce también con los nombres de “**valor esperado**”, “**esperanza matemática**” o “**promedio estadístico**”, y lo representaremos indistintamente con la notación $\bar{X}$ o $E\{X\}$.

3.6.2. Valor Promedio de Funciones de Variables Aleatorias

Valor Promedio de una Función de una Variable Aleatoria

A menudo se desea determinar el valor esperado de una cierta función de una VA en vez del valor esperado de la VA. Es decir, se desea obtener una expresión para el valor esperado de una VA Y que es una función de X de la forma

$$Y = g(X)$$

Por definición, $\bar{Y} = E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy$

Se demuestra [Papoulis, 1965] que si $Y = g(X)$, entonces

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_X(x)dx \quad (3.87)$$

Si la VA X es de tipo discreto,

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} = \sum_{i=1}^n g(x_i)p_X(x_i) \quad (3.88)$$

Generalizando, podemos ver que si

$$g(X) = g_1(X) + g_2(X) + \dots + g_n(X), \text{ entonces}$$

$$E\{g_1(X) + g_2(X) + \dots + g_n(X)\} = E\{g_1(X)\} + E\{g_2(X)\} + \dots + E\{g_n(X)\} \quad (3.89)$$

El valor esperado de una suma de funciones de una VA X es la suma de los valores esperados de cada una de las funciones. En particular,

$$E\{aX + b\} = aE\{X\} + b, \text{ pues } E\{b\} = b$$

El valor promedio de una constante es la constante misma.

$$\text{Si } g(X) = g_1(x) + jg_2(X), \text{ entonces } E\{g(X)\} = E\{g_1(X)\} + jE\{g_2(X)\}$$

Valor Promedio de una Función de Variables Aleatorias

Si una VA Z es una función de dos VA X e Y de la forma $Z = g(X, Y)$, entonces, por definición,

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} zp_Z(z)dz \quad (3.90)$$

El valor esperado de Z se puede determinar directamente a partir de la densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ utilizando el “teorema de la esperanza” o “teorema del valor esperado” [Lathi, 1968], el cual establece que si $Z = g(X, Y)$, entonces

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)p_{XY}(x, y)dxdy \quad (3.91)$$

y para variables aleatorias discretas

$$E\{Z\} = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)P_{XY}(x_i, y_j) \quad (3.92)$$

Generalizando, si $Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, entonces

$$E\{Z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.93)$$

Si algunas de las n variables son discretas, la expresión (3.93) es aún válida ya que la distribución discreta se considera como el caso límite de una distribución continua mediante la utilización de impulsos Delta Dirac.

Valor Promedio de Variables Aleatorias Estadísticamente Independientes

Consideremos el producto de n variables aleatorias estadísticamente independientes

$$Z = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

Puesto que las X_i son estadísticamente independientes, se tiene que

$$E\{Z\} = E\{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n\} = E\{X_1\} \cdot E\{X_2\} \cdot \dots \cdot E\{X_n\} \quad (3.94)$$

El valor esperado de un producto de variables aleatorias es el producto de los valores esperados de cada variable aleatoria si y solamente si las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

Asimismo, para un producto de funciones de variables aleatorias de la forma

$$Z = g_1(X_1) \cdot g_2(X_2) \cdot \dots \cdot g_n(X_n)$$

$$\text{Por definición, } E\{Z\} = E\{g_1(X_1) \cdot g_2(X_2) \cdot \dots \cdot g_n(X_n)\}$$

Como $X_1, X_2, \dots, X_n$ son estadísticamente independientes, se verifica que

$$E\{Z\} = E\{g_1(X_1)\} \cdot E\{g_2(X_2)\} \cdot \dots \cdot E\{g_n(X_n)\} \quad (3.95)$$

El valor esperado de un producto de funciones de variables aleatorias es el producto de los valores esperados de las respectivas funciones si y solamente si las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

3.6.3. Momentos

El momento n -ésimo de una VA X se define como el valor esperado de la potencia n -ésima de X . Entonces, por definición,

$$E\{X^n\} = \sum x_i^n p_X(x_i) \quad \text{si la VA } X \text{ es discreta} \quad (3.96)$$

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx \quad \text{si la VA } X \text{ es continua} \quad (3.97)$$

Nótese que el primer momento ($n = 1$) es igual al valor esperado de la VA X . Para $n = 2$, caso continuo, el segundo momento será

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx \quad (3.98)$$

Las dos primeros momentos se conocen con el nombre de “**momentos de primer orden**”.

La raíz cuadrada de $E\{X^2\}$ es el valor eficaz del proceso X y se le conoce con el nombre de “**valor cuadrático promedio o valor RMS** (del inglés Root-Mean-Square)” del proceso X . En términos prácticos, podemos decir que $E\{X\}$ es el valor promedio de la VA X , mientras que

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$E\{X^2\}$ es la potencia promedio. Más adelante relacionaremos estos parámetros con la componente continua y la potencia promedio de una señal $x(t)$. Nótese la diferencia entre $\overline{X^2}$ y $E\{X^2\}$: las operaciones de promediación y elevación al cuadrado no son intercambiables y $\overline{X^2} \neq E\{X^2\}$.

En la práctica se presenta con mucha frecuencia el problema de la determinación del valor promedio cuadrático de una suma de variables aleatorias. Sea, por ejemplo, la suma $X = S + N$, donde S y N son dos señales aleatorias estadísticamente independientes, por ejemplo, la señal y el ruido en un sistema de comunicaciones. El segundo momento de X es

$$E\{(S+N)^2\} = E\{S^2 + N^2 + 2SN\} = E\{S^2\} + E\{N^2\} + 2E\{S\} \cdot E\{N\} \quad (3.99)$$

Si $E\{S\}$ o $E\{N\}$ o ambos son iguales a cero, entonces

$$E\{(S+N)^2\} = E\{S^2\} + E\{N^2\} \quad (3.100)$$

La potencia promedio de la suma de dos variables aleatorias es igual a la suma de las potencias promedio de cada una de las variables aleatorias, si y solamente si las variables aleatorias son estadísticamente independientes y por lo menos una tiene valor promedio cero. Este enunciado es de particular importancia en el estudio de sistemas de comunicación donde las señales mensaje están contaminadas con ruido aditivo y además no están correlacionadas, como veremos más adelante.

♣ **Ejemplo 3. 15. Momentos de una variable aleatoria gaussiana centrada.**

Sea una variable aleatoria gaussiana centrada. Demostrar que

(a) $E\{X\} = 0$; y $E\{X^2\} = \sigma^2$

(b) Si la VA X está desplazada en una cantidad x_0 , entonces

$$E\{X\} = x_0; \quad E\{X^2\} = \sigma^2 + x_0^2; \quad \text{Var}\{X\} = \sigma^2$$

Solución:

Como la VA X es gaussiana centrada, su densidad de probabilidad es, de (3.60)

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

(a) $E\{X\}$ es el primer momento o valor promedio de la VA X . De (3.97). para $n = 1$,

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

El integrando es una función impar de x , y como la integración se hace para todo x , su valor es cero. Por lo tanto,

$$E\{X\} = 0$$

$$\text{De (3.98), } E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$\text{Integrando, } E\{X^2\} = \sigma^2$$

(b) De (3.97) y como la VA X está desplazada en x_0 , entonces

$$E\{X\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Integrando obtenemos $E\{X\} = x_0$

$$\text{De (3.98), } E\{X^2\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

Integrando obtenemos $E\{X^2\} = \sigma^2 + x_0^2$

Vemos que la VA X contiene una componente alterna cuya potencia promedio es σ^2 y una componente continua de amplitud x_0 y cuya potencia es x_0^2 .



Momentos Centrales

El momento central n -ésimo de una VA X es el momento respecto al valor esperado $\bar{X}$ de X , y se define en la forma

$$E\{(X - \bar{X})^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n p_X(x) dx \quad (3.101)$$

Nótese que el primer momento central ($n = 1$) es $E\{X - \bar{X}\} = 0$.

El segundo momento central respecto al valor esperado $\bar{X}$ se conoce con el nombre de “**varianza**” o “**dispersión**” de la VA X , y se representa usualmente con la notación σ_X^2 . Entonces, por definición,

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = E\{(X - \bar{X})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p_X(x) dx \quad \text{si la VA } X \text{ es continua} \quad (3.102)$$

$$\text{y } \text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \bar{X})^2 p_X(x_i) \quad \text{si la VA } X \text{ es discreta} \quad (3.103)$$

La varianza o dispersión nos proporciona una idea de la dispersión de la densidad de probabilidad $p_X(x)$ alrededor del valor promedio $\bar{X}$; cuanto más alta es la varianza, más extendida es la densidad de probabilidad. La raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir σ_X , se conoce con el nombre de “**desviación estándar**” o “**desviación típica**”.

Por ejemplo, la varianza de una variable aleatoria gaussiana es

$$\text{De (3.102), } \text{Var}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Resolviendo la integral, $\text{Var}\{X\} = \sigma^2$

Desarrollando (3.102),

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E\{(X - \bar{X})^2\} = E\{X^2 + \bar{X}^2 - 2X\bar{X}\} = E\{X^2\} + \bar{X}^2 - 2\bar{X}^2 \\ \sigma_X^2 &= E\{X^2\} - \bar{X}^2 \end{aligned} \quad (3.104)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Se puede definir también la denominada “**covarianza de dos VA X e Y**” en la forma

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\} \quad (3.105)$$

Desarrollando (3.105), obtenemos finalmente,

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{XY\} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad (3.106)$$

Al término $E\{XY\}$ se le denomina “**correlación entre las VA X e Y**”.

La covarianza $\text{Cov}(X, Y)$ se puede expresar en términos de la función de densidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ en la forma siguiente. Por definición, para variables aleatorias continuas

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) p_{XY}(x, y) dx dy \quad (3.107)$$

y si las variables aleatorias son discretas,

$$\text{Cov}(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) P_{XY}(x_i, y_j) \quad (3.108)$$

$$\text{Asimismo, } E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{XY}(x, y) dx dy \quad (3.109)$$

Si las variables X e Y no están correlacionadas (se dice también que están “descorrelacionadas”), entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$, lo que implica que $E\{XY\} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$, expresión ésta que se cumple cuando X e Y son independientes. Por consiguiente, *las VA independientes siempre serán variables no correlacionadas, aunque lo contrario no necesariamente se cumple, es decir, que si las variables no están correlacionadas, no necesariamente quiere decir que dichas variables son independientes.*

Para dos VA X e Y independientes, vimos que $E\{g_1(X) \cdot g_2(Y)\} = E\{g_1(X)\} \cdot E\{g_2(Y)\}$,

mientras que para que X e Y no estén correlacionadas, el único requisito es que $E\{XY\} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$. En consecuencia, la “condición de independencia estadística” es una condición mucho más fuerte y restrictiva que la “condición de no correlación”. Por otra parte, si $E\{XY\} = 0$, entonces se dice que las VA X e Y son “ortogonales” independientemente de si $\bar{X}$ o $\bar{Y}$ o ambas son o no cero. Nótese que si $\bar{X}$ o $\bar{Y}$ o ambas son cero, entonces “ortogonalidad” implica “no correlación”. Este principio de ortogonalidad es la base del procesamiento lineal de señales.

En general, la covarianza es una medida de la relación entre dos variables aleatorias. Sin embargo, ella no revela la naturaleza exacta de la dependencia y no puede proveer una información completa acerca de la interdependencia entre dos variables aleatorias. La covarianza es un parámetro muy utilizado en el análisis estadístico de señales, no solamente en sistemas de comunicación sino también en todos los campos de las ciencias e ingeniería.

A menudo se define también el “**coeficiente de correlación de X e Y**” en la forma

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{E\{XY\} - \bar{X} \bar{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (3.110)$$

Nótese que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

Este coeficiente indica qué tan relacionadas están las variables X e Y , y su módulo debe ser igual o menor que 1. Cuando $\rho_{XY} = 0$, las variables X e Y no están correlacionadas (o

descorrelacionadas), es decir, que dado un valor de una de ellas, se puede obtener cualquier valor de la otra; si se grafica una variable en función de la otra, se obtendrá un gráfico circular. Para $0 < |\rho_{XY}| < 1$, el gráfico tendrá la forma de elipses inclinadas. Para $\rho_{XY} = 1$, el gráfico será una línea recta.

Consideremos ahora la varianza de la suma de dos variables aleatorias no correlacionadas.

Sea por ejemplo, $X = S + N$, caso muy común en la práctica. Entonces, de (3.102),

$$\sigma_X^2 = E\{(X - \bar{X})^2\} = E\{[(S + N) - (\bar{S} + \bar{N})]^2\} = E\{[(S - \bar{S}) + (N - \bar{N})]^2\}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_S^2 + \sigma_N^2 + 2E\{(S - \bar{S})(N - \bar{N})\}$$

pero $E\{(S - \bar{S})(N - \bar{N})\} = E\{S \cdot N\} - \bar{S} \cdot \bar{N} = \text{Cov}(S, N)$

Si las variables no están correlacionadas, la covarianza entre S y N es cero y

$$E\{S \cdot N\} = \bar{S} \cdot \bar{N}, \text{ de donde}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_S^2 + \sigma_N^2 \quad (3.111)$$

La varianza de la suma de dos variables aleatorias es la suma de las varianzas de cada una de las variables si y solamente si las variables no están correlacionadas. Este resultado se puede extender a cualquier número de variables aleatorias.

3.7. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

La función característica $\phi_X(\lambda)$ de una VA X es la transformada de Fourier de su densidad de probabilidad $p_X(x)$ con una inversión en el signo del exponencial [Papoulis, 1965]. La función característica se emplea para simplificar ciertas operaciones en las que interviene la VA X. Por ejemplo, en la evaluación de los momentos de X, en algunos casos en la determinación de la función de densidad de una función de X, en la convolución de funciones de densidad de probabilidad y en el desarrollo de los teoremas del límite.

Sea entonces la función $Y = g(X) = \exp(j2\pi\lambda X)$, cuyo valor esperado es, de (3.87),

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} = E\{\exp[j2\pi\lambda X]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\lambda x) p_X(x) dx \quad (3.112)$$

Esta integral tiene la forma de una Integral de Fourier; en este caso definimos,

$$\phi_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp(j2\pi\lambda x) dx \quad (3.113)$$

La función $\phi_X(\lambda)$ es conocida con el nombre de “**función característica de la VA X**” y vemos que es la transformada de Fourier de la densidad de probabilidad $p_X(x)$ con una inversión en el signo del exponencial. La función de densidad de probabilidad $p_X(x)$ es la correspondiente antitransformada de Fourier. Entonces,

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(\lambda) \exp(-j2\pi\lambda x) d\lambda \quad (3.114)$$

La función característica y la densidad de probabilidad forman entonces un par de transformadas de Fourier: $p_X(x) \Leftrightarrow \phi_X(\lambda)$.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Nótese que $\phi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$; pero como $p_X(x) \geq 0$ para todo x , entonces

$$|\phi_X(\lambda)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp(j2\pi\lambda x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1. \text{ Por lo tanto,}$$

$$|\phi_X(\lambda)| \leq 1$$

La función característica nos permite determinar muy fácilmente la densidad de probabilidad de una suma de variables aleatorias. En efecto, sea $Z = X + Y$, donde X e Y son variables aleatorias independientes y $p_X(x) \Leftrightarrow \phi_X(\lambda)$; $p_Y(y) \Leftrightarrow \phi_Y(\lambda)$; $p_Z(z) \Leftrightarrow \phi_Z(\lambda)$. De la definición de función característica, expresión (3.96),

$$\phi_Z(\lambda) = E\{\exp[j2\pi\lambda(X+Y)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi\lambda(x+y)] \cdot p_{XY}(x,y) dx dy$$

Puesto que X e Y son independientes, entonces $p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$, de donde

$$\phi_Z(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\lambda x) p_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi\lambda y) p_Y(y) dy = \phi_X(\lambda) \cdot \phi_Y(\lambda) \quad (3.115)$$

La función característica de una suma de variables aleatorias independientes es igual al producto de las funciones características de cada una de las variables aleatorias. Mediante aplicación del teorema de la convolución, obtenemos

$$\phi_Z(\lambda) = \phi_X(\lambda) \cdot \phi_Y(\lambda) \Leftrightarrow p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u) \cdot p_Y(z-u) du = p_X(x) * p_Y(y) \quad (3.116)$$

La densidad de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es igual a la convolución de las densidades de probabilidad de las variables aleatorias. La extensión a un número cualquiera de variables aleatorias es directa. En efecto, si

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots \dots X_n$$

$$\text{Entonces, } p_Z(z) = p_{X_1}(x_1) * p_{X_2}(x_2) * p_{X_3}(x_3) * \dots \dots * p_{X_n}(x_n) \quad (3.117)$$

$$\text{y } \phi_Z(\lambda) = \phi_{X_1}(\lambda) \cdot \phi_{X_2}(\lambda) \cdot \phi_{X_3}(\lambda) \cdot \dots \dots \phi_{X_n}(\lambda) \quad (3.118)$$

Estos resultados se aplican también a variables aleatorias discretas, lo que puede considerarse como un caso límite de variables aleatorias continuas con impulsos unitarios de Dirac.

♣ Ejemplo 3.16

Las VA independientes X e Y son gaussianas no centradas de la forma

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad \text{y} \quad p_Y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

Vamos a determinar la densidad de la VA $Z = X + Y$.

Solución:

$$\text{Del Problema 1.23(g), } A \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \Leftrightarrow A \sqrt{2\pi a^2} \exp(-2\pi^2 a^2 f^2)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Sea entonces $q(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \Leftrightarrow \exp(-2\pi^2 \sigma_x^2 \lambda^2)$

$$p_X(x) = q(x - x_0) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2}\right) \Leftrightarrow \exp(-2\pi^2 \sigma_x^2 \lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi x_0 \lambda) = \phi_X(\lambda)$$

Similarmente,

$$p_Y(y) \Leftrightarrow \exp(-2\pi^2 \sigma_y^2 \lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi y_0 \lambda) = \phi_Y(\lambda)$$

Puesto X e Y son independientes,

$$\phi_Z(\lambda) = \phi_X(\lambda) \cdot \phi_Y(\lambda) = [\exp(-2\pi^2 \sigma_x^2 \lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi x_0 \lambda)] \cdot [\exp(-2\pi^2 \sigma_y^2 \lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi y_0 \lambda)]$$

$$\phi_Z(\lambda) = \left\{ \exp\left[-\frac{(2\pi\lambda)^2}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\right] \right\} \cdot \left\{ \exp[-j2\pi\lambda(x_0 + y_0)] \right\}$$

Hagamos $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ y $z_0 = x_0 + y_0$. Entonces,

$$\phi_Z(\lambda) = \exp\left[-\frac{(2\pi\lambda)^2}{2} \sigma_z^2\right] \cdot \exp[-j2\pi\lambda z_0] = \exp(-2\pi^2 \sigma_z^2 \lambda^2) \cdot \exp(-j2\pi z_0 \lambda)$$

Por antitransformada de Fourier,

$$p_Z(z) = \text{TF}^{-1}\{\phi_Z(\lambda)\} = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\sigma_z^2}\right]$$

Obsérvese que la densidad $p_Z(z)$ es una distribución gaussiana no centrada, es decir, *la densidad de probabilidad de la suma de dos VA independientes y gaussianas, es también gaussiana*. Este resultado se puede extender a un número cualquiera de VA independientes y gaussianas. Asimismo, *el valor promedio y la varianza de la suma son iguales a la suma de los promedios individuales y a la suma de las varianzas individuales, respectivamente*.

Nótese que, bajo ciertas condiciones, la suma de un gran número de variables aleatorias independientes tiende a ser gaussiana, independientemente de si ellas son gaussianas o no. Esta tendencia hacia una distribución gaussiana se desarrolla rigurosamente en el denominado “Teorema del Límite Central”, cuyo tratamiento está fuera de los límites del presente texto.

♣

♣ Ejemplo 3.17

Consideremos una VA Y que es una función de la VA X de la forma $Y = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}$. Vamos a determinar la función característica $\phi_Y(\lambda)$ y la densidad de probabilidad $p_Y(y)$ de Y.

De (3.112),

$$\phi_Y(\lambda) = E\left\{\exp\left[j2\pi\lambda\left(\frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}\right)\right]\right\} = E\left\{\exp\left(j2\pi\frac{X}{\sigma_X}\lambda\right) \cdot \exp\left(-j2\pi\frac{\bar{X}}{\sigma_X}\lambda\right)\right\}$$

$$\phi_Y(\lambda) = \exp\left(-j2\pi\frac{\bar{X}}{\sigma_X}\lambda\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp\left(j2\pi\frac{\lambda}{\sigma_X}x\right) dx$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

De la propiedad escalar de la transformada de Fourier, la integral es igual a $\phi_X\left(\frac{\lambda}{\sigma_X}\right)$, de

donde
$$\phi_Y(\lambda) = \phi_X\left(\frac{\lambda}{\sigma_X}\right) \cdot \exp(-j2\pi \frac{\bar{X}}{\sigma_X} \lambda)$$

Tomando la antitransformada de Fourier,

$$p_Y(y) = \sigma_X \cdot p_X(\sigma_X x) \Big|_{x \rightarrow x - \bar{X}/\sigma_X} = \sigma_X \cdot p_X\left[\sigma_X \left(x - \frac{\bar{X}}{\sigma_X}\right)\right]$$

Como vemos, todas las propiedades y métodos de la Transformada de Fourier vistos en los Capítulos I y II se aplican en el caso de la equivalencia $\phi_X(\lambda) \Leftrightarrow p_X(x)$.



Además de ser útil para la determinación de las funciones de probabilidad de la suma de variables aleatorias, la función característica se puede utilizar también para determinar los momentos de una variable aleatoria. En efecto, diferenciando (3.113) respecto a λ ,

$$\frac{d}{d\lambda} \phi_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \left[\frac{d}{d\lambda} \exp(j2\pi\lambda x) \right] dx = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) \exp(j2\pi\lambda x) dx$$

Evalutando la expresión anterior para $\lambda = 0$, se tiene,

$$\frac{d}{d\lambda} \phi_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = j2\pi \cdot E\{X\}, \text{ de donde}$$

$$E\{X\} = \frac{1}{j2\pi} \frac{d}{d\lambda} \phi_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.119)$$

El valor promedio de una variable aleatoria es igual a la primera derivada de su función característica en el origen ($\lambda = 0$), dividida por $j2\pi$. En general, mediante diferenciación sucesiva bajo el signo integral, se puede demostrar que

$$E\{X^n\} = \frac{1}{(j2\pi)^n} \frac{d^n}{d\lambda^n} \phi_X(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \quad (3.120)$$

El momento n-ésimo de una variable aleatoria es igual a la derivada n-ésima de su función característica en el origen ($\lambda = 0$), dividido por $(j2\pi)^n$.

3.8. PROCESOS ALEATORIOS O ESTOCÁSTICOS

3.8.1 Introducción

En la Sección 3.3 se asoció un punto de muestra con cada resultado de un experimento. La colección de todos los puntos de muestra se llamó “espacio de las muestras” del experimento. Para cada punto de muestra en el espacio de las muestras se asignó un número real X de acuerdo con alguna regla, y una probabilidad de ocurrencia $P_X(x)$. Esta es la definición de variable aleatoria.

Un proceso aleatorio es una extensión del concepto de variable aleatoria. En el caso de un proceso aleatorio, a cada punto de muestra que distinguiremos con la notación λ , se asigna una forma de onda (que es función del tiempo t), de acuerdo con alguna regla $x(t, \lambda)$. Por lo tanto, el espacio de las muestras tendrá asociada una cierta colección de formas de onda y cada una de ellas corresponde a un punto de muestra λ . Esta colección de formas de onda se conoce con el nombre de

“**conjunto aleatorio (CA)**” y las formas de onda individuales como “**muestras**” o “**funciones de muestra**”. La distribución de la probabilidad de los puntos de muestra determina la distribución de probabilidad de las funciones de muestra del CA. El sistema de probabilidades, que comprende el espacio de las muestras, el CA o conjunto de formas de onda y las funciones de probabilidad, constituyen el “**proceso aleatorio (PA)**”.

A los PA se les conoce también con el nombre de “**Procesos Estocásticos**”.

La notación $X(t, \lambda)$ representará el PA; sin embargo, generalmente se omite λ y el PA simplemente se representa con $X(t)$, cuyo significado es “una colección de formas de onda que ocurren con una cierta medida de probabilidad”. Una función de muestra individual se representará simplemente con $x(t)$. En la Fig. 3.18 se muestra un conjunto aleatorio de k señales producido por el ruido en un sistema eléctrico. Este conjunto se puede obtener repitiendo las observaciones en el mismo sistema, u observando simultáneamente los resultados o señales de varios sistemas idénticos.

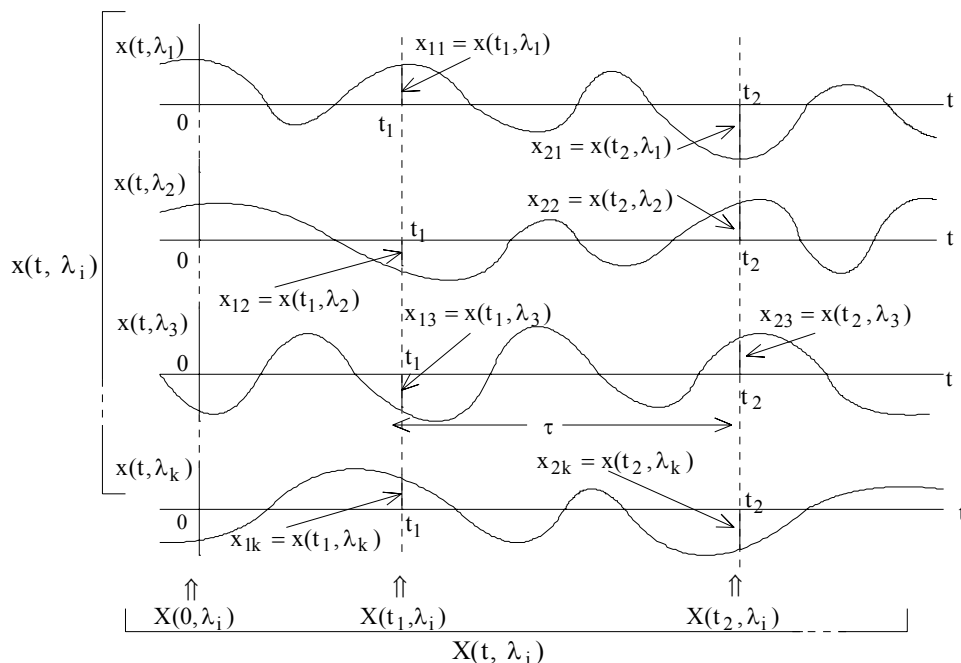


Fig. 3.18. Conjunto Aleatorio de Señales

Se dice que un proceso es continuo o discreto si las variables aleatorias asociadas son continuas o discretas. Si el tiempo es discreto debido a un muestreo, se tiene una secuencia aleatoria discreta (muy utilizadas en comunicaciones). Si el tiempo es discontinuo y la señal aparece en instantes aleatorios, se dice que el proceso es puntual.

En la práctica, sobre todo en el dominio de la ingeniería, a menudo se tiene la situación donde el resultado del experimento es ya una forma de onda. En este caso, el concepto de resultado y de muestra o función de muestra tienden a ser lo mismo, es decir, que el resultado mismo se puede considerar como la función de muestra correspondiente. Nótese entonces la diferencia entre una variable aleatoria y un proceso aleatorio: para una variable aleatoria un resultado en el espacio de las muestras se representa como un número, mientras que para un proceso aleatorio se representa como una forma de onda función del tiempo.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Para entender mejor la idea de conjunto, vamos a distinguir los “**promedios conjunto**” y los “**promedios tiempo**”. Los promedios conjunto, llamados también “promedios espaciales”, son todas aquellas estadísticas (amplitudes) tomadas sobre el conjunto aleatorio (verticalmente en la Fig. 3.18). Las correspondientes variables aleatorias son $X(t, \lambda_i)$ (Nota: Para no complicar la notación algunas veces se omite el subíndice i de λ , pero siempre estará implícito).

Puesto que se tiene k funciones de muestra, $X(t, \lambda_i)$ tendrá k valores para cada t con $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Por ejemplo, en la Fig. 3.18 se muestran solamente tres VA $X(t, \lambda_i)$: $X(0, \lambda_i)$, $X(t_1, \lambda_i)$ y $X(t_2, \lambda_i)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Sea, entonces, el conjunto aleatorio mostrado en la Fig. 3.18. Los promedios conjunto será la familia de momentos dada por

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \dots x_n p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t, \lambda_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

para todo t , con $i = 1, 2, 3, \dots, k$. (3.121)

donde $p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t, \lambda_i)$ es la densidad de probabilidad conjunta del proceso aleatorio.

Los promedios tiempo o “promedios temporales” son todas aquellas estadísticas tomadas sobre las funciones del tiempo (horizontalmente en la Fig. 3.18). Los promedios tiempo será la familia de promedios tiempo dada por

$$\langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t, \lambda_i)]^n dt \quad \text{para todo } t \text{ e } i = 1, 2, \dots, k \quad (3.122)$$

En general, en un proceso aleatorio $X(t, \lambda)$ los promedio conjunto y los promedios tiempo son diferentes, es decir,

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} \neq \langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle \quad (3.123)$$

Diremos sin demostrarlo que *el promedio conjunto es determinístico (no aleatorio) pero en general depende del tiempo, mientras que el promedio tiempo es independiente del tiempo pero en general es aleatorio*.

Estadísticas de Primer Orden

Las estadísticas de primer orden se especifican completamente mediante las funciones de densidad de las variables aleatorias en los instantes t (para todo t); estas funciones de densidad las escribiremos en la forma $p_X(x, t, \lambda_i)$ en las cuales el parámetro t indica el instante en el cual las amplitudes de las señales de muestra definen la VA $X(t, \lambda_i)$. La función $p_X(x, t, \lambda_i)$ es la “**densidad de probabilidad de primer orden**”. Una vez establecidas las densidades de probabilidad de primer orden, las correspondientes estadísticas de primer orden vienen dadas por

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x, t, \lambda_i) dx \quad (3.124)$$

Estadísticas de Segundo Orden

Las estadísticas de primer orden nos dan las distribuciones de las amplitudes de las funciones de muestra para valores particulares de t y es suficiente el conocimiento de su densidad de probabilidad de primer orden. Pero el conocimiento de $p_X(x, t, \lambda_i)$ no es suficiente para una completa descripción estadística del proceso. En efecto, supongamos que el proceso representa un conjunto de señales eléctricas como en la Fig. 3.18, y se desea obtener un cierto conocimiento en relación con las frecuencias contenidas en dichas señales. Si el proceso contiene predominantemente componentes de baja frecuencia, entonces las señales varían muy poco y $x(t_1, \lambda_i)$ no será muy diferente de $x(t_1 + \tau, \lambda_i)$. Es evidente que $x(t_1, \lambda_i)$ y $x(t_1 + \tau, \lambda_i)$ no serán estadísticamente independientes siempre que τ sea suficientemente pequeño; en consecuencia, el conocimiento de $x(t_1, \lambda_i)$ proporciona una cierta información estadística acerca de $x(t_1 + \tau, \lambda_i)$.

Si el proceso contiene predominantemente componentes de alta frecuencia, las señales variarán muy rápidamente y valores separados en un intervalo τ dado no mostrarán ninguna dependencia. Por lo tanto, la correlación entre valores de las señales en distintos intervalos de tiempo puede proporcionar una información estadística muy útil en relación con su contenido espectral.

De gran importancia en el análisis de señales son las estadísticas de segundo orden, que representan el momento conjunto de dos VA $X(t_1, \lambda_i)$ y $X(t_2, \lambda_i)$, donde $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2, \lambda_i)$ es su función de densidad conjunta, denominada “**función de densidad de probabilidad de segundo orden**”.

Las estadísticas de segundo orden de dos VA $X(t_1, \lambda_i)$ y $X(t_2, \lambda_i)$ vendrán dadas por la siguiente expresión:

$$E\{X(t_1, \lambda_i) \cdot X(t_2, \lambda_i)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2, \lambda_i) dx_1 dx_2 \quad (3.125)$$

Como una aplicación de estas técnicas matemáticas en la transmisión de señales aleatorias a través de sistemas lineales, es suficiente conocer las estadísticas de primero y segundo orden, ya que con ellas es posible determinar la densidad espectral de potencia, la función de autocorrelación, el valor promedio, el valor eficaz y las funciones características de un proceso dado, parámetros de gran importancia en el análisis de sistemas de comunicación.

En resumen, podemos definir las siguientes estadísticas del proceso aleatorio $X(t, \lambda)$:

1. El valor promedio: $E\{X(t, \lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x, t, \lambda) dx$

2. El llamado “promedio de segundo orden entre las VA $X(t_1, \lambda)$ y $X(t_2, \lambda)$ ”:

$$E\{X(t_1, \lambda) \cdot X(t_2, \lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2, t_1, t_2, \lambda) dx_1 dx_2 \quad (3.126)$$

3. La covarianza entre las VA $X(t_1, \lambda)$ y $X(t_2, \lambda)$,

$$\text{Cov}\{X(t_1, \lambda), X(t_2, \lambda)\} = E\{X(t_1, \lambda) \cdot X(t_2, \lambda)\} - E\{X(t_1, \lambda)\} \cdot E\{X(t_2, \lambda)\} \quad (3.127)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

4. El coeficiente de correlación entre las VA $X(t_1, \lambda)$ y $X(t_2, \lambda)$,

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{\text{Cov}\{X(t_1, \lambda), X(t_2, \lambda)\}}{\sqrt{\text{Var}\{X(t_1, \lambda)\} \cdot \text{Var}\{X(t_2, \lambda)\}}} \quad (3.128)$$

Para efectos de tipo práctico, solamente se necesita conocer estas estadísticas del proceso aleatorio $X(t, \lambda)$, las cuales, en general, son funciones del tiempo.

El estudio de los procesos aleatorios o estocásticos es muy importante en los campos de la Física e Ingeniería, pues hay multitud de fenómenos que dependen del tiempo en forma muy compleja y que a veces su observación es muy complicada. Esto impide un estudio preciso y sistemático de los mismos. Sin embargo, suponiendo estacionariedad y ergodicidad los procesos pueden ser tratados y analizados. Esto lo veremos a continuación.

3.8.2. Estacionariedad y Ergodicidad

Estacionariedad en el Sentido Estricto

Se dice que un proceso aleatorio $X(t, \lambda)$ es estrictamente estacionario si todas sus estadísticas conjunto son invariantes en el tiempo; en otras palabras, un proceso aleatorio es estrictamente estacionario si ninguna de sus estadísticas conjunto es afectada por un desplazamiento τ del origen del tiempo, es decir, si

$$E\{[X(t, \lambda_i)]^n\} = E\{[X(t + \tau, \lambda_i)]^n\} \quad (3.129)$$

En este caso el proceso aleatorio $X(t, \lambda)$ se denota simplemente como X . De (3.97), los dos primeros momentos de primer orden serán

$$E\{X(t, \lambda)\} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad (3.130a)$$

$$E\{X^2(t, \lambda)\} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx \quad (3.130b)$$

y el momento n -ésimo de primer orden,

$$E\{X^n(t, \lambda)\} = E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx \quad (3.131)$$

Un proceso estacionario es una idealización, no existe en la naturaleza. Sin embargo, en el laboratorio un proceso puede considerarse estacionario si el decaimiento del proceso ocurre en un tiempo mayor que la duración del fenómeno que se desea analizar. Una condición para esto es que la duración durante la cual el proceso es estacionario sea mayor que el tiempo de correlación del proceso.

Estacionariedad en el Sentido Amplio

Se dice que un proceso aleatorio $X(t, \lambda)$ es estacionario en el sentido amplio o débilmente estacionario, si

$$(a) \text{ Su valor promedio conjunto } E\{X(t_1, \lambda)\} = E\{X(t_2, \lambda)\} = \text{constante para todo } t \quad (3.132)$$

(b) Su promedio conjunto de segundo orden

$$E\{X(t_1, \lambda) \cdot X(t_2, \lambda)\} = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\} \quad (3.133)$$

donde τ es la diferencia absoluta $\tau = |t_2 - t_1|$.

Un proceso es débilmente estacionario cuando su valor promedio conjunto es constante para todo t , y su promedio conjunto de segundo orden depende solamente de la diferencia absoluta $\tau = |t_2 - t_1|$.

Nótese que un proceso aleatorio estrictamente estacionario es también débilmente estacionario, pero lo contrario no necesariamente es cierto.

Ergodicidad

La propiedad de estacionariedad estricta o amplia no asegura que los promedios conjunto y los promedios tiempo sean iguales. Puede suceder que aún cuando las estadísticas conjunto son estacionarias, las señales de muestra individuales pueden diferir estadísticamente una de la otra. En este caso los promedios tiempo dependerán de la señal de muestra utilizada, pues en general se verifica que

$$\langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle \neq \langle [x(t, \lambda_j)]^n \rangle \quad \text{para } i \neq j.$$

Cuando la naturaleza de un proceso aleatorio es tal que los promedios conjunto y los promedios tiempo son iguales, se dice entonces que el proceso aleatorio es “**ergódico**”. Por lo tanto, si el proceso representado por $X(t, \lambda)$ es ergódico, entonces todas las estadísticas se pueden determinar a partir de una sola señal de muestra $x(t)$. Nótese que *un proceso ergódico es estacionario o por lo menos débilmente estacionario, pero un proceso estacionario o por lo menos débilmente estacionario no necesariamente es ergódico*. La hipótesis de ergodicidad en general es muy difícil de verificar; sin embargo, frecuentemente se admite que procesos aleatorios corrientes sean ergódicos, pues no interesa cómo es la función en sí, sino los datos sobre el valor promedio, la varianza y la autocorrelación, porque si la entrada a un SLIT tiene estas propiedades, la salida del SLIT también las tendrá.

Puesto que todas las estadísticas se pueden determinar a partir de una sola señal de muestra, la ergodicidad implica también que

$$\langle [x(t, \lambda_i)]^n \rangle = \langle [x(t, \lambda_j)]^n \rangle \quad \text{para todo } i, j \quad (3.134)$$

Las estadísticas de un proceso aleatorio ergódico se escriben entonces en la forma

$$\langle [x(t)]^n \rangle = \langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t) dt \quad (3.135)$$

En la práctica generalmente se conoce $x(t)$ durante un intervalo $(-T/2, T/2)$, de modo que se puede escribir (por convención, se considera que la señal aleatoria $x(t)$ es una señal de potencia promedio finita),

$$\langle x^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t) dt \quad (3.136)$$

En el proceso ergódico los momentos conjunto y los momentos tiempo son iguales, es decir,

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx = \langle x^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t) dt \quad (3.137)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Para los dos primeros momentos de primer orden,

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \quad (3.138a)$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)dx = \langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt \quad (3.138b)$$

Las estadísticas de primer orden $E\{X\}$ y $E\{X^2\}$ de un proceso ergódico nos permiten hacer las siguientes observaciones:

- (a) $E\{X\} = \langle x(t) \rangle$, es el valor promedio de la señal $x(t)$; es simplemente el valor de la componente continua de $x(t)$.
- (b) $[E\{X\}]^2 = [\langle x(t) \rangle]^2$, es la potencia de la componente continua de $x(t)$ disipada en una resistencia de 1 Ohm.
- (c) $E\{X^2\} = \langle x^2(t) \rangle$, es la potencia promedio de la señal $x(t)$, normalizada para una resistencia de 1 Ohm.
- (d) $\sqrt{E\{X^2\}} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$, es el valor eficaz (RMS) de la señal $x(t)$.
- (e) La varianza σ_X^2 es igual a la potencia promedio de la componente alterna de $x(t)$, normalizada para una resistencia de 1 Ohm.
- (f) La desviación estándar σ_X es el valor eficaz de la componente alterna de la señal $x(t)$.
- (g) Si $E\{X\} = \langle x(t) \rangle = 0$, entonces σ_X es el valor eficaz de la señal $x(t)$.
- (h) Si $x(t)$ contiene una componente continua x_0 y una componente alterna, la potencia promedio de $x(t)$ será igual a $(\sigma_x^2 + x_0^2)$, normalizada para una resistencia de 1 Ohm.

Estas expresiones nos proporcionan un medio para relacionar la noción de señal aleatoria con la de señal determinística, a la cual estamos más acostumbrados y que hemos utilizado mayormente en los capítulos anteriores. Por lo tanto, todos los métodos matemáticos vistos en los Capítulos I y II son igualmente aplicables a las señales de muestra de procesos aleatorios ergódicos, con algunos cambios menores en la notación. Sin embargo, hay que tener siempre presente que todas estas relaciones son válidas solamente para procesos aleatorios ergódicos, por lo menos en lo que se refiere a las estadísticas de primero y segundo orden de procesos débilmente estacionarios.

Una aplicación práctica directamente relacionada con los conceptos anteriores, son las nociones de valor promedio y varianza en aplicaciones estadísticas de muestras tomadas de una población determinada. En estos casos se considera que todas las muestras son equiprobables, y si se toma N muestras de la población, el valor promedio y la varianza de las N muestras se expresan mediante las relaciones

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{y} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.139)$$

Por ejemplo, en el diseño de radioenlaces de microondas la “Rugosidad del Terreno” se describe mediante las expresiones (3.139), donde las X_i son las alturas tomadas sobre el terreno y N es el número de alturas. La desviación estándar σ_x es la rugosidad del terreno.

3.8.3. Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia

Función de Autocorrelación

Sea el proceso aleatorio de la Fig. 3.18, caracterizado por $X(t, \lambda_i)$ donde $x(t, \lambda_i)$ son las señales de muestra del proceso. En el instante $t = t_1$ el proceso se caracteriza mediante la VA $X(t_1) = X(t_1, \lambda_i)$, y en el instante $t = t_2$ la correspondiente VA es $X(t_2) = X(t_2, \lambda_i)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Para caracterizar la relación entre las VA $X(t_1)$ y $X(t_2)$, se necesita el conocimiento de la densidad de probabilidad conjunta $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ para poder calcular el momento conjunto $E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\}$ o promedio conjunto de segundo orden, denominado comúnmente función de autocorrelación. Entonces, por definición, la “**función de autocorrelación de un proceso $X(t, \lambda_i)$** ” es el momento conjunto de segundo orden de las VA $X(t_1)$ y $X(t_2)$ definido por

$$R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2; \lambda) dx_1 dx_2 \quad (3.140)$$

y es una función de t_1 y t_2 .

Asimismo, la covarianza de $X(t_1)$ y $X(t_2)$ es

$$\text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = R_{XX}(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\} \cdot E\{X(t_2)\} \quad (3.141)$$

y el correspondiente coeficiente de correlación

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{R_{XX}(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\} \cdot E\{X(t_2)\}}{\sqrt{\text{Var}[X(t_1)] \cdot \text{Var}[X(t_2)]}} \quad (3.142)$$

El término “autocorrelación” ya lo utilizamos en los Capítulos I y II en el caso de señales determinísticas; más adelante justificaremos el uso de ese término.

Si el proceso $X(t)$ es estacionario, la función de autocorrelación es independiente del origen del tiempo y dependerá solamente del valor absoluto de la diferencia de t_1 y t_2 , es decir, $|t_2 - t_1| = \tau$. Entonces, la función de autocorrelación de un proceso estacionario será

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1) = R_{XX}(\tau) = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\} \quad (5.143a)$$

Si además el proceso es ergódico, la función de autocorrelación se puede determinar a partir de una sola señal de muestra $x(t)$ tomando el promedio tiempo de $[x(t) \cdot x(t + \tau)]$. En este caso,

$$R_{XX}(\tau) = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\} = \langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle = R_x(\tau) \quad (3.143b)$$

$$\text{donde } R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (3.144)$$

Asimismo, en un proceso ergódico se verifica que

$$\text{Cov}\{x(t), x(t + \tau)\} = R_x(\tau) - [\langle x(t) \rangle]^2 \quad (3.145a)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$y \quad \rho_x = \frac{\text{Cov}\{x(t), x(t + \tau)\}}{\text{Var}\{x(t)\}} \quad (3.145b)$$

La expresión (3.144) es igual a la expresión (1.119); de aquí la razón de la notación $R_x(\tau)$ que utilizamos en los Capítulos I y II para señales determinísticas. Podemos decir entonces que las relaciones para las señales determinísticas son casos particulares de las relaciones desarrolladas para procesos aleatorios débilmente estacionarios o ergódicos.

Densidad Espectral de Potencia

En relación con la densidad espectral de potencia, se puede extender este concepto a los procesos estocásticos. Desafortunadamente, la transformada de Fourier de una señal de muestra en general no existe, y entonces hay que buscar otra forma para la representación en el dominio de la frecuencia de un proceso aleatorio. *Para la clase restringida de procesos aleatorios débilmente estacionarios, es posible definir una magnitud denominada “densidad espectral de potencia” como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación* (como una aplicación del Teorema de Wiener-Kintchine), es decir, por definición, la densidad espectral de potencia $S_X(f)$ de un proceso aleatorio $X(t)$ débilmente estacionario es

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.146)$$

Si el proceso es ergódico, entonces la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia se pueden determinar a partir de una señal de muestra $x(t)$. En efecto, para un proceso ergódico,

$$R_{XX}(\tau) = R_x(\tau) = \langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle \quad y \quad S_X(f) = S_x(f), \text{ de donde}$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \Leftrightarrow R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (3.147)$$

resultado ya obtenido en forma determinística en el Capítulo I, expresión (1.132), que corresponde al Teorema de Wiener-Kintchine.

A las estadísticas de primer orden de un proceso ergódico podemos agregar ahora las estadísticas de segundo orden $R_{XX}(\tau) = R_x(\tau)$ y $S_X(f) = S_x(f)$, las cuales tienen las siguientes características:

- (a) $E\{X^2\} = \langle x^2(t) \rangle = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$, es la potencia promedio de la señal $x(t)$, normalizada para una resistencia de 1 Ohm.
- (b) $S_X(f) = S_x(f) \geq 0$, la densidad espectral es siempre positiva (o no negativa).
- (c) $S_X(f) = S_X(-f) = S_x(f) = S_x(-f)$, la densidad espectral es una función par de f .
- (d) $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau = S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau$, el valor de la densidad espectral en el origen ($f = 0$), es igual al área de su función de autocorrelación.
- (e) En un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) de respuesta impulsional $h(t)$ y función de transferencia $H(f)$, en el caso de señales aleatorias las relaciones entrada/salida son (ver Secciones 1.11.2 y 2.8.1):

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) \Leftrightarrow R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$\langle y^2(t) \rangle = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df$$

$$\langle y(t) \rangle = H(0) \langle x(t) \rangle$$

$$S_{xy}(f) = H(f) \cdot S_x(f) \Leftrightarrow R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

Las relaciones desarrolladas en las Secciones 1.11.2 y 2.8.1, para la transmisión de señales a través de sistemas lineales se aplican también para procesos ergódicos. Estos métodos son de gran importancia en la Teoría Estadística de las Comunicaciones y en el Análisis Espectral de Procesos Estocásticos. El lector interesado en profundizar este tema puede consultar la bibliografía especializada, particularmente [Papoulis, 1965; Lathi, 1968; Davenport y Root, 1958; Parzen, 1962; Couch, 1990], etc.

3.9. PROCESOS ALEATORIOS DISCRETOS

3.9.1. Secuencias Aleatorias Discretas

Un proceso aleatorio de mucha importancia en el análisis, procesamiento y transmisión de señales digitales es el “**Proceso Aleatorio Discreto M-ario**”, en el cual las señales de muestra tienen amplitudes discretas con m valores de amplitud de probabilidad P_i , con $i = 1, 2, 3, \dots, M$. En la Fig. 3.19(a) se ilustra una señal de muestra de este proceso. Si las señales de muestra sólo toman dos valores de amplitud o estados que se suceden a intervalos T_b con probabilidades P_1 y P_2 , se dice que éste es un “**Proceso Aleatorio Binario**”. En la Fig. 3.19(b) se tiene una señal de muestra de este tipo de proceso, señal que vamos a denominar “**secuencia aleatoria binaria**”. Todas las señales PCM y los códigos de fuente y de línea que veremos en los próximos capítulos son secuencias aleatorias binarias que contienen información y por eso es muy importante conocer sus estadísticas, en especial su densidad espectral de potencia y su función de autocorrelación.

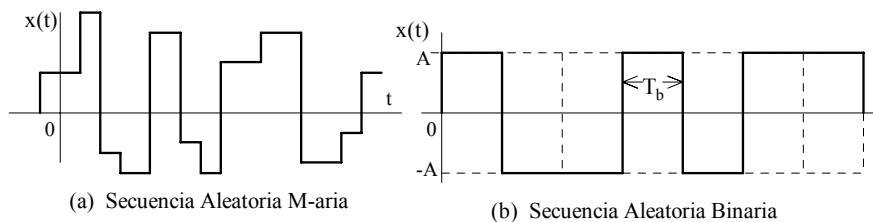


Fig. 3.19. Secuencias de Muestra de Procesos Aleatorios Discretos.

Las secuencias de impulsos transmitidos en banda de base en los sistemas de comunicación digital, se pueden modelar entonces mediante la expresión

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b) \quad (3.148)$$

donde $p(t)$ es el perfil del impulso, T_b el período de repetición de los impulsos y A_n una secuencia aleatoria de amplitudes (que representan datos o estados) que en el caso binario toma dos valores A_1 y A_2 con probabilidades P_1 y P_2 , y que es independiente de $p(t)$. Si consideramos que A_n es un proceso débilmente estacionario, entonces

$$E\{A_n\} = \eta_a \quad (3.149)$$

$$E\{A_n \cdot A_{n+k}\} = E\{A_n \cdot A_m\} \quad (3.150)$$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

donde $m = n + k$, o también $k = |m - n|$

Nótese que la expresión (3.150) es la función de autocorrelación de la secuencia de estados A_n ; entonces, [Lathi, 1968],

$$E\{A_n \cdot A_{n+k}\} = R_A(k) = \sum_{i=1}^I (a_n \cdot a_{n+k})_i \cdot P_i \quad (3.151)$$

donde a_n y a_{n+k} son las amplitudes de la secuencia de datos A_n en los intervalos nT_b y $(n+k)T_b$, respectivamente, y P_i es la probabilidad de obtener el producto $(a_n \cdot a_{n+k})_i$. El valor I es el número de productos $(a_n \cdot a_{n+k})$ posibles.

Se trata entonces de determinar la densidad espectral de $X(t)$. El valor promedio de $X(t)$ es

$$E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t - nT_b)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_b) \cdot E\{A_n\}$$

$$E\{X(t)\} = \eta_a \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_b) \quad (3.152)$$

La función de autocorrelación de $X(t)$, que para simplificar la escribiremos en la forma $R_X(t_1, t_2)$ es, de (3.140),

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t_1 - nT_b) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m p(t_2 - mT_b)\right\}$$

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{A_n \cdot A_m\} p(t_1 - nT_b) \cdot p(t_2 - mT_b)$$

pero como $E\{A_n \cdot A_m\} = E\{A_n \cdot A_{n+k}\}$, donde $m = n + k$, entonces podemos escribir

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_n \cdot A_{n+k}\} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t_1 - nT_b) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b] \quad (3.153)$$

Puede observarse que tanto $E\{X(t)\}$ como $R_X(t_1, t_2)$ dependen del origen del tiempo; por lo tanto, $X(t)$ no es estacionario y su densidad espectral de potencia no se podrá definir mediante la expresión (3.146). Hay que buscar alguna otra forma para determinar la densidad espectral de potencia de estos procesos.

Procesos Cicloestacionarios

Consideremos ahora los procesos “cicloestacionarios”. Se dice que un proceso $Y(t)$ es “**cicloestacionario**” o “**periódicamente estacionario**” si él satisface las siguientes condiciones [Franks, 1975]:

$$(a) \quad E\{Y(t_1 + T)\} = E\{Y(t_1)\} \quad (3.154)$$

$$(b) \quad R_Y(t_1 + T, t_2 + T) = R_Y(t_1, t_2) \quad (3.155)$$

para todo t_1 y t_2 .

Cuando comparamos las expresiones (3.154) y (3.155) con (3.152) y (3.153), vemos que $X(t)$ es un proceso cicloestacionario. La importancia de los procesos cicloestacionarios es que ellos

permiten la manipulación de un proceso no estacionario $X(t)$ a fin de hacerlo débilmente estacionario. En efecto, el proceso aleatorio $X(t)$ se puede modificar para que cumpla con la condición de estacionaridad débil si se permite agregarle un retardo T aleatorio, como se muestra en la Fig. 3.20.

Consideremos entonces, Fig. 3.20, la secuencia

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t - nT_b - T) \quad (3.156)$$

donde T es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, T_b)$, independiente de A_n y cuya densidad de probabilidad es

$$p_T(T) = \frac{1}{T_b} \Pi\left(\frac{T - T_b/2}{T_b}\right) \quad (3.157)$$

Entonces

$$E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t - nT_b - T)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{A_n\} \cdot E\{p(t - nT_b - T)\}$$

$$E\{X(t)\} = \eta_a \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{p(t - nT_b - T)\}$$

pero
$$E\{p(t - nT_b - T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t - nT_b - T) \cdot \frac{1}{T_b} \Pi\left(\frac{T - T_b/2}{T_b}\right) dT = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(t - nT_b - T) dT$$

Con el cambio de variables $T' = t - nT_b - T$, obtenemos

$$E\{p(t - nT_b - T)\} = \frac{-1}{T_b} \int_{t-(n+1)T_b}^{t-nT_b} p(T') dT'$$

pero podemos hacer
$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-(n+1)T_b}^{t-nT_b} p(T') dT' = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = K \quad \text{una constante}$$

Entonces,
$$E\{X(t)\} = \frac{\eta_a K}{T_b} \quad \text{constante} \quad (3.158)$$

El valor esperado de $X(t)$ es ahora constante e independiente del tiempo.

Veamos ahora la función de autocorrelación.

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t_1 - nT_b - T) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \cdot p(t_2 - mT_b - T)\right\}$$

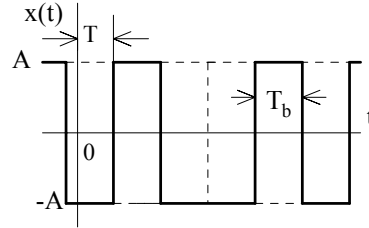


Fig. 3.20. Secuencia Aleatoria Binaria con Retardo T

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{A_n \cdot A_m\} E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p(t_2 - mT_b - T)\}$$

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\}$$

pero $E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T] dT$

Con el cambio de variables $T' = t_1 - nT_b - T$, se obtiene

$$E\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(T') \cdot p[T' + (t_2 - t_1) - kT_b] dT'$$

$$\{p(t_1 - nT_b - T) \cdot p[t_2 - (n+k)T_b - T]\} = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(T') \cdot p(T' + \tau - kT_b) dT' = \frac{1}{T_b} R_p(\tau - kT_b)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$. Finalmente, la función de autocorrelación de $X(t)$ resulta en

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \cdot R_p(\tau - kT_b) \quad (3.159)$$

donde $R_p(\tau)$ es la integral de correlación de $p(t)$. Nótese que ahora la función de autocorrelación depende solamente de la diferencia $\tau = t_2 - t_1$.

Puesto que $E\{X(t)\}$ es constante y $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$, entonces el proceso $X(t)$ es por lo menos débilmente estacionario y su densidad espectral podrá determinarse mediante la expresión (3.146).

Determinación de la Densidad Espectral

Para determinar la densidad espectral de $X(t)$ vamos a simplificar la expresión (3.159) para darle una forma cuya transformada de Fourier se pueda determinar con facilidad. Supongamos que la secuencia aleatoria de estados A_n es estadísticamente independiente con valor promedio η_a y varianza σ_a^2 . Entonces,

$$E\{A_n\} = \eta_a \quad (3.160)$$

$$\text{También, para } k = 0, \quad E\{A_n A_n\} = E\{A_n^2\} = \sigma_a^2 + \eta_a^2$$

$$\text{y para } k \neq 0, \quad E\{A_n A_{n+k}\} = E\{A_n\} \cdot E\{A_{n+k}\} = \eta_a^2$$

$$\text{y en una forma más compacta,} \quad E\{A_n A_{n+k}\} = \begin{cases} \sigma_a^2 + \eta_a^2 & \text{para } k = 0 \\ \eta_a^2 & \text{para } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.161)$$

La expresión (3.159) se puede escribir ahora en la forma

$$R_X(\tau) = \frac{1}{T_b} (\sigma_a^2 + \eta_a^2) R_p(\tau) + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p(\tau - kT_b) \quad \text{con } k \neq 0$$

$$R_X(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} R_p(\tau) + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_p(\tau - kT_b) \quad \text{para todo } k \quad (3.162)$$

$$\text{donde } R_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)p(t+\tau)dt \Leftrightarrow S_p(f) = |P(f)|^2; \quad P(f) = \mathcal{F}\{p(t)\} \quad (3.163)$$

La expresión (3.162) nos permite determinar la densidad espectral de $X(t)$. En efecto, de acuerdo con la expresión (3.146),

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \frac{\sigma_a^2}{T_b} |P(f)|^2 + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 \exp(-j2\pi kT_b f) \\ S_X(f) &= \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[\sigma_a^2 + \eta_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi kT_b f) \right] \end{aligned} \quad (3.164)$$

Pero del dual de la expresión (1.104),

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi kT_b f) &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_b}), \text{ entonces,} \\ S_X(f) &= \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[\sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_b}) \right] \end{aligned} \quad (3.165)$$

que también podemos escribir en la forma

$$S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[E\{A_n^2\} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \cos(2\pi kT_b f) \right] \quad (3.166)$$

En resumen, si se tiene un proceso aleatorio discreto de la forma

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot p(t - nT_b - T) \quad (3.167)$$

$$\text{donde } E\{A_n A_{n+k}\} = \begin{cases} \sigma_a^2 + \eta_a^2 & \text{para } k = 0 \\ \eta_a^2 & \text{para } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.168)$$

y T es un retardo aleatorio distribuido uniformemente en el intervalo $(0, T_b)$, la densidad espectral de potencia de $X(t)$ vendrá dada entonces por

$$S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[\sigma_a^2 + \frac{\eta_a^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_b}) \right] \quad (3.165)$$

$$\text{o por } S_X(f) = \frac{1}{T_b} |P(f)|^2 \left[E\{A_n^2\} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E\{A_n A_{n+k}\} \cos(2\pi kT_b f) \right] \quad (3.166)$$

Nótese que, en general, la densidad espectral de potencia de una secuencia binaria aleatoria contiene una parte continua y una parte discreta con impulsos Delta Dirac en las frecuencias n/T_b , como puede verse en la expresión (3.165). Estos impulsos, denominados *líneas espectrales*, se pueden utilizar para extraer la señalización de reloj de período T_b para la temporización en el receptor, aunque algunas veces pueden ser perjudiciales.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Nótese, asimismo, que para $k \neq 0$, $E\{A_n A_{n+k}\} = E\{A_n\} \cdot E\{A_{n+k}\}$. Si $E\{A_n\} = \eta_a = 0$, entonces, de (3.158), $E\{X(t)\} = 0$, lo que significa que la secuencia aleatoria $x(t)$ no posee una componente continua y, por lo tanto, la densidad espectral de potencia $S_x(f)$ no contiene componentes discretas. En este caso, las estadísticas de $x(t)$ son

$$S_X(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} |P(f)|^2 \Leftrightarrow R_X(\tau) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} [p(t) * p(-t)] \quad (3.169)$$

Nótese que la potencia promedio de la señal $x(t)$ es $\langle x^2(t) \rangle = R_x(0)$.

En resumen, cuando el valor promedio de la secuencia aleatoria $x(t)$ es cero (no posee una componente continua), su densidad espectral de potencia $S_x(f)$ será puramente continua y no contendrá componentes discretas (De aquí la utilización en la práctica de secuencias aleatorias bipolares). Una forma de explicar esta característica es que las componentes periódicas son una consecuencia de lo que puede llamarse el aspecto “periódico” de los trenes de impulsos. Los impulsos pueden aparecer solamente en instantes periódicos (múltiplos de T_b) y este hecho se refleja en la presencia de líneas espectrales discretas a las frecuencias que son múltiplos enteros de T_b . Por ejemplo, en la secuencia aleatoria bipolar NRZ, Fig. 3.23(a), la presencia, en promedio, de un número igual de impulsos positivos y negativos, significa que todas las componentes discretas en el espectro (tanto en $f = 0$ como en altas frecuencias) son eliminadas y la densidad espectral será puramente continua, Fig. 3.23(c).

Las expresiones (3.161), (3.165), (3.166) y (3.169), nos permiten determinar la densidad espectral de potencia y la función de autocorrelación de diferentes señales digitales binarias utilizadas en la práctica para la transmisión de impulsos en banda de base (códigos de fuente, códigos de línea, señales PCM, etc.). Nótese que no es necesario que el proceso $X(t)$ sea ergódico, es suficiente que sea débilmente estacionario.

3.9.2. Densidad Espectral y Función de Autocorrelación de Secuencias PCM

En el Capítulo V se define un conjunto de señales aleatorias binarias, denominadas “**códigos de línea**”, cuyas densidades espectrales de potencia podemos ahora calcular. En efecto, sea la secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud A mostrada en la Fig. 3.21(a) y que contiene información.

Para una secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud A , se cumple que $A_1 = A$ y $A_2 = 0$ con probabilidades $1/2$; entonces, de (3.151),

$$\text{Para } k = 0, \quad E\{A_n^2\} = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} = \frac{A^2}{2} = \sigma_a^2 + \eta_a^2$$

$$\text{Para } k \neq 0, \quad E\{A_n A_{n+k}\} = \frac{A_1^2}{4} + \frac{A_1 A_2}{4} + \frac{A_2 A_1}{4} + \frac{A_2^2}{4} = \frac{A^2}{4} = \eta_a^2$$

$$\text{de donde} \quad \sigma_a^2 + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2} \quad \therefore \quad \sigma_a^2 = \frac{A^2}{4}$$

Como los impulsos son rectangulares de duración T_b , entonces

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right) \Leftrightarrow P(f) = T_b \text{sinc}(T_b f) \quad \text{y} \quad |P(f)|^2 = T_b^2 \text{sinc}^2(T_b f)$$

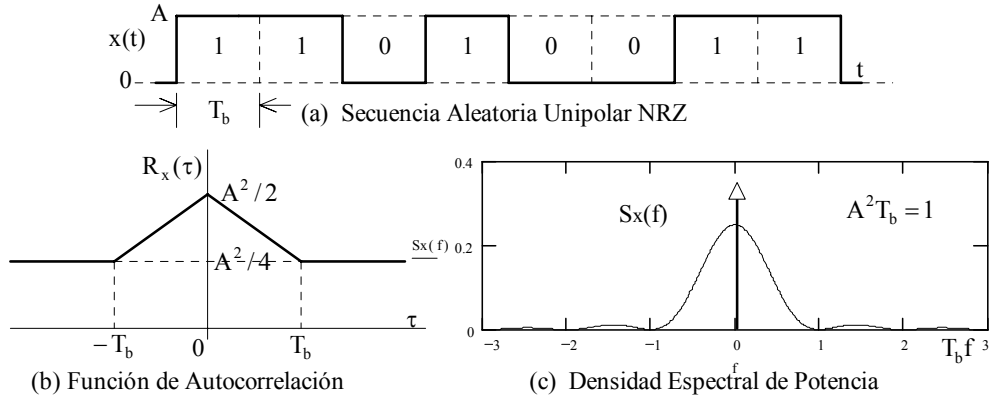


Fig. 3.21.

Reemplazando lo anterior en (3.165),

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{T_b}\right) \right]$$

pero como $\text{sinc}^2(T_b f)$ tiene sus ceros en los puntos n/T_b con $n \neq 0$, habrá solamente una componente discreta a la frecuencia cero, de donde

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(T_b f) + \frac{A^2}{4} \delta(f) = \frac{A^2}{4} \left[T_b \text{sinc}^2(T_b f) + \delta(f) \right] \quad (3.170)$$

cuya transformada inversa, su función de autocorrelación, es

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} \left[1 + \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \right] \quad (3.171)$$

En la Fig. 3.21(b) se muestra la función de autocorrelación y en la Fig. 3.21(c) la densidad espectral de potencia de la secuencia aleatoria unipolar NRZ. Nótese la ausencia de líneas espectrales, exceptuando el impulso en el origen.

La potencia de la señal será $\langle x^2(t) \rangle = R_X(0) = A^2/2$.

En transmisión de impulsos mediante portadora modulada (Capítulo V) se transmite una señal digital que tiene la forma $x_{ASK}(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t)$, donde $x(t)$ es una secuencia aleatoria unipolar NRZ de amplitud A . Mediante aplicación del teorema de la modulación para señales de potencia, la correspondiente densidad espectral de potencia de la señal $x_{ASK}(t)$ es (ver Fig. 5.62),

$$S_{ASK}(f) = \frac{A^2}{16} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A^2 T_b}{16} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{1/T_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{1/T_b}\right) \right] \quad (3.172)$$

Nótese que por efecto de la modulación la potencia de la señal modulada se reduce a la mitad (Ejemplo 1.29), es decir, $\langle x_{ASK}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle x^2(t) \rangle = \frac{A^2}{4}$.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Aplicando este procedimiento a diferentes secuencias aleatorias que representan algunos códigos de línea (definidos en el Capítulo V), podemos demostrar (Ver Problema de Aplicación 3.30). (Nota: en todas las señales RZ se supone una relación de trabajo igual a $1/2$).

- (a) Para una secuencia aleatoria unipolar RZ de amplitud A, Fig. 3.22(a):

La densidad espectral de potencia de esta secuencia es

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right]$$

Los impulsos de $\delta(f - n/T_b)$ están presentes en las frecuencias (n/T_b) , pero como $\text{sinc}^2(T_b f/2)$ tiene sus ceros en las frecuencias $(2n/T_b)$, entonces $S_X(f)$ contendrá impulsos (líneas espectrales) solamente en las frecuencias para n impar y $n = 0$. Nótese que el impulso en $(f = 1/T_b)$ se puede utilizar para extraer la información de señalización o temporización (reloj). Hechas estas consideraciones, la densidad espectral $S_X(f)$ queda entonces en la forma

$$S_X(f) = \frac{A^2}{16} \left[T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) + \delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \frac{4}{n^2 \pi^2} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right] \text{ para } n \text{ impar} \quad (3.173)$$

Esta densidad espectral, mostrada en la Fig. 3.22(c), contiene un impulso en el origen e impulsos a las frecuencias n/T_b para n impar. La notación $\sum_{n=-\infty}^{\infty} '$ indica que la sumatoria no incluye el valor $n = 0$.

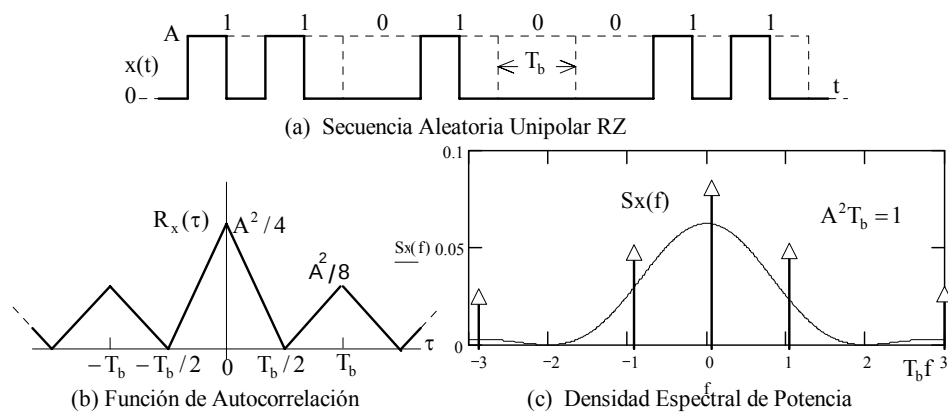


Fig. 3.22

La correspondiente función de autocorrelación es, Fig. 3.22(b),

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{8} \left[2\Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \Lambda\left(\frac{\tau - nT_b}{T_b/2}\right) \right] \text{ para } n \neq 0 \quad (3.174)$$

La potencia de la señal es $\langle x^2(t) \rangle = R_X(0) = \frac{A^2}{4}$.

- (b) Para una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.23(a).

La densidad espectral de potencia y la función de autocorrelación correspondientes, vienen dadas por

$$S_X(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(T_b f); \quad R_X(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \quad (3.175)$$

En la Fig. 3.23(b) se muestra la función de autocorrelación y en la Fig. 3.23(c) la densidad espectral de una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes $\pm A$. La potencia promedio de la señal es $\langle x^2(t) \rangle = R_X(0) = A^2$.

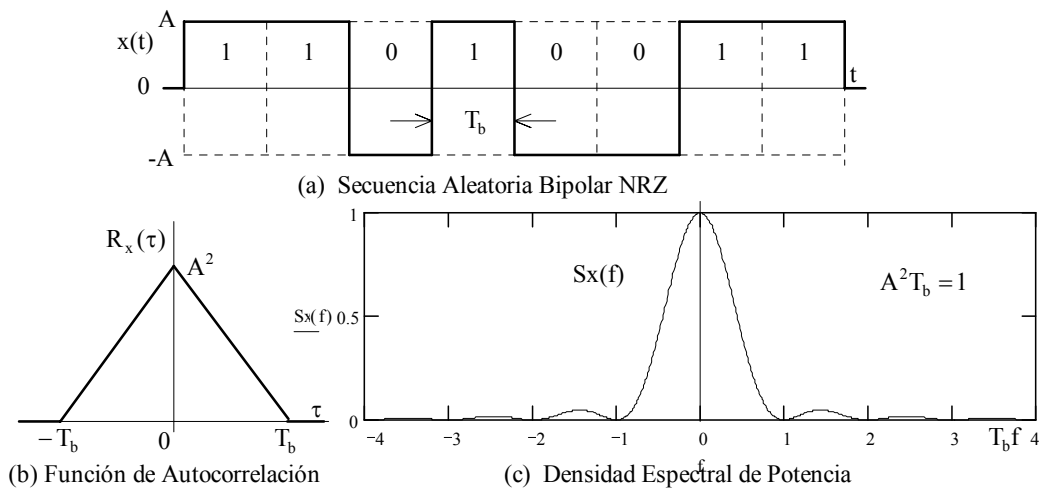


Fig. 3.23

La modulación binaria PSK, que veremos en el Capítulo V, se puede considerar como el producto de una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitud A , $x(t)$, por una señal sinusoidal de frecuencia f_c , es decir,

$$x_{PSK}(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Aplicando el teorema de la modulación para señales de potencia, la densidad espectral de potencia de una señal PSK es

$$S_{PSK}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_b}\right) \right] \quad (3.176)$$

expresión que tiene la misma forma que (3.172), con la diferencia de que $S_{PSK}(f)$ no contiene impulsos en las frecuencias $f = \pm f_c$. La correspondiente potencia promedio de la señal PSK es $\langle x_{PSK}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A^2$.

Nótese que la densidad espectral de una señal DPSK, que veremos en el Capítulo V, es igual a la densidad espectral de una señal PSK, pues desde el punto de vista espectral no hay diferencia entre una señal PSK y una DPSK.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

(c) Para una secuencia aleatoria bipolar AMI RZ de amplitud $\pm A$, Fig. 3.24(a).

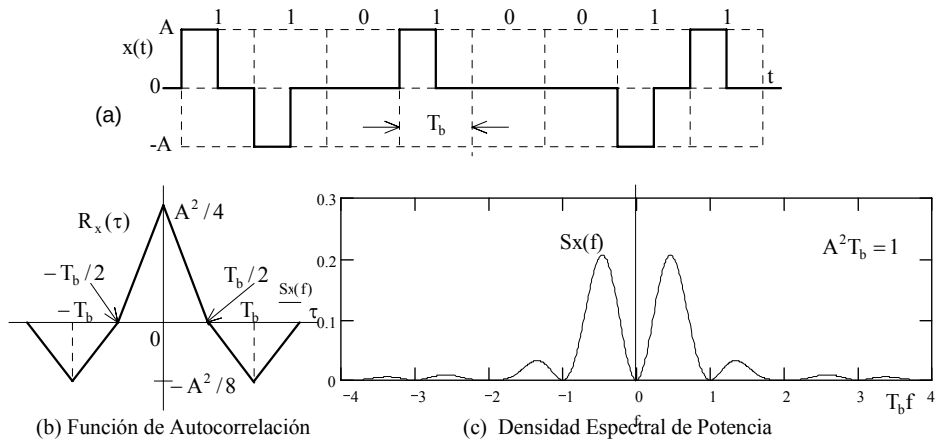


Fig. 3.24

La densidad espectral de esta secuencia es

$$S_X(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \sin^2(\pi T_b f) \quad (3.177)$$

que se muestra en la Fig. 3.24(c); la correspondiente función de autocorrelación, Fig. 3.24(b), es

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{4} \left\{ \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) - \frac{1}{2} \left[\Lambda\left(\frac{\tau+T_b}{T_b/2}\right) + \Lambda\left(\frac{\tau-T_b}{T_b/2}\right) \right] \right\} \quad (3.178)$$

La potencia promedio de la señal es $\langle x^2(t) \rangle = R_x(0) = \frac{A^2}{4}$.

(d) Para una secuencia aleatoria bipolar MANCHESTER de amplitud $\pm A$, Fig. 3.25(a).

La densidad espectral de la secuencia aleatoria MANCHESTER, Fig. 3.25(c), es

$$S_X(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \sin^2\left(\pi \frac{T_b}{2} f\right) \quad (3.179)$$

y la correspondiente función de autocorrelación, Fig. 3.25(b),

$$R_X(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b/2}\right) - \frac{A^2}{2} \left[\Lambda\left(\frac{\tau+T_b/2}{T_b/2}\right) + \Lambda\left(\frac{\tau-T_b/2}{T_b/2}\right) \right] \quad (3.180)$$

La potencia promedio de la señal es $\langle x^2(t) \rangle = R_x(0) = A^2$.

En la Fig. 3.25(c) se muestra la densidad espectral de potencia de la secuencia bipolar MANCHESTER de amplitud $\pm A$.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

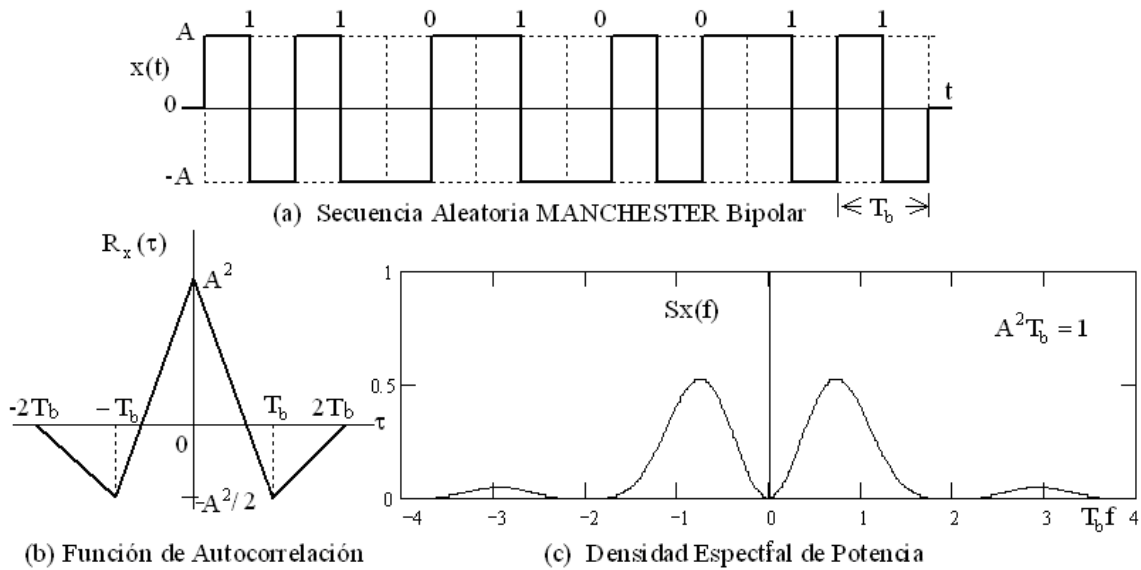


Fig. 3.25

(e) Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia del Ruido Térmico

La secuencia aleatoria mostrada en la Fig. 3.19(a) tiene la forma típica del ruido térmico en conductores. La señal cambia abruptamente en amplitud en instantes aleatorios. El número promedio de transiciones por segundo de la amplitud es α , y el número de transiciones sigue la distribución de Poisson. La amplitud después de una transición es independiente de la amplitud de la transición anterior. Se demuestra [Lathi, 1968] que para el ruido térmico

$$R_X(\tau) = kTR\alpha \cdot \exp(-\alpha|\tau|) \Leftrightarrow S_X(f) = \frac{2kTR\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (3.181)$$

cuyas formas se muestran en la Fig. 3.26.

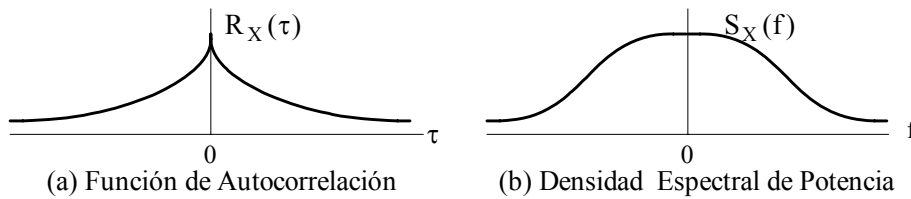
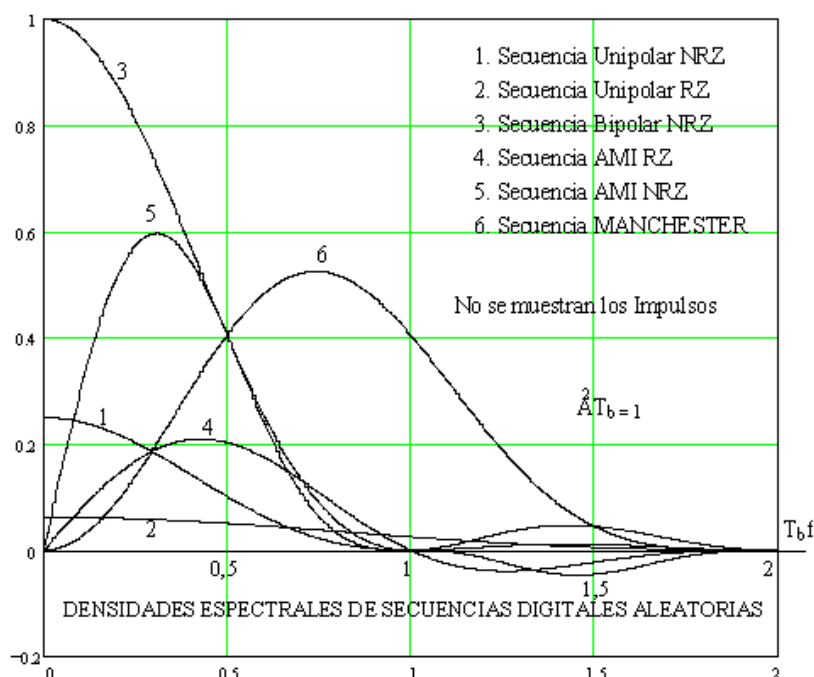


Fig. 3.26. Características del Ruido Térmico.

k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta, en kelvins, en el conductor de resistencia R . Como α es del orden de 10^{14} , la densidad es casi plana para frecuencias hasta el orden de 10^{13} Hz. En consecuencia, para efectos prácticos el ruido térmico se puede considerar como ruido blanco con una densidad espectral $S_X(f) = 2kTR$, que es el mismo resultado (2.138) de Johnson y Nyquist.

En la Fig. 3.26(a) se muestran en una sola gráfica (del Problema de Aplicación 3.30) las densidades espectrales anteriores a efectos de comparación (frecuencias positivas solamente). No se muestran los impulsos.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS



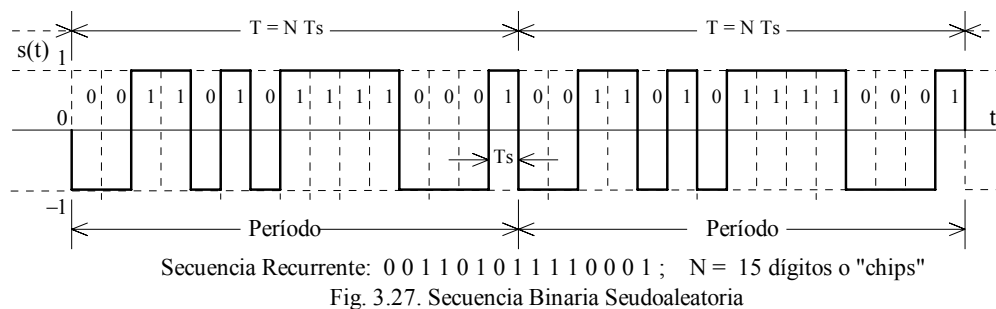
3.26(a). Densidades espectrales de algunos códigos de línea

Estas secuencias se aplican en el Capítulo V en la transmisión de señales digitales.

3.9.3. Secuencias Binarias Seudoaleatorias

Características Espectro-Temporales

En la sección anterior consideramos secuencias binarias aleatorias de duración infinita las cuales, en su mayoría, son generadas a partir de un proceso físico, por ejemplo, una fuente de información. Pero hay una clase de secuencias aleatorias binarias que son periódicas, esto es, son secuencias infinitas formadas por una subsecuencia aleatoria binaria de duración T que se repite periódicamente. Debido a su característica periódica pero a la vez aleatoria, a estas secuencias se las denomina “**secuencias seudoaleatorias**”, “**secuencias PN (del inglés Pseudo-Noise)**” o “**secuencias m**”. El término “seudo-aleatorio” significa que la señal es aleatoria en apariencia pero reproducible por medios determinísticos. Una secuencia binaria (dos períodos) de este tipo se muestra en la Fig. 3.27. Debido a su naturaleza determinística, este tipo de secuencia no contiene ninguna clase de información, pero puede ser modulada para transportar algún tipo de información.



III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Cada período de la secuencia pseudoaleatoria está formado por N dígitos o “chips” de duración T_s y para efecto de análisis consideraremos secuencias NRZ. Las secuencias pseudoaleatorias no se producen espontáneamente sino que son generadas por métodos artificiales; este hecho es de gran importancia pues permite la reproducción de señales pseudoaleatorias idénticas, lo cual es imposible de lograr con secuencias aleatorias de cualquier otro tipo.

Las secuencias pseudoaleatorias son muy utilizadas en el campo de la ingeniería eléctrica, sobre todo en el dominio de las telecomunicaciones, y sería de interés conocer sus características temporales y frecuenciales, en particular su función de autocorrelación y su densidad espectral de potencia.

Se demuestra [Couch, 1990] que la función de autocorrelación de una secuencia pseudoaleatoria $s(t)$ es

$$R_s(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \Lambda\left(\frac{\tau - nNT_s}{T_s}\right) - \frac{1}{N} \quad (3.182)$$

la cual tiene la forma mostrada en la Fig. 3.28.

La correspondiente densidad espectral de potencia se puede determinar mediante el teorema de Wiener-Khintchine.

Como $R_s(\tau)$ es una función periódica, su transformada de Fourier $S_s(f)$ se puede determinar mediante el método visto en la Sección 1.8, Capítulo I, expresiones (1.102) y (1.103). En efecto, de la Fig. 3.28, la función generatriz $R_{sg}(\tau)$ de $R_s(\tau)$ es

$$R_{sg}(\tau) = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \Lambda\left(\frac{\tau}{T_s}\right) - \frac{1}{N} \Pi\left(\frac{\tau}{NT_s}\right), \text{ siendo la frecuencia fundamental } f_0 = \frac{1}{NT_s}.$$

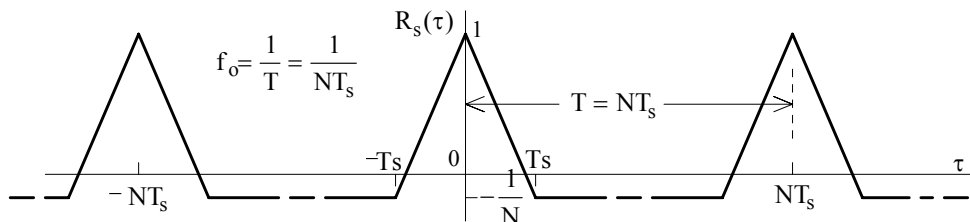


Fig. 3.28. Función de Autocorrelación de una Secuencia Binaria Pseudoaleatoria.

La transformada de Fourier de $R_{sg}(\tau)$ es

$$S_{sg}(f) = \left(1 + \frac{1}{N}\right) T_s \text{sinc}^2(T_s f) - T_s \text{sinc}(NT_s f)$$

De (1.103), el correspondiente coeficiente de Fourier será

$$S_{sn} = \frac{1}{NT_s} \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right) T_s \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) - T_s \text{sinc}(n) \right] = \frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) - \frac{1}{N} \text{sinc}(n)$$

De (1.102), la densidad espectral de potencia resulta en

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$S_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) - \frac{1}{N} \text{sinc}(n) \right] \delta(f - nf_0)$$

pero $\text{sinc}(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ 0 & \text{para } n \neq 0 \end{cases}$

Entonces, para $n = 0$,

$$S_s(f)|_{n=0} = \left[\frac{N+1}{N^2} - \frac{1}{N} \right] \delta(f) = \frac{1}{N^2} \delta(f)$$

La densidad espectral de potencia de una secuencia binaria pseudoaleatoria $s(t)$ será entonces

$$S_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{N+1}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \delta(f - nf_0) + \frac{1}{N^2} \delta(f) \right] \quad (3.183)$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ indica que la sumatoria no incluye el valor $n = 0$; N es el número de dígitos binarios o “chips” dentro de un período, y $f_0 = 1/NT_s$ la frecuencia de recurrencia.

La densidad espectral de potencia de una secuencia pseudoaleatoria, expresión (3.183), es un espectro discreto o de líneas cuya envolvente tiene la forma mostrada en la Fig. 3.29 (frecuencias positivas solamente).

Si el número de “chips” N es muy grande, las líneas espectrales se juntan cada vez más y para efectos prácticos la densidad espectral puede considerarse como un espectro continuo muy parecido al de una señal aleatoria binaria bipolar NRZ, como la mostrada en la Fig. 3.23.

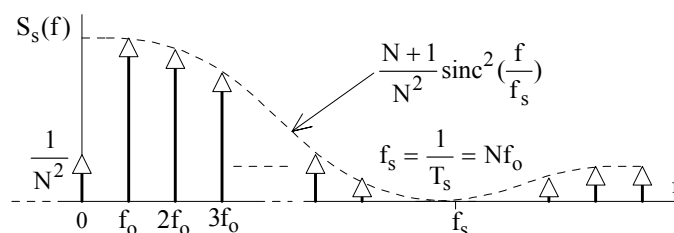


Fig. 3.29. Densidad Espectral de Potencia de una Secuencia Pseudoaleatoria.

Dispersión o Ensanchamiento del Espectro (Spread Spectrum)

La “**dispersión del espectro (Spread Spectrum, SS)**” es una técnica de modulación digital en la cual una secuencia aleatoria binaria portadora de información modula a una secuencia pseudoaleatoria; como consecuencia, el espectro resultante se ensancha o dispersa y su ancho de banda es mucho mayor que el ancho de banda de la señal moduladora. El principio de dispersión del espectro es muy utilizado en sistemas de comunicación para evitar interferencias (espontáneas o maliciosas (jamming)), para robustecer los sistemas contra escuchas indebidas y para la transmisión de múltiples señales por un mismo canal. En el Capítulo V se estudian algunos de los sistemas utilizados en la práctica.

Consideremos entonces una secuencia aleatoria bipolar NRZ $m(t)$ de la forma dada en la Fig. 3.23(a); multipliquemos esta señal por la secuencia pseudoaleatoria $s(t)$ de la Fig. 3.27, donde debe cumplirse que

$$\frac{1}{f_b} = T_b = NT_s \quad \text{y} \quad f_o = f_b \quad (3.184)$$

como se muestra en la Fig. 3.30; $m(t)$ y $s(t)$ son independientes. Nótese que $s^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$.

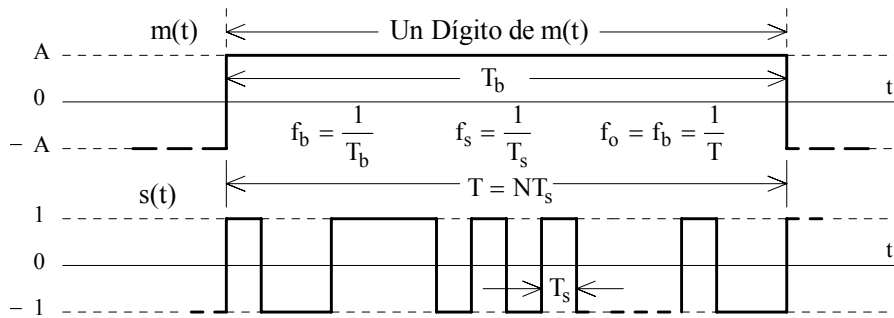


Fig. 3.30. Mensaje $m(t)$ y Señal Dispersora $s(t)$.

Puesto que $m(t)$ y $s(t)$ son independientes, entonces se verifica que si $s_p(t) = m(t) \cdot s(t)$, de donde $m(t) \Rightarrow S_m(f) \Leftrightarrow R_m(\tau)$ y $s(t) \Rightarrow S_s(f) \Leftrightarrow R_s(\tau)$, entonces $R_{sp}(\tau) = R_m(\tau) \cdot R_s(\tau)$

Del Teorema de Wiener-Kintchine, $R_{sp}(\tau) \Leftrightarrow S_{sp}(f)$, y por el teorema de convolución $S_{sp}(f) = S_m(f) * S_s(f)$, donde, normalizando (3.175) haciendo $A^2 T_b = 1$,

$$S_m(f) = \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right) \quad \text{y} \quad s_p(t) \Rightarrow S_{sp}(f)$$

$$\text{Entonces,} \quad S_{sp}(f) = S_s(f) * S_m(f)$$

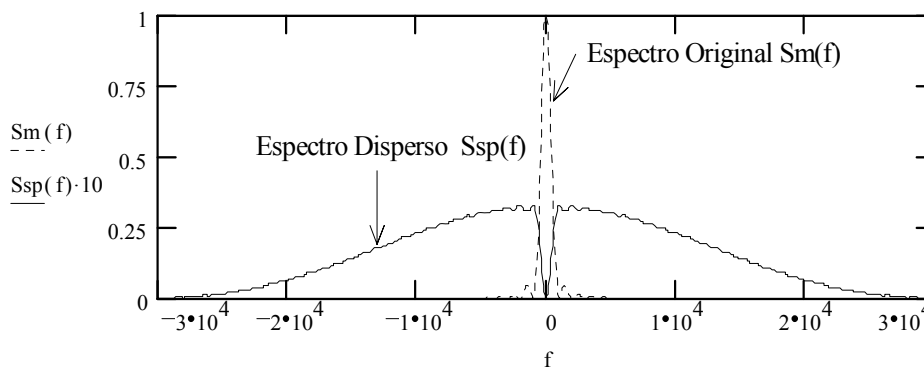
$$S_{sp}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(N+1)}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) [S_m(f) * \delta(f - nf_o)] + \frac{1}{N^2} [S_m(f) * \delta(f)] \right]$$

$$S_{sp}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(N+1)}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \cdot S_m(f - n f_o) + \frac{1}{N^2} S_m(f) \right] \quad (3.185)$$

En la Fig. 3.31 se muestra este espectro disperso que determinamos, para no hacer muy largo el tiempo de cálculo, con $N = 31$; $f_b = f_o = 1$ kHz y $f_s = 31$ kHz.

Puede notarse que el efecto de la multiplicación es el de producir un espectro que se ensancha aproximadamente N veces el valor del espectro original, el cual se muestra con líneas punteadas para efectos de comparación (las curvas no están a escala: la amplitud de $S_{sp}(f)$ se ha multiplicado por 10 para poderla observar cómodamente en la Fig. 3.31).

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Fig.3.31. Espectro Disperso $S_{sp}(f)$ y Espectro de Señal $S_m(f)$

El espectro mostrado en la Fig. 3.31 se ha calculado para $N = 31$, pero en la práctica el valor de N va desde una centena hasta varios millares. Para $|f| \geq f_s$, el espectro disperso es despreciable, y se puede establecer que el ancho de banda B del espectro disperso es $B \approx Nf_b$, donde f_b es la frecuencia de señalización de la secuencia binaria aleatoria $m(t)$. Al factor $N \approx B/f_b$ se le suele llamar “**ganancia de procesamiento**” y es similar al factor de expansión del ancho de banda β_m de los métodos de modulación clásicos que veremos en los siguientes capítulos.

El espectro de la señal original $m(t)$ está completamente enmascarado en el espectro ensanchado $S_{sp}(f)$ y su detección es prácticamente imposible porque dentro de la banda de paso de $m(t)$ y para altos valores de N la potencia de $s_p(t)$ es tan pequeña que se acerca a los niveles de potencia del ruido. Para cualquier observador, el contenido de potencia del espectro ensanchado en la gama $|f| \leq f_b$ sería ruido simplemente. Para tener una idea de las magnitudes en juego, vamos a calcular la relación entre la potencia de la señal útil $m(t)$ respecto a la potencia del espectro ensanchado $S_{sp}(f)$ en la gama de frecuencias $|f| \leq f_b$. Con los valores utilizados en el cálculo del espectro ensanchado de la Fig. 3.31, esta relación es de 14,273 dB, es decir, la potencia del espectro ensanchado está a 14,273 dB (26,75 veces) por debajo de la potencia de $m(t)$. Esta diferencia se hace más alta para altos valores de N . En general, cuando $N \gg 1$, la relación Potencia del Espectro de Señal /Potencia del Espectro Ensanchado varía proporcionalmente a N , donde N es la ganancia de procesamiento.

En el Capítulo V se aplican estos conceptos a los sistemas de transmisión de señales binarias por dispersión o ensanchamiento del espectro (Spread Spectrum).

Generación de Secuencias Binarias Seudoaleatorias

Debido a su naturaleza periódica y determinística, las secuencias seudoaleatorias se pueden generar en forma artificial. Esto es de capital importancia en el campo de las telecomunicaciones pues permite la generación de réplicas exactas y sincronizadas tanto en el transmisor como en el receptor.

Sin profundizar en la teoría matemática de las secuencias, se puede decir que las secuencias seudoaleatorias son una subclase importante de las secuencias binarias recurrentes, las cuales se pueden generar mediante dispositivos lineales retroalimentados muy fáciles de realizar con registros de desplazamiento digitales corrientes.

Las secuencias pseudoaleatorias o secuencias PN de interés en telecomunicaciones deben cumplir con las siguientes condiciones:

- (1) Que sean fáciles de generar
- (2) Que posean las propiedades aleatorias necesarias
- (3) Que su período sea grande
- (4) Que sean difíciles de reconstruir a partir de un corto segmento de la secuencia

Estas condiciones son cumplidas en general por registros retroalimentados de la forma mostrada en la Fig. 3.32.

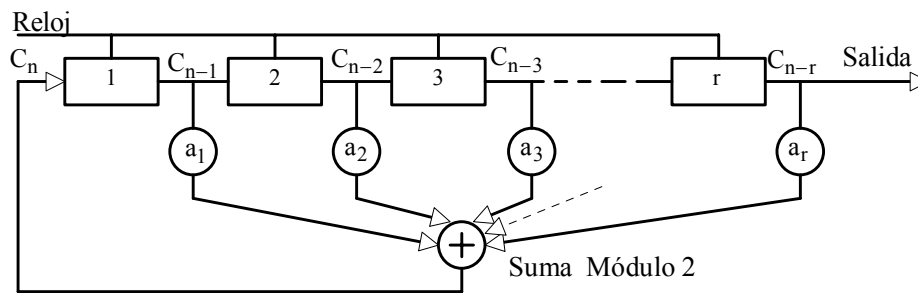


Fig. 3.32. Generador de Secuencias Pseudoaleatorias de r Etapas

El contenido del registro de r etapas se combina linealmente con los coeficientes a_k y se retroalimenta a la primera etapa. La secuencia en C_n satisface la ecuación de recurrencia

$$C_n = \sum_{k=1}^r a_k \cdot C_{n-k} \quad \text{Módulo 2}; \quad a_r = 1 \quad (3.186)$$

El ciclo periódico de los estados depende del estado inicial del registro y de los coeficientes a_k , denominados “tomas” o “taps”; en los registros prácticos se hace $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$. La secuencia de salida es una secuencia recurrente cuya longitud máxima está relacionada con el número de etapas r del registro mediante la ecuación $N = 2^r - 1$. Esta expresión determina la máxima longitud posible de la secuencia, aunque no todas las combinaciones de “tomas” producen la máxima longitud. Las combinaciones de “tomas” que producen la máxima longitud han sido estudiadas extensamente en la literatura y se presentan siempre en forma tabulada [Sarwate y Pursley, 1980].

En la Fig. 3.33 se muestra un generador PN de longitud máxima de cuatro etapas; si su estado inicial es 0 0 0 1, la secuencia recurrente a la salida Q_4 será (la flecha indica el sentido del flujo de dígitos):

$$0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \quad (3.187)$$

Normalmente el registro se inicializa con el estado inicial 0 0 0 1, mostrado en la Fig. 3.33, y a cada impulso de reloj a la salida van apareciendo los “chips” que forman la secuencia, para un total de $N = 2^r - 1$ “chips”. En general, el estado 0 0 0 ... 0 no se utiliza como estado inicial porque produciría una salida de puros CEROS; de hecho, el estado 0 0 0 0...0 es una combinación prohibida.

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

Nótese que las “tomas” del registro de longitud máxima pasan una y solamente una vez por todas las combinaciones posibles de sus r dígitos (exceptuando la combinación de puros CEROS) y como conocemos todas estas combinaciones, es fácil determinar el número de CEROS y UNOS de la secuencia recurrente.

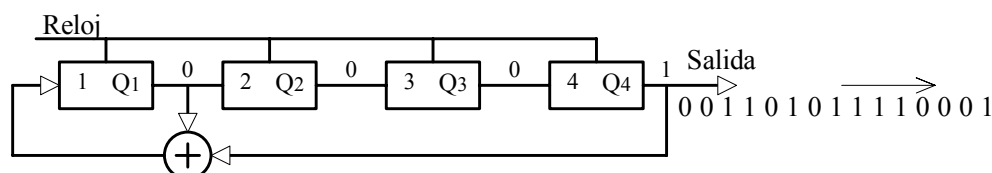


Fig. 3.33. Generador PN de Longitud Máxima de 4 Etapas.

Sea entonces r el número de etapas del registro, N el número de dígitos o “chips” de la secuencia recurrente y $N_{(0)}$ y $N_{(1)}$ los números de CEROS y UNOS, respectivamente, contenidos en la secuencia recurrente. Entonces,

$$\text{Número de “chips” de la secuencia} = N = 2^r - 1 \quad (3.188)$$

$$\text{Número de UNOS en la secuencia} = N_{(1)} = \frac{2^r}{2} = 2^{r-1} \quad (3.189)$$

$$\text{Número de CEROS en la secuencia} = N_{(0)} = N_{(1)} - 1 = 2^{r-1} - 1 \quad (3.190)$$

El número de CEROS es uno menos que el número de UNOS.

Por ejemplo, para el generador PN de la Fig. 3.33, se tiene: $r = 4$; $N = 2^4 - 1 = 15$ “chips”; $N_{(1)} = 2^3 = 8$ UNOS; $N_{(0)} = 8 - 1 = 7$ CEROS. El lector puede verificar que estos valores se cumplen en la secuencia recurrente (3.187).

La convención establecida para representar los registros de longitud máxima tiene la forma **Registro** $\langle r; k_i \rangle$, donde el término r indica el número de etapas del registro y k_i las “tomas” que hay que combinar en suma módulo 2 para formar, junto con la “toma” r , la entrada a la primera etapa. Por ejemplo, el Registro $\langle 7; 1 \rangle$ caracteriza un generador de longitud máxima de 7 etapas en el cual se suman las “tomas” 1 y 7 en módulo 2 y se aplican a la primera etapa. De acuerdo con esta convención, el generador mostrado en la Fig. 3.33 es entonces un Registro $\langle 4; 1 \rangle$, cuya secuencia de salida tiene la forma de la Fig. 3.27. Otros registros de aplicación práctica son el Registro $\langle 13; 4, 3, 1 \rangle$ y el Registro $\langle 19; 5, 2, 1 \rangle$, que junto con el Registro $\langle 7; 1 \rangle$, son utilizados en el Servicio de Radioaficionados. Para más información sobre las secuencias aleatorias y sus aplicaciones en los sistemas de espectro disperso, el lector puede consultar el ARRL SPREAD SPECTRUM SOURCEBOOK, edición de 1991.

3.10 RESUMEN

En este capítulo se han desarrollado algunos modelos para las señales mensaje de carácter aleatorio presentes en los sistemas de comunicación. Las señales aleatorias no pueden ser descritas mediante expresiones explícitas del tiempo; sin embargo, cuando se examinan durante un largo período, ellas exhiben ciertas regularidades que se pueden describir en términos probabilísticos o como promedios estadísticos. Estos modelos, en la forma de una descripción probabilística de un conjunto de señales del tiempo, se denominan “proceso aleatorio o estocástico”. El proceso

aleatorio se puede utilizar para estimar, por ejemplo, la probabilidad de que la amplitud de una señal aleatoria esté dentro de cierto rango en un determinado instante. En particular, el proceso aleatorio se puede emplear para desarrollar descripciones de señales aleatorias en el dominio de la frecuencia. La descripción y análisis de señales aleatorias utilizando estos conceptos son de gran utilidad en el análisis y diseño de sistemas de comunicación y en el análisis espectral de procesos.

La teoría de la probabilidad trata la noción de probabilidad de sucesos aleatorios y el concepto de variable aleatoria. El concepto de variable aleatoria se ha desarrollado a partir de ideas sencillas e intuitivas y se ha clasificado como variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas. Basado en estas ideas se define la noción de proceso aleatorio.

El proceso aleatorio se ha definido en términos de sus estadísticas que son simplemente relaciones de probabilidad o promedios estadísticos. Los promedios estadísticos de más utilización son el valor promedio y la función de autocorrelación. Si el valor promedio y la función de autocorrelación de un proceso son invariantes en el tiempo, entonces se dice que el proceso es estacionario en el sentido amplio, en cuyo caso se puede definir la existencia de una densidad espectral de potencia que muestra la distribución de la potencia en el dominio de la frecuencia. Una subclase especial de los procesos estacionarios es el llamado proceso ergódico, el cual tiene la propiedad de que los promedios conjunto son iguales a los promedios tiempo, y todas las estadísticas del proceso se pueden determinar a partir de una simple señal de muestra.

De gran importancia en el análisis de sistemas digitales son los procesos aleatorios discretos, y en particular las secuencias aleatorias binarias. Todas las señales PCM y los diferentes códigos de transmisión digital son secuencias aleatorias binarias, y es muy importante conocer sus estadísticas, en especial su función de autocorrelación y su densidad espectral de potencia. Estas secuencias se tratan con cierto detalle, habiéndose determinado la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de algunas de las secuencias aleatorias binarias más utilizadas en los sistemas de transmisión digital.

En los modernos sistemas de comunicación se está aplicando el concepto de dispersión del espectro. En la dispersión del espectro juegan un papel muy importante las denominadas secuencias pseudoaleatorias, que son secuencias infinitas formadas por una subsecuencia aleatoria de duración T que se repite periódicamente. Para este tipo de señal se determina la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia. La dispersión del espectro se produce cuando una secuencia binaria portadora de información modula una secuencia pseudoaleatoria; como consecuencia, el espectro de la señal resultante se esparce o dispersa y su ancho de banda es mucho mayor que el ancho de banda de la señal mensaje. En el Capítulo V se aplican estas nociones en algunos sistemas de transmisión digital. Para complementar el tema, se presenta una breve exposición sobre la generación y aplicación de las secuencias binarias pseudoaleatorias.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

- 3.1. Sea una secuencia binaria de 1428 UNOS y 2668 CEROS. Demuestre que la probabilidad de recibir un UNO en un intervalo cualquiera es de 0,3486.
- 3.2. El experimento es el lanzamiento de dos dados.
 - (a) Demuestre que la probabilidad de obtener 8 puntos es de $5/36$.
 - (b) Demuestre que la probabilidad de obtener 7 puntos es de $1/6$.
 - (c) Demuestre que la probabilidad de obtener 5 puntos ó 7 puntos ó 8 puntos es de $15/36$.
- 3.3. Demuestre que $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(A \cap B \cap C)$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

- 3.4. Una compañía construye receptores de radio de 6, 8 y 10 transistores. Estos receptores vienen en gabinetes de color marfil, negro y verde. En el depósito de la compañía hay 10.000 receptores distribuidos en la forma siguiente.

No. de Transistores	Color Marfil	Color Negro	Color Verde	TOTALES
6	1000	3000	2000	6000
8	600	1000	1000	2600
10	400	1000	0	1400
TOTALES	2000	5000	3000	10000

Una persona entra en el depósito y toma un receptor. Demuestre las siguientes probabilidades:

$$P\{\text{tomar un receptor verde}\} = 0,3$$

$$P\{\text{tomar un radio de 10 transistores}\} = 0,14$$

$$P\{\text{tomar un radio verde de 10 transistores}\} = 0$$

$$P\{\text{tomar un radio negro de 6 transistores}\} = 0,3$$

- 3.5. El experimento es el lanzamiento de cinco monedas. Demuestre las siguientes probabilidades:

$$P\{\text{aparecen tres caras}\} = 5/16$$

$$P\{\text{aparece una sola cara}\} = 5/32$$

$$P\{\text{aparecen cinco caras}\} = 1/32$$

- 3.6. Una caja contiene 10 bolas blancas, 4 negras y 3 rojas. De esta caja se sacan 4 bolas. Demuestre que la probabilidad de que estas bolas sean todas blancas es de $3/34$.

- 3.7. Una caja contiene 2 bolas blancas, 1 negra y 4 rojas. De esta caja se sacan 3 bolas. Demuestre que la probabilidad de sacar 1 bola blanca y 2 rojas es de $12/35$.

- 3.8. Una caja C1 contiene 2000 transistores, de los cuales el 5% está defectuoso. Una segunda caja C2 contiene 500 transistores, de los cuales el 40% está defectuoso. Se tiene también otras dos cajas C3 y C4 con 1000 transistores cada una y con un 10% defectuoso. Se selecciona al azar una de las 4 cajas y se saca un transistor. Demuestre que la probabilidad de que este transistor esté defectuoso es de $0,1625$.

- 3.9. En el Problema anterior se examina el transistor y vemos que está defectuoso. Demuestre que la probabilidad de que fue sacado de la caja C2 es de $0,615$.

- 3.10. Verifique si las siguientes funciones satisfacen las condiciones para ser una función de densidad de probabilidad.

$$(a) \ p_X(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1+x^2} \right); \quad (b) \ p_X(x) = |x| \Pi\left(\frac{x}{2}\right); \quad (c) \ p_X(x) = \frac{1}{6} (8-x) \Pi\left(\frac{x-8}{8}\right)$$

- 3.11. Sea la función de densidad de probabilidad $p_X(x) = \frac{1}{A} \Lambda\left(\frac{x}{A}\right)$.

$$(a) \text{ Demuestre que la probabilidad } P\left(-\frac{A}{4} < X \leq \frac{A}{4}\right) = 0,4375.$$

$$(b) \text{ Determine y dibuje la correspondiente función de distribución } F_X(x).$$

3.12. Sea la función de densidad de probabilidad $p_X(x) = K \exp(-\alpha x)u(x)$, donde K y α son dos constantes positivas.

(a) Demuestre que $K = \alpha$.

(b) Demuestre que la correspondiente función de distribución es $F_X(x) = [1 - \exp(-\alpha x)]u(x)$.

3.13. Sea una VA X cuya distribución es gaussiana de valor promedio $E\{X\} = 5$ y $\sigma = 0,6$.

(a) Demuestre que $P(X \leq 1) = 1,3084 \times 10^{-11}$

(b) Demuestre que $P(X \leq 6) = 0,952$

3.14. En una caja se tiene un conjunto de resistencias cuyo valor R varía entre 900 y 1100 Ohm (valor nominal de 1000 Ohm con $\pm 10\%$ de error máximo). R es entonces una VA con distribución uniforme entre 900 y 1100 Ohm.

Se saca una resistencia de la caja. Demuestre que la probabilidad de que el valor de la resistencia esté entre 950 y 1050 Ohm es de 0,5.

3.15. Sea $Y = X^2$, donde la VA X es gaussiana de valor promedio $E\{X\} = m$ y varianza σ^2 .

Demuestre que la densidad de probabilidad de la VA Y es

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \left\{ \exp[-(\sqrt{y} + m)^2 / (2\sigma^2)] + \exp[-(\sqrt{y} - m)^2 / (2\sigma^2)] \right\} u(y)$$

3.16. Sea una función de densidad conjunta de dos VA X e Y de la forma

$$p_{XY}(x, y) = K(x + xy)\Pi(x - 1/2) \cdot \Pi\left(\frac{y-2}{4}\right)$$

(a) Demuestre que $K = 1/6$

(b) Demuestre que las VA X e Y son independientes

(c) Demuestre que $F_{XY}(1/2, 2) = 1/12$

3.17. En la expresión (3.62) deduzca $F_X(x)$ a partir de $p_X(x)$.

3.18. Demuestre que en una VA gaussiana centrada $E\{X\} = 0$ y $E\{X^2\} = \sigma^2$.

3.19. Se tiene dos VA X e Y independientes cuyas densidades de probabilidad son

$$p_X(x) = \exp(-x)u(x) \quad \text{y} \quad p_Y(y) = 2 \exp(-2y)u(y)$$

Sea también una nueva VA $Z = X + Y$.

Demuestre que $p_Z(z) = 2[\exp(-z) - \exp(-2z)]u(z)$.

3.20. La densidad de probabilidad de una VA X es $p_X(x) = \frac{1}{2} \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

Demuestre que $E\{X\} = 1$; $E\{X^2\} = 5/3$; $\sigma_x^2 = 2/3$.

3.21. La señal de entrada X y la señal de salida Y de un sistema no lineal están relacionadas mediante la expresión $Y = X^2 u(X)$. Si la densidad de probabilidad de X es gaussiana, de valor promedio cero y varianza σ^2 , demuestre que la densidad de probabilidad a la salida del sistema es

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$p_Y(y) = \frac{1}{2} \delta(y) + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) u(y)$$

- 3.22. En el caso de un detector cuadrático la entrada X y la salida Y están relacionadas mediante la expresión $Y = aX^2$ con $a > 0$.

(a) Demuestre que $p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}} p_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) u(y)$ y $F_Y(y) = \left[2F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - 1\right] u(y)$

- (b) Si la densidad de probabilidad de la VA X es gaussiana, de valor promedio cero y varianza σ^2 , demuestre que la densidad de probabilidad a la salida del detector cuadrático es

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2a\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right) \cdot u(y) \quad y \quad F_Y(y) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{y/a}{2\sigma^2}}\right) \cdot u(y)$$

- (c) Si la VA X está uniformemente distribuida en el intervalo (c, d) , donde $c > 0$, demuestre que

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2(d-c)\sqrt{ay}} & \text{para } ac^2 \leq y \leq ad^2 \\ 0 & \text{para } y < ac^2 \text{ o } y > ad^2 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y/a} - c}{d - c} & \text{para } ac^2 \leq y < ad^2 \\ 0 & \text{para } y < ac^2 \\ 1 & \text{para } y \geq ad^2 \end{cases}$$

- 3.23. En el caso de un rectificador de onda completa la entrada X y la salida Y están relacionadas mediante la ecuación $Y = |X|$.

(a) Demuestre que $p_Y(y) = [p_X(y) + p_X(-y)] \cdot u(y)$ y $F_Y(y) = [F_X(y) - F_X(-y)] \cdot u(y)$

Si $p_X(x)$ es una función par, se puede demostrar también que

$$p_Y(y) = 2p_X(y) \cdot u(y) \quad y \quad F_Y(y) = [2F_X(y) - 1] \cdot u(y)$$

- (b) Si la VA X es gaussiana de valor promedio 10 y desviación 5, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{\exp\left[-\frac{(y-10)^2}{50}\right] + \exp\left[-\frac{(-y-10)^2}{50}\right]}{5\sqrt{2\pi}} \cdot u(y)$$

$$F_Y(y) = \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y-10}{5\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y+10}{5\sqrt{2}}\right) \right] \cdot u(y)$$

- (c) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo $(10, 20)$, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{1}{10} \Pi\left(\frac{y-15}{10}\right) \quad y \quad F_Y(y) = \frac{1}{10} [r(y-10) - r(y-20)]$$

donde $r(\cdot)$ es la función rampa.

- 3.24. Sea una VA X y sea el proceso lineal $Y = aX + b$, donde a y b son dos constantes.

- (a) Si $p_X(x)$ y $F_X(x)$ son las funciones de probabilidad de X , demuestre que

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ y } F_Y(y) = \frac{1}{|a|} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \text{para todo } y$$

(b) Si la VA X está distribuida uniformemente en el intervalo (x_1, x_2) , demuestre que

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{|a|(x_2 - x_1)} & \text{para } ax_1 + b < y < ax_2 + b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La VA Y está distribuida uniformemente en el intervalo $(ax_1 + b, ax_2 + b)$.

3.25. Una VA X está distribuida según la distribución de Cauchy, donde

$$p_X(x) = \frac{K}{\alpha^2 + x^2}.$$

(a) Demuestre que $K = \alpha/\pi$, de donde $p_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$

(b) Demuestre que $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

(a) Demuestre que la probabilidad de que X esté dentro del intervalo $(-\alpha, \alpha)$ es igual a 0,5.

3.26. Sea una VA X y un proceso hiperbólico de la forma $Y = \frac{a}{X}$, donde a es una constante.

(a) Demuestre que $p_Y(y) = \frac{|a|}{y^2} p_X\left(\frac{a}{y}\right)$ y $F_Y(y) = |a| \int_{-\infty}^y \frac{p_X\left(\frac{a}{y'}\right)}{y'^2} dy'$ para todo y

donde $p_X(x)$ es la densidad de probabilidad de X .

(b) Si la VA X está distribuida según Cauchy, demuestre que

$$p_Y(y) = \frac{|a|}{\pi\alpha} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + y^2\right)}$$

Vemos que la VA Y está también distribuida según Cauchy, pero con parámetro $|a|/\alpha$.

3.27. Una VA X está distribuida en forma laplaciana, es decir, su densidad de probabilidad tiene la forma $p_X(x) = K \exp(-\alpha|x|)$.

(b) Demuestre que $K = \alpha/2$

(c) Demuestre que $E\{X\} = 0$; $E\{X^2\} = 2/\alpha^2$; $\sigma = \sqrt{2}/\alpha$

(c) Demuestre que $F_X(x) = \frac{1}{2} \exp(\alpha x) u(-x) + \frac{1}{2} [1 - \exp(-\alpha x)] u(x)$

(d) Grafique $F_X(x)$ y compruebe que $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$

III. VARIABLES Y PROCESOS ALEATORIOS

3.28. Se tiene una distribución de la forma $f(x) = Kx \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(a) Demuestre que si $f(x)$ es una distribución de Raleigh, debe verificarse que $K = \frac{1}{\alpha^2}$. La

distribución de Raleigh es entonces $p_X(x) = \frac{x}{\alpha^2} \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$

(b) Demuestre que $E\{X\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha$; $E\{X^2\} = 2\alpha^2$; $\sigma = \sqrt{2}\alpha$

(c) Demuestre que $F_X(x) = \left[1 - \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})\right]u(x)$

3.29. Una VA X sigue la distribución de Maxwell, donde

$$p_X(x) = Kx^2 \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})u(x)$$

(a) Demuestre que $K = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\alpha^3}$

(b) Demuestre que el valor máximo de $p_X(x)$ ocurre para $x = \alpha\sqrt{2}$

(c) Demuestre que la función de distribución $F_X(x)$ es

$$F_X(x) = \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x \exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) \right] u(x)$$

(d) Demuestre que la probabilidad $P\{X \leq \alpha\sqrt{2}\} = 0,42759$.

3.30. Siguiendo el procedimiento mostrado en la Sección 3.9.2, determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de las siguientes secuencias aleatorias.

(a) Una secuencia aleatoria unipolar RZ de amplitud A , Fig. 3.22(a)

(b) Una secuencia aleatoria bipolar NRZ de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.23(a)

(c) Una secuencia aleatoria bipolar AMI RZ de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.24(a)

(d) Una secuencia aleatoria bipolar MANCHESTER de amplitudes $\pm A$, Fig. 3.25(a).

(e) En un solo gráfico dibuje las cuatro densidades espectrales anteriores (como en la Fig. 3.26(a)) y compare sus anchos de banda. No dibuje los impulsos.

CAPÍTULO IV

PRINCIPIOS DE LA TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN

4.1. INTRODUCCIÓN

Se puede definir la comunicación como el proceso mediante el cual se transfiere información desde un punto en el espacio y en el tiempo, denominado “**fuelle de información**”, hasta otro punto denominado “**destino de la información**”, con el mínimo de pérdidas o perturbaciones.

Es evidente que una reproducción perfecta de un mensaje no es posible, pero desde un punto de vista práctico es suficiente que la reproducción sea hecha con una aproximación o fidelidad que depende del fin perseguido. Por ejemplo, en una conversación telefónica la “fidelidad” necesaria es menor que la requerida en radiodifusión o televisión. Igualmente, en una comunicación entre máquinas o dispositivos, la fidelidad requerida dependerá del objetivo de la transmisión. Por ejemplo, la transmisión de las variaciones de temperatura, en un proceso de automatización, se debe efectuar con la precisión requerida por los demás elementos del sistema. En todo caso, en el proceso de transmisión la información experimentará siempre una cierta degradación, cuyos límites dependerán del empleo que se haga de la información.

La mayor parte de los sistemas de comunicación actuales se caracteriza por la presencia de personas en los extremos del sistema. Los sistemas de comunicación pueden considerarse entonces como una prolongación de nuestros sentidos. El teléfono, por ejemplo, hace posible la conversación entre dos personas alejadas entre sí como si ellas estuvieran frente a frente. Por otro lado, las perturbaciones en la mayoría de los sistemas de comunicación se parecen a las perturbaciones a las cuales nuestros sentidos están adaptados, y por ello los sistemas clásicos de comunicación dan resultados satisfactorios aún con un equipo terminal reducido o de muy baja resolución. Se sabe que cuando hay mucho ruido en un ambiente ruidoso, entonces se habla más fuerte, se pronuncian las palabras lentamente y con más claridad empleándose un vocabulario más limitado y con las palabras más usuales. En otras palabras, la fuente de información se adapta a las condiciones del canal de comunicación disponible. Sin embargo, en la comunicación entre máquinas esta “codificación natural” no existe, lo que implica un aumento en la complejidad de los equipos terminales a fin de obtener el grado de precisión o resolución requeridos en el proceso de transmisión.

4.2. MODELO DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN

Desde el punto de vista de la ingeniería de las comunicaciones, un sistema completo de transmisión de información se puede representar entonces como se muestra en la Fig. 4.1 [Shannon, 1949].

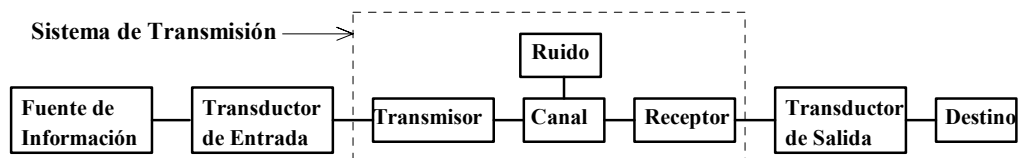


Fig. 4.1. Diagrama de Bloques de un Sistema de Comunicación

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Fuente de Información

La información o inteligencia a transmitir se origina en la fuente de información. Esta información se materializa como un conjunto, que sin perder generalidad supondremos finito y discreto, de N símbolos o mensajes distintos e independientes que se transmiten y cuyo significado es conocido en el destino del sistema. La fuente de información así definida se denomina “**fuente discreta sin memoria**” (“sin memoria” quiere decir que la aparición de un símbolo no depende de los anteriores; es parte de la independencia de los mensajes).

Hay muchas clases de fuentes de información, incluyendo personas y máquinas, de manera que los símbolos o mensajes pueden tomar una gran variedad de formas: una secuencia de símbolos discretos o letras, magnitudes que varían en el tiempo, etc.; pero cualquiera que sea el mensaje, el propósito del sistema de comunicación es el de proporcionar una réplica más o menos exacta del mismo en el destino.

Transductor de Entrada

Como regla, el mensaje que produce la fuente no es de naturaleza eléctrica y, por lo tanto, es necesaria la presencia de un “**transductor**” o “**codificador**” que convierta el mensaje en una “**señal**”. Esta última es una magnitud eléctrica variable en el tiempo (corrientes o voltajes) compatible con el tipo particular de sistema de transmisión que se emplee.

Nótese entonces la diferencia entre información, mensaje y señal: *información es la inteligencia o significado que se va a transmitir: es una entidad intangible. Mensaje es la materialización de la información en una cantidad mensurable: el mensaje es el soporte de la información. Señal es la magnitud eléctrica que resulta de la transformación de una magnitud no eléctrica portadora de información en una magnitud eléctrica variable en el tiempo.* A este respecto, el número de elementos del conjunto de las señales de salida del transductor debe ser igual al número de elementos del conjunto de símbolos o mensajes de la fuente de información. La señal de salida del transductor portadora de información se conoce también con el nombre de “**señal mensaje**” o simplemente “**mensaje**”.

El transductor de salida o “**descodificador**” (o *decodificador*, del inglés “decoder”), efectúa la operación inversa del transductor de entrada; es decir, reconvierte las señales eléctricas recibidas en los símbolos o mensajes correspondientes, los cuales son presentados al destinatario para su interpretación.

Transmisor

Aunque no deja de ser frecuente encontrar el transductor de entrada acoplado directamente al canal, como sucede, por ejemplo, en un sistema telefónico local, generalmente es necesario “modular” una señal sinusoidal con la señal del transductor de entrada, sobre todo para transmisión a gran distancia. La “**modulación**” es la *variación sistemática de alguna característica de una señal, denominada “portadora”, en concordancia con la señal mensaje o “señal modulante*”. Este aspecto lo trataremos extensamente en capítulos posteriores.

Canal

El canal de transmisión es el enlace eléctrico entre el transmisor y el receptor. Puede ser un par de conductores, un cable coaxial, una fibra óptica o sencillamente el espacio libre en el cual la señal se propaga en forma de una onda electromagnética. Al propagarse a través del canal, la señal transmitida se distorsiona debido a las no linealidades y/o las imperfecciones en la respuesta de frecuencia del canal. Otras fuentes de degradación son el “**ruido**” y la “**interferencia**” que recoge la señal a su paso por el canal. Más adelante volveremos sobre este tema.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Receptor

El objeto del receptor es el de extraer la señal deseada a partir de la señal degradada transmitida por el canal. Como las señales recibidas son en general débiles y contaminadas con ruido, una primera operación del receptor es la amplificación y filtrado de dichas señales para poderlas procesar. Pero la operación fundamental del receptor es la “**demodulación**” o “**detección**”, que es el proceso inverso de la modulación en el transmisor. Debido a la degradación de la señal recibida, el receptor no puede reconstruir exactamente la señal original, aunque el tipo de degradación que resulta depende del sistema de modulación que se utilice. Como lo veremos en capítulos posteriores, hay ciertos sistemas de modulación que son menos sensibles que otros a los efectos del ruido y de la distorsión.

Ruido

El término “**ruido**” se utiliza comúnmente para denominar aquellas señales que perturban la transmisión y procesamiento de señales en los sistemas de comunicación y sobre las cuales no se tiene un control completo.

El ruido que afecta a un sistema de comunicación se clasifica en categorías dependiendo de su origen. Cuando el ruido proviene de los componentes del sistema tales como resistencias, tubos al vacío y dispositivos de estado sólido, se conoce como “ruido interno”. La segunda categoría de ruido resulta de fuentes externas al sistema de comunicación e incluye el ruido atmosférico, extraterrestre y el producido por el hombre; es el “ruido externo”. En el Capítulo II, Sección 2.9 hicimos una breve introducción al ruido en sistemas.

Al ruido externo lo podemos clasificar, someramente, en los siguientes tipos:

1. **Ruido Atmosférico.** Producido por descargas eléctricas asociadas a las tormentas. Se conoce comúnmente como “estática”. Por debajo de los 100 MHz, la intensidad de campo es inversamente proporcional a la frecuencia. En el dominio del tiempo se caracteriza por impulsos de gran amplitud y poca duración; es un ruido de tipo impulsivo. Afecta más a la banda de frecuencias medias (radiodifusión) que a la banda de FM o TV. En la transmisión de datos es de particular importancia.
2. **Ruido Extraterrestre.** Incluye el debido al sol y otros cuerpos calientes del firmamento. Debido a su alta temperatura y proximidad a la tierra, el sol es una fuente intensa, pero afortunadamente localizada, de energía radiante en una amplia gama de frecuencias. Las estrellas son fuentes de energía radiante de banda ancha, que aunque más distantes y por ende menos intensas, por ser más numerosas son colectivamente importantes como fuentes de ruido. Radioestrellas, tales como cuasares y pulsares, también contribuyen al ruido cósmico que en conjunto se extiende desde unos cuantos MHz hasta unos cuantos GHz.
3. **Ruido producido por el hombre.** Incluye las descargas por efecto corona en líneas de alta tensión, el producido por motores eléctricos, sistemas de diatermia, ruido de conmutación, etc. El ruido de conmutación y de sistemas de ignición es del tipo impulsivo tal como el ruido atmosférico. El debido al alumbrado fluorescente es un ruido muy frecuente en nuestro medio ambiente.

Ancho de Banda y Potencia de Transmisión

En los sistemas de transmisión de información existen dos parámetros de gran importancia: el ancho de banda del canal y la potencia transmitida. Los sistemas de comunicación deben diseñarse entonces para utilizar estos dos recursos en la forma más eficiente posible. En general, es difícil optimizar ambos recursos simultáneamente, pues en la mayoría de los canales de

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

comunicación un recurso puede considerarse más importante o más escaso que otro. Se puede, por lo tanto, clasificar los canales como “**limitados en potencia**” o “**limitados en ancho de banda**”. Por ejemplo, los canales telefónicos son canales limitados en ancho de banda, mientras que un canal de microondas lo es en potencia. La meta ideal en el diseño de un sistema de comunicación es la de transmitir información a la máxima velocidad con el mínimo de potencia y ancho de banda. La utilización óptima y eficiente de estos recursos es el principal objetivo en el diseño de los sistemas de comunicación prácticos.

Los sistemas de modulación y transmisión que estudiaremos en los Capítulos V y VI utilizan esos recursos en forma más o menos eficiente, dependiendo de la aplicación. Veremos también que el ancho de banda y la potencia de transmisión se pueden intercambiar, es decir, que se puede aumentar el ancho de banda pero a expensas de una reducción en la potencia, y viceversa. Este intercambio “Ancho de Banda-Potencia” lo estudiaremos con más detalle más adelante.

4.3. CONCEPTO Y MEDIDA DE LA INFORMACIÓN

Cantidad de Información

Hemos dicho que el propósito de un sistema de comunicación es el de transmitir información. Sin embargo, no se ha especificado lo que realmente significa el término “información” y mucho menos cómo se puede cuantificar. Todos tenemos un concepto más o menos intuitivo de lo que es información, pero no conocemos los medios para medirla. Lo que sí sabemos es que lo que ya conocemos no nos proporciona ningún nuevo conocimiento; sólo aquello que ignoramos nos aporta alguna información al conocerlo. Esta es la esencia intuitiva de la información.

El concepto de información supone entonces la existencia de duda o incertidumbre. La incertidumbre implica que existen diferentes alternativas que deberán ser elegidas, seleccionadas o discriminadas. Las alternativas se refieren a cualquier conjunto de signos construidos para comunicarse, sean estos letras, palabras, números, ondas, etc. En este contexto, las señales contienen información en virtud de su potencial para hacer elecciones. Estas señales operan sobre las alternativas que conforman la incertidumbre del receptor y proporcionan el poder para seleccionar o discriminar entre algunas de estas alternativas.

Al medir cuánta información proporciona la fuente al receptor al enviar un mensaje, se parte del supuesto que cada elección está asociada con una cierta probabilidad, siendo algunos mensajes más probables que otros. Uno de los objetivos de esta teoría es determinar la cantidad de información que proporciona un mensaje, la cual puede ser determinada a partir de su probabilidad de ser enviada.

En 1949, Claude Shannon propuso algunas definiciones básicas acerca de la información y la velocidad de transmisión a la cual se puede transmitir sin error [Shannon, 1949]. Este trabajo, más otros desarrollos afines, dio origen a la Teoría de la Información. Esta es una disciplina altamente matemática y con aspectos que todavía no han sido instrumentados en la práctica. Sin embargo, ciertos aspectos significativos de la teoría han sido aplicados exitosamente en sistemas prácticos, y algunos de los conceptos fundamentales los veremos a continuación.

Consideremos un suceso **A** cualquiera. Cuanto menos se sepa de un suceso mayor será, digamos, nuestra sorpresa al conocer la realización del mismo. La ignorancia en cuanto al suceso es simplemente la incertidumbre que se tiene acerca de él. Al realizarse el suceso, la incertidumbre se convierte en certeza y hemos obtenido un conocimiento o recibido una información. Por consiguiente, podemos decir que

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

$$\text{Cantidad de Incertidumbre} = \text{Cantidad de Información} \quad (4.1)$$

Por otro lado, la magnitud de la incertidumbre depende del grado de probabilidad de ocurrencia del suceso A. Cuanto mayor sea la probabilidad de ocurrencia del suceso, menor será nuestra incertidumbre. En consecuencia, podemos decir que la incertidumbre acerca del suceso A es función de la probabilidad de que dicho suceso ocurra.

Sea entonces

$U(A)$ = Incertidumbre acerca del suceso A

$I(A)$ = Información adquirida al realizarse el suceso A

P_A = Probabilidad de ocurrencia del suceso A

Podemos escribir entonces de (4.1) que

$$U(A) = I(A) = f(P_A) \quad (4.2)$$

En este sentido, la información es una medida de la incertidumbre. Por lo tanto, la información asociada con el conocimiento de que un suceso dado ha ocurrido, es una función de la probabilidad de ocurrencia de ese suceso. Se trata entonces de hallar la relación funcional $f(P_A)$.

La relación funcional $f(P_A)$ se puede elegir dentro de una clase bastante grande de funciones, pero solamente algunas son de interés práctico en las aplicaciones. Una condición esencial que la relación funcional $f(P_A)$ debe satisfacer, es la aditividad. En efecto, si se considera que el suceso A está formado por la intersección de dos sucesos independientes B y C cuyas probabilidades son P_B y P_C , respectivamente, entonces

$$(a) \text{ Si } A = BC, \quad f(P_A) = f(P_B) + f(P_C) \quad (4.3)$$

La información asociada con el suceso A es igual a la suma de las informaciones asociadas con los sucesos independientes B y C.

(b) La información es una magnitud siempre positiva, de donde

$$f(P_A) \geq 0 \quad \text{donde} \quad 0 \leq P_A \leq 1 \quad (4.4)$$

(c) La probabilidad de un suceso cierto es 1, pero la información o incertidumbre será 0; de modo que podemos escribir

$$\lim_{P_A \rightarrow 1} f(P_A) = 0 \quad (4.5)$$

(c) Por último, si la probabilidad de un suceso A es menor que la probabilidad de un suceso B, debe verificarse que

$$f(P_A) > f(P_B) \quad \text{para} \quad P_A < P_B \quad (4.6)$$

Hartley demostró [Hartley, 1928] que la única relación funcional que satisface las condiciones (4.3) a (4.6) es una función logarítmica de la forma

$$f(P_A) = \log_b \frac{1}{P_A} = -\log_b P_A \quad (4.7)$$

Las unidades o dimensiones de la cantidad de información dependen de la base del logaritmo. La solución más sencilla es aquella cuando se selecciona uno de dos mensajes o símbolos, en cuyo caso $b = 2$. La unidad de información se denomina entonces “bit” (contracción

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

inglesa de “binary unit”) y fue propuesta por J. W. Tukey en 1946 (No hay que confundir este “bit” con el “bit” de “binary digit” utilizado en informática, que es simplemente una cifra binaria).

Antes de continuar debemos aclarar que la reciente norma ISO-2382/XVI establece el *shannon* en vez del “bit” como medida de la información para evitar el doble uso del término bit como dígito binario y como unidad de medida de la información. Sin embargo, nosotros seguiremos usando la palabra “bit” y no el “shannon” como unidad de medida de la información.

La cantidad de información asociada con el suceso A será entonces

$$I(A) = \log_2 \frac{1}{P_A} = -\log_2 P_A \quad \text{bits} \quad (4.8)$$

$I(A)$ es la cantidad de información, en bits, asociada con un suceso A cuya probabilidad de ocurrencia es P_A . Nótese que $I(A)$ es una cantidad siempre positiva.

Podemos ver que el concepto de información está ligado con las ideas de incertidumbre y sorpresa.

Si fuera necesaria otra base (por ejemplo, $b = e$ si la función se va a diferenciar o integrar, o $b = 10$ para cálculos numéricos), la información se puede mantener expresada en bits mediante la fórmula

$$\log_2 N = \frac{1}{\log_b 2} \log_b N \quad (4.9)$$

$$\text{En particular, para } b = 10, \quad \log_2 N \approx 3,322 \log_{10} N \quad (4.10)$$

Nótese que la “información”, en el sentido de la teoría de la información, no tiene nada que ver con el significado o sentido inherente en un mensaje. Es mas bien un grado de orden, o de no aleatoriedad, que se puede medir y ser tratado matemáticamente en la misma forma como lo son la masa, la energía o cualquiera otra cantidad física. La caracterización matemática de un sistema de comunicación generalizado ha producido un cierto número de aspectos importantes, entre los cuales se tiene:

1. La información promedio contenida en un mensaje dado.
2. La velocidad a la cual una fuente produce la información.
3. La capacidad de un canal para manejar o transportar esa información
4. La codificación de los mensajes para optimizar los tres aspectos anteriores.

A los tres primeros aspectos los trataremos brevemente en el presente capítulo. El cuarto aspecto está fuera de los límites que nos hemos impuesto.

4.4. CARACTERIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

4.4.1. Entropía

La cantidad de información definida en la ecuación (4.8) ha sido obtenida para un solo mensaje y no es apropiada para describir una fuente que produce un conjunto de diferentes mensajes con probabilidades diferentes. Un sistema de comunicación no está diseñado para la transmisión de un mensaje particular sino para la transmisión de todos los mensajes posibles producidos por una fuente. En este contexto, la cantidad de información definida en (4.8) es inadecuada excepto en las circunstancias más simples. Por ejemplo, sean tres mensajes A, B y C posibles; si los dos primeros fueran utilizados en promedio 10 veces por hora, y si el tercer mensaje

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

se usara solamente una vez a la semana, entonces la cantidad de información asociada con los mensajes sería más cercana a $\log_2 2$ bits que a $\log_2 3$ bits. Es decir, el “número efectivo” de mensajes disponible es más cercano a 2 que a 3. Por consiguiente, cuando el flujo instantáneo de información producido por una fuente es aleatorio, es mejor describir la fuente en términos de la “información promedio” producida. Consecuentemente, se necesita conocer una medida de la información promedio producida por la fuente teniendo en cuenta todos los posibles mensajes que la fuente puede generar.

Consideremos entonces una fuente discreta que produce N símbolos o mensajes $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ distintos e independientes, con probabilidades de ocurrencia correspondientes $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_N\}$, donde $P_i \neq P_j$, $i \neq j$. Desde un punto de vista probabilístico, el conjunto discreto de N símbolos o mensajes producidos por la fuente se puede considerar como un proceso aleatorio discreto; es entonces un conjunto de N variables aleatorias, cada una de las cuales toma valores en el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ con probabilidades $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$.

De la definición de la probabilidad, debe cumplirse que

$$\sum_{n=1}^N P_n = 1 \quad (4.11)$$

De acuerdo con la ecuación (4.8), cuando se transmite un mensaje cualquiera x_j , la información asociada es $I_j = \log_2(1/P_j)$ bits. Supongamos que se transmite una larga secuencia de L mensajes o símbolos, donde $L \gg 1$. En esta secuencia, el símbolo j -ésimo ocurrirá aproximadamente LP_j veces y la información asociada será $LP_j I_j$ bits. La información total contenida en la secuencia será, aproximadamente,

$$I_t = LP_1 I_1 + LP_2 I_2 + LP_3 I_3 + \dots + LP_N I_N = L \sum_{j=1}^N P_j \log_2 \frac{1}{P_j} \text{ bits} \quad (4.12)$$

La información promedio, en bits por símbolo, será entonces la información total de la secuencia dividida por el número de símbolos de la misma. Esta información promedio normalmente se representa con la letra H . En efecto, de (4.12),

$$H = \frac{I_t}{L} = \sum_{j=1}^N P_j \log_2 \frac{1}{P_j} \quad \text{bits/símbolo} \quad (4.13)$$

Esta es la “**Entropía de la Fuente**”, como la denominó Shannon. La Entropía define la incertidumbre de la fuente de información y es la información promedio asociada con dicha fuente. La deducción de la ecuación (4.13) que hemos presentado es, hasta cierto punto, empírica; la deducción rigurosa, realizada por Shannon, se puede encontrar en la Bibliografía [Shannon, 1949].

Nótese que la expresión (4.13) es la de un promedio conjunto. Si la fuente no es estacionaria, las probabilidades de los símbolos pueden cambiar con el tiempo y la entropía tendría poco significado. Se supondrá entonces que las fuentes de información son ergódicas, de tal manera que los promedios de tiempo y conjunto sean idénticos.

La entropía de la fuente, o información promedio asociada con la fuente, significa entonces que aunque no se pueda decir con certeza qué mensaje se va a producir, se espera obtener en promedio H bits de información por mensaje, o LH bits en una secuencia de L mensajes. Por otro lado, podemos considerar a H como el número mínimo de preguntas que se pueden establecer para determinar qué mensaje particular se ha producido o se va a producir.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

La palabra “entropía” y su símbolo H la adoptó Shannon de una ecuación similar en mecánica estadística (Entropía de Boltzmann). Dada la similitud matemática, se han hecho varios intentos para relacionar la entropía de la comunicación con la entropía de la termodinámica. Sin embargo, las relaciones que se han intentado han provocado más confusión que claridad, y quizás es más prudente tratar a las dos entropías como dos cosas diferentes con el mismo nombre.

La entropía H posee algunas propiedades que presentaremos aquí sin demostrarlas:

- (a) Se puede demostrar [Ziener y otros, 1976] que H es máxima cuando las probabilidades de ocurrencia de los símbolos son iguales, es decir, cuando $P_1=P_2=P_3 = \dots = P_N = 1/N$.

En este caso, $H_{MAX} = \log_2 N$ (4.14)

En consecuencia, la entropía está acotada por $0 \leq H \leq \log_2 N$ (4.15)

donde N es el número de símbolos o mensajes producidos por la fuente.

Nótese entonces que *cuando los símbolos o mensajes son equiprobables, la información promedio asociada con la fuente es máxima.*

- (b) La información es mínima si uno de sus elementos es cierto; el sistema es perfectamente conocido y no es posible obtener más información.
- (c) La entropía es una función positiva, continua y simétrica.
- (d) La información adquirida en dos etapas se suma.

♣ Ejemplo 4.1. Entropía de una Fuente Binaria.

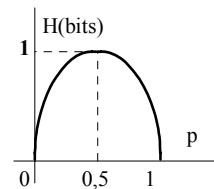
Sea una fuente binaria ($N = 2$). Las probabilidades de los símbolos son p y $(1-p)$, respectivamente. Por consiguiente,

$$H = p \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) + (1-p) \log_2 \left(\frac{1}{1-p} \right)$$

En la Fig. 4.2 se grafica H vs p

Nótese que si $p = 1/2$, entonces $H = 1$ bit, valor que corresponde al pico de la curva.

La entropía de una fuente binaria se conoce con el nombre de Ley de Bernoulli.



4.2. Entropía de una Fuente Binaria

♣

♣ Ejemplo 1.2.

Una fuente produce cuatro símbolos A, B, C y D cuyas probabilidades son, respectivamente, 0,5; 0,25; 0,125 y 0,125. La entropía de la fuente será

$$H = 0,5 \log_2 2 + 0,25 \log_2 4 + 2 \times 0,125 \log_2 8 = 1,75 \text{ bits/símbolo}$$

Si los símbolos fueran equiprobables, esto es, si $p = 1/4$, entonces

$$H = \log_2 4 = 2 \text{ bits/símbolo}$$

Vemos que la entropía H es máxima cuando los símbolos son equiprobables.

♣

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

♣ Ejemplo 4.3.

Consideremos la información producida por una máquina de escribir de 26 letras y el espacio entre letras; en otras palabras, la fuente produce 27 símbolos.

Si todos los símbolos tuvieran la misma probabilidad, $H_{MAX} = \log_2 27 = 4,755$ bits/letra. Esta es la máxima información que la máquina de escribir puede generar. Pero en el idioma español las letras tienen diferentes probabilidades de ocurrencia en un texto. Por ejemplo, la letra E es la que ocurre con más frecuencia. Se ha determinado experimentalmente que la información promedio asociada con una letra es de aproximadamente 4,2 bits. Asimismo, una palabra tiene, en promedio, 5 letras y un contenido de información de 9,3 bits. ♣

♣ Ejemplo 4.4.

Se manipula un dado de tal manera que la probabilidad de que salga un UNO o un SEIS es el doble de la correspondiente a cada una de las otras cuatro caras. Vamos a determinar la entropía asociada con el dado.

Solución

Sea p la probabilidad de sacar un UNO o un SEIS. Debe verificarse, de acuerdo con (4.11), que

$$p + p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 1, \quad \text{de donde} \quad p = \frac{1}{4}$$

$$H = 2 \frac{1}{4} \log_2 4 + 4 \frac{1}{8} \log_2 8 = 2,5 \text{ bits/cara}$$

$$\text{Si el dado fuera correcto,} \quad H = \log_2 6 = 2,59 \text{ bits/cara}$$

♣

4.4.2. Velocidad de Información

Para efectos prácticos, la descripción de una fuente no reside en su entropía sola sino también en la velocidad a la cual está produciendo los símbolos o velocidad de información, en bits por segundo (bps).

En los sistemas de comunicación es de especial importancia conocer la cantidad de información que produce la fuente o se transfiere por unidad de tiempo, es decir, la velocidad de la información.

Sea una fuente que produce N símbolos distintos e independientes a una velocidad de V_s símbolos por segundo. Si suponemos que los símbolos tienen todos la misma duración T , entonces

$$V_s = \frac{1}{T} \text{ símbolos/segundo} \quad (4.16)$$

La velocidad de información será

$$V_i = V_s H = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^N P_j \log_2 \frac{1}{P_j} \text{ bits/seg (bps)} \quad (4.17)$$

y si los símbolos son equiprobables,

$$V_i = V_s \log_2 N = \frac{1}{T} \log_2 N \text{ bps} \quad (4.18)$$

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Algunos autores llaman a la velocidad de información “rata o tasa de información” (del inglés “rate”); pero, en este contexto, la palabra “rata” en español significa “porcentaje” o “parte proporcional”. Nosotros emplearemos los términos “velocidad de información” o “velocidad de transmisión” indistintamente. El término entropía no lo usaremos más.

♣ Ejemplo 4.5.

Los símbolos de la fuente del Ejemplo 4.2 se producen a una velocidad de 1000 símbolos por segundo. La velocidad de información de la fuente será

a) Si los símbolos tienen diferentes probabilidades

$$V_i = V_s H = 1000 \times 1,75 = 1750 \text{ bps}$$

b) Si los símbolos son equiprobables, $V_i = V_s \log_2 4 = 2000 \text{ bps}$

Nótese nuevamente que la velocidad de información es máxima cuando los símbolos son equiprobables. ♣

4.4.3. Codificación de Fuente. Codificación de Canal

Hemos dicho que, en general, los símbolos tal como salen de la fuente pueden no ser apropiados para ser transmitidos por un canal dado. Es necesario, pues, efectuar una conversión o adaptación de los símbolos en formas compatibles con el medio de transmisión; ésta es la “codificación de fuente”. Una clase muy importante de conversión de fuente es aquella que convierte los símbolos producidos por la fuente en secuencias de impulsos discretos sin agregarles redundancia, de gran interés en los sistemas de procesamiento y transmisión digital de señales (redundancia es la cantidad de símbolos agregados por un codificador a fin de acentuar la unicidad de cada mensaje digital y facilitar su interpretación en el destino). Hay varios métodos de codificación digital de fuente; sin embargo, sin perder generalidad, vamos a suponer un sistema básico mediante el cual cada símbolo o mensaje se transforma en una secuencia particular de n impulsos con m amplitudes cada uno, secuencia que denominaremos “**muestra codificada o palabra codificada**” y el conjunto de palabras codificadas forman secuencias aleatorias binarias y m -arias, en el sentido visto en la Sección 3.9 del Capítulo III. Esta transformación se denomina comúnmente “**conversión**” o “**codificación**” y el dispositivo que la efectúa, “**convertidor**” o “**codificador**”. Como se considera que el codificador no tiene memoria, la duración de la muestra codificada debe ser, como máximo, igual a la duración de cada símbolo a fin de no perder información. Los códigos ASCII y Baudot son formas de codificación de fuente con redundancia agregada para facilitar la transmisión, como veremos más adelante.

La codificación de canal es la forma de codificar una señal digital con el fin de adaptarla a un canal y que a la vez facilite la corrección de errores. Los códigos de línea, que veremos en el Capítulo V son formas de codificación de canal.

En sistemas de procesamiento y transmisión de señales digitales, se utilizan secuencias binarias ($m = 2$) que contienen 8 impulsos ($n = 8$). Esta secuencia binaria de 8 impulsos se denomina comúnmente “byte” u “octeto” (Nótese que 1 Kbyte = 1024 bytes, para diferenciarlo de 1 kbyte = 1000 bytes). En la práctica hay muchos códigos con redundancia que emplean secuencias multinivel o m -arias y esquemas para la detección y corrección de errores, como veremos en los Capítulos V y VI. Para más detalles sobre codificación y códigos, el lector puede consultar la bibliografía especializada.

Sea entonces, Fig. 4.3(a), una fuente de información discreta sin memoria que produce N símbolos distintos e independientes, que podemos suponer equiprobables, a una velocidad $V_s = 1/T$ símbolos/segundo, donde T es la duración de cada símbolo. Los símbolos se codifican, cada uno, en

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

secuencias de n impulsos con m amplitudes, denominadas “muestras codificadas”, como se ilustra en la Fig. 4.3(b). Esta es una forma de codificación de fuente multinivel sin redundancia.

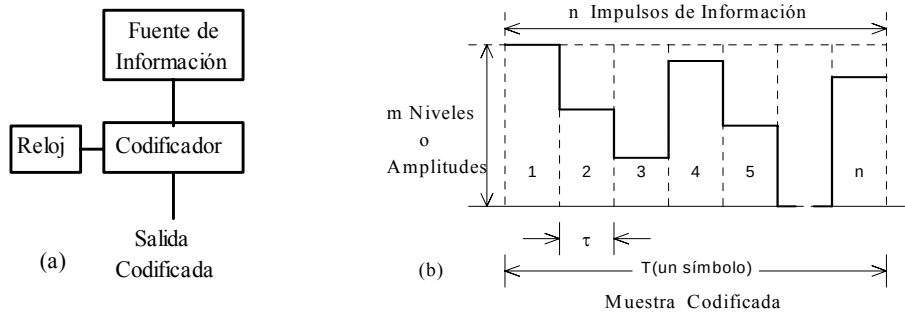


Fig. 4.3. Codificación en Secuencias de Impulsos Multinivel sin Redundancia.

A la salida de la fuente de información la velocidad de transmisión es, de la expresión (4.18),

$$V_{if} = \frac{1}{T} \log_2 N \quad (4.19)$$

Asimismo, a la salida del codificador la información total contenida en la muestra codificada es la suma de la información contenida en cada impulso (propiedad aditiva de la información), es decir,

$$I = n \log_2 m = \log_2 m^n \quad \text{bits} \quad (4.20)$$

La velocidad de información a la salida del codificador será

$$V_{ic} = \frac{n \log_2 m}{T} = \frac{1}{T} \log_2 m^n \quad \text{bps} \quad (4.21)$$

Como se supone que el sistema no tiene memoria (elementos de almacenamiento), la velocidad de información será la misma en todos los puntos a lo largo del sistema, es decir,

$$V_i = V_{if} = V_{ic}$$

de modo que, de (4.19), (4.20) y (4.21),

$$N = m^n \quad m \text{ y } n \text{ enteros} \quad (4.22)$$

Esta expresión, que denominaremos “**relación de conversión o de codificación**”, es de gran utilización en los sistemas digitales de transmisión de información, pues relaciona los parámetros m y n del codificador con el número N de símbolos producidos por la fuente.

Nótese que la relación (4.22) es independiente de T , lo que significa que la relación entre m , n y N es válida para cualquier sistema con o sin memoria, y para cualquiera velocidad de información.

♣ Ejemplo 4.6.

Una fuente de información produce 256 símbolos, que suponemos independientes y equiprobables, a una velocidad de 100 símbolos por segundo. Si cada símbolo se codifica en

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

secuencias de n impulsos con m amplitudes sin redundancia, vamos a determinar la velocidad de información y los valores posibles de m y n .

Solución

La velocidad de información es $V_i = 100 \log_2 256 = 800$ bps. Las combinaciones de m y n que satisfacen la expresión (4.22), es decir, $256 = m^n$, son

$$m = 2 \text{ y } n = 8 \text{ (caso binario); } m = 4 \text{ y } n = 4 \quad \clubsuit$$

4.4.4. Velocidad de Modulación

En general, los codificadores son dispositivos comandados por un reloj, de modo que los impulsos tienen todos la misma duración τ . De la Fig. 4.3, $T = n\tau$ y la expresión (4.21) queda en la forma siguiente

$$V_i = \frac{1}{\tau} \log_2 m = V_b \log_2 m \text{ bps} \quad (4.23)$$

$$\text{donde } V_b = \frac{1}{\tau} \quad (4.24)$$

V_b es el número de impulsos por segundo; se conoce con el nombre de “**velocidad de modulación**” o “**velocidad de señalización**”, y se expresa en baudios, en honor del ingeniero francés Emile Baudot.

En un sistema binario, $m = 2$ y la expresión (4.23) queda en la forma

$$V_i = V_b \quad (4.25)$$

Esto significa que *en un sistema binario la velocidad de información y la velocidad de modulación son numéricamente iguales*. Este resultado es válido si la codificación se ha efectuado en la forma mostrada en la Fig. 4.4, es decir, sin redundancia agregada, como veremos después del siguiente ejemplo.

♣ Ejemplo 4.7.

Se puede ahora calcular la velocidad de modulación de las muestras codificadas del Ejemplo 4.6. En efecto, $V_s = 100 \text{ símb/seg} = \frac{1}{T}$; $T = 10 \text{ ms}$

$$\text{a) } n = 8; \quad \tau_1 = \frac{T}{8} = 1,25 \text{ ms}; \quad V_{b1} = \frac{1}{\tau_1} = 800 \text{ baudios}$$

$$\text{b) } n = 4; \quad \tau_2 = \frac{T}{4} = 2,5 \text{ ms}; \quad V_{b2} = \frac{1}{\tau_2} = 400 \text{ baudios} \quad \clubsuit$$

4.4.5. Redundancia Agregada

En el sistema mostrado en la Fig. 4.3 se supone que en el extremo receptor se sabe cuándo comienza y cuándo termina cada secuencia de impulsos. Por ejemplo, en algunos sistemas denominados “asincrónicos” es necesario enviar impulsos adicionales para indicar el principio o el fin (o ambos) de cada muestra codificada a fin de que se pueda efectuar con exactitud el proceso de decodificación, esto es, la reconversión de las secuencias de impulsos codificados en símbolos de significación para el usuario final de la información. También puede agregarse otros impulsos para control y detección de errores, extracción de la temporización, etc., que tampoco llevan información

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

útil. Todos estos impulsos adicionales se denominan “impulsos redundantes” o simplemente “redundancia”.

Es evidente que los impulsos de redundancia más los impulsos de información deberán estar contenidos dentro del mismo tiempo T si no se quiere perder información (se supone que el sistema no tiene elementos de almacenamiento). Para simplificar el enfoque, consideremos una muestra codificada a la cual se le han agregado dos impulsos de duración $p\tau'$ y $q\tau'$, que llamaremos impulsos de “arranque” y “pare”, respectivamente; p y q son, con algunas excepciones (por ejemplo, el Código Baudot, mostrado en la Fig. 4.13(a)), números enteros pues suponemos que el codificador está controlado por un reloj. Esta situación se muestra en la Fig. 4.4: la codificación es multinivel y la polaridad, amplitud y duración de los impulsos de arranque y pare son arbitrarias pero fijas. Nótese que todos estos impulsos deben estar contenidos en el tiempo T de duración de los símbolos.

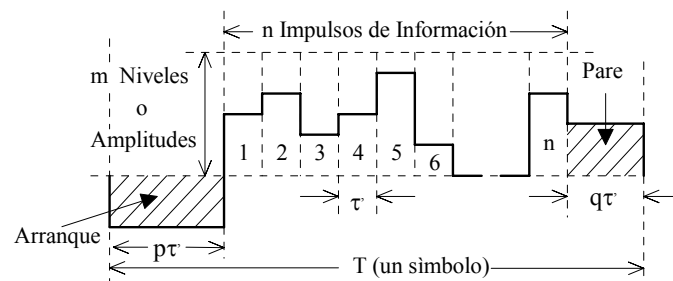


Fig. 4.4. Muestra Codificada Multinivel Con Impulsos Redundantes

De la Fig. 4.4, $T = (n + p + q)\tau'$

de donde

$$V_i = \frac{n \log_2 m}{(n + p + q)\tau'} = \frac{n}{n + p + q} V_b' \log_2 m \quad \text{bps} \quad (4.26)$$

Puesto que la velocidad de información no ha variado, $\tau' < \tau$ y $V_b' > V_b$ (4.27)

Considerando entonces los impulsos redundantes agregados, la velocidad de información vendrá dada (eliminando el índice de V_b') por

$$V_i = K V_b \log_2 m \quad (4.28)$$

donde $K = \frac{n}{n + p + q} < 1$ es la “relación entre el número de impulsos de información y el número total de impulsos de la muestra codificada”. El valor de K (como un porcentaje $K\%$) es una medida del rendimiento o eficiencia de la codificación (Ver Problema de Aplicación 4.33).

En el caso binario, $m = 2$, de donde $V_i = K V_b$ (4.29)

Se verifica entonces que $V_i < V_b$

La velocidad de modulación ya no es igual a la velocidad de información debido a los impulsos redundantes. Sin embargo, la velocidad de modulación ha aumentado y la duración de los impulsos ha disminuido, lo cual impone restricciones más severas sobre el canal, como veremos más adelante.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

En general, cuando los impulsos (de información o redundantes) tienen diferente duración, la velocidad de modulación se define respecto al impulso de menor duración presente en la muestra codificada. Veremos más adelante que los impulsos de menor duración son los que exigen mayor ancho de banda para su transmisión.

Vemos entonces que un cambio de estado puede implicar la transmisión de más de un bit de información. Por lo tanto, el concepto de baudio está ligado directamente a las características del medio de transmisión y se corresponde con el número de impulsos por unidad de tiempo compatible con un ancho de banda determinado.

♣ Ejemplo 4.8. Código ASCII o Alfabeto Internacional N° 5 de la UIT-T

En este tipo de codificación binaria cada carácter alfanumérico se codifica como se muestra en la Fig. 4.5: un impulso de arranque siempre a CERO, siete impulsos de información, un impulso de paridad (para gestión o control de error) y un impulso de pare de duración variable (hasta 2τ) siempre a UNO. En el Apéndice B-5 se especifica este código en detalle; ver también la Fig. 4.13(b).

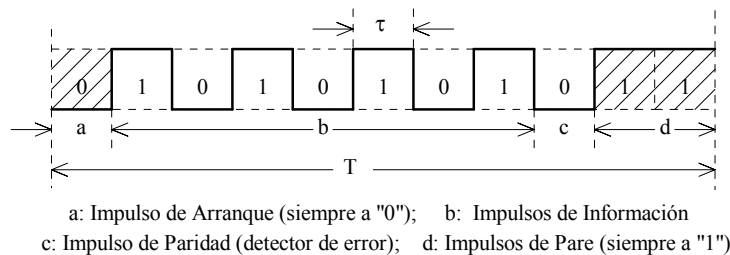


Fig. 4.5. Letra U codificada en ASCII con bit de paridad.

En transmisión por teletipo, por ejemplo, los caracteres ASCII fluyen a una velocidad de 10 caracteres por segundo. Por ejemplo, en la Fig. 4.5 se muestra la letra U en ASCII. Entonces,

$$V_s = 10 \text{ caracteres/seg.}; \quad T = 1/10 = 100 \text{ ms} = 11\tau; \quad n = 7; m = 2; K = 7/11; K\% = 64\%$$

$$\text{Velocidad de Modulación:} \quad V_b = \frac{1}{\tau} = 110 \text{ baudios}$$

$$\text{Velocidad de Información:} \quad V_i = \frac{7}{11} 110 \log_2 2 = 70 \text{ bps}$$

$$\text{Número de Caracteres de la Fuente:} \quad N = 2^7 = 128 \text{ caracteres}$$

♣

4.5. CARACTERIZACIÓN DEL CANAL

4.5.1. Ancho de Banda del Canal

La velocidad de modulación, definida como el inverso de la duración del intervalo unitario o del impulso de menor duración, es un parámetro de naturaleza eléctrica de gran importancia en la caracterización de sistemas de transmisión de señales digitales. A este efecto, vamos a desarrollar en forma intuitiva algunas ideas acerca del efecto que experimenta un impulso a su paso por un canal y lo relacionaremos con la velocidad de modulación.

Desde el punto de vista eléctrico, el canal se puede considerar como un filtro que deja pasar solamente aquellas componentes de señal que están comprendidas dentro de su banda de paso o

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

ancho de banda. Vamos a considerar un canal ideal, es decir, un canal que no introduce ninguna atenuación o distorsión. Supongamos que el ancho de banda del canal se puede variar y que a su entrada se aplican impulsos de duración decreciente. Para un ancho de banda B_1 y un impulso de entrada de duración τ_1 , la Salida 1 tendrá, por ejemplo, la forma dada en la Fig. 4.6, que tomaremos como referencia. Ahora se aplica un impulso de duración $\tau_2 < \tau_1$; la Salida 2 saldrá deformada como se muestra en la figura. Para que la Salida 2 tenga la forma aproximada de la Entrada 2, hay que aumentar el ancho de banda del canal a un valor $B_2 > B_1$. Nuevamente se aplica un impulso de duración $\tau_3 < \tau_2 < \tau_1$, obteniéndose, por ejemplo, la Salida 3. Para que la Salida 3 vuelva a la forma aproximada de la Entrada 3, hay que aumentar el ancho de banda del canal a un valor $B_3 > B_2 > B_1$.

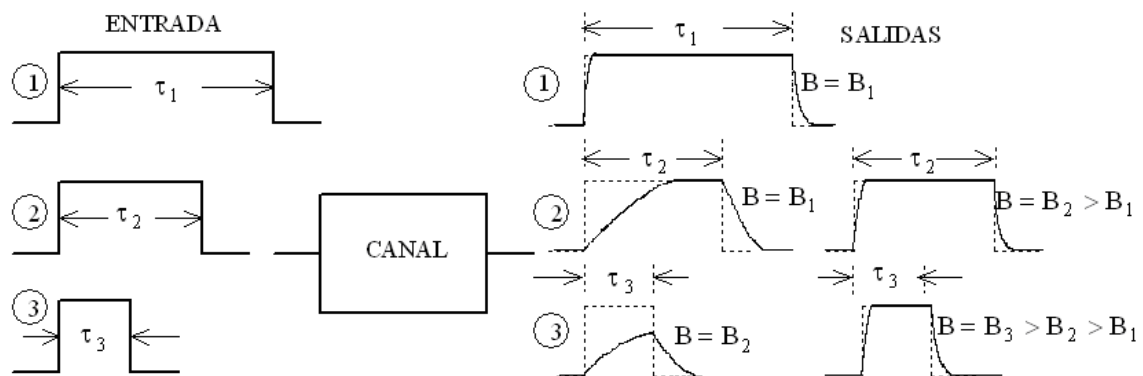


Fig. 4.6. Efecto del Ancho de Banda de un Canal en la Transmisión de Impulsos.

Puede observarse que la “fidelidad” de la salida depende tanto de τ como de B . Esto sugiere que entre la duración τ del impulso y el ancho de banda B del canal existe una relación de la forma

$$B = \frac{k}{\tau} \quad (4.30)$$

donde k depende de la fidelidad requerida a la salida; aquí suponemos que la relación entre τ y B es una relación inversa. En los sistemas de transmisión digital o radar la fidelidad no tiene mucha importancia pues lo que se desea detectar es una “presencia” en la salida o una reproducción tosca de la entrada. El valor mínimo teórico de k es 0,35, pero en la práctica se utiliza $k = 1$, es decir,

$$B \geq \frac{1}{\tau} \quad (4.31)$$

Demostramos en el Ejemplo 1.19, Capítulo I, que si $B = 1/\tau$, donde τ es la duración del impulso de entrada, el canal dejará pasar el 90% de la energía contenida en el impulso de entrada, y la salida será parecida a la entrada. Debido a esto, la expresión (4.31) es de gran utilización en la caracterización de sistemas de transmisión de impulsos y la emplearemos con bastante frecuencia. Es evidente que si se desea una gran fidelidad, el valor de k deberá ser mucho mayor que la unidad.

Cuando es necesario preservar la forma de la señal transmitida, el ancho de banda B del canal se define en función del “tiempo de alzada t_r (rise time)” de la señal de entrada en la forma

$$B = \frac{k}{t_r} \quad (4.31a)$$

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

donde k es igual a 0,35 ó 0,5, dependiendo de la definición de t_r . En este texto, cuando se utilice el tiempo de alza, usaremos $k = 0,5$ (definido en el Ejemplo 2.19), es decir,

$$B \approx \frac{1}{2t_r} \quad (4.31b)$$

Puede observarse que las expresiones (4.24) y (4.31) tienen la misma forma, pudiéndose escribir que

$$V_b = B_n \quad (4.32)$$

Esta expresión se puede interpretar en el sentido siguiente:

Una secuencia de impulsos cuya velocidad de modulación es V_b , puede transmitirse sin perder información por un canal ideal con un ancho de banda mínimo B_n numéricamente igual a V_b .

Es evidente que si $V_b \leq B$, donde B es el ancho de banda real del canal, no habrá problemas en la recuperación de la información. Sin embargo, si $V_b > B$, se perderá información y habría que buscar otros medios para evitar esa pérdida, como veremos en la sección siguiente. En general, debe verificarse que $B \geq V_b$ para no perder información.

♣ Ejemplo 4.9.

- (a) Sea una fuente que produce N símbolos independientes y equiprobables, los cuales se han codificado en la forma mostrada en la Fig. 4.7: cinco impulsos cuaternarios con impulsos de arranque y pare (codificación multinivel con redundancia). La velocidad de modulación es de 10 kbaudios.

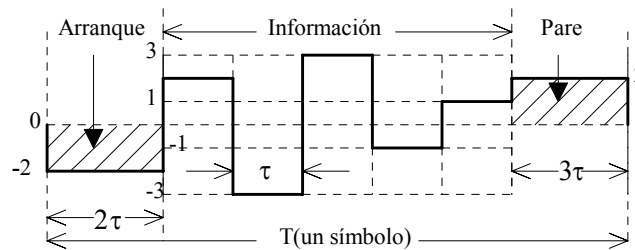


Fig. 4.7(a). Codificación Multinivel con redundancia

Hay 4 niveles de información: -3, -1, 1 y 3; entonces, $n = 5$; $m = 4$ y $N = 4^5 = 1024$ símbolos.

Información asociada con la fuente: $I = \log_2 1024 = 10$ bits/símbolo

$$K = 5/10 = 0,5 ; K\% = 50\% ; T = 10\tau ; \frac{1}{\tau} = V_b = 10^4 = \frac{10}{T} ; T = 10^{-3} \text{ seg.}$$

$$\text{Velocidad de la fuente: } V_s = \frac{1}{T} = 1000 \text{ símbolos por segundo}$$

$$\text{Velocidad de modulación: } V_b = 10^4 \text{ baudios}$$

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Velocidad de información: $V_i = \frac{1}{2} 10^4 \log_2 4 = 10^4$ bps

Ancho de banda mínimo del canal: $B_n = V_b = 10$ kHz

La información producida por esta fuente en un tiempo T_t es: $I_t = V_i T_t$; si por ejemplo $T_t = 3600$ seg, en una hora se producirán $I_t = 10^4 \times 3600 = 3,6 \times 10^7$ bits. Nótese que si se disminuye a la mitad la duración de los impulsos de arranque y pare, ni la velocidad de modulación ni la velocidad de información cambian. Invitamos al lector a verificar esta afirmación. Nótese también que la velocidad de información es igual a la velocidad de modulación aunque el sistema no es binario. Esto se debe a la forma en que hemos repartido los valores de τ .

- (b) El codificador de la parte (a) en vez de producir impulsos multinivel con redundancia, produce solamente impulsos binarios sin impulsos redundantes (en la práctica a estos convertidores se les denomina Convertidor Analógico-Digital (CAD)); esta es una forma de la Modulación de Impulsos Codificados (PCM), que veremos en el Capítulo V. En este caso tomaremos la duración T de cada símbolo producido por la fuente igual a 1 milisegundo y 1024 el número n de símbolos producidos.

Si la codificación es binaria sin redundancia entonces cada símbolo se codificará en la forma mostrada en la Fig. 4.7(b).

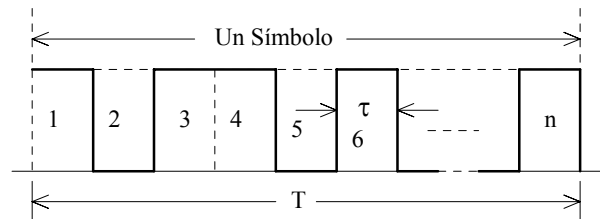


Fig.4.7(b). Codificación Binaria sin redundancia

Tenemos que $m = 2$; $N = 1024$ símbolos; $T = 10^{-3}$ seg
 $N = m^n = 2^n = 1024$, de donde, $n = 10$ impulsos de información

Información asociada con la fuente: $I = 10 \log_2 2 = 10$ bits/símbolo
 $T = n\tau$, $\tau = T/n = 10^{-3}/10$ seg = 10^{-4} seg

Velocidad de modulación: $V_b = 1/\tau = 10^4$ baudios

Velocidad de información: $V_i = I/T = 10/10^{-3} = 10^4$ bps

Se verifica que $V_i = V_b$ puesto que el sistema es binario.

Ancho de banda mínimo del canal: $B_n = V_b = 10^4 = 10$ kHz

La codificación efectuada en los dos casos anteriores ilustra la manera de ajustar una fuente con una velocidad de información dada a un canal. Nótese que los dos codificadores producen señales con las mismas velocidades de información y modulación, pero el modulador binario es de aplicación general y puede diseñarse fácilmente; de hecho, hasta

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

podría conseguirse en el comercio. La codificación multinivel se utiliza algunas veces para disminuir el ancho de banda mínimo del canal. Nótese que cuando decimos que podemos “disminuir el ancho de banda de un canal”, esto no quiere decir que en realidad vamos a disminuir el ancho de banda de ese canal, sino que podemos utilizar otro canal de menor ancho de banda. El ancho de banda de un canal por lo general es fijo y no puede modificarse.



Ejemplo 4.10. Estimación de la Pérdida de Información en un Canal

La señal codificada del Ejemplo 4.9 se transmite por un canal de 5 kHz. Como $V_b > 5000$, es evidente que habrá pérdida de información. Vamos a cuantificar esta pérdida de información.

De acuerdo con (4.28) y (4.32), un canal de ancho de banda B puede soportar una velocidad de información máxima dada por

$$V_i' = KB \log_2 m \text{ bps} \quad (4.33)$$

La información transmitida por el canal en un tiempo T_t será $I_t = V_i' T_t$ bits. Pero en el mismo tiempo T_t la fuente ha producido $I_f = V_i T_t$ bits, de modo que puede decirse que la información perdida en el proceso, en bits, viene dada por

$$I_p = I_f - I_t = (V_i - V_i') T_t$$

y de (4.28) y (4.33),

$$I_p = [K(V_b - B) \log_2 m] T_t \text{ bits} \quad \text{para } V_b > B \quad (4.34)$$

Si se define V_p como la velocidad promedio a la cual se pierde información, en bits perdidos por segundo, se tendrá de (4.34),

$$V_p = \frac{I_p}{T_t} = K(V_b - B) \log_2 m \text{ bits perdidos por segundo} \quad \text{para } V_b > B \quad (4.35)$$

Si el sistema es binario y no tiene impulsos redundantes, $m = 2$ y $K = 1$,

$$V_p = V_b - B \text{ bits perdidos por segundo} \quad \text{para } V_b > B \quad (4.36)$$

En nuestro ejemplo se perderá información a una velocidad de

$$V_p = \frac{1}{2} [10 \times 10^3 - 5 \times 10^3] \log_2 4 = 5 \times 10^3 \text{ bits perdidos por segundo}$$

Nótese que en un sistema de transmisión de información la información tiene que llegar completa al destinatario para ser de utilidad, a diferencia de un sistema de transmisión de energía en el cual, aún cuando se pierda un alto porcentaje de energía en la transmisión, la energía que llega es útil y se puede utilizar.



4.5.2. Capacidad del Canal

Definición

Para definir una medida de la eficacia con la cual un canal transmite información y para determinar su límite superior, Shannon introdujo el concepto de “**capacidad de un canal**”, que comúnmente se representa con la letra C.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

El Teorema Fundamental de Shannon o Primer Teorema de Shannon establece que si la velocidad de información V_i de la fuente es igual o menor que la capacidad C del canal, entonces existe una técnica de codificación con redundancia que permite la transmisión sobre el canal con una frecuencia de errores arbitrariamente pequeña, no obstante la presencia de ruido. Es decir, si

$$0 < V_i \leq C \quad (4.37)$$

se puede transmitir sin error, pero si $V_i > C$ entonces no es posible transmitir sin error.

La capacidad del canal es entonces la máxima velocidad a la cual el canal puede transportar información confiable hasta el destinatario. La capacidad C se expresa en bits por segundo (bps).

Algunas veces el comportamiento del canal se puede caracterizar mediante las relaciones o definiciones siguientes:

- Redundancia del Canal, R_c

$$R_c = C - V_i \quad R_c \geq 0 \quad (4.38)$$

- Redundancia Relativa del Canal, ρ_c

$$\rho_c = \frac{R_c}{C} = 1 - \frac{V_i}{C} \quad (4.39)$$

- Rendimiento del Canal, η_c

$$\eta_c = \frac{V_i}{C} \quad \text{ó} \quad \eta_c \% = 100 \frac{V_i}{C} \quad (4.40)$$

$$\text{También,} \quad \eta_c = 1 - \rho_c \quad \text{donde} \quad \eta_c \leq 1 \quad (4.41)$$

- Rendimiento del Canal respecto al Ancho de Banda, η_B

$$\eta_B = \frac{V_i}{B} \quad \eta_B \text{ se expresa en bps/Hz} \quad (4.42)$$

A esta última relación también se la denomina “Rendimiento Espectral” de una señal digital, y es la cantidad de bps que la señal soporta en un canal de ancho de banda B Hz.

Canal sin Ruido

Consideremos primero un canal ideal sin ruido sobre el cual se va a transmitir N símbolos distintos que supondremos independientes y equiprobables. La cantidad de información máxima de la fuente es $\log_2 N$ bits y si cada símbolo tiene una duración T , la capacidad mínima del canal será

$$C = \frac{1}{T} \log_2 N = V_s \log_2 N \text{ bps} \quad (4.43)$$

La capacidad C del canal se puede expresar también en términos de los parámetros del codificador y del mismo canal. En efecto, si los símbolos han sido codificados en secuencias de n impulsos de m amplitudes, entonces de (4.21) y (4.28),

$$C = \frac{1}{T} \log_2 m^n = \frac{n}{T} \log_2 m = K V_b \log_2 m \text{ bps} \quad (4.44)$$

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Sin embargo, de acuerdo con (4.32), V_b es también, numéricamente, el ancho de banda mínimo necesario para transmitir los impulsos sin distorsión excesiva. Podemos entonces reemplazar en (4.44) V_b por B , el ancho de banda real del canal, con lo cual obtenemos finalmente que

$$C = KB \log_2 m \text{ bps} \quad (4.45)$$

Como el ancho de banda B del canal generalmente es fijo, la capacidad C dada por (4.45) se puede aumentar incrementando el número de niveles m de los impulsos o mediante una codificación equivalente. Como el número de símbolos N es constante, un aumento en m implica una disminución en el número de impulsos de información. Como consecuencia, la velocidad de modulación disminuye y la exigencia sobre el canal disminuye también. Son las técnicas de codificación apropiadas las que en definitiva permiten aumentar la capacidad del canal, como bien lo expresa el Teorema Fundamental de Shannon. Para más información sobre estos tipos de codificación de canal, ver la bibliografía especializada.

De (4.28), (4.37) y (4.45),

$$B \geq V_b \quad (4.46)$$

En consecuencia, en un canal ideal sin ruido el ancho de banda del canal debe ser numéricamente igual o mayor que la velocidad de modulación para que no haya pérdida de información, con lo cual verificamos la expresión (4.31).

Las expresiones (4.43) a (4.45) deben ser aplicadas con cautela. No hay que olvidar que ellas se aplican fundamentalmente a un canal ideal sin ruido lo cual está muy lejos de la realidad. Por ejemplo, un canal telefónico tiene un ancho de banda efectivo de 3,2 kHz; de acuerdo con (4.43) a (4.45), con una codificación adecuada se podría aumentar indefinidamente la capacidad del canal, pero en la práctica se llega normalmente a 9600 bps. Con técnicas más sofisticadas de codificación, modulación y acondicionamiento del canal, se ha llegado a 14400 bps con una velocidad de modulación máxima de 2400 baudios; velocidades superiores solamente se obtienen mediante control de error y compresión de datos. Sin embargo, el límite teórico para la capacidad de este canal es superior, como lo vamos a ver más adelante.

Canal con Ruido

La capacidad de un canal disminuye como consecuencia de los errores incurridos en la transmisión causados por señales perturbadoras o ruido, y como consecuencia se produce una pérdida de información.

En su Teorema N° 2 Shannon estableció que si el canal tiene un ancho de banda B , la potencia promedio de la señal transmitida es S , y la potencia promedio del ruido en el canal es N , entonces la capacidad del canal en presencia de ruido aditivo y gaussiano viene dada por

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \text{ bps} \quad (4.47)$$

A este resultado se le llama la “**Ecuación de Hartley-Shannon**”, en reconocimiento al trabajo pionero de Hartley y a la deducción teórica efectuada por Shannon [Teorema N° 2, Shannon, 1949]. Nótese la importancia de los dos parámetros de más importancia en un sistema de comunicación: el ancho de banda B del sistema y la relación señal-ruido S/N presente. La optimización de estos dos parámetros es una de las metas en el diseño de sistemas de comunicación: transmitir la información con el mínimo ancho de banda B y la máxima relación S/N .

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

La expresión (4.47) indica también que la información contenida en una señal se puede recuperar aún si la relación S/N es muy pequeña. (¿Y cómo se logra?, pues aumentando el ancho de banda B).

La ecuación de Hartley-Shannon proporciona el límite superior para la transmisión de información confiable por un canal ruidoso, y relaciona los tres parámetros de importancia en un canal: el ancho de banda del canal, la potencia promedio de la señal útil y la potencia promedio de la señal perturbadora. Aunque la ecuación ha sido deducida para un canal gaussiano, ella es de gran importancia en los sistemas de comunicación porque muchos canales prácticos se pueden modelar como un canal gaussiano. Además, ha sido demostrado que el resultado obtenido para el canal gaussiano proporciona una cota superior en el funcionamiento de un sistema que opera sobre un canal no gaussiano. Esto quiere decir que si una codificación dada tiene una probabilidad de error P_e operando sobre un canal gaussiano, cuando opera sobre un canal no gaussiano la probabilidad de error será menor que P_e . Por otro lado, Shannon ha demostrado que el ruido gaussiano es el peor ruido entre todos los ruidos posibles, y que la potencia del ruido gaussiano dentro de un ancho de banda dado es también la más alta de todos los ruidos posibles.

Rendimiento Máximo de un Canal

Cuando el ancho de banda de un canal está limitado, sea por sus propias características físicas o por regulaciones y normas técnicas, es necesario elegir un esquema de codificación de canal que optimice el rendimiento η_B del canal con la mínima probabilidad de error y el menor costo posible. De las expresiones (4.42) y (4.47), el “**Rendimiento Máximo de un canal**” viene dado entonces por

$$\eta_{B_{\max}} = \frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bps/Hz} \quad (4.48)$$

La teoría de Shannon no especifica cuál es el mejor esquema de codificación que permite alcanzar este rendimiento máximo, pero sí establece que para transmitir sin error los símbolos o muestras codificadas deben poseer una cierta redundancia. Los sistemas prácticos cuyo rendimiento se aproxima a este rendimiento máximo incorporan mucha redundancia mediante esquemas de codificación que incluyen codificaciones multinivel m-arias y procedimientos para la detección y/o corrección de errores y compresión de datos, etc.

La ecuación de Hartley-Shannon tiene dos implicaciones importantes para los ingenieros de comunicaciones. Primero, porque expresa la forma óptima absoluta con que se puede obtener una transmisión de información segura, dados los parámetros del canal. Segundo, porque, en caso de una velocidad de información específica, expresa que se puede reducir la potencia de la señal (o la relación S/N, para una potencia de ruido N específica) aumentando el ancho de banda B en una magnitud dada, y viceversa. Este aspecto lo veremos más adelante.

♣ Ejemplo 4.11. Información contenida en una Imagen de Televisión.

La cámara a color requiere 5×10^5 elementos de imagen con 16 niveles de brillantez y 16 matices de color por cada nivel. La velocidad de transmisión de las imágenes es de 30 por segundo. Vamos a calcular los diferentes parámetros del sistema.



Fig. 4.8

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Solución:

Número de elementos por imagen: $N_{el} = 5 \times 10^5$ elementos/imagen

Información por elemento: $I_{el} = \log_2(16 \times 16) = 8$ bits/elemento

Información por imagen: $I_{img} = N_{el} \cdot I_{el} = 4 \times 10^6$ bits/imagen

Velocidad de las imágenes: $V_{img} = 30$ imágenes/seg

Tiempo de transmisión de un elemento: $T = \frac{1}{V_{img} N_{el}} = \frac{1}{30 \times 5 \times 10^5} = 6,667 \times 10^{-8}$ seg

Velocidad de Información: $V_i = \frac{I_{el}}{T} = \frac{8}{6,667 \times 10^{-8}} = 120 \times 10^6$ bps

Capacidad mínima del Canal: $C = V_i = 120 \times 10^6$ bps

Si el ancho de banda del canal fuera de 6 MHz, la relación S/N mínima sería, de (4.47),

$$120 \times 10^6 = 6 \times 10^6 \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right), \text{ de donde } \frac{S}{N} = 1,049 \times 10^6 = 60,21 \text{ dB}$$

El lector puede demostrar, en la misma forma, que en el caso de TV en blanco y negro (solamente 16 niveles de brillantez), los parámetros son:

$$I_{el} = 4 \text{ bits/elemento}; T = 6,6667 \times 10^{-8} \text{ seg.}; V_i = C = 60 \times 10^3 \text{ bps}$$

$$\frac{S}{N} = 1023 = 30,10 \text{ dB}$$

Obsérvese que para la misma potencia de ruido y ancho de banda, la señal de TV a color necesita una potencia 1000 veces (30,1 dB) mayor que en TV blanco y negro. ♣

4.6. EL SISTEMA IDEAL DE TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN

4.6.1. Introducción

La expresión (4.47) está considerada como el Teorema Central de la Teoría de la Información. Es evidente, a partir de este teorema, que el ancho de banda y la potencia de la señal se pueden intercambiar, es decir, que para una capacidad dada C se puede aumentar el ancho de banda B reduciendo la potencia de señal S (disminución de la relación S/N), o viceversa. Los procesos de codificación y modulación son los medios utilizados para efectuar este intercambio “Ancho de Banda-Relación Señal/Ruido”. Nótese que la capacidad del canal representa la máxima cantidad de información que se puede transferir en un segundo, y con los métodos de codificación y modulación se trata de alcanzar este máximo teórico. Sin embargo, como veremos posteriormente, los sistemas reales no pueden alcanzar el potencial inherente en el ancho de banda y potencia que utilizan. Por ejemplo, en un canal telefónico la relación S/N para una buena recepción es de aproximadamente 30 dB. Como su ancho de banda efectivo es de 3,2 kHz, la capacidad teórica del canal es del orden de los 32 kbps. Nótese que se puede aumentar aún más la velocidad de información utilizando diferentes métodos, pero no así la velocidad de modulación. La máxima velocidad de modulación sobre un canal telefónico de 3,2 kHz no debe sobrepasar los 2400 baudios, mientras que la velocidad de información llega ya a 56 kbps (con el Módem UIT-T V.90). El UIT-T establece en sus normas los valores permitidos.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

4.6.2. El Receptor Ideal

Intercambio Ancho de Banda-Relación S/N

La ecuación de Hartley-Shannon nos permite deducir la ley para el intercambio entre el ancho de banda y la relación S/N en un sistema de transmisión ideal. Consideremos, por ejemplo, una señal mensaje que ocupa un ancho de banda B_m y que la información en ella contenida se produce a una velocidad de V_i bps. Supongamos que esta señal se ha codificado o modulado de tal manera que el ancho de banda resultante o ancho de banda de transmisión es B_T , con $B_T \geq B_m$. Esta señal se transmite y es recibida en un receptor ideal, como se muestra en la Fig. 4.9.

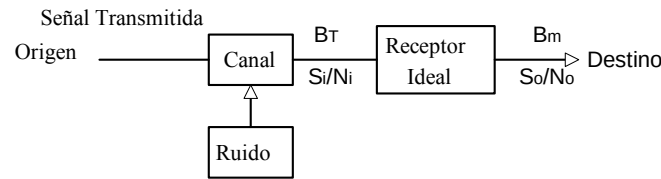


Fig. 4.9. Recepción Ideal.

La salida del receptor ideal será la señal mensaje de ancho de banda B_m y algún ruido introducido en el canal. Sea entonces S_i y N_i las potencias de señal y de ruido, respectivamente, a la entrada del receptor ideal, y S_o y N_o las correspondientes potencias de salida.

Como la velocidad de información es la misma en todos los puntos del sistema, se verifica entonces que, de (4.47),

$$B_T \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i} \right) = B_m \log_2 \left(1 + \frac{S_o}{N_o} \right)$$

$$\text{de donde, } \frac{S_o}{N_o} = \left[1 + \frac{S_i}{N_i} \right]^{\frac{B_T}{B_m}} - 1 \quad (4.49)$$

En la práctica, S_o/N_o y $S_i/N_i \gg 1$, de modo que

$$\frac{S_o}{N_o} \approx \left[\frac{S_i}{N_i} \right]^{\frac{B_T}{B_m}} \quad (4.50a)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} \approx \frac{B_T}{B_m} \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{dB}} \quad (4.50b)$$

Nótese que se puede aumentar S_o/N_o si se aumenta S_i/N_i y se mantiene B_T constante; pero esto implica aumentar la potencia transmitida (si las condiciones de ruido no cambian). También se puede mantener S_i/N_i constante y aumentar B_T , lo cual es más razonable pues no es necesario aumentar la potencia transmitida. Sin embargo, este intercambio o compromiso “Ancho de Banda-Relación Señal/Ruido (S/N)” está limitado físicamente en los sistemas reales, como veremos en los Capítulos V y VI.

En un sistema ideal la relación Señal/Ruido a la salida aumenta exponencialmente con la relación B_T/B_m . Esto quiere decir que para un pequeño aumento en el ancho de banda B_T , se puede reducir considerablemente la potencia de la señal transmitida. Por otra parte, para una pequeña reducción en el ancho de banda B_T , es necesario incrementar considerablemente la potencia de la

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

señal transmitida. Por lo tanto, en la práctica, el compromiso es en el sentido de reducir la potencia de transmisión a costas de un aumento en el ancho de banda de transmisión y no así lo contrario.

Relación de Expansión del Ancho de Banda

La expresión (4.49) representa el límite teórico máximo y la utilizaremos como referencia para comparar el comportamiento de los diferentes sistemas prácticos de codificación y modulación que veremos en los Capítulos V y VI. En la Fig. 4.10(a) se grafica (4.50b) para diferentes valores de la relación $\beta_m = B_T/B_m$, denominada “**Relación o Factor de Expansión del Ancho de Banda**”. Los sistemas de banda ancha, que veremos en los Capítulos V y VI, se caracterizan por un alto valor de la relación B_T/B_m .

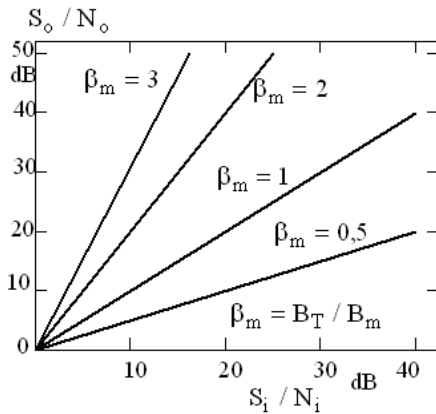
La capacidad del canal ideal es, de (4.47),

$$C = B_T \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i} \right) \text{ bps} \quad (4.51)$$

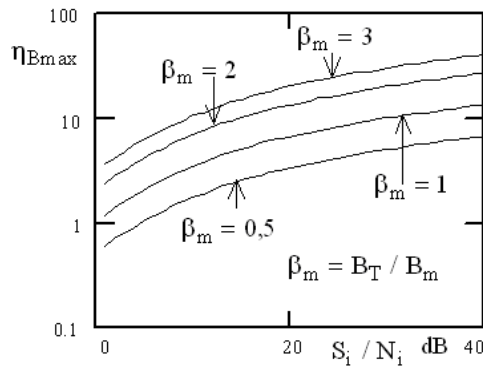
Si $\beta_m = B_T / B_m$ es la relación o factor de expansión del ancho de banda, entonces se puede escribir $C = \beta_m B_m \log_2 (1 + S_i / N_i)$, y el “**Rendimiento Máximo del Canal Ideal**” respecto al ancho de banda de la señal mensaje será

$$\eta_{Bmax} = \frac{C}{B_m} = \beta_m \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i} \right) \text{ bps/Hz} \quad (4.52)$$

En la Fig. 4.10(b) se grafica este rendimiento para diferentes valores de β_m .



(a) S_o/N_o vs S_i/N_i



(b) Rendimiento Máximo vs S_i/N_i

Fig.4.10. Características del Receptor Ideal

Nótese que el rendimiento máximo del canal ideal, para las mismas condiciones de potencia o relación S_i/N_i , depende de la relación de expansión del ancho de banda β_m , y las curvas de la Fig. 4.10(b) representan los límites máximos que pueden alcanzar los sistemas reales. Las Fig. 4.10(a) y (b) muestran también que los sistemas de banda ancha, en los cuales $\beta_m \gg 1$, son mucho más eficientes que los sistemas de banda angosta, en los cuales $\beta_m \leq 2$. Nótese también que los valores de S_i , N_i y B_T , de acuerdo con el Teorema Fundamental de Shannon, establecen un límite sobre la velocidad de transmisión pero no en la exactitud en la transferencia de la información.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Estos conceptos los aplicaremos al estudiar algunos esquemas de modulación específicos en los Capítulos V y VI.

Quizás el resultado más sorprendente demostrado por Shannon en su teorema fundamental es que no hay un límite en la confiabilidad con que se puede transmitir señales binarias sobre un canal ruidoso mientras la velocidad de transmisión sea menor que la capacidad C del canal. El mecanismo para alcanzar este alto nivel arbitrario de confiabilidad es mediante una codificación apropiada que agregue una cierta cantidad de redundancia. Sin embargo, Shannon no dijo qué tipo de codificación era la mejor, él solamente demostró que había códigos que optimizaban la velocidad de información y que no había posibilidad de comunicación libre de error por un canal ruidoso si los mensajes se codificaban con cero redundancia. Su trabajo se centró en algunos de los siguientes problemas que surgen en los sistemas destinados a manipular información: cómo hallar los mejores métodos para utilizar los diversos sistemas de comunicación; cómo establecer el mejor método para separar las señales del ruido y cómo determinar los límites posibles de un canal.

Inicialmente, la capacidad C de Shannon fue considerada por los ingenieros de telecomunicaciones como una curiosidad o ficción matemática. Pero, poco a poco, debido al esfuerzo de ingenieros y matemáticos, se han elaborado códigos muy buenos y desarrollado la tecnología para su instrumentación y aplicación. Un estudio detallado de la teoría de la codificación está fuera de los objetivos de este texto.

En general, la teoría de la información proporciona una perspectiva diferente para evaluar el funcionamiento de los sistemas de comunicación y para tener una percepción significativa de las características de funcionamiento de los sistemas. El estudio de la teoría de la información suministra una medida cuantitativa de la información contenida en las señales mensaje y permite determinar la capacidad de un sistema para transferir esta información desde su origen hasta su destino. Introduce, asimismo, el concepto de codificación, mediante el cual se puede utilizar los canales con el máximo rendimiento. La teoría de la codificación es, en sí misma, un sujeto muy importante en la teoría general de la información.

En su intención original la teoría de la información se refiere sólo a las condiciones técnicas que permiten la transmisión de mensajes, pero eso no impidió que lograra una amplia repercusión y terminara elevada a la calidad de paradigma. La primera versión de la teoría de la información apareció en el Bell System Technical Journal de octubre de 1948, perteneciente a la Bell Telephone Laboratories. Poco después el sociólogo Warren Weaver redactó un ensayo destinado a enfatizar las bondades de esta propuesta, que fue publicado junto con el texto anterior en julio de 1949, en el cual se interpretaba, desde el punto de vista de la teoría de la información, el proceso de la comunicación humana y los medios de comunicación social. En este texto nos hemos atendido al propósito original de la propuesta de Shannon como una teoría de la transmisión de información de aplicación en las telecomunicaciones.

La teoría de la información es una disciplina muy vasta y compleja, y aquí sólo hemos presentado un vistazo muy somero de ella para ilustrar algunos aspectos prácticos de la teoría que utilizaremos en los siguientes capítulos.

4.7. RESUMEN

En este capítulo se ha discutido en forma muy breve algunos de los aspectos resaltantes de la Teoría de la Información y de los principios de la codificación digital de señales. De la definición básica de la cantidad de información, se han deducido algunos parámetros tales como la velocidad

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

de información, la velocidad de modulación y el ancho de banda mínimo para transmitir un impulso, y se ha introducido la noción de codificación digital de la información, con algunos ejemplos como el Código ASCII y el Código Baudot, de gran aplicación práctica.

Un aspecto de considerable importancia es el concepto de capacidad de un canal. Se discute en forma cualitativa el Teorema Fundamental de Shannon y la Ecuación de Hartley-Shannon, y se deduce algunas expresiones que introducen la noción de Sistema Ideal de Transmisión de Información, concepto que se utilizará para comparar los diferentes sistemas de comunicación prácticos que se estudiarán en los Capítulos V y VI.

El tratamiento de los temas ha sido necesariamente muy breve y sencillo, y su objetivo es el de dar al lector una descripción básica de algunos aspectos de la teoría de la información que se aplicarán en capítulos posteriores.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

- 4.1. Sea un alfabeto en el cual la probabilidad de ocurrencia de las diferentes letras se da en la tabla siguiente:

A	0,081	E	0,124	I	0,072	M	0,072	Q	0,002	V	0,009
B	0,016	F	0,023	J	0,001	N	0,072	R	0,060	W	0,020
C	0,032	G	0,016	K	0,005	O	0,079	S	0,066	X	0,002
D	0,037	H	0,051	L	0,040	P	0,023	T	0,096	Y	0,019
								U	0,031	Z	0,001

- (a) ¿Cuál letra proporciona la máxima cantidad de información?
- (b) ¿Cuál letra proporciona la mínima cantidad de información?
- (c) Suponga que las letras se eligen independientemente para formar palabras (lo cual no se ajusta a la realidad). Demuestre que la entropía de este alfabeto es de 4,316 bits/letra.
- (d) Sea el juego siguiente: se trata de adivinar una palabra y se da como pista la primera letra de la palabra. ¿En español, cuál letra es más útil en el juego, la letra E o la letra Z?
- 4.2. Una fuente de información produce 128 símbolos independientes, de los cuales 16 ocurren con una probabilidad de $1/32$, y los 112 restantes con una probabilidad $1/224$. La fuente produce 100 símbolos por segundo.
- Demuestre que la velocidad de información promedio de la fuente es de 640,4 bps.
- 4.3. Un alfabeto consta de las siguientes letras: A, B, C, D, E, F, H y O, cuya aparición suponemos equiprobable. Estas letras se codifican en binario puro con un impulso de arranque y uno de pare; todos los impulsos tienen la misma duración. El canal de transmisión tiene un ancho de banda de 4 kHz.

- (a) Demuestre que la palabra FACHADA se puede transmitir en 8,75 mseg y con una velocidad de información de 2400 bps.
- (b) Asigne a cada letra una muestra codificada y muestre la forma de la palabra CAFE a la salida del codificador. Suponga que el impulso de arranque está siempre a CERO y el impulso de pare siempre a UNO.
- (c) Si las probabilidades de las 8 letras son, respectivamente, 0,2, 0,15, 0,15, 0,1, 0,25, 0,05, 0,05 y 0,05, demuestre que la información promedio, por letra, es de 2,766 bits.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

- 4.4. El alfabeto de una máquina de escribir consta de 32 caracteres alfanuméricos que suponemos equiprobables, y se desea escribir una página de 280 caracteres. Una persona escribe a una velocidad de 2 bps.

Demuestre que la persona puede escribir una página en 11 minutos y 40 segundos.

- 4.5. Una fuente produce ocho símbolos distintos e independientes cuyas probabilidades de aparición son: un símbolo con una probabilidad de 0,512; tres símbolos con una probabilidad, cada uno, de 0,128; tres símbolos con una probabilidad, cada uno, de 0,032, y un símbolo con una probabilidad de 0,008. Los símbolos se producen a una velocidad de 1000 símbolos por segundo, se codifican en binario para transmitirlos por un canal telefónico de 4 kHz.

Demuestre que los símbolos sí pueden transmitirse por el canal telefónico y que la velocidad de información y de modulación son, respectivamente, de 2166 bps y 3000 baudios.

- 4.6. Se tiene 64 monedas de las cuales sabemos que una es falsa. Disponemos también de una balanza de precisión con la cual podemos pesar las monedas.

(a) Si sabemos que la moneda falsa pesa menos que las buenas, determine el número mínimo de pesadas necesarias para descubrir cuál es la moneda falsa.

(b) Repita la parte (a) pero en este caso no sabemos si la moneda falsa pesa más o menos que las monedas buenas.

Nota: En las partes (a) y (b) hay que calcular no solamente el número de pesadas sino mostrar también el procedimiento para efectuarlas.

- 4.7. Se escucha un partido de fútbol y el narrador habla a una velocidad de 300 palabras por minuto. Con los datos del Ejemplo 1.3, demuestre que el locutor transmite a una velocidad de 46,5 bps.

- 4.8. Vamos a determinar la información contenida en una fotografía en blanco y negro. La imagen está compuesta por puntos con 8 niveles de gris, todos igualmente probables; la resolución de la imagen es de 5 puntos por mm.

Demuestre que la cantidad de información contenida en una fotografía de 10 cm x 10 cm es $I = 7,5 \times 10^5$ bits

- 4.9. El refrán dice que “una imagen vale mil palabras”. Utilizando las suposiciones de los dos problemas anteriores, demuestre que el tamaño que deberá tener la imagen (cuadrada) para que la información contenida en ella sea igual a la de 1000 palabras, es de

11,14 mm x 11,14 mm

- 4.10. Contenido de Información de Textos Escritos.

(a) ¿Cuál tiene más información: una página de un texto o la correspondiente página de apuntes (de igual número de palabras) del mismo tópico? Razone su respuesta.

(b) Vamos a estimar la información promedio contenida en una página de un periódico. Una página tiene una superficie útil de 50 cm x 60 cm, los tipos tienen dimensiones de 3 mm x 3 mm, el espaciado entre palabras es de 3 mm y la separación entre líneas es de 6 mm. Con los datos del Ejemplo 4.3, demuestre que la información promedio contenida en una página es de 16820 bits.

- 4.11. El intercambio de información entre una computadora y su unidad de disco se efectúa a una velocidad de 36400 bps. La información o texto se considera formada por “páginas” de 30 líneas de 80 columnas con 7 bits por carácter.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

- (a) Demuestre que la computadora puede transferir 650 páginas de texto en 5 minutos.
 - (b) Las páginas almacenadas en la unidad de disco se van a transmitir ahora a razón de 30 páginas por segundo por un canal de 42 kHz de ancho de banda y en el cual la potencia de ruido es de 1 mW. Demuestre que para que no haya pérdida de información, la potencia promedio mínima de la señal debe ser de 4,095 W o 36,123 dBm.
- 4.12. Una fuente de información produce 16 símbolos distintos y equiprobables a una velocidad de 1000 símbolos por segundo. Los símbolos se codifican en binario más un impulso de sincronización, todos de igual duración, los cuales se transmiten por un canal con un ancho de banda de 1 kHz. Demuestre que:
- (a) La velocidad de modulación en el canal es de 5000 baudios.
 - (b) Para que no haya pérdida de información, la relación S/N en el canal deberá ser, como mínimo, de 11,7609 dB.
- 4.13. Una fuente produce símbolos los cuales se codifican en secuencias de 7 impulsos cuaternarios más 1 impulso de sincronización, todos de igual duración. Los cuatro niveles de cada impulso tienen probabilidades 0,4; 0,3; 0,2 y 0,1, respectivamente. La velocidad de modulación a la salida del codificador es de 80 kbaudios y se transmite un total de 1000 secuencias.
- (a) Si no hay ruido en el canal, demuestre que la cantidad de información que llegó a destino es de 12925 bits.
 - (b) En el canal hay ruido. El ancho de banda del canal es de 10 kHz y la relación S/N correspondiente es de 30 dB. Demuestre que para que no haya pérdida de información hay que aumentar la relación S/N en, por lo menos, 8,909 dB.
- 4.14. Una computadora trabaja en dos modalidades: Modo Texto y Modo Gráficos. En Modo Texto tiene un alfabeto de 256 caracteres alfanuméricos en una pantalla de 25 filas de 40 columnas cada una (Cada punto de la pantalla se denomina “pixel”). En Modo Gráficos la pantalla tiene una resolución de 200 filas y 300 columnas donde cada punto puede tener 16 colores diferentes y 4 niveles de intensidad. Demuestre que la cantidad de memoria necesaria para almacenar el contenido de la pantalla es:
- (a) En Modo Texto: 1 kbyte; (b) En Modo Gráficos: 45 kbytes.
- 4.15. La imagen de un televisor a color está formada por 525 líneas que contienen, cada una, 1000 puntos luminosos. Cada punto luminoso tiene 8 niveles de brillantez y 16 matices de color. La velocidad de las imágenes es de 30 por segundo.
- (a) Demuestre que la velocidad de la información producida por la imagen de televisión es de 110,3 Mbps.
 - (b) Transmisión Analógica. Si la relación S/N en el canal es de 60 dB y la potencia de ruido es de 1 μ W, demuestre que la potencia de señal es de 1 W y que se puede transmitir por un canal de ancho de banda de 5,534 MHz.
 - (c) Transmisión Digital. Si cada punto luminoso se codifica en ASCII sin bit de paridad (Fig. 4.13(b)) para su transmisión por un canal digital, demuestre que el ancho de banda mínimo necesario del canal es de 157,5 MHz.
 - (d) Si la potencia de ruido en el canal calculado en la parte (c) es de 1 μ W, demuestre que la potencia mínima de la señal para que no haya pérdida de información, debe ser de 0,625 μ W.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

- 4.16. En un sistema de transmisión de facsímil de alta resolución se necesita, por página, $2,25 \times 10^6$ elementos de imagen (esto equivale a 1500 líneas en cada dimensión), y para una buena reproducción se requiere 16 niveles de brillantez. La información se codifica en binario para ser transmitida por un canal de 4 kHz de ancho de banda.
- Demuestre que la información contenida en una imagen es de 9×10^6 bits.
 - Demuestre que una imagen se puede transmitir en 37,5 minutos.
 - Demuestre que si la información se codifica en impulsos cuaternarios, el tiempo de transmisión se reduce a la mitad.
 - Si la información se codifica en ASCII sin bit de paridad, Fig. 4.13(b), demuestre que una imagen se transmite en 93,75 minutos.
- 4.17. Una fuente de información produce 27 símbolos distintos y equiprobables, los cuales se codifican en impulsos ternarios. El codificador produce bloques que contienen 9 impulsos de información más un impulso de sincronización, todos de igual duración. En el sistema no hay pérdida de información. La velocidad de modulación a la salida del codificador es de 10 kbaudios. Demuestre que:
- La fuente está produciendo los símbolos a una velocidad de 3000 símbolos por segundo.
 - Se puede transmitir $5,135 \times 10^7$ bits en una hora.
- 4.18. Un terminal de datos produce 256 caracteres alfanuméricos que se codifican en n impulsos m -arios incluyendo un impulso de arranque y uno de pare, todos de igual duración. La señal codificada se transmite por un canal de ancho de banda de 10 kHz y con una relación S/N de 11,7609 dB. Demuestre que:
- Para que no haya pérdida de información, el terminal de datos debe generar los caracteres a una velocidad igual o menor de 5000 caracteres por segundo.
 - Si la velocidad de modulación máxima es $3/4$ de la velocidad de información máxima, entonces $m = 4$ y $n = 4$.
 - Para los mismos datos, ¿Qué pasaría si la codificación fuese en binario?
- 4.19. Una fuente de información produce 1024 símbolos distintos y equiprobables a una velocidad de 1250 símbolos por segundo. Los símbolos se codifican en impulsos cuaternarios más un impulso de arranque y uno de pare. La duración de los impulsos de arranque y de pare es 1,5 veces la duración de un impulso de información. Demuestre que:
- Las velocidades de modulación y de información son de 10 kbaudios y 12,5 kbps, respectivamente.
 - Si el ancho de banda del canal de transmisión es de 5 kHz y se transmiten 10^5 muestras codificadas, se pierden 5×10^5 bits de información.
- 4.20. Un codificador produce impulsos binarios cuya velocidad de modulación es de 8 kbaudios. Estos impulsos se van a transmitir por un canal de 1 kHz de ancho de banda y en el cual la relación S/N es de 11,7609 dB. En estas condiciones hay pérdida de información. Demuestre que para que no haya pérdida de información hay que aumentar la relación S/N, como mínimo, en 12,3045 dB.
- 4.21. Se tiene un convertidor automático, con una capacidad de 15×10^3 bps, que convierte información de un sistema de codificación a otro sistema. La entrada al convertidor es una secuencia de impulsos de amplitud variable cuya frecuencia es de $2,25 \times 10^5$ impulsos por

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

minuto. La salida del convertidor es otro tren de impulsos cuyo número de amplitudes es $1/4$ del número de amplitudes de los impulsos de entrada al convertidor.

Demuestre que la velocidad de modulación a la salida del convertidor es de 7,5 kbaudios y que los impulsos son cuaternarios.

- 4.22. Televisión de Barrido Lento (SSTV). En un sistema SSTV básico una celda fotoeléctrica barre la imagen y mide en cada punto de imagen uno de 16 valores de gris desde el blanco puro hasta el negro puro. La velocidad de barrido es de 2×10^3 puntos por segundo y el sistema requiere, por imagen, 128 líneas con 128 puntos por línea.

- (a) Demuestre que la información contenida en una imagen es de 8 Kbytes.
- (b) Si la señal de salida de la celda fotoeléctrica se transmite directamente por un canal, demuestre que el ancho de banda mínimo del canal es de 2 kHz.
- (c) La señal de salida de la celda fotoeléctrica se codifica en binario y se almacena 100 imágenes en la memoria de una computadora. Demuestre que la capacidad mínima de la memoria debe ser de 800 Kbytes y que el almacenamiento de la información se efectúa a una velocidad de 8 kbps.
- (d) Las imágenes almacenadas en la computadora se van a transmitir por un canal dado, pero a cada muestra se le agrega un impulso de arranque y uno de pare, ambos de duración el doble de la de los impulsos de información. Demuestre que si se quiere transmitir las 100 imágenes en 400 segundos, el ancho de banda del canal debe ser de 32,768 kHz.
- (e) Demuestre que si los impulsos de información tienen una duración de 40 μ seg y la transmisión se hace por un canal telefónico de 4 kHz de ancho de banda, la relación S/N mínima en el canal para que no haya pérdida de información es de 8,878 dB.

- 4.23. Sea un sistema de telefotografía. Una celda fotoeléctrica barre la fotografía (de blanco y negro) y en cada punto produce una señal cuya amplitud varía de 0 V a 127 mV correspondientes a 128 niveles de gris (desde el blanco puro al negro puro) de la fotografía. La celda se mueve a una velocidad de 4 cm por segundo, y su resolución es de 5 puntos por milímetro. La fotografía mide 10 cm x 15 cm.

- (a) Demuestre que la velocidad a la cual la celda produce información es de 1400 bps y que tarda 1875 seg en transmitir una fotografía.
- (b) Las señales producidas por la celda se codifican en binario y se guardan en la memoria de una computadora, en la cual se almacena 10 fotografías. Demuestre que el sector de la memoria donde se guardó la información debe tener una capacidad de 26.25 Mbits, y que la velocidad de modulación a la salida del codificador es de 1400 baudios.
- (c) La información contenida en la memoria se va a transmitir por un canal en ASCII sin bit de paridad. La transmisión de las 10 fotografías que estaban en la memoria se efectúa en 2 segundos. Demuestre que la velocidad de información en el canal es de 13,13 Mbps y que el ancho mínimo del canal debe ser de 18,75 MHz.
- (d) La salida de la celda fotoeléctrica se transmite directamente por un canal cuyo rendimiento es de 2 bps/Hz. Si la potencia de ruido en el canal es de 1 pW, demuestre que la potencia de la señal para que no haya pérdida de información es de 3 pW.

- 4.24. Una señal tiene un ancho de banda de 4 kHz. Esta señal se pasa por un convertidor que la convierte en secuencias de 8 impulsos binarios, teniendo cada secuencia una duración de 100 μ seg.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

- (a) Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal para transmitir las secuencias binarias en ausencia de ruido, es $B_n = 80 \text{ kHz}$
- (b) El canal tiene un ancho de banda de 50 kHz. Demuestre que la relación S/N mínima, en dB, para transmitir las secuencias sin error es de 3,08 dB.
- 4.25. Una señal $s(t)$ es transmitida por un canal perturbado por un ruido $n(t)$, siendo S_i/N_i y S_o/N_o las relaciones señal-ruido a la entrada y salida del receptor, respectivamente, como se muestra en la Fig. 4.11. En el sistema no hay pérdida de información. El ancho de banda B_c del canal es de 16 kHz, la relación S_i/N_i es de 14,9136 dB y el ancho de banda B_r del receptor es de 8 kHz. Demuestre que la relación señal/ruido a la salida del receptor es de 30,098 dB.
- 4.26. Un terminal de datos se utiliza para enviar información hacia una computadora central a través de una línea telefónica de 3 kHz de ancho de banda; la relación S/N en el canal es de 10 dB. El terminal de datos produce caracteres alfanuméricos en ASCII sin bit de paridad y en su memoria hay almacenados 8000 bits de información.
- (a) Demuestre que la capacidad del canal es $C = 10378 \text{ bps}$
- (b) Demuestre que la máxima velocidad de información en el canal sin ruido es de 2100 bps
- (c) Demuestre que el tiempo que tarda el terminal en vaciar la memoria es $T_t = 30,48 \text{ seg.}$
- (d) Si la información se transmite en código BAUDOT, Fig. 4.13(a), demuestre que el tiempo que tarda en vaciarse la memoria es $T_t = 34,773 \text{ minutos}$
- 4.27. Sea el sistema mostrado en la Fig. 4.12.

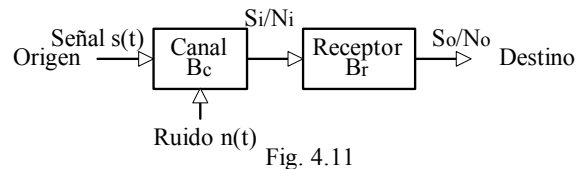


Fig. 4.11

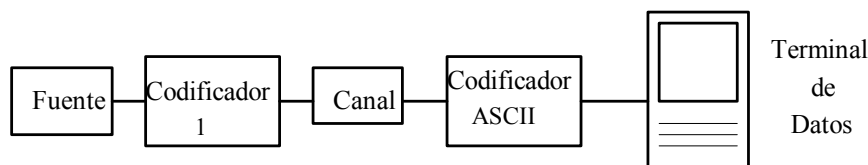


Fig. 4.12.

La fuente produce N símbolos distintos y equiprobables a una velocidad de 1000 símbolos por segundo. El terminal de datos solamente acepta secuencias codificadas en ASCII sin bit de paridad. El codificador 1 agrega a cada muestra un impulso de arranque y uno de pare, ambos de la misma duración que los de información. No hay pérdida de información en el sistema.

- (a) Determine N , los valores apropiados de m y n para el codificador 1, y el ancho de banda mínimo del canal
- (b) Demuestre que las velocidades de modulación y de información a la entrada del terminal de datos son, respectivamente, $V_b = 10 \text{ kbaudios}$ y $V_i = 7 \text{ kbps}$.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

4.28. Una fuente de información digital produce dígitos a una velocidad de 128 kbps.

- (a) En un codificador (denominado 4B/3T) se transforma grupos de 4 dígitos binarios en grupos de 3 dígitos ternarios; no hay pérdida de información en el canal. La secuencia, así codificada, se transmite por un canal.

Demuestre que la velocidad de modulación en el canal es de 96 kbaudios.

- (b) Se puede utilizar también un codificador 4B/5B (utilizado en la transmisión por fibras ópticas) que transforma grupos de 4 dígitos binarios en grupos de 5 dígitos, binarios también, sin pérdida de información.

Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal debe ser 5/4 veces más grande que el ancho de banda mínimo antes del codificador

4.29. Códigos Binarios BAUDOT y ASCII (Alfabeto Internacional N° 5 de la UIT-T)

En la Fig. 4.13 se muestran los formatos de los Códigos BAUDOT y ASCII (sin bit de paridad). Ver APENDICE B.5 y B.6.

En el Código ASCII los caracteres fluyen a una velocidad de 100 caracteres por segundo.

Para el Código BAUDOT tomar las duraciones dadas en la figura.

(Nota: en ambos códigos el bit o dígito binario 1 es el de menor peso).

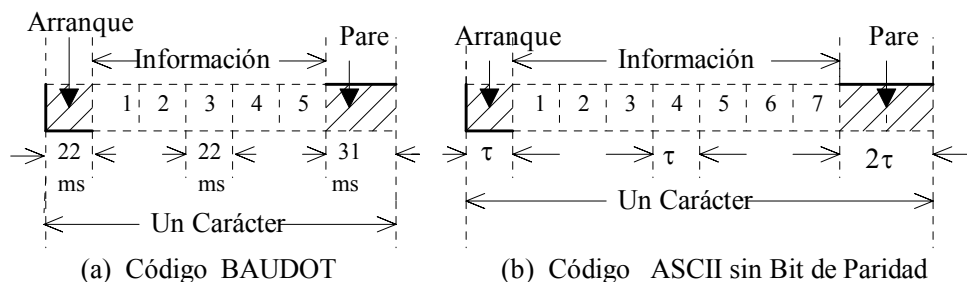


Fig. 4.13. Formatos de los CODIGOS BAUDOT y ASCII.

- (a) Determine las velocidades de modulación y de información para cada uno de estos códigos.

- (b) ¿Qué significa la siguiente información codificada en ASCII?

0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1

- (c) ¿Cómo se codificaría la misma información de (b) pero en BAUDOT?

4.30. Límite de Shannon.

Considere la ecuación de Hartley-Shannon. La potencia de ruido N se expresa en la forma $N = \eta B$, donde η tiene dimensiones de vatios por unidad de ancho de banda (W/Hz) y es la “densidad espectral de potencia de ruido”. N es entonces la potencia de ruido contenida en el ancho de banda B . Si el ancho de banda B aumenta sin límites ($B \rightarrow \infty$), demuestre que

$$\lim_{B \rightarrow \infty} C = \left[\frac{S}{\eta} \right] \log_2 e = 1,443 \left[\frac{S}{\eta} \right] = V_{iMAX} \quad (4.53)$$

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Este resultado se conoce con el nombre de “Límite de Shannon” y representa la máxima velocidad de información en un sistema de comunicación con una potencia promedio transmitida dada pero sin la limitación del ancho de banda, como es el caso de los sistemas de comunicación espacial o por satélites.

- 4.31. Consideremos el receptor ideal de la Fig. 4.9 . Demuestre que si el ancho de banda del canal tiende a infinito ($B_T \rightarrow \infty$), entonces

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right] \approx \exp\left(\frac{S_i}{\eta B_m}\right) = \exp(\gamma) \quad \text{cuando} \quad \frac{S_o}{N_o} \gg 1 \quad (4.54)$$

Nótese que $\gamma = \frac{S_i}{\eta_o B_m}$ representa la relación entre la potencia de la señal (transmitida) en el canal respecto a la potencia de ruido dentro de la banda de la señal misma (B_m). Por consiguiente, teóricamente, en condiciones ideales cuando el ancho de banda de transmisión B_T tiende a infinito, la relación S_o/N_o a la salida aumenta exponencialmente con γ .

1.32. Rendimiento del Canal en el Sistema Ideal de Transmisión.

En la expresión (4.42) se definió el “rendimiento del canal respecto al ancho de banda” en la forma $\eta_B = \frac{V_i}{B}$. Si se define la “Energía por Dígito Binario, E_b ” en la forma $E_b = S\tau$, donde τ es la duración de un dígito binario, demuestre que si el sistema es binario y $V_i = C$, entonces

$$\eta_B = \log_2 \left(1 + \eta_B \frac{E_b}{\eta_o} \right) \quad \eta_B \text{ se expresa en bps/Hz} \quad (4.55)$$

Grafique también η_B vs E_b/η_o para $1 \leq \frac{E_b}{\eta_o} \leq 100$

Sugerencia: utilice escalas log-log.

4.33. Rendimiento y Redundancia de Codificación.

El **rendimiento de un código o de un codificador** se puede definir en la forma siguiente:

$$\eta_{co} = \frac{V_i}{V_b} = \frac{n \log_2 m}{n + r} \quad \text{bps/baudio} \quad (4.56)$$

donde n es el número de impulsos de información, y r el número de impulsos redundantes (ver ecuación (4.28) y Fig. 4.4).

En los sistemas binarios ($m = 2$) se suele definir también la “**redundancia de codificación, R_{co}** ” en la forma

$$R_{co} = 1 - \eta_{co} = \frac{V_b - V_i}{V_b} = \frac{r}{n + r} \quad (4.57)$$

En este caso, $V_b \geq V_i$, y tanto η_{co} como R_{co} se pueden expresar en forma porcentual ($\eta_{co}\%$ y $R_{co}\%$).

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

Nótese que la codificación binaria es la menos eficiente, pero es la más utilizada por su facilidad de instrumentación.

- (a) Determine el rendimiento de los Códigos Baudot (Fig. 4.13(a)), ASCII con bit de paridad (Fig. 4.5), y del codificador del Ejemplo 4.9.

- (b) **Transmisión Sincrónica, Código ASCII.** Los bloques de datos se estructuran en la forma siguiente: se colocan tres caracteres SYN (de sincronización) al inicio de cada bloque, a continuación 256 caracteres de información y se termina el bloque con un carácter ETX. Ni los caracteres SYN y ETX, ni los caracteres de información contienen los impulsos de arranque, paridad y pare, solamente los impulsos de información. Los caracteres SYN y ETX están definidos en la Tabla B.5 en el Apéndice B.

Demuestre que en Transmisión Sincrónica $\eta_{co} \% = 98,5\%$ y $R_{co} \% = 1,5\%$

- (c) **Transmisión Asincrónica, Código ASCII.** Se transmite bloques de 256 caracteres ASCII incluyendo todos los impulsos redundantes (Fig. 4.5).

Demuestre que en Transmisión Asincrónica $\eta_{co} = 63,6\%$ y $R_{co} = 36,4\%$

- (d) Si la velocidad de modulación es la misma en los dos tipos de transmisión anteriores, ¿Cuál es la relación entre sus respectivas velocidades de información?

- 4.34. Cierta fuente de información transmite cada milisegundo un número octal (base 8). En el canal la potencia promedio de la señal es de 0,5 W y la de ruido 2 mW. Si a la salida del receptor el ancho de banda es de 100 Hz, demuestre que la relación S_o/N_o a la salida es de 90,31 dB y que el ancho de banda del canal es de 375 Hz.

- 4.35. Se desea introducir información a una computadora mediante tarjetas perforadas tipo IBM. Estas tarjetas tienen 80 columnas por F filas.

- (a) Si la computadora reconoce 256 caracteres alfanuméricos y cada carácter se almacena en una columna de la tarjeta, demuestre que en este caso cada columna tendrá 8 filas.
- (b) Si el lector de tarjetas lee 10 tarjetas por segundo, demuestre que el lector está entregando información a la computadora a una velocidad de 6400 bps.
- (c) Si la capacidad de la memoria de la computadora es de 600 Kbytes, demuestre que puede almacenar el contenido de 7680 tarjetas.

- 4.36. Un cierto sistema de comunicación posee un sintetizador de frecuencias que produce cuatro frecuencias diferentes: f_1 , $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$ y $f_4 = 4f_1$. Este sintetizador de frecuencia se utiliza como transmisor de información digital en el cual por cada dos bits de entrada al sintetizador se transmite una frecuencia según el esquema siguiente:

$$00 \rightarrow f_1; 01 \rightarrow f_2; 10 \rightarrow f_3; 11 \rightarrow f_4$$

La velocidad de modulación a la entrada del sintetizador es de 1000 baudios, y se sabe que para la transmisión del grupo 00 se transmite un solo ciclo de la frecuencia f_1 .

Demuestre que la velocidad de información en el sistema es de 1000 bps y que el valor de las frecuencias es $f_1 = 500$ Hz; $f_2 = 1$ kHz; $f_3 = 1,5$ kHz y $f_4 = 2$ kHz.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

4.37. Sea el sistema de la Fig. 4.14.

Las fuentes producen, respectivamente:

$$N_1 = 128 \text{ símbolos}$$

$$N_2 = 256 \text{ símbolos}$$

$$N_3 = 32 \text{ símbolos}$$

Todos estos símbolos son independientes y equiprobables. El codificador opera en la forma siguiente: primero toma un símbolo de la Fuente 1 y lo codifica en ASCII sin bit de paridad. Toma a continuación un símbolo de la Fuente 2 y lo codifica en binario agregándole un impulso de arranque y uno de pare, todos de igual duración. Por último, toma un símbolo de la Fuente 3 y lo codifica en binario agregándole un impulso de arranque y uno de pare, este último dura 1,5 veces más que los demás, incluidos los de las Fuentes 1 y 2. El codificador vuelve a la Fuente 1 y se repite el proceso. A la salida del codificador las secuencias codificadas individuales van saliendo una detrás de la otra formando un tren de impulsos cuya velocidad de modulación es de 2750 baudios y el cual es transmitido por el canal.

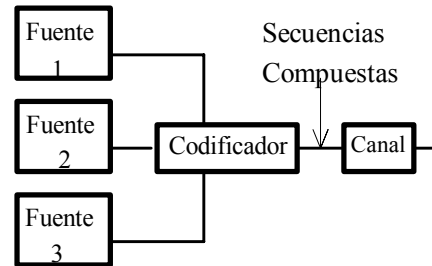


Fig. 4.14

- (a) Demuestre que la velocidad de información a la salida del codificador es de 2000 bps y que su rendimiento de codificación es del 72,7%.
 - (b) Si el rendimiento del canal respecto al ancho de banda es de 3 bps/Hz, demuestre que la relación S/N en el canal es de 8,451 dB.
 - (c) Si la relación S/N en el canal es de 15 dB, demuestre que el ancho de banda mínimo del canal es de 397,8 Hz.
- 4.38. La salida de cierta computadora está formada por 7 conductores (más un conductor común), cada uno de los cuales transmite impulsos con dos valores posibles: 0V y 5V; la duración de cada impulso es de 25 ms. Mediante una “interfaz” se convierte las 7 salidas de la computadora en una secuencia serie ASCII sin bit de paridad (Fig. 4.13(b)) para transmisión por un cable bifilar.

Demuestre que a la salida de la interfaz las velocidades de información y de modulación son, respectivamente, de 280 bps y 400 baudios.

IV. PRINCIPIOS DE LA TRANSMISION DE INFORMACION

CAPÍTULO V

MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.1. INTRODUCCIÓN

Las nociones sobre la información y codificación vistas en el Capítulo IV, más los principios del análisis espectro-temporal de señales y sistemas expuestos en los Capítulos I, II y III, constituyen un marco teórico básico suficiente para emprender el estudio de los diferentes métodos básicos de modulación y transmisión de señales empleados en los sistemas de comunicación.

A pesar de la existencia de una gran cantidad de métodos de modulación, es posible identificar dos tipos básicos de modulación de acuerdo con la clase de portadora: (a) la “**Modulación de Ondas Continuas (CW)**”, en la cual la portadora es simplemente una señal sinusoidal, y (b) la “**Modulación de Impulsos**”, en la cual la portadora es un tren de impulsos.

La Modulación de Ondas Continuas es un proceso continuo y por lo tanto es la apropiada para señales que varían en forma continua en el tiempo. En este caso la frecuencia de la portadora sinusoidal tiene generalmente un valor mucho más elevado que el ancho de banda de la señal moduladora o señal mensaje, y el proceso de modulación es simplemente un proceso de traslación de espectros. En el Capítulo VI trataremos en detalle la Modulación de Ondas Continuas.

La Modulación de Impulsos es un proceso discreto, en el sentido de que los impulsos están presentes solamente en ciertos intervalos de tiempo, lo que hace que la Modulación de Impulsos sea la forma apropiada para mensajes o información de naturaleza discreta.

La modulación de impulsos puede, a su vez, clasificarse en “**Modulación Analógica de Impulsos**” y “**Modulación Digital o Codificada de Impulsos**”. En efecto, en la modulación analógica de impulsos los parámetros modulados (amplitud, duración o posición de los impulsos) varían en proporción directa respecto a algún parámetro de la señal moduladora o mensaje. En la modulación digital de impulsos se efectúa previamente una codificación o conversión, en el sentido visto en el Capítulo IV, mediante la cual el mensaje es transformado en palabras codificadas (secuencias de impulsos) que representan valores de la señal moduladora tomados en ciertos intervalos de tiempo, aunque ésta no es la única forma de modulación digital de impulsos, como veremos en su oportunidad. Asimismo, en el proceso de la modulación de impulsos se introduce una operación denominada “**Muestreo de la Señal**” que es una de las transformaciones más importantes en el procesamiento y transmisión de señales digitales.

En este Capítulo se desarrollarán los conceptos de muestreo de señales y de la modulación y transmisión de impulsos. La teoría del muestreo se presentará como la base teórica de todos los sistemas de modulación de impulsos y a este efecto se estudiarán algunos de los sistemas más utilizados en la práctica tanto en el procesamiento como en la transmisión de señales. En particular, se hará énfasis especial en los sistemas de modulación codificada, pues éstos son los sistemas utilizados en la transmisión de señales digitales o datos. También se presentará un breve estudio de la transmisión digital de señales mediante dispersión o ensanchamiento del espectro (Spread Spectrum). Los criterios de calidad de los diferentes sistemas, para efectos de comparación, se enfocarán (a) desde el punto de vista del ancho de banda de las señales y de los canales, (b) según las relaciones S/N presentes, y (c), en grado menor, en la complejidad de los sistemas. Finalmente, se estudiarán las “**Técnicas de Multiplicidad en el Tiempo (TDM)**” y las “**Técnicas de Acceso Múltiple**” necesarias para la transmisión de una gran cantidad de mensajes por un mismo canal, así como los principios básicos de la transmisión y recepción de impulsos en banda de base o en portadora modulada. Sin perder el rigor teórico seguido, en todo momento se dará ejemplos,

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

circuitos y aplicaciones de sistemas prácticos, haciendo referencia principalmente a las Recomendaciones pertinentes del UIT-T.

5.2. TEORÍA DEL MUESTREO UNIFORME DE SEÑALES

5.2.1. Introducción

Bajo ciertas condiciones una señal continua en el tiempo puede especificarse completamente y recuperarse a partir del conocimiento de sus valores instantáneos o muestras tomadas a intervalos de tiempo uniformes. Un ejemplo muy ilustrativo de lo que esto significa lo constituye las series de fotografías de una cinta cinematográfica, donde cada fotografía representa escenas fijas espaciadas cada 1/24 segundos. Cuando estas fotografías se proyectan a esa misma velocidad (24 fotografías por segundo), nuestros ojos perciben una representación móvil, completa y exacta, de las escenas continuas originales.

Mucha de la importancia de la Teoría del Muestreo radica en que ella constituye un enlace o puente entre señales continuas y señales discretas y, como lo veremos en su oportunidad, su habilidad para representar una señal continua mediante una serie de muestras instantáneas, proporciona un mecanismo para representar señales continuas mediante señales discretas. En muchas aplicaciones el procesamiento de señales discretas es más fácil y flexible debido a la creciente disponibilidad de dispositivos digitales baratos, ligeros, fáciles de programar y adquirir.

La teoría del muestreo se puede resumir en cuatro teoremas, aunque no todos los autores la presentan en esta forma. Estos teoremas introducen y desarrollan el concepto de muestreo y el proceso de reconstitución o interpolación de una señal continua a partir de sus muestras. Estos conceptos son la base del procesamiento y transmisión digital de señales.

5.2.2. Teoremas del Muestreo Uniforme de Señales

Podemos preguntarnos si es necesario transmitir continuamente sobre un canal una señal de banda limitada B a fin de entregar toda la información asociada con ella. La respuesta es que no es necesario. Muchos de los sistemas de modulación de impulsos utilizan el hecho de que una señal de banda limitada puede transmitirse sin distorsión si se muestrea la señal periódicamente y se transmiten esos valores o muestras. Como la discusión estará limitada a sistemas físicos, solamente se considera señales reales continuas, monovalentes y limitadas en frecuencia o en el tiempo, según el caso.

Teorema N° 1. Teorema del Muestreo de Shannon [Shannon, 1949]

“Una señal $x(t)$ pasabaja cuya frecuencia máxima es f_m , se puede especificar unívocamente por sus valores o muestras $x(nT_s)$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, tomados en una serie de instantes discretos, llamados “instantes o puntos de muestra”, separados cada $T_s = 1/f_s$ segundos, donde $f_s \geq 2f_m$ ”.

En este contexto, f_s es la frecuencia de muestreo o “**Frecuencia de Shannon**” y T_s el “**Intervalo de Muestreo**”. La frecuencia mínima de muestreo, para la cual se verifica que $f_s = 2f_m$, se denomina “**Frecuencia de Nyquist**”, y el intervalo T_s correspondiente, “**Intervalo de Nyquist**”.

Formas más o menos complicadas de este teorema se conocían en la literatura matemática; pero fue Shannon quien en 1949 lo introdujo en el dominio de la teoría de la comunicación. Sin embargo, H. Nyquist ya había señalado en 1924 que $N = 2f_m T$ números eran suficientes para representar una función del tiempo de duración T y frecuencia máxima f_m , lo cual es otra forma de presentar este teorema.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

La demostración rigurosa del teorema de Shannon [Teorema 1, Shannon, 1949]] está fuera de los objetivos de este texto, pero sí haremos una demostración que introduce el concepto de muestreo a partir de nociones sencillas ya conocidas.

Sea entonces $x(t)$ una señal continua pasabajo de banda limitada f_m , cuya transformada de Fourier o espectro es $X(f)$. La señal $x(t)$ puede contener información.

Una señal muestreada $x_s(t)$ de $x(t)$ se puede considerar como el producto de la señal continua $x(t)$ por un tren de impulsos unitarios $p(t)$ de período T_s , denominado “señal muestreadora”, es decir,

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \quad (5.1)$$

Este tipo de muestreo se conoce con el nombre de “**Muestreo Ideal o Muestreo Instantáneo**”.

Del Ejemplo 2.9, expresión (2.45), el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ es

$$X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (5.2)$$

Vemos que $X_s(f)$ representa un espectro periódico formado por el desplazamiento de $X(f)$ a las frecuencias $\pm nf_s$, y con un factor de escala f_s , como se muestra en la Fig. 5.1(f).

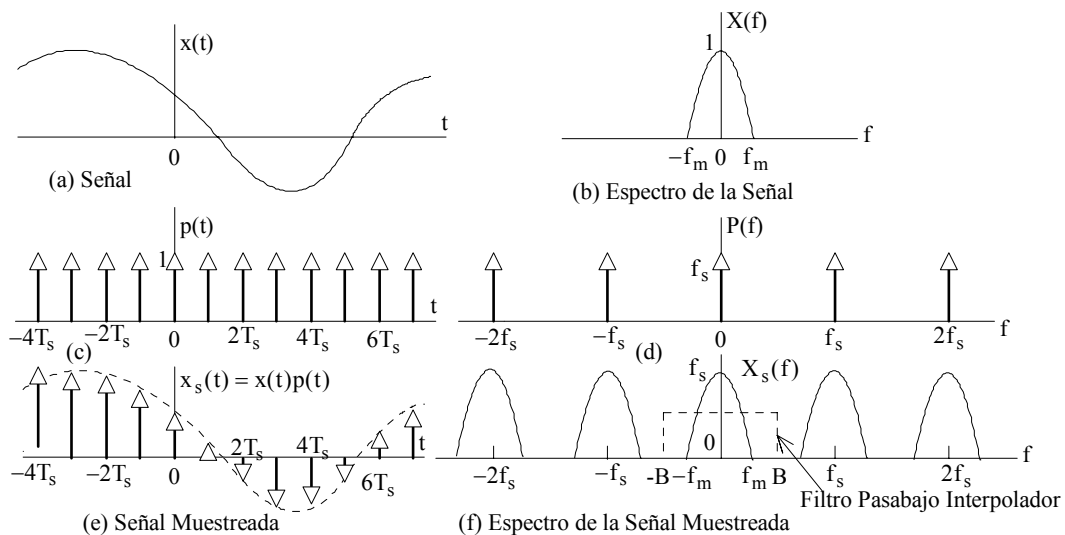


Fig. 5.1. Muestreo Instantáneo en el Dominio del Tiempo.

El espectro original de $x(t)$ aparece centrado en el origen y podrá ser recuperado con un filtro pasabajo mientras no se produzca solapamiento con los espectros adyacentes, lo cual se verifica si $f_s \geq 2f_m$. Nótese que para valores de $f_s < 2f_m$, los espectros se solaparán y se producirá distorsión en la recuperación de $x(t)$, como se puede observar en el Ejemplo 5.1. La recuperación de $x(t)$ la consideraremos en el siguiente teorema.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Teorema N° 2. Recuperación o Interpolación de la Señal

Este teorema tiene que ver con la recuperación de la señal original $x(t)$ a partir de su versión muestreada $x_s(t)$.

“Si una señal pasabajo cuya frecuencia máxima es f_m ha sido muestreada a una frecuencia f_s igual o mayor que $2f_m$ muestras por segundo, y las muestras se presentan en forma de impulsos cuya área es proporcional a la amplitud de la muestra en un instante dado, la señal original $x(t)$ se puede recuperar si se pasa la señal muestreada a través de un filtro pasabajo ideal con un ancho de banda B tal que $f_m \leq B \leq f_s - f_m$ ”.

El proceso de recuperación de $x(t)$ es fácil de visualizar en la Fig. 5.1(f), pero nosotros vamos a verificarlo para demostrar algunas relaciones importantes.

Para la recuperación de $x(t)$, Fig. 5.1(f), la señal muestreada $x_s(t)$ se hace pasar por un filtro ideal pasabajo de ancho de banda B y ganancia T_s de la forma

$$H(f) = T_s \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \exp(-j2\pi t_o f) \Leftrightarrow h(t) = 2BT_s \text{sinc}[2B(t - t_o)] \quad (5.3)$$

en el cual debe cumplirse que $f_m \leq B \leq f_s - f_m$.

Sea $x_r(t)$ la salida recobrada en el filtro, entonces $x_r(t) = x_s(t) * h(t)$

$$\text{De (5.1) y (5.3), } x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) * 2BT_s \text{sinc}[2B(t - t_o)]$$

$$\text{De donde } x_r(t) = 2BT_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2B(t - t_o - nT_s)] \quad (5.4)$$

Esta expresión indica que hay que tomar cada muestra y multiplicarla por una función $\text{sinc}(\cdot)$ centrada en el instante de ocurrencia de la muestra y sumar los términos resultantes. Esto es exactamente lo que sucede cuando las muestras se pasan por un filtro pasabajo ideal de ancho de banda B tal que $f_m \leq B \leq f_s - f_m$. Se efectúa entonces una interpolación y por esa razón la expresión (5.4) recibe el nombre de “**Ecuación de Interpolación**” y el filtro pasabajo ideal “filtro interpolador”. En la Fig. 5.2 se puede observar este proceso de interpolación para $B = \frac{f_s}{2} > f_m$, $2BT_s = 1$ y $t_o = 0$, en cuyo caso $x_r(t) = x(t)$.

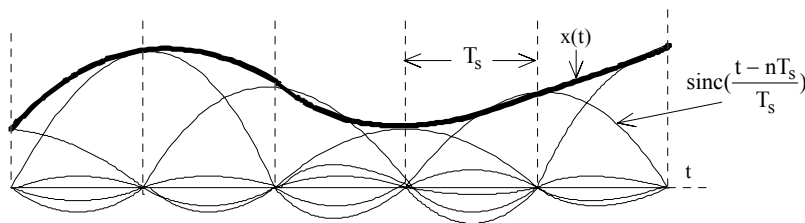


Fig. 5.2. Interpolación Lineal mediante la Señal Sinc(..).

Nótese en la Fig. 5.2 que cada muestra produce una señal $\text{sinc}(\cdot)$, la cual es cero en los otros puntos de muestra excepto en el propio. Por consiguiente, $x_r(t)$ toma los valores de $x(t)$ en los puntos de muestra. Pero la interpolación dada por (5.4) nos asegura también que entre los puntos de

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

muestra $x_r(t) = x(t)$ debido a la forma como se suman las señales sinc(.); de modo que con $2BT_s = 1$ y $t_0 = 0$, se tiene la “Ecuación de Interpolación de Shannon”,

$$x_r(t) = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left[\frac{2B(t - nT_s)}{T_s}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\text{sen}[2\pi B(t - nT_s)]}{2\pi B(t - nT_s)} \quad \text{para todo } t \quad (5.5)$$

Esta expresión se ha utilizado para demostrar el Teorema del Muestreo de Shannon.

Vemos entonces que si $f_s > 2f_m$ y $B = f_s / 2$, entonces la señal reconstruida $x_r(t)$ será exactamente igual a $x(t)$. Si se viola la restricción sobre el ancho de banda de $x(t)$, entonces $x_r(t)$ no será igual a $x(t)$. Sin embargo, podemos demostrar que si $B = f_s / 2$, entonces para cualquier valor de T_s y f_m , $x_r(t)$ y $x(t)$ serán iguales pero solamente en los instantes de muestreo. En efecto, si reemplazamos $B = f_s / 2 = 1 / 2T_s$ y $t_0 = 0$ en (5.4), obtenemos

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (5.6)$$

En el instante kT_s , donde k es un entero, la expresión (5.6) queda en la forma

$$x_r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}(k - n) = x(kT_s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(k - n)$$

Sea $m = k - n$, donde m es un entero pues k y n son enteros. De las propiedades de la función sinc(.),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(m) = \begin{cases} 1 & \text{para } m = 0 \text{ ó } k = n \\ 0 & \text{para } m \neq 0 \text{ ó } k \neq n \end{cases}$$

Por consiguiente, $x_r(t) = x(kT_s)$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$x_r(t)$ y $x(t)$ tendrán la forma aproximada mostrada en la Fig. 5.3.

Obsérvese que $x_r(t)$ y $x(t)$ son iguales solamente en los instantes de muestreo, y $x_r(t)$ aparece como una señal de menor frecuencia que $x(t)$. A medida que disminuye la frecuencia f_m de $x(t)$, las curvas se superponen en una sola y $x_r(t) = x(t)$ para todo t .

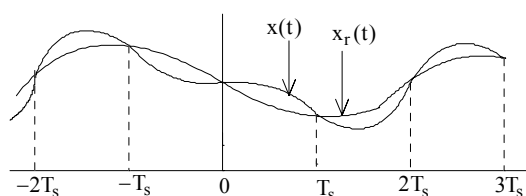


Fig. 5.3.

Si se muestrea periódicamente una señal $x(t)$ durante un tiempo $T = NT_s$, se tendrá N valores o muestras de la señal; entonces, de acuerdo con el teorema de Shannon, $T_s = \frac{1}{2f_m}$ y el número mínimo de muestras necesarias para una buena reconstrucción de la señal $x(t)$ será

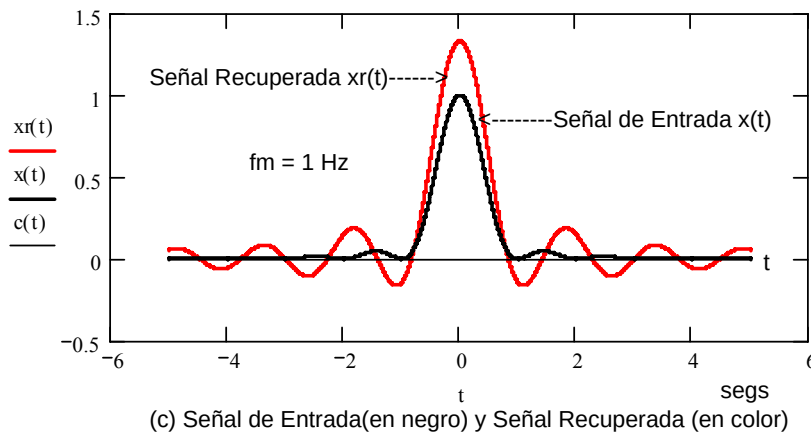
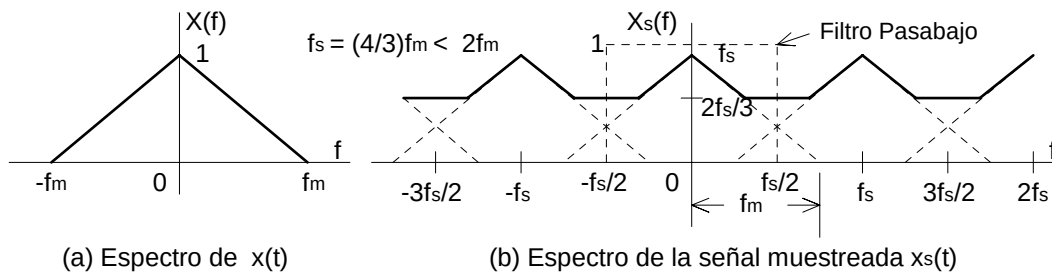
$$N = 2f_m T \quad (5.7)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Esta expresión, estudiada por Nyquist, es conocida también con el nombre de “dimensionalidad o teorema de la dimensionalidad”. En rigor, las muestras no necesariamente deben ser periódicas de período T_s , pero sí deben ser independientes. El teorema de la dimensionalidad, que se aplica tanto para señales pasabajo como pasabanda, simplemente establece que la información contenida en una señal de banda limitada (pasabajo o pasabanda) es proporcional al producto tiempo-ancho de banda. Este sencillo enunciado tiene, sin embargo, profundas implicaciones en el diseño y prestaciones de todos los tipos de sistemas de comunicación; por ejemplo, en sistemas de radar es bien conocido que el producto “tiempo-ancho de banda” de la señal recibida necesita ser muy alto para un mejor comportamiento. Los valores de muestra, una vez codificados digitalmente, se pueden almacenar en la memoria de una computadora para posterior reconstrucción o transmisión por un canal. Esto es de gran importancia en los sistemas de procesamiento y transmisión de señales digitales, como veremos posteriormente.

♣ Ejemplo 5.1. Efectos del Submuestreo

Para observar los efectos del submuestreo, es decir, el muestreo por debajo de la frecuencia de Nyquist, consideremos una señal $x(t)$ cuyo espectro $X(f)$ se muestra en (a) en la siguiente figura.



Sea $X(f) = \Delta\left(\frac{f}{f_m}\right) \Leftrightarrow x(t) = f_m \text{sinc}^2(f_m t)$ la señal que se va a muestrear.

Para una frecuencia de muestreo $f_s \geq 2f_m$, el espectro de la señal muestreada sería la repetición periódica del triángulo $X(f)$ a las frecuencias nf_s y la recuperación de $X(f)$ es directa mediante un filtro pasabajo interpolador de ancho de banda B donde $f_m \leq B \leq f_s - f_m$, como se muestra en la Fig. 5.1(f).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Supongamos ahora que $f_s = (4/3)f_m < 2f_m$ y se utiliza un filtro pasabajo interpolador de ancho de banda $B = f_s/2$. En este caso el espectro de la señal muestreada tiene la forma mostrada en (b). De la forma de $X_s(f)$ podemos verificar que el espectro de la salida $X_r(f)$ del filtro tiene la forma

$$X_r(f) = \frac{8}{9}f_m \Pi\left(\frac{f}{\frac{4}{3}f_m}\right) + \frac{4}{9}f_m \Delta\left(\frac{f}{\frac{4}{3}f_m}\right) \quad \text{cuya Antitransformada de Fourier es}$$

$$x_r(t) = \frac{32}{27}f_m^2 \text{sinc}\left(\frac{4}{3}f_m t\right) + \frac{4}{27}f_m^2 \text{sinc}^2\left(\frac{f_m}{3}t\right)$$

En (c) se muestran las formas de onda de la entrada y de la salida recuperada. Nótese que ya no son iguales: hay diferencias notorias entre la entrada y la salida; por ejemplo, aumentó la cantidad y amplitud de lóbulos laterales en la salida y eso incrementa la interferencia intersímbolo. Esta salida es completamente inutilizable. ♣

Teorema de Parseval para Señales Muestreadas

La ecuación de interpolación de Shannon, expresión (5.5), se puede utilizar para determinar una forma del Teorema de Parseval en el caso de señales muestreadas. En efecto, la energía de $x(t)$ viene dada por

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Como la potencia es igual a la energía por unidad de tiempo, podemos aproximar la potencia promedio de $x(t)$ dividiendo E_x por T_s ,

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{E_x}{T_s} = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (5.8)$$

Reemplazando (5.4) con $2BT_s = 1$ y $t_0 = 0$ en (5.8),

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}[2B(t - nT_s)] \right] dt$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{sinc}[2B(t - nT_s)] dt$$

Pero de las propiedades de la función sinc(..), expresión (1.49),

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^B \exp[-j2\pi(t - nT_s)f] df = \text{sinc}[2B(t - nT_s)], \text{ entonces}$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2B} \int_{-B}^B \exp[-j2\pi(t - nT_s)f] df \right] dt$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2BT_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-B}^B \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \right] \exp(j2\pi nT_s f) df$$

La integral dentro de los corchetes es igual a $X(f)$, de donde

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2BT_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \int_{-B}^B X(f) \exp(j2\pi nT_s f) df$$

Como $X(f)$ es de banda limitada $f_m = B$, la integral de la expresión anterior representa a $x(t)$ en los instantes discretos nT_s , es decir, la integral es igual a $x(nT_s)$. Por consiguiente,

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2f_m T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s)$$

Como $X(f)$ es de banda limitada $f_m = B$, y para $2BT_s = 2f_m T_s = 1$, $x(t) = x_r(t)$, entonces

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x_r^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) \quad (5.9)$$

La expresión (5.9) es una forma o aplicación del Teorema de Parseval para señales muestreadas. Esta expresión la aplicaremos más adelante.

Teorema N° 3. Muestreo de Señales Pasabanda

“Una señal $x(t)$ pasabanda de ancho de banda B y cuya frecuencia más alta es f_2 , se puede muestrear a una frecuencia mínima $f_s = 2f_2 / m$, donde m es la parte entera de la relación f_2 / B ”.

Sea $X_s(f)$ el espectro de la señal muestreada $x_s(t)$ a una frecuencia de muestreo f_s , y sea f_1 y f_2 los bordes de la banda de paso de $X(f)$ (mostrada en color), es decir, $B = |f_2 - f_1|$.

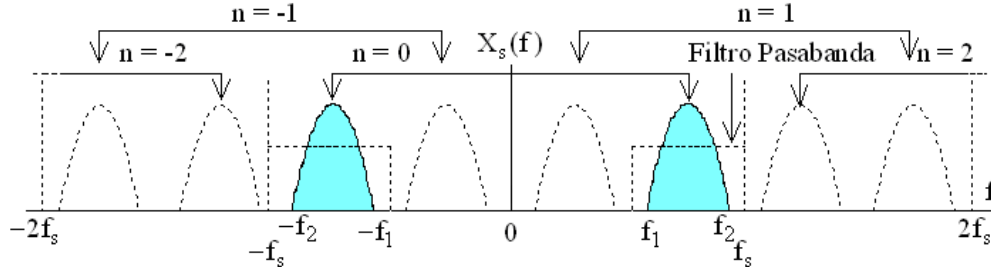


Fig. 5.4. Espectro de una Señal Pasabanda Muestreada.

En la Fig. 5.4 se muestra el espectro $X_s(f)$ de $x_s(t)$ en el cual, aunque $f_s < 2f_2$, no se produce solapamiento entre los espectros. Para señales pasabanda existe entonces una relación más general que la condición de Shannon, en la cual la frecuencia de muestreo f_s puede tomar los valores [Hoffmann, 1975],

$$\frac{2}{m} f_2 \leq f_s \leq \frac{2}{m-1} f_1 \quad \text{para } m \text{ entero y } m > 1 \quad (5.10)$$

La frecuencia mínima de muestreo se puede expresar entonces en la forma $f_{s\min} = 2f_2 / m$

donde $m = \text{parte entera de } \left(\frac{f_2}{B}\right)$, siendo $B = |f_2 - f_1|$. Valores de frecuencia superiores no son necesariamente utilizables a menos que ellos cumplan con la condición (5.10) o que sean mayores que $2f_2$. Los valores permitidos de f_s se pueden representar en forma gráfica a partir del siguiente desarrollo. De (5.10),

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$f_s \geq \frac{2f_2}{m} \quad (5.11)$$

Si consideramos f_s como la frecuencia mínima de muestreo (convirtiendo la desigualdad (5.11) en una igualdad), se obtiene la relación

$$f_s = \left(\frac{2}{m}\right)f_2 \quad (5.12)$$

Graficando f_s vs f_2 en unidades de ancho de banda B , se obtiene el gráfico de la Fig. 5.5.

La frecuencia de muestreo mínima permitida depende entonces de la relación f_2 / B . Si $f_2 \gg B$, entonces la frecuencia de muestreo mínima tiende a $2B$; asimismo, su valor máximo será $4B$. Por consiguiente, la frecuencia mínima de muestreo de señales pasabanda estará siempre entre $2B$ y $4B$, donde B es el ancho de banda de la señal.

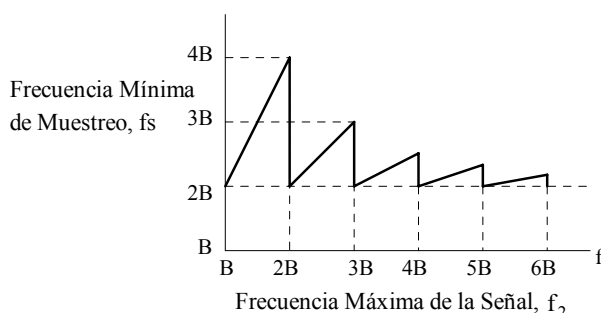


Fig. 5.5. Frecuencia Mínima de Muestreo Pasabanda

En cuanto a la reconstrucción de la señal original a partir de su forma muestreada, se puede utilizar un filtro pasabanda interpolador, como se muestra en las líneas a trazos en la Fig. 5. 4.

Muestreo en el Dominio de la Frecuencia

Los teoremas anteriores han sido desarrollados para el muestreo en el dominio del tiempo de señales de banda limitada. Sin embargo, el muestreo puede también concebirse en el dominio de la frecuencia aunque no es tan directamente perceptible o evidente como lo es el muestreo en el dominio del tiempo. En el procesamiento de señales digitales se presenta el caso del muestreo en frecuencia cuando se trata de determinar numéricamente la Transformada de Fourier (Transformada de Fourier Discreta (DTF) y la Transformada de Fourier Rápida (FFT)) y en el análisis de imágenes y de voz. A este efecto, vamos a presentar el dual del Teorema N° 1, en el cual una señal limitada en el tiempo se puede representar y reconstruir a partir de sus muestras en el dominio de la frecuencia.

Teorema N° 4

“Si $X(f)$ es el espectro de frecuencias de una señal $x(t)$ limitada en el intervalo $(-T_m, T_m)$, entonces $X(f)$ se puede determinar unívocamente especificando sus valores en una serie de puntos separados cada $\frac{1}{2T_m}$ Hz”.

Para verificar este enunciado, consideremos el dual en el dominio de la frecuencia de las expresiones (5.1) y (5.2). Sea entonces $X(f)$ el espectro de una señal $x(t)$ limitada en el tiempo, y $\tilde{X}(f)$ el espectro muestreado de $X(f)$ como se muestra en la Fig. 5.6.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

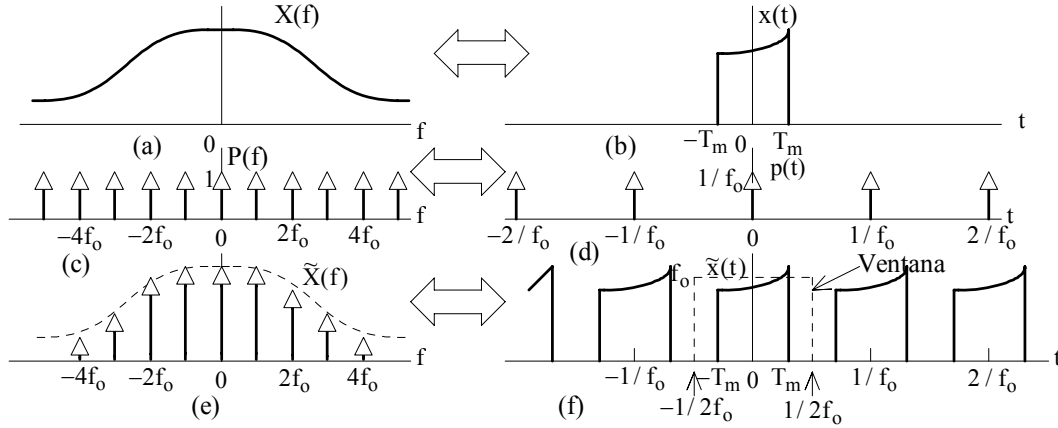


Fig. 5.6. Muestreo en el Dominio de la Frecuencia

En el dominio de la frecuencia,

$$\tilde{X}(f) = X(f) \cdot P(f) \quad (5.13)$$

donde
$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \Leftrightarrow p(t) = \frac{1}{f_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{n}{f_0})$$

y en el dominio del tiempo,
$$\tilde{x}(t) = x(t) * p(t) = \frac{1}{f_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - \frac{n}{f_0}) \quad (5.14)$$

siendo f_0 el intervalo de muestreo en frecuencia.

La expresión (5.14) es el dual de la expresión (5.2) y $x(t)$ es la señal generatriz de una señal periódica $\tilde{x}(t)$, vemos que $\tilde{x}(t)$ es el resultado de una “periodización” de $x(t)$, Fig. 5.6 (b) y (f).

Si $x(t)$ es limitada en el tiempo de la forma

$$x(t) = 0 \quad \text{para } |t| > T_m \quad (5.15)$$

entonces, como se muestra en la Fig. 5.6, con $\frac{1}{f_0} > 2T_m$, $\tilde{x}(t)$ consistirá de réplicas periódicas de $x(t)$ separadas en múltiplos de $T_0 = 1/f_0$. En este caso, la señal $x(t)$ (y por supuesto, su transformada $X(f)$) se puede recuperar mediante el empleo de lo que se denomina “ventana temporal de ponderación, $v(t)$ ” que es el dual del filtro pasabajo definido en (5.3). En este caso

$$v(t) = f_0 \Pi\left(\frac{t}{1/f_0}\right) \quad \text{y} \quad x(t) = \tilde{x}(t) \cdot v(t) \quad (5.16)$$

Si la desigualdad $\frac{1}{f_0} > 2T_m$ no se cumple, entonces las réplicas de $x(t)$ se solaparán y $x(t)$ no podrá recuperarse a partir de $\tilde{x}(t)$, como puede observarse en la Fig. 5.6(f).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Mediante analogía con la interpolación en el dominio del tiempo, la recuperación de $x(t)$ utilizando la ventana temporal se puede interpretar como una interpolación en el dominio de la frecuencia. En efecto, de (5.16),

$$X(f) = \tilde{X}(f) * V(f) \quad (5.17)$$

$$\text{donde } \tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \delta(f - nf_0) \quad \text{y} \quad V(f) = \text{sinc}\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

por consiguiente,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \text{sinc}\left(\frac{f - nf_0}{f_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nf_0) \frac{\text{sen}[\pi(f - nf_0)/f_0]}{\pi(f - nf_0)/f_0} \quad \text{para todo } f \quad (5.18)$$

La expresión (5.18) es el dual de (5.5). En particular, la función $\text{sinc}(\cdot)$ permite la interpolación exacta entre muestras en el dominio de la frecuencia para una señal limitada en el tiempo, como lo era para muestras en el dominio del tiempo de una señal limitada en frecuencia.

El desarrollo anterior se ha efectuado para señales limitadas en el tiempo centradas en el origen, pero los resultados se pueden aplicar para cualquiera señal que exista en cualquier intervalo finito de duración $2T_m$.

♣ Ejemplo 5.2. El Osciloscopio de Muestreo

A menudo es necesario observar en un osciloscopio señales que varían mucho más rápido que el tiempo de alzada del osciloscopio y por lo tanto la observación no es posible. Sin embargo, si la señal es periódica, el resultado deseado se puede obtener indirectamente utilizando el Osciloscopio de Muestreo, cuyo principio de funcionamiento veremos a continuación.

El principio del Osciloscopio de Muestreo, como se muestra en la Fig. 5.7, consiste en muestrear la señal rápida $x(t)$ una vez cada período pero en diferentes puntos en los períodos sucesivos. El incremento Δt , Fig. 5.7, debe ser un intervalo elegido apropiadamente según el ancho de banda de $x(t)$. Si el tren de impulsos resultantes $y_s(t)$ se pasa por un filtro interpolador pasabajo apropiado, su salida $y(t)$ será proporcional a la señal rápida original $x(t)$ pero expandida en el tiempo, es decir, $y(t)$ será proporcional a $x\left(\frac{t}{a}\right)$ cuando $a \gg 1$. Por ejemplo, cada período de $x(t)$ tiene el mismo perfil que el de $y(t)$, pero se diferencia en el factor de expansión a , como se muestra en la Fig. 5.7. Para efectos ilustrativos en la Fig. 5.7, $a = 6$, pero en la práctica este valor es mucho mayor, es decir, $T \gg \Delta t$.

De la Fig. 5.7, si T es el período de $x(t)$, entonces la frecuencia de muestreo del osciloscopio será $f_s = 1/(T + \Delta t)$, con Δt tal que $T = a\Delta t$, pero como $T_y = aT_s$, entonces

$$f_s = \frac{1}{\Delta t(1+a)}; \quad \Delta t = \frac{1}{f_s(1+a)} \quad \text{con} \quad \frac{1}{2a\Delta t} < f_s < \frac{1}{a\Delta t}$$

Nótese que en la pantalla del osciloscopio aparece solamente $y_s(t)$, pero ella nos proporciona los valores de T_y y T_s . Esto nos permite obtener $a = T_y / T_s$ y $\Delta t = T_s / (1+a)$, de modo que, una vez determinados los valores de a y Δt , podemos conocer también el período de la señal desconocida $x(t)$ puesto que $T = a\Delta t$. La señal $y(t)$ se obtiene pasando $y_s(t)$ por un filtro pasabajo interpolador de ancho de banda $B = f_s / 2$. Las señales $y(t)$ y $x(t)$ tienen el mismo perfil.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

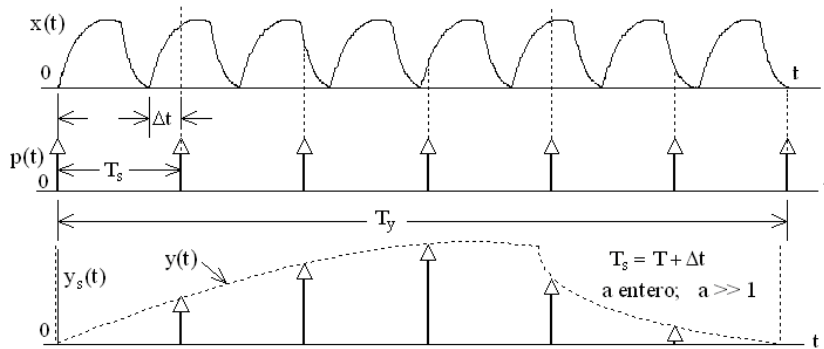


Fig. 5.7. Principio del Osciloscopio de Muestreo.

♣ Ejemplo 5.3

Sea el sistema de la Fig. 5.8(a) donde la señal periódica $p(t)$ tiene la forma mostrada en (b). Se desea calcular la salida $y(t)$ del filtro pasabajo.

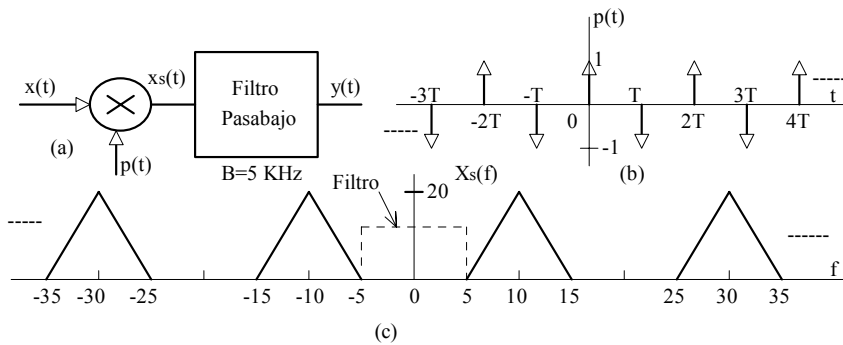


Fig. 5.8.

Sea $x(t) = 5 \cdot \text{sinc}^2(5 \times 10^3 t) \Leftrightarrow X(f) = 10^{-3} \Lambda\left(\frac{f}{5 \times 10^3}\right)$, de donde $f_m = 5 \times 10^3$ Hz.

Vamos a determinar $X_s(f)$ cuando el muestreo se efectúa a la frecuencia de Nyquist.

La frecuencia de muestreo de Nyquist es $f_s = 2f_m = 10^4$ Hz = 10 kHz

De la Fig. 5.8(b), $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT)$

El espectro $P(f)$ de $p(t)$ se puede determinar siguiendo el mismo procedimiento del Ejemplo 1.28. En efecto, la función generatriz $g(t)$ de $p(t)$ es

$$g(t) = \delta(t) - \delta(t - T) \Leftrightarrow G(f) = 1 - \exp(-j2\pi T f)$$

También, $f_s = \frac{1}{2T} = 10$ kHz; $T = 5 \times 10^{-5}$ seg. De (1.103),

$$P_n = \frac{1}{2T} [1 - \exp(-j2\pi T f)] \Big|_{f=\frac{n}{2T}} = \frac{1}{2T} [1 - \exp(-jn\pi)] = \frac{1}{T} \text{ para } n \text{ impar y } n \neq 0.$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Entonces,
$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{2T}) & \text{para } n \text{ impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Obsérvese que $P(f)$ no contiene una componente en el origen (cero componente continua) y por lo tanto $p(t)$ no podrá utilizarse para el muestreo de señales pasabajo. $X_s(f)$ será entonces,

$$X_s(f) = X(f) * P(f) = \begin{cases} 20 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(\frac{f - 10^4 n}{5 \times 10^3}) & \text{para } n \text{ impar y } n \neq 0 \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

El espectro $X_s(f)$ tiene la forma mostrada en la Fig. 5.8(c). La salida del filtro pasabajo es cero. Nótese que, en general, *la señal original podrá recuperarse a partir de su versión muestreada solamente si la señal muestreadora contiene una componente continua.*

♣ Ejemplo 5.4

Sea $x(t) = 10 \text{sinc}^2(5 \times 10^3 t) \cos(10^5 \pi t)$, una señal que vamos a muestrear y recuperar.

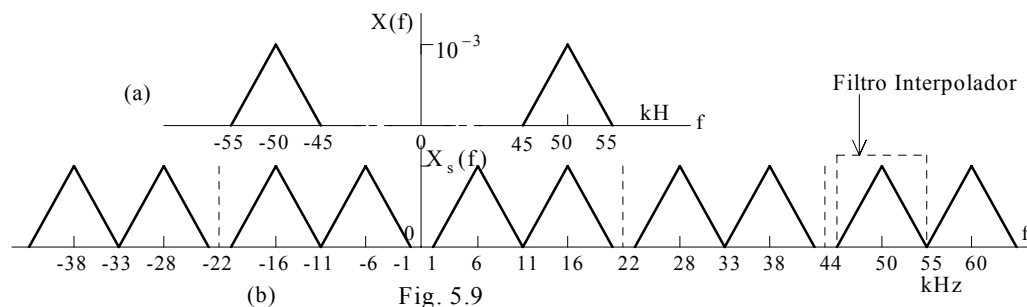


Fig. 5.9

Del teorema de la modulación, $x(t) \Leftrightarrow X(f) = 10^{-3} \left[\Lambda\left(\frac{f + 5 \times 10^4}{5 \times 10^3}\right) + \Lambda\left(\frac{f - 5 \times 10^4}{5 \times 10^3}\right) \right]$

El espectro $X(f)$ se muestra en la Fig. 5.9(a), de donde

$$B = 10 \text{ kHz}; \quad f_2 = 55 \text{ kHz}; \quad \frac{f_2}{B} = 5,5 \rightarrow m = 5$$

$$f_s = \frac{2f_2}{m} = \frac{2 \times 55}{5} = 22 \text{ kHz}$$

El espectro $X_s(f)$ es el espectro $X(f)$ trasladado a las frecuencias $\pm n22 \text{ kHz}$, como se muestra en la Fig. 5.9(b). La señal original $x(t)$ se puede recuperar mediante un filtro interpolador ideal pasabanda centrado en $f = 50 \text{ kHz}$ y de ancho de banda $B = 10 \text{ kHz}$.

♣

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.2.3. Muestreo Práctico de Señales Pasabajo

En la sección anterior vimos que una señal se podía transmitir y recuperar si se muestreaba de manera instantánea y se recobraba mediante un filtro ideal. Pero en la práctica la situación es diferente: los impulsos de muestreo tienen una duración distinta de cero y los filtros interpoladores distan de ser ideales. Por otro lado, a menudo las señales están limitadas en el tiempo y por lo tanto no son de banda limitada como lo exige el teorema de Shannon. Un mejor conocimiento físico e intuitivo de los mecanismos y teoremas del muestreo se puede obtener si se considera circuitos reales, de fácil realización física. La distorsión producida por los circuitos reales de muestreo la trataremos en la próxima sección.

Dependiendo del uso que se hace de la señal muestreada, se pueden distinguir dos casos de muestreo práctico: el “muestreo natural” y el “muestreo con retención”, los cuales consideraremos a continuación.

Muestreo Natural

En la práctica, el muestreo debe ser realizado necesariamente con impulsos de amplitud finita y duración distinta de cero. El muestreo natural equivale a multiplicar la señal original por una señal muestreadora periódica rectangular de amplitud unitaria, período igual o mayor que el intervalo de Shannon y valor promedio distinto de cero. Esta “multiplicación” generalmente se instrumenta con una compuerta analógica (por ejemplo, un MOSFET cualquiera), la cual deja pasar la señal cuando la señal muestreadora está en “ALTO” e impide el paso cuando está en “BAJO”, como se muestra en la Fig. 5.10(a).

La señal muestreada, Fig. 5.10(e), tiene la forma

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) \quad (5.19)$$

donde $s(t)$ es una señal periódica rectangular, Fig. 5.10(b), cuya transformada de Fourier es, de (1.71) y (1.105),

$$S(f) = \tau_s f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \delta(f - nf_s) \quad (5.20)$$

Del teorema de convolución, $X_s(f) = X(f) * S(f)$

$$\text{de donde} \quad X_s(f) = \tau_s f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) X(f - nf_s) \quad (5.21)$$

El espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada $x_s(t)$ es la repetición periódica, a las frecuencias $\pm nf_s$, del espectro $X(f)$ de la señal original; pero a diferencia del muestreo ideal, los espectros están ponderados por un factor de escala decreciente con nf_s que es $[\tau_s f_s \text{sinc}(n\tau_s f_s)]$, como se muestra en la Fig. 5.10(f).

Nótese que si $\frac{1}{\tau_s f_s} = \frac{T_s}{\tau_s}$ es un número entero, entonces a las frecuencias nf_s múltiplos de $1/\tau_s$ las correspondientes componentes de $X_s(f)$ serán cero. Nótese también que pese a que el muestreo no es instantáneo, no se produce distorsión: $x(t)$ se puede recuperar de $x_s(t)$ independientemente del valor de τ_s (pues, por definición, $\tau_s < T_s$), siempre que T_s cumpla con el teorema de Shannon.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

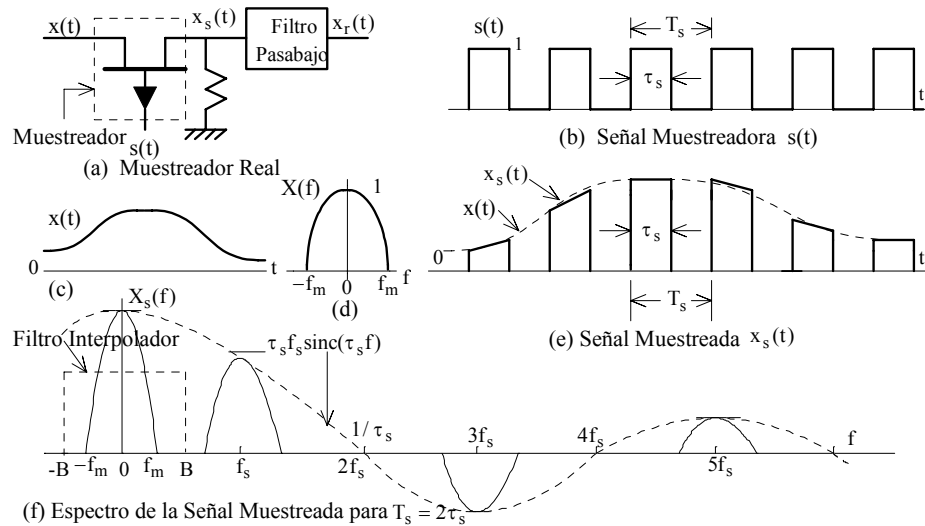


Fig. 5.10. Muestreo Natural de Señales Pasabajo

La forma del espectro de la señal muestreada de la Fig. 5.10(f) sugiere la posibilidad de que se pueda muestrear una señal utilizando cualquiera señal periódica de período T_s que cumpla con el teorema de Shannon. Esto es más cierto por cuanto los circuitos electrónicos de conmutación no producen impulsos perfectamente rectangulares. Consideremos entonces una señal periódica $g_{T_s}(t)$ cuya señal generatriz $g(t)$ tiene cualquier perfil. La señal muestreada será

$$x_s(t) = x(t) \cdot g_{T_s}(t) \Leftrightarrow X_s(f) = X(f) * G_{T_s}(f)$$

$$\text{donde } g_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT_s) \text{ y } g(t) \Leftrightarrow G(f)$$

$$G_{T_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_s) \delta(f - nf_s) \text{ y } X_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(nf_s) X(f - nf_s)$$

Esta expresión para $X_s(f)$ tiene la misma forma que (5.21) pero el factor de ponderación es $f_s G(nf_s)$, el cual se puede determinar fácilmente si $g(t)$ es conocida gráfica o analíticamente. Se puede decir entonces que *una señal periódica cualquiera se puede utilizar para muestrear una señal pasabaja de banda limitada B siempre que (a) su período T_s cumpla con el teorema de Shannon, y (b) que la señal periódica contenga una componente continua* (Ver Ejemplo 5.3).

Para recuperar $x(t)$, la señal muestreada $x_s(t)$ se pasa por un filtro interpolador de la forma $H(f) = (T_s / \tau_s) \Pi(f / 2B)$ cuya ganancia es T_s / τ_s . Nótese que la ganancia del filtro interpolador en el caso de muestreo ideal, expresión (5.3), es T_s .

♣ Ejemplo 5.5. Potencia de una Señal Muestreada Natural

Consideremos la señal muestreada $x_s(t)$ dada por (5.19) donde $s(t)$ es una señal periódica rectangular de amplitud unitaria y ciclo de trabajo τ / T_s , Fig. 5.10(b). Puesto que $s(t)$ es periódica, ella puede desarrollarse en serie de Fourier; entonces, de (1.47),

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n| \cos(2\pi n f_s t + \phi_n)$$

$$x_s(t) = |S_0| x(t) + 2|S_1| x(t) \cos(2\pi f_s t + \phi_1) + 2|S_2| x(t) \cos(4\pi f_s t + \phi_2) + \dots$$

Si $x(t)$ es de banda limitada f_m y $f_s \geq 2f_m$, los términos de la expresión anterior no se solapan en el dominio de la frecuencia y la potencia promedio de $x_s(t)$ será la suma de las potencias de cada uno de los términos. En este caso,

$$\langle x_s^2(t) \rangle = |S_0|^2 \langle x^2(t) \rangle + 2|S_1|^2 \langle x^2(t) \rangle + 2|S_2|^2 \langle x^2(t) \rangle + \dots$$

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle [|S_0|^2 + 2|S_1|^2 + 2|S_2|^2 + \dots]$$

Pero la cantidad dentro de los corchetes es, del Teorema de Parseval, la potencia promedio de la señal periódica $s(t)$; entonces,

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle \cdot \langle s^2(t) \rangle$$

$$\text{Pero } \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T_s} \int_0^T dt = \frac{T}{T_s}$$

La potencia promedio de una señal muestreada en forma natural es

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \left(\frac{T}{T_s} \right) \langle x^2(t) \rangle \quad (5.22)$$

Diremos, sin demostrarlo, que la expresión (5.22) es válida también cuando $x(t)$ es una señal aleatoria pasabajo (ruido, por ejemplo).



Muestreo con Retención

Algunas veces es necesario disponer de los valores instantáneos de una señal en los instantes de muestreo nT_s para poderlos procesar o codificar. Con el muestreo natural la amplitud de las muestras varía en el intervalo τ_s y el sistema, por ejemplo un codificador, no sabría cuál es el valor exacto de $x(nT_s)$. Esta situación se resuelve manteniendo o reteniendo los valores instantáneos $x(nT_s)$ durante un tiempo apropiado. Esta operación se denomina “**Muestreo con Retención (Sample and Hold)**” o “**Muestreo de Topes Planos**”. En la Fig. 5.11 (a) y (b) se muestran las dos formas típicas de una señal muestreada con retención: “**Con Retorno a Cero (RZ)**” y “**Sin Retorno a Cero (NRZ)**”.

Para propósito de análisis, el muestreo con retención se puede visualizar como una señal muestreada instantáneamente aplicada a un sistema lineal invariante en el tiempo de respuesta impulsional $h(t)$, como se muestra en la Fig. 5.11(c).

$$\text{Puesto que } p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \Leftrightarrow P(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s), \text{ entonces,}$$

$$x_i(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \Leftrightarrow X_i(f) = X(f) * P(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (5.23)$$

$$X_s(f) = X_i(f) \cdot H(f) = [X(f) * P(f)] \cdot H(f) = \left[f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \right] \cdot H(f) \quad (5.24)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

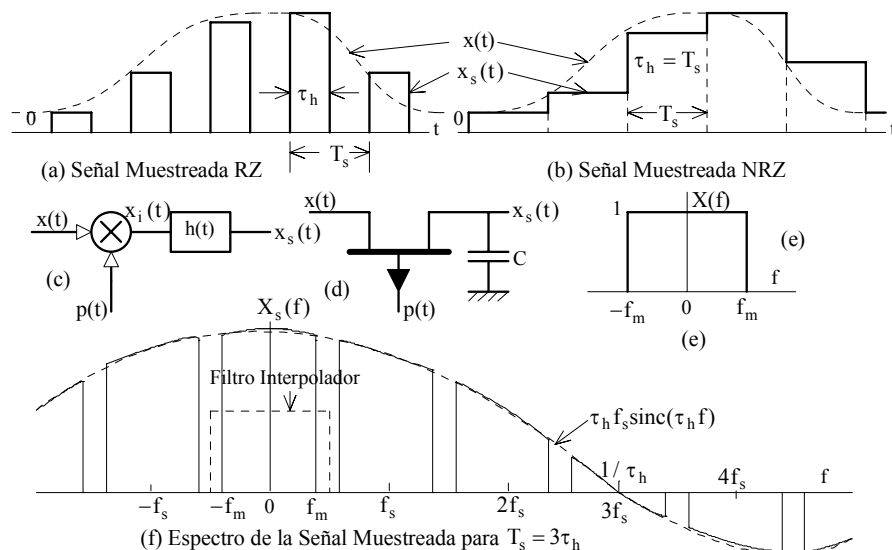


Fig. 5.11. Muestreo con Retención

El sistema lineal en cuestión es el circuito de retención (zero-order hold) visto en el Ejemplo 2.17 y para el cual

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2}{\tau_h}\right) \Leftrightarrow H(f) = \tau_h \text{sinc}(\tau_h f) \cdot \exp(-j\pi\tau_h f) \quad (5.25)$$

En el caso de muestreo con retorno a cero (RZ), $\tau_h < T_s$; τ_h se denomina “tiempo de retención”. Si el muestreo es sin retorno a cero (NRZ), simplemente se reemplaza τ_h por T_s . La duración de τ_h depende de la utilización que se haga de la señal muestreada; por ejemplo, si se trata de codificar una muestra $x(kT_s)$, el tiempo τ_h deberá ser lo suficientemente largo para que se pueda efectuar la codificación. El tiempo de conversión generalmente es un parámetro dado por los fabricantes de los codificadores. Si t_c es el tiempo de conversión del codificador, debe verificarse entonces que $t_c \leq \tau_h$. Esto establece una velocidad de codificación máxima, valor que es proporcionado por los fabricantes del codificador.

$$\begin{aligned} \text{De (5.1) y (5.23), } x_s(t) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s) \right] * \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2}{\tau_h}\right) \\ x_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2 - nT_s}{\tau_h}\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

cuya transformada de Fourier es, de (5.24),

$$X_s(f) = \tau_h f_s \text{sinc}(\tau_h f) \exp(-j\pi\tau_h f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (5.27)$$

En la Fig. 5.11(f) se muestra la amplitud de $X_s(f)$ cuando $\tau_h = T_s/3$. Nótese que si $f_s < 2f_m$ se produce solapamiento. Por otra parte, el efecto del tiempo de retención τ_h se refleja en

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$H(f)$ produciendo ceros a las frecuencias k/τ_h . Las réplicas de $X(f)$ tendrán distorsión de amplitud: simétrica en el origen ($n = 0$) y asimétrica en las frecuencias nf_s . Esta distorsión en el espectro muestreado hace que la interpolación o recuperación exacta de $x(t)$ no sea posible con un filtro pasabajo. Esta distorsión se conoce con el nombre de “**efecto de apertura**” y es una distorsión de tipo lineal. El efecto de apertura se puede disminuir haciendo τ_h más pequeño y puede ser eliminado mediante una red ecualizadora. En la próxima sección veremos esto con más detalle.

El muestreo con retención se realiza en la práctica agregando un capacitor a la salida de una compuerta analógica, como se muestra en la Fig. 5.11(d). El capacitor se carga cuando $s(t)$ está en “ALTO” y mantiene ese valor cuando $s(t)$ está en “BAJO”. En la Fig. 5.12 se muestra algunos muestreadores con retención usados en nuestro laboratorio. En particular, el circuito mostrado en (a) se utiliza cuando se necesita una alta impedancia para la señal de entrada $x(t)$ y una baja impedancia para la carga y descarga del capacitor C .

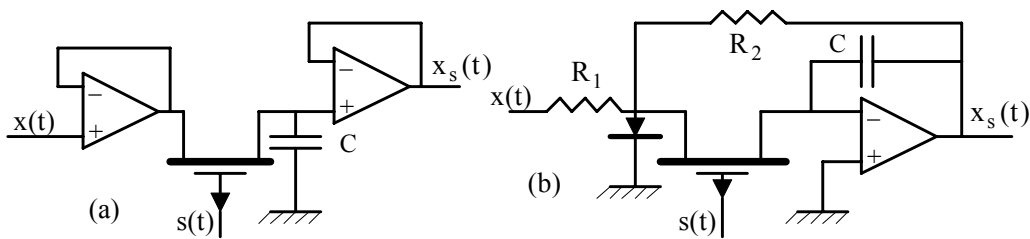


Fig. 5.12. Muestreadores con Retención.

Los circuitos muestreadores prácticos difieren de los ideales en que mientras la compuerta permanece cerrada, la corriente de carga del capacitor está limitada por la resistencia combinada de la compuerta y de la impedancia de salida de la fuente, lo que hace que el voltaje en el capacitor no alcance exactamente el valor $x(nT_s)$. Asimismo, cuando la compuerta abre, el capacitor tratará de descargarse sobre la impedancia de salida, la cual debe ser lo más alta posible. El valor de la capacitancia utilizada en una aplicación dada se elige generalmente mediante un compromiso entre la minimización de la constante de tiempo de carga y la maximización de la constante de tiempo de descarga o de fuga, sobre todo si la salida es sin retorno a cero (NRZ). La situación se simplifica un poco si la salida es con retorno a cero (RZ), pues, por un lado disminuye la distorsión por efecto de apertura, pero por otro lado el circuito se complica porque hay que agregar una compuerta adicional que descarga a cero al capacitor, para no hablar del aumento en el ancho de banda.

♣ Ejemplo 5.6. Potencia de una Señal Muestreada con Retención

Consideremos una señal muestreada con retención a la cual se le ha agregado una componente continua a fin de que la amplitud de los impulsos sea siempre positiva (> 0). Esta señal muestreada, Fig. 5.13, y se puede representar en la forma

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A + x(nT_s)] \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right)$$

donde $[A + x(t)] > 0$; suponemos que $\langle x(t) \rangle = 0$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

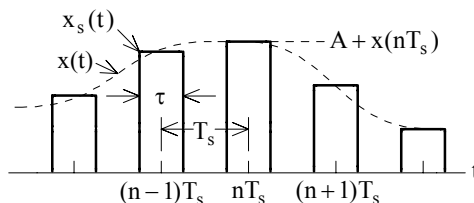


Fig. 5.13. Señal Muestreada con Retención.

La potencia promedio de $x_s(t)$ es simplemente la suma de la potencia de cada uno de los infinitos impulsos de amplitud $[A + x(nT_s)]$, duración τ y período T_s , Fig. 5.13. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle x_s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} [A + x(nT_s)]^2 dt = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A^2 \int_0^{\tau} dt + 2Ax(nT_s) \int_0^{\tau} dt + x^2(nT_s) \int_0^{\tau} dt \right] \\ &= \frac{\tau}{T_s} A^2 + \frac{2A\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) + \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) \end{aligned}$$

Puesto que $\langle x(t) \rangle = 0$, entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) = 0$, y de la expresión (5.9),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) = \langle x^2(t) \rangle$$

La potencia promedio de la señal muestreada con retención será entonces

$$\langle x_s^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} A^2 + \frac{\tau}{T_s} \langle x^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} [A^2 + \langle x^2(t) \rangle] \quad (5.28)$$

$$\text{y si } A = 0, \quad \langle x_s^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} \langle x^2(t) \rangle \quad (5.29)$$

La potencia de la señal muestreada con retención es igual a τ/T_s veces la potencia de la señal original. El muestreo con retención, igual que el muestreo natural, reduce la potencia de la señal de entrada en un factor τ/T_s , puesto que $\tau < T_s$. Si el muestreo es NRZ, la potencia de la señal muestreada tiende en promedio a la potencia de la señal sin muestrear.

♣

♣ Ejemplo 5.7

Consideremos el muestreador con retención de la Fig. 5.11(c) donde $p(t)$ es un tren de impulsos rectangulares de amplitud unitaria, período T_s y duración τ_s . Vamos a determinar el espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada y dibujarla para algunos valores numéricos, con

$$x(t) = 2A \text{sinc}(2Bt) \Leftrightarrow X(f) = \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad \text{y}$$

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \tau_h/2}{\tau_h}\right) \Leftrightarrow H(f) = \tau_h \text{sinc}(\tau_h f) \exp(-j\pi\tau_h f)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Tenemos entonces que $x_s(t) = x_1(t) * h(t)$ donde $x_1(t) = x(t) \cdot p(t)$

$$\text{De (5.19) y (5.21), } X_1(f) = \tau_s f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \frac{A}{B} \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B}\right)$$

$$\text{pero } X_s(f) = X_1(f) \cdot H(f) = \frac{A\tau_h \tau_s f_s}{B} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B}\right) \right] \text{sinc}(\tau_h f) \exp(-j\pi\tau_h f)$$

$$X_s(f) = \frac{A\tau_h \tau_s f_s}{B} \exp(-j\pi\tau_h f) \text{sinc}(\tau_h f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n\tau_s f_s) \Pi\left(\frac{f - nf_s}{2B}\right)$$

Este es el espectro $X_s(f)$ de la señal muestreada $x_s(t)$. Para dibujar su amplitud, vamos a suponer una frecuencia de muestreo del doble de la de Nyquist, y los siguientes valores numéricos:

$$A = 10 \text{ V}; \quad \tau_s = \frac{T_s}{2}; \quad \tau_h = \frac{T_s}{4}; \quad B = 5 \text{ kHz}$$

$$\text{Calculemos: } \begin{cases} f_m = B = 5 \text{ kHz}; & f_s = 4f_m = 4B = 20 \text{ kHz}; & T_s = \frac{1}{f_s} = 50 \times 10^{-6} \text{ seg.} \\ \tau_s = 25 \times 10^{-6} \text{ seg}; & \tau_h = 12,5 \times 10^{-6} \text{ seg} \end{cases}$$

La expresión para $X_s(f)$ será

$$X_s(f) = \begin{cases} 12,5 \times 10^{-9} \exp(-j12,5 \times 10^{-6} f) \text{sinc}\left(\frac{f}{8 \times 10^4}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \Pi\left(\frac{f - 2 \times 10^4 n}{10^4}\right) & n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par y } n \neq 0 \end{cases}$$

En la Fig. 5.14(b) se muestra la amplitud del espectro $X_s(f)$. El filtro interpolador permite recuperar $X(f)$. Nótese la distorsión del impulso de salida del filtro interpolador (su tope ya no es plano), distorsión que es característica del muestreo con retención.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

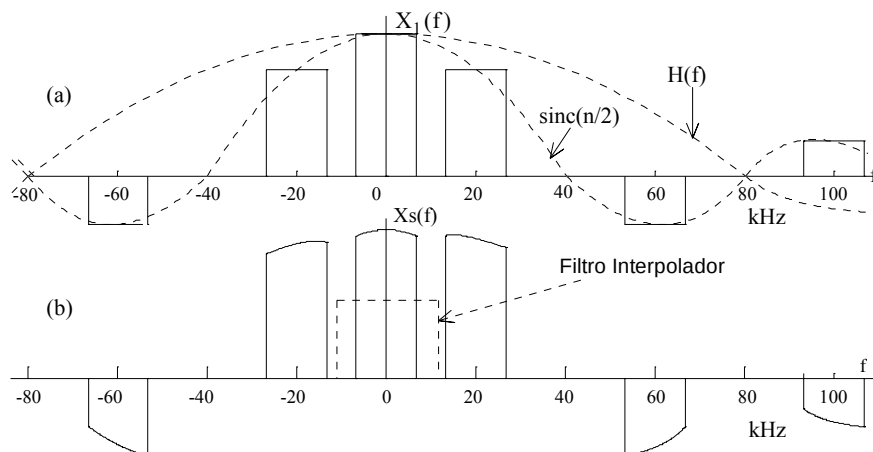


Fig. 5.14. Muestreo con Retención. Espectros



5.2.4. Distorsión producida por el Muestreo

En el proceso de muestreo y reconstrucción de una señal se producen varias formas de distorsión, algunas de las cuales pueden ser eliminadas mediante filtros ecualizadores apropiados.

Los tres tipos de distorsión presentes en el muestreo son la “Distorsión de Solapamiento (Aliasing)”, la “Distorsión de Interpolación” y la “Distorsión por Efecto de Apertura”. Vamos a ver con algún detalle cada tipo de distorsión señalando sus causas y mostrando los medios para evitarla o eliminarla.

Distorsión de Solapamiento (Aliasing)

En la práctica las señales no son estrictamente limitadas en banda y al muestrearse a las frecuencias usuales se produce solapamiento entre espectros adyacentes, como se muestra en la Fig. 5.15. Esa distorsión (mostrada en color) introduce distorsión en la señal recuperada

La distorsión de solapamiento (aliasing) hace que componentes de frecuencia superiores a $f_s/2$ sean reflejadas hacia las frecuencias bajas por debajo de $f_s/2$. Por ejemplo, si una señal sinusoidal de 60 Hz se muestrea a 100 muestras por segundo, al recuperarse mediante un filtro de ancho de banda de 60 Hz aparecerá una componente de frecuencia de 40 Hz no presente en la señal original.

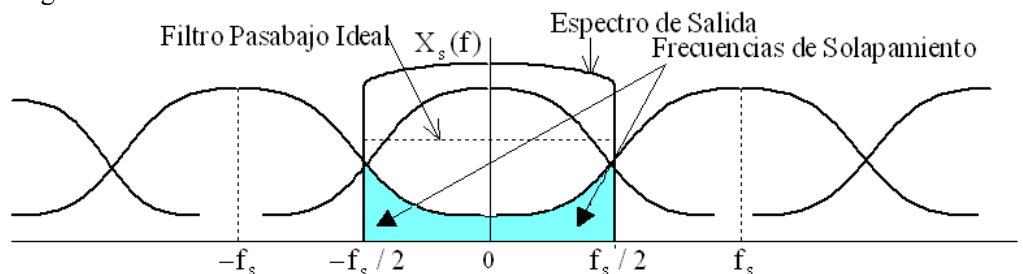


Fig. 5.15. Solapamiento de Espectros.

Las componentes de frecuencia que se reflejan o invierten hacia las bajas frecuencias se denominan “**frecuencias de solapamiento (folding frequencies)**”, y ellas afectan seriamente la inteligibilidad de las señales de voz en los sistemas telefónicos. Sin embargo, este efecto de

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

inversión se puede utilizar acentuándolo para efectuar la inversión completa del espectro, método utilizado para preservar la privacidad de las conversaciones telefónicas.

Para eliminar el efecto de las frecuencias de solapamiento, la práctica usual es la de filtrar previamente la señal a una frecuencia del 35% al 40% de la frecuencia de muestreo a fin de asegurarse que no hay componentes significativas más allá de $f_s/2$. La eliminación de las componentes en la parte alta de la gama de la señal degrada la fidelidad de la transmisión hasta cierto punto, pero el efecto de la pérdida de inteligibilidad es mucho menor que si se permitiera el solapamiento. Como ejemplo, en la telefonía digital las señales de voz se filtran a 3200 Hz antes de ser muestreadas a 8000 muestras por segundo. En el Problema de Aplicación 5.10 se cuantifica el efecto de la distorsión de solapamiento.

Distorsión de Interpolación

Para la recuperación de la señal original siempre hemos supuesto filtros ideales con bordes abruptos en las frecuencias de corte. Pero los filtros prácticos no poseen esas características y una cierta cantidad de la energía de los espectros adyacentes puede pasar a la salida. Esta distorsión se muestra en color en la Fig. 5.16.

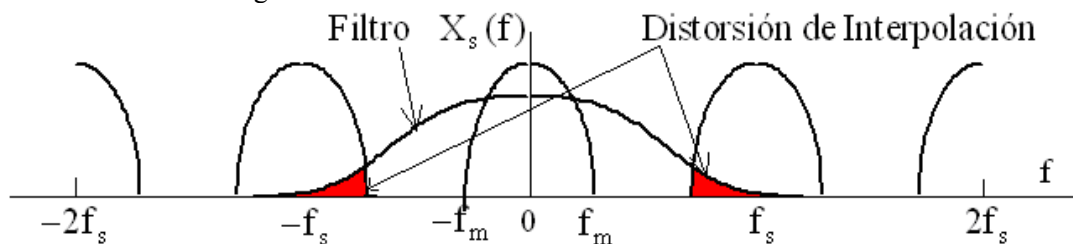


Fig. 5.16. Distorsión de Interpolación.

Nótese que aunque la señal original es estrictamente de banda limitada y la frecuencia de muestreo cumple con el teorema de Shannon, las colas del filtro permiten el paso de componentes de frecuencia de espectros adyacentes. El efecto de la distorsión de interpolación es la aparición de un silbido o “pito” de alta frecuencia en la señal recuperada.

La distorsión de interpolación se puede eliminar mediante un diseño apropiado de los filtros, tales como los filtros Butterworth de tercer o cuarto orden. En el Problema de Aplicación 5.12 se cuantifica el efecto de la distorsión de interpolación.

Distorsión por Efecto de Apertura

El efecto de apertura es una forma de distorsión de amplitud propia del muestreo con retención. Esta distorsión es producida por el producto de los espectros desplazados por la función de transferencia $H(f) = \tau_h \text{sinc}(\tau_h f)$, como se puede apreciar en las Figs. 5.11 y 5.14.

Como éste es un tipo de distorsión lineal, tanto $x_s(t)$ como la salida del filtro de interpolación se pueden procesar en un filtro ecualizador $H_e(f)$ que cancele el efecto de $H(f)$. Este proceso se muestra en la Fig. 5.17.

La función de transferencia $H_e(f)$ del filtro ecualizador debe ser el inverso de $H(f)$ para que se cancelen los efectos de la distorsión de apertura sobre la amplitud de la señal recuperada.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

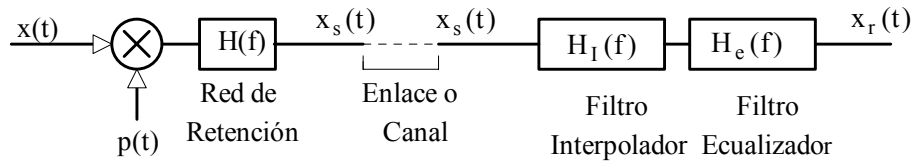


Fig. 5.17. Compensación del Efecto de Apertura.

Entonces,
$$H_e(f) = \frac{1}{H(f)} \quad \text{para } |f| \leq B$$

o también,
$$H_e(f) = \frac{1}{\tau_h \sin c(\tau_h f)} \quad \text{para } |f| \leq B \quad (5.30)$$

donde B es el ancho de banda del filtro de interpolación $H_I(f)$. $H_e(f)$ debe tener la forma aproximada mostrada en la Fig. 5.18.

Nótese que si el tiempo de retención τ_h es lo suficientemente pequeño, la variación de $H(f)$ para $|f| \leq B$ puede ser despreciable y el filtro ecualizador puede no ser necesario. En efecto, sucede que mientras $\frac{\tau_h}{T_s} \leq \frac{1}{4}$, la máxima diferencia entre la salida ideal $X(f)$ y la salida $X_s(f)$ para $|f| \leq B = f_m$ es menor del 3%. En la práctica se puede omitir entonces el filtro ecualizador cuando $\tau_h \leq \frac{T_s}{4}$ ó $T_s \geq 4\tau_h$.

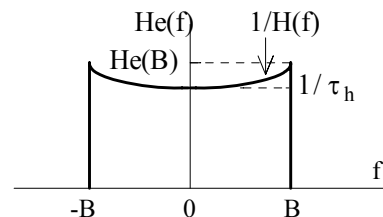


Fig. 5.18. Filtro Compensador del Efecto de Apertura.

5.3. SISTEMAS DE MODULACIÓN ANALÓGICA DE IMPULSOS

5.3.1. Introducción

De acuerdo con la definición de información que vimos en el Capítulo IV, un tren de impulsos periódicos, por ejemplo, no contiene ninguna clase de información. Un tren de impulsos está caracterizado por su amplitud, su período y la duración de cada impulso. Si en alguna forma se imprimiera sobre alguno de estos parámetros una variación proporcional a alguna otra señal, y que esta operación fuera reversible, se tendría lo que se conoce como “**Modulación Analógica de Impulsos**”.

Un mensaje adecuadamente descrito por sus valores de muestra se puede transmitir entonces mediante la modulación analógica de un tren de impulsos. En la modulación analógica de impulsos cada valor de muestra hace variar proporcionalmente uno de los parámetros de cada impulso; el tren de impulsos, así modulado, puede transmitirse y en el destino se le puede extraer la información contenida en ella. Nótese que cada impulso dispone, para su transmisión, de todo el ancho de banda del canal pero sólo lo ocupa durante parte de un intervalo T_s .

Hay varias formas de modulación analógica de impulsos, pero tres son las más conocidas y utilizadas:

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

1. La “**Modulación de Amplitud de Impulsos (Pulse-Amplitude Modulation, PAM)**”, en la cual la altura o amplitud de cada impulso varía en función del valor de muestra de la señal mensaje. El período y la duración de los impulsos no cambian.
2. La “**Modulación de Duración o Anchura de Impulsos (Pulse-Duration (Width) Modulation, PDM o PWM)**”, en la cual la duración de cada impulso varía en función del valor de muestra de la señal mensaje. El período y la amplitud de los impulsos no cambian.
3. La “**Modulación de Posición de Impulsos (Pulse-Position Modulation, PPM)**”, en la cual la posición de cada impulso varía, respecto a un punto de referencia, en función del valor de muestra de la señal mensaje. La amplitud y la duración de los impulsos no cambian.

En la Fig. 5.19 se muestra una señal mensaje típica $m(t)$ y las tres formas de modulación analógica de impulsos correspondientes.

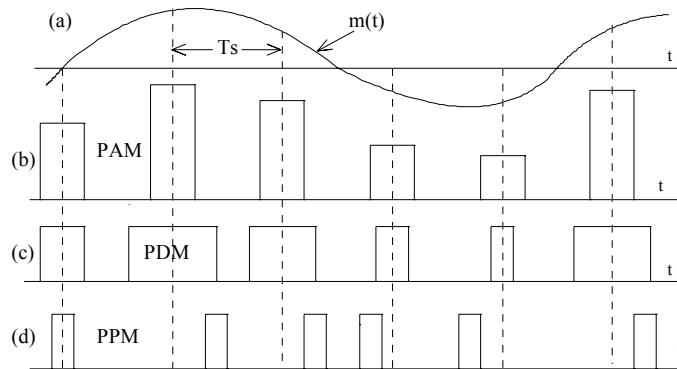


Fig. 5.19. Formas Básicas de la Modulación Analógica de Impulsos.

5.3.2. Modulación de Amplitud de Impulsos (PAM)

En la modulación PAM, vimos, la amplitud de cada impulso varía proporcionalmente con cada valor de muestra de la señal mensaje $m(t)$; por lo tanto, una señal PAM no es otra cosa que una señal muestreada con retención, como la señal PAM mostrada en la Fig. 5.19(b).

Una señal $x_{\text{PAM}}(t)$ unipolar con retorno a cero (RZ) tiene entonces la forma, de (5.26),

$$x_{\text{PAM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A + m(nT_s)] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right) \quad (5.31)$$

donde $A > |\min m(t)|$ es una constante que se agrega a $m(t)$ para evitar, para efectos de sincronización, que los impulsos modulados puedan ser de amplitud cero o negativa, T_s es el intervalo de Shannon, τ la duración de los impulsos y $|\min m(t)|$ es el valor de la máxima excursión negativa de $m(t)$. Se supone también que $\langle m(t) \rangle = 0$. Nótese que en ausencia de modulación [$m(t) = 0$], la expresión (5.31) se convierte en un tren de impulsos periódicos de amplitud A , período T_s y duración τ , que representa la portadora sin modular.

Como la expresión (5.31) tiene la misma forma que la expresión (5.26), excepto por la constante A , se sigue que sus espectros serán iguales (salvo por un impulso en el origen). La

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

recuperación o demodulación se efectúa mediante filtros interpoladores y ecualizadores, como se describió en la sección anterior.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PAM

La señal PAM está formada por impulsos rectangulares de amplitud variable y duración τ que se transmiten directamente por un canal de ancho de banda B . En general, este tipo de transmisión se denomina “**Transmisión en Banda de Base**”, pues las señales se transmiten tal como se generan, sin ningún otro tipo de modulación. Si el ancho de banda del canal fuera igual a f_m , él se comportaría como un interpolador, la transmisión sería analógica continua y el proceso de muestreo no tendría sentido. Anchos de banda ligeramente mayores que f_m producirían solapamiento en el tiempo (time crosstalk) lo que introduce distorsión. Por otro lado, anchos de banda muy grandes no son necesarios. Como la señal PAM es interpolada en base a sus valores de amplitud en los instantes de muestreo, y como estos valores se mantienen aún cuando $B = \frac{1}{\tau}$, se puede tomar este valor como el mínimo ancho de banda B , el cual se denomina “**Ancho de Banda de la Banda de Base**”. Entonces,

$$\text{En PAM,} \quad B \geq \frac{1}{\tau} \quad (5.32a)$$

$$\text{Si } \frac{T_s}{\tau} = k, \text{ donde } k > 1, \text{ y } T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{2f_m}, \text{ entonces}$$

$$B \geq 2kf_m \text{ y } \beta_m = \frac{B}{f_m} \geq 2k \quad (5.32b)$$

Nótese que $\beta_m = B / f_m$ es “la relación o factor de expansión del ancho de banda” definida en el Capítulo IV. Como $k > 1$ y puede variar según la aplicación, entonces se tendrá que $\beta_m \gg 1$, lo cual indica que el sistema PAM es un sistema de banda ancha que puede permitir el intercambio de ancho de banda por relación S/N, como veremos más adelante.

En cuanto a las relaciones S/N en PAM, consideremos el receptor PAM de la Fig. 5.20. Para permitir el funcionamiento en multiplex, que veremos en detalle más adelante, el receptor está abierto cuando no hay presencia de impulsos y cerrado cuando éstos están presentes. Este funcionamiento intermitente constituye, para las perturbaciones o ruido presentes en la entrada, un muestreo de tipo natural. Este muestreo, gracias a los dispositivos de sincronización del receptor, se hace a la misma frecuencia que el muestreo del mensaje en la emisión. Como consecuencia, el muestreo en el receptor no afecta a la señal útil pero sí al ruido presente a la entrada.

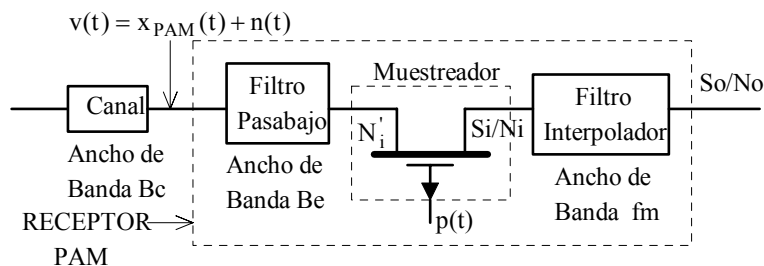


Fig. 5.20. Receptor PAM en Banda de Base

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Si el ancho de banda B_e del filtro de entrada es lo suficientemente ancho y el sistema está sincronizado, tanto el filtro de entrada como el muestreador serán transparentes para la señal PAM, apareciendo ésta a la entrada del filtro interpolador.

A la entrada del receptor PAM, Fig. 5.20, la señal recibida es

$$v(t) = x_{\text{PAM}}(t) + n(t) \quad (5.33)$$

donde $n(t)$ es ruido blanco de densidad espectral $\eta/2$.

Del Ejemplo 5.6, expresión (5.28), la potencia promedio de $x_{\text{PAM}}(t)$ es

$$\langle x_{\text{PAM}}^2(t) \rangle = \frac{\tau}{T_s} \left[A^2 + \langle m^2(t) \rangle \right] \quad (5.34)$$

A la entrada del filtro interpolador la potencia de la señal útil será

$$S_i = \frac{\tau}{T_s} \langle m^2(t) \rangle \quad (5.35)$$

$$\text{y a la salida, } S_o = G_p \frac{\tau}{T_s} \langle m^2(t) \rangle = \frac{T_s}{\tau} \langle m^2(t) \rangle \quad (5.36)$$

donde $G_p = \left(\frac{T_s}{\tau}\right)^2$ es la ganancia de potencia del filtro interpolador. Se supone que el filtro ecualizador no es necesario, es decir, que $T_s \gg \tau$.

En cuanto al ruido, la densidad espectral de ruido a la salida del filtro de entrada de ancho de banda B_e y ganancia unitaria tendrá la forma de la Fig. 5.21, donde

$$S_n(f) = \frac{\eta}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B_e}\right) \quad (5.37)$$

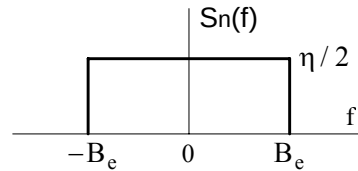


Fig. 5.21.

Como el muestreo del ruido es de tipo natural, podemos demostrar que la densidad espectral de ruido a la salida del muestreador viene dada por

$$S_{n1}(f) = \left(\frac{\tau}{T_s}\right)^2 \frac{\eta}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(n \frac{\tau}{T_s}\right) \Pi\left(\frac{f - n f_s}{2B_e}\right) \quad (5.38a)$$

La densidad espectral de potencia disponible a la salida del muestreador dentro del intervalo de frecuencias $[-B_e, B_e]$ se puede aproximar mediante la expresión (para $n = 0$ en la expresión (5.38a))

$$S_{ni}(f) = \left(\frac{\tau}{T_s}\right)^2 \frac{\eta}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B_e}\right) \quad (5.38b)$$

La correspondiente potencia será

$$N_i = \left(\frac{\tau}{T_s}\right)^2 \eta B_e \quad (5.39)$$

Esta es la potencia a la entrada del filtro interpolador.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

La potencia a la salida del filtro interpolador de ganancia de potencia $G_p = \left(\frac{T_s}{\tau}\right)^2$ y ancho de banda f_m , será

$$N_o = G_p N_i = \eta f_m \quad (5.40)$$

La relaciones S/N entrada salida serán, con $B_c = B$,

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{T_s \langle m^2(t) \rangle}{\tau \eta B} \quad (5.41)$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{T_s \langle m^2(t) \rangle}{\tau \eta f_m} \quad (5.42)$$

y la correspondiente ganancia de conversión,

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{B}{f_m} = \beta_m \quad \text{en PAM} \quad (5.43)$$

La ganancia de conversión en PAM es igual a la relación de expansión del ancho de banda. Esto nos permite expresar la ganancia de conversión en otra forma. En efecto, de (5.32), $B = 1/\tau$ y con $T_s = 1/2f_m$ la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2 \frac{T_s}{\tau} \quad \text{en PAM} \quad (5.44)$$

La ganancia de conversión en PAM depende también de la relación (T_s/τ) , es decir, de la relación de bloqueo del receptor. Nótese que el bloqueo del receptor permite aumentar la ganancia de conversión aunque a expensas de un aumento en el ancho de banda, y viceversa; hay entonces un intercambio o compromiso entre el ancho de banda y la relación S/N. Pero como el bloqueo del receptor no se hace para aumentar la ganancia de conversión sino para facilitar el funcionamiento en multiplex en canales de banda ancha, esto hace que el comportamiento de este sistema de modulación de impulsos sea superior, por ejemplo, al del sistema de doble banda lateral (DSB) de acuerdo con la expresión (2.164). En efecto, de (2.162) con $A_c = 1$, y (5.42), vemos que

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{PAM}} = 2 \frac{T_s}{\tau} \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{DSB}} \quad (5.45)$$

Aunque el receptor no estuviera bloqueado, en cuyo caso $\tau = T_s$, la relación $[S_o/N_o]_{\text{PAM}}$ es superior en 3 dB a la relación $[S_o/N_o]_{\text{DSB}}$; sin embargo, las ganancias de conversión serían iguales, lo que se puede apreciar haciendo $\tau = T_s$ en (5.44) y comparando con (2.164).

Como la información está contenida en la variación de la amplitud de los impulsos, los sistemas PAM son muy sensibles al ruido aditivo. En la práctica, la modulación PAM no se utiliza para transmisión directa de información sino como un paso previo de procesamiento, sobre todo en los sistemas de modulación de impulsos codificados (PCM), que veremos posteriormente.

5.3.3. Modulación de la Duración o Anchura de Impulsos (PDM o PWM)

En la modulación PDM la duración de los impulsos varía proporcionalmente a los valores de muestra de la señal mensaje, como se muestra en la Fig. 5.19(c). Obsérvese que el valor más positivo de $m(t)$ corresponde al impulso más ancho, mientras que el valor más negativo corresponde al impulso más angosto.

Como es evidente, hay que limitar las duraciones máximas y mínimas de los impulsos de tal manera que impulsos adyacentes no se solapen o que la duración mínima sea de tal magnitud que

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

demande anchos de banda inadmisibles. A este efecto, el sistema PDM debe ser cuidadosamente diseñado de acuerdo con los niveles de señal máximos y mínimos esperados.

Una señal PDM tiene entonces la forma

$$x_{\text{PDM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Pi \left[\frac{t - nT_s}{\tau(nT_s)} \right] \quad (5.46)$$

$$\text{donde } \tau(t) = \tau_o + \tau_1 m(t) = \tau_o [1 + m_t m(t)] = \tau_o [1 + \Delta(t)] \quad (5.47)$$

siendo $m_t = \frac{\tau_1}{\tau_o} \leq 1$ el “índice de modulación PDM” y $\Delta(t) = m_t m(t)$; τ_o es la duración de los impulsos no modulados.

Si T_s es el período o intervalo de Shannon, B el ancho de banda de transmisión y $\langle m(t) \rangle = 0$, los valores de τ_o y τ_1 se eligen de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones, ver Fig. 5.22.

$$T_s > \tau_{\max} = \tau_o [1 + m_t |\max m(t)|] > \tau_o > \tau_{\min} \quad (5.48)$$

$$\tau_{\min} = \tau_o [1 - m_t |\min m(t)|] \geq \frac{1}{B} > 0 \quad (5.49)$$

$|\max m(t)|$ y $|\min m(t)|$ son los valores de las máximas excursiones positiva y negativa, respectivamente, de $m(t)$. Nótese que la expresión (5.49) implica que $m_t |\min m(t)| < 1$ o también que $\tau_o > \tau_1 |\min m(t)|$, lo cual nos asegura que el ancho mínimo del impulso nunca será cero o negativo.

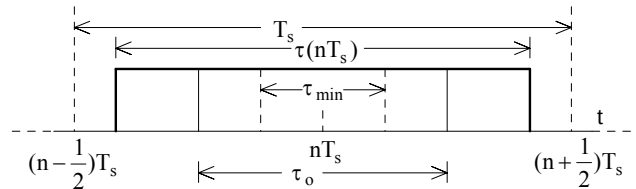


Fig. 5.22. Relaciones de Duración en PDM.

En la Fig. 5.22 se observa que la variación de la duración del impulso se efectúa simétricamente alrededor del instante de muestra nT_s , pero también se puede mantener fijo un borde del impulso mientras que el otro borde es el que se desplaza.

Demodulación PDM

La señal PDM se puede demodular con un simple filtro pasabajo, lo cual no parece tan obvio cuando se observa la forma de la señal. Para demostrarlo, primero hay que determinar el espectro de la señal PDM, lo cual es difícil de efectuar en el caso general. Sin embargo, si se supone el caso de modulación sinusoidal o modulación con un simple tono, la tarea se simplifica y el resultado se puede extender para el caso general.

Una forma de generación de una señal PDM se ilustra en la Fig. 5.23. En la misma figura se muestra el algoritmo de decisión del comparador y las relaciones entre los diferentes parámetros.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

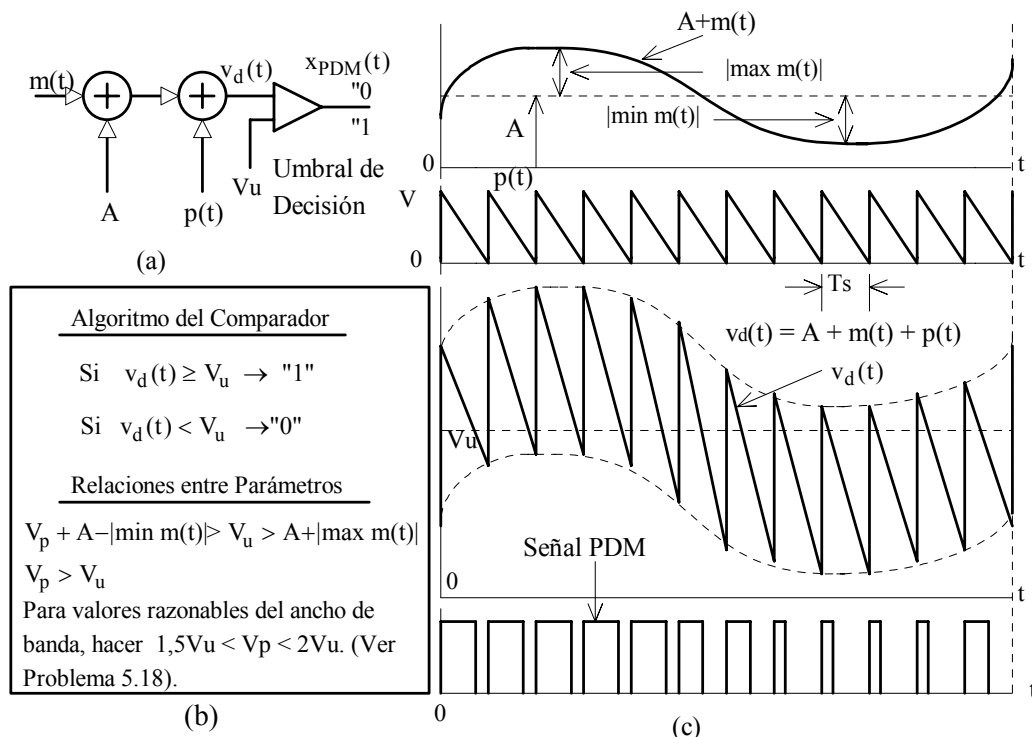


Fig. 5.23. Generación de una Señal PDM

Un tren de impulsos sin modular, $x(t)$, se puede desarrollar en serie de Fourier de la forma

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\omega_s t) \quad \text{con} \quad \omega_s = 2\pi f_s; \quad f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2f_m$$

donde $X_n = \frac{A\tau}{T_s} \text{sinc}(nf_s\tau) = \frac{A}{n\pi} \text{sen}(n\pi f_s\tau)$ y $X_0 = \frac{A\tau}{T_s}$

$$x(t) = \frac{A\tau}{T_s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{sen}(n\pi f_s\tau) \cos(n\omega_s t)$$

que se puede escribir en la forma $x(t) = \frac{A\tau}{T_s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{Im}\{\exp(j2\pi n f_s\tau)\} \cos(n\omega_s t)$

Si τ varía en función del mensaje y si el mensaje es un tono de frecuencia f_m , es decir, $m(t) = \text{sen}(\omega_m t)$, entonces $\tau = \tau(t) = [\tau_0 + \tau_1 \text{sen}(\omega_m t)]$. Definiendo también $\alpha_n = n\pi\tau_0 f_s$ y $\beta_n = n\pi\tau_1 f_s$, la señal PDM queda en la forma

$$x_{PDM}(t) = \frac{A}{T_s} [\tau_0 + \tau_1 \text{sen}(\omega_m t)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \text{Im}\{\exp(j\alpha_n) \exp[j\beta_n \text{sen}(\omega_m t)]\} \cos(n\omega_s t)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El término $\exp[j\beta_n \sin(\omega_m t)]$ es una función periódica de período $1/f_m$ y como tal se puede desarrollar en serie de Fourier. En efecto, sea

$$\exp[j\beta_n \sin(\omega_m t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k \exp(j2\pi k f_m t) \quad (5.50a)$$

donde $Z_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \exp[j\beta_n \sin(\omega_m t)] \cdot \exp[-jk\omega_m t] \cdot dt$

$$Z_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} \exp[j\beta_n \sin(\omega_m t) - jk\omega_m t] \cdot dt$$

Con el cambio de variables $x = \omega_m t$, se obtiene

$$Z_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-j(kx - \beta_n \sin(x))] \cdot dx \quad (5.50b)$$

Esta integral no puede resolverse en forma analítica, pero puede reconocerse como el Coeficiente de Bessel de primera clase, orden k y argumento β_n . Esta función generalmente se denota en la forma $J_k(\beta_n)$ y se encuentra extensamente tabulada (En el Capítulo VI, Sección 6.3.3, se muestra una Tabla de Coeficientes de Bessel para algunos valores de k y β_n). Entonces,

$$Z_k = J_k(\beta_n) \quad (5.51)$$

de donde $\exp[j\beta_n \sin(\omega_m t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \exp(j2\pi k f_m t) \quad (5.52)$

$$x_{PDM}(t) = \frac{A}{T_s} [\tau_o + \tau_1 \sin(\omega_m t)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} \operatorname{Im} \left[\exp(j\alpha_n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \exp(jk\omega_m t) \right] \cos(\omega_s t)$$

y finalmente,

$$x_{PDM}(t) = \frac{A}{T_s} [\tau_o + \tau_1 \sin(\omega_m t)] + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{J_k(\beta_n)}{n} \sin[\alpha_n + k\omega_m t] \cdot \cos(\omega_s t) \quad (5.53)$$

Nótese que aunque la modulación es sinusoidal con un tono único de frecuencia f_m , el espectro de $x_{PDM}(t)$ contiene entonces una componente continua, una componente a la frecuencia f_m y componentes a las frecuencias $f_{nk} = nf_s + kf_m$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Algunas de estas frecuencias son iguales a f_m , constituyendo componentes de distorsión.

En particular, si $f_s = 2f_m$, entonces $f_{nk} = (2n+k)f_m$ y habrá componentes de distorsión para $(n=1 \text{ y } k=-1)$, $(n=2 \text{ y } k=-3)$, etc. Sin embargo, para $n \geq 1$ o $(\beta_n > 1)$, la amplitud de las componentes de distorsión se

hace muy pequeña en comparación con la señal deseada y puede ser despreciada. La situación mejora si el muestreo se hace a una frecuencia mayor que la frecuencia de Nyquist, aunque en general es suficiente un filtro pasabajo de ancho de banda f_m , como se muestra en la Fig. 5.24.

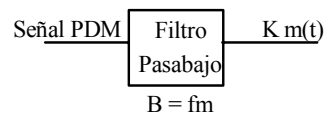


Fig. 5.24. Demodulación de Señales PDM.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

La modulación PDM o PWM se utiliza actualmente no solamente en aplicaciones en comunicaciones y procesamiento de señales, sino también en el control de motores eléctricos y en la generación de señales moduladas AM de alta potencia. Como dato histórico, antiguamente a la modulación PDM se la conocía con el nombre de Amplificación Clase D.

Ancho de Banda en Sistemas PDM

En los sistemas PDM la información está contenida en la duración de los impulsos y por lo tanto la modulación está representada como diferencias de energía en los impulsos sucesivos de diferente duración. Fundamentalmente, hay que transmitir impulsos y el ancho de banda del canal dependerá de la duración del impulso más angosto, es decir, del $\tau_{\min}$ del sistema. El ancho de banda de la banda de base en PDM será entonces,

$$B \geq \frac{1}{\tau_{\min}} \quad \text{en PDM} \quad (5.54)$$

donde $\tau_{\min}$ viene dado por (5.49).

Nótese que el $\tau_{\min}$ en PDM es, en general, más pequeño que el τ en PAM, de modo que se puede decir que

$$B_{\text{PDM}} > B_{\text{PAM}} \quad (5.55)$$

La relación exacta entre B_{PDM} y B_{PAM} dependerá de los valores de τ , τ_0 , τ_1 y $m(t)$.

Debido a la compatibilidad que existe entre los sistemas PDM y PPM, sus relaciones S/N serán tratadas simultáneamente en la próxima sección.

5.3.4. Modulación por Posición de Impulsos (PPM)

En la modulación PPM la posición de los impulsos, con referencia a un punto dado, varía proporcionalmente de acuerdo con los valores de muestra de la señal mensaje, como se muestra en la Fig. 5.19(d).

En un sistema PPM la información está contenida en los desplazamientos de los impulsos de un tren de impulsos, la portadora. Como la amplitud y la duración de los impulsos se mantienen constantes, la información posicional es también transmitida por la posición del borde frontal del impulso, o por la posición del punto, en el eje del tiempo, por donde cruza el borde frontal.

Las modulaciones PPM y PDM están íntimamente relacionadas, a tal punto que la modulación PPM se puede obtener directamente a partir de la modulación PDM en la forma mostrada en la Fig. 5.25.

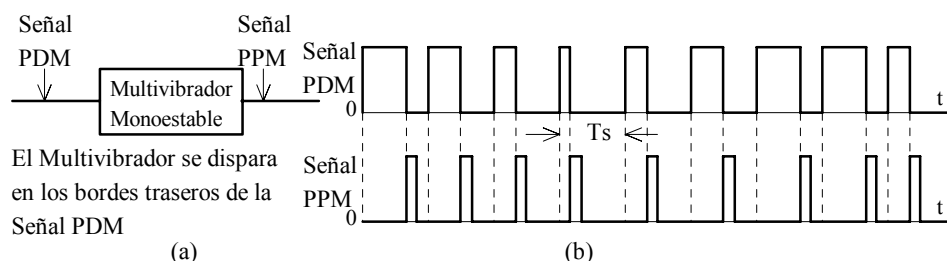


Fig. 5.25. Generación de Señales PPM a partir de Señales PDM.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Como la información reside en la posición temporal de los bordes del impulso y no en el impulso mismo, y como la potencia es proporcional a la duración de los impulsos, sería muy conveniente, si el ancho de banda del canal lo permite, transmitir impulsos muy angostos modulados en PPM. La potencia requerida para PPM será entonces inferior a la requerida para PDM y ésta ya es una ventaja muy importante que se refleja en las correspondientes relaciones S/N, como veremos más adelante.

Una señal PPM se puede expresar en la forma

$$x_{\text{PPM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Pi \left[\frac{t - nT_s - \Delta(nT_s)}{\tau} \right] \quad (5.56)$$

donde $\Delta(t) = m_t m(t)$ es el desplazamiento instantáneo del impulso respecto al instante de referencia $t = nT_s$, como puede observarse en la Fig. 5.26.

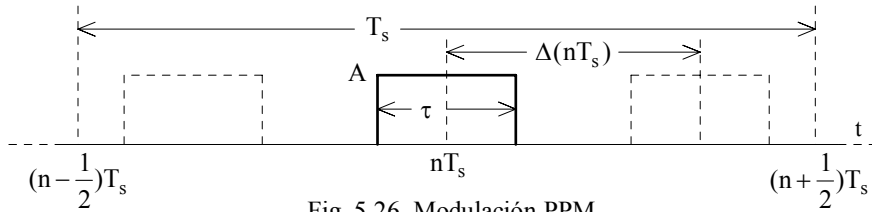


Fig. 5.26. Modulación PPM.

La posición del impulso respecto a $t = nT_s$ es proporcional a $m(t)$; el desplazamiento máximo será

$$|\Delta(t)|_{\max} = m_t |m(t)|_{\max} \leq \frac{1}{2} (T_s - \tau) \quad (5.57)$$

donde $|m(t)|_{\max}$ es el valor máximo de $m(t)$ y m_t el índice de modulación PPM.

Demodulación PPM

Para determinar el proceso de demodulación de una señal PPM es necesario conocer su espectro, el cual, igual que en PDM, es difícil de calcular en el caso general, pero que se puede estimar en el caso de modulación sinusoidal.

Sea entonces, $D(t) = nT_s + \Delta(t)$

$$\text{de donde } x_{\text{PPM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \Pi \left[\frac{t - D(nT_s)}{\tau} \right] = A \left\{ \Pi \left(\frac{t}{\tau} \right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - D(nT_s)] \right\} \quad (5.58)$$

Pero como la información está contenida en el desplazamiento $D(t)$ del impulso y no en el impulso mismo, el ancho del impulso puede hacerse tan pequeño que se puede aproximar mediante impulsos unitarios, es decir, que $\Pi(\frac{t}{\tau}) \approx \delta(t)$ [no tomando en cuenta su efecto sobre el ancho de banda]. Entonces,

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$x_{\text{PPM}}(t) = A \left\{ \delta(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - D(nT_s)] \right\} = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - D(nT_s)]$$

Se ha demostrado [Greg, 1977] que si $D(t) = nT_s + \Delta(t)$, entonces

$$\delta[t - D(nT_s)] = |1 - \Delta'(t)| \delta[t - nT_s - \Delta(t)] \quad (5.59)$$

donde $\Delta'(t)$ es la derivada de $\Delta(t)$

$$\text{Por consiguiente, } x_{\text{PPM}}(t) = A \cdot |1 - \Delta'(t)| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - \Delta(t) - nT_s]$$

El signo de módulo se puede eliminar postulando que

$$|\Delta'(t)| = m_t m'(t) \leq 1 \quad \text{para todo } t; \quad 0 < m_t \leq 1$$

lo cual nos asegura que los impulsos serán siempre positivos. Entonces, de (1.106),

$$x_{\text{PPM}}(t) = A[1 - m_t m'(t)] f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi n f_s (t - m_t m(t))]$$

Definiendo $\beta_n = 2\pi n f_s m_t$ y con $m(t) = \sin(\omega_m t)$,

$$x_{\text{PPM}}(t) = A f_s [1 - m_t m'(t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j(n\omega_s t - \beta_n \sin(\omega_m t))]$$

pero, de (1.106b), vemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j(n\omega_s t - \beta_n \sin(\omega_m t))] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n\omega_s t - \beta_n \sin(\omega_m t)]$$

El coseno se puede expresar en la forma

$$\cos[n\omega_s t - \beta_n \sin(\omega_m t)] = \text{Re}\{\exp(jn\omega_s t) \cdot \exp[-j\beta_n \sin(\omega_m t)]\}$$

Aplicando el mismo procedimiento utilizado para deducir la expresión (5.52) mediante los coeficientes de Bessel, podemos demostrar que

$$\exp[-j\beta_n \sin(\omega_m t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \exp(-jk\omega_m t), \quad \text{de donde}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[j(n\omega_s t - \beta_n \sin(\omega_m t))] = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_k(\beta_n) \cos[2\pi(nf_s - kf_m)t]$$

y finalmente,

$$x_{\text{PPM}}(t) = A f_s [1 - m_t m'(t)] \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n) \cos[2\pi(nf_s - kf_m)t] \right\} \quad (5.60)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Desarrollando (5.60) podemos observar lo siguiente: aunque la modulación es sinusoidal con un simple tono de frecuencia f_m , la señal PPM, igual que en el caso PDM, contiene un término de componente continua que es igual al valor promedio del tren de impulsos sin modular y un segundo término que es proporcional a la derivada de la señal mensaje; los términos restantes son productos de intermodulación entre la frecuencia de muestreo f_s y la frecuencia f_m de la señal: la señal PPM contiene entonces un número infinito de componentes laterales alrededor de $\pm nf_s$ separadas en $\pm kf_m$. Muchas de estas componentes, igual que en PDM, constituyen términos de distorsión de muy baja amplitud que pueden ser despreciados, pero aún así la distorsión de la señal es más pronunciada que en PDM. Además del filtrado pasabajo, es necesario efectuar una integración para restaurar la componente de la señal útil a su perfil original. La demodulación directa de señales PPM se puede efectuar entonces en la forma indicada en la Fig. 5.27(a), pero este tipo de modulación no se emplea en la práctica.

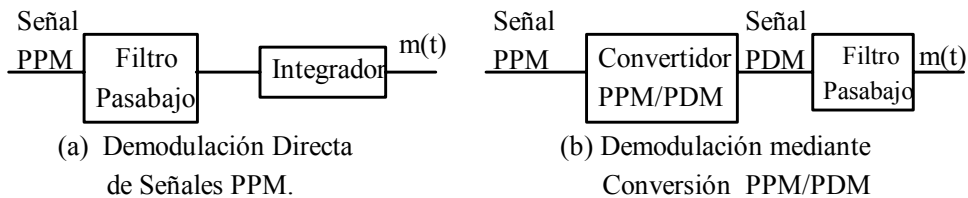


Fig. 5.27. Demodulación de Señales PPM.

Una forma de demodulación de fácil instrumentación, más eficiente en cuanto a su inmunidad al ruido y con menor distorsión se puede obtener mediante conversión PPM a PDM y filtrado pasabajo, Fig. 5.27(b). Esta transformación, que es la inversa de la mostrada en la Fig. 5.25, se puede efectuar haciendo que la portadora (un reloj) active un circuito basculador (un flip-flop RS), el cual, a su vez, es puesto a cero por los impulsos PPM. Sin embargo, como la señal PPM no contiene la información de portadora o temporización (ver Problema de Aplicación 5.21), ésta tiene que ser transmitida por separado. En la Fig. 5.28 se muestra el proceso de demodulación PPM/PDM/m(t).

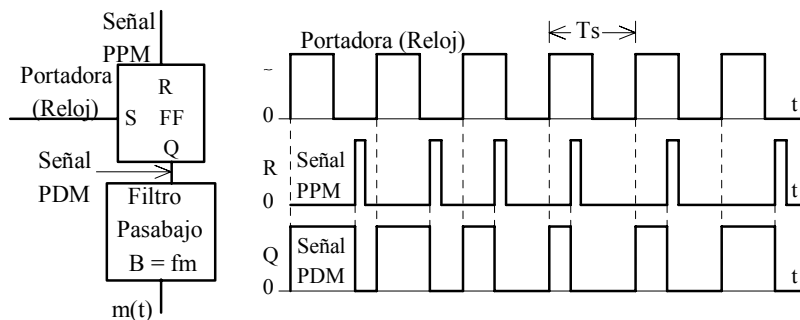


Fig. 5.28. Mecanismo de Demodulación PPM/PDM/m(t).

Ancho de Banda y Relaciones S/N en la Modulación PPM y PDM

En los sistemas PPM la información está contenida en la posición o desplazamiento de los impulsos. En presencia de ruido es necesario que los bordes de los impulsos estén bien definidos a fin de poder interpretar adecuadamente la posición del impulso. Esto significa que el impulso debe

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

tener una mejor resolución o definición que en el caso PDM. Para transmisión en banda de base se puede tomar como ancho de banda [Greg, 1977],

$$B_{PPM} \approx \frac{5}{\tau} \quad (5.61)$$

donde τ es la duración de los impulsos. El sistema PPM es un sistema de banda ancha en el cual la relación de expansión del ancho de banda β_m es mucho mayor que la unidad.

La relación entre los anchos de banda de la banda de base en PAM, PDM y PPM será

$$B_{PPM} > B_{PDM} > B_{PAM} \quad (5.62)$$

Veamos ahora la influencia del ruido en PPM. Como los impulsos se transmiten por canales de ancho de banda finito, se produce dispersión en los bordes de los impulsos recibidos, de tal manera que estos se pueden considerar como impulsos trapezoidales, como se muestra en la Fig. 5.29.

Si la señal recibida se ha contaminado con ruido, éste causará un error en la posición de los impulsos. En la Fig. 5.29 se muestra el impulso recibido en ausencia de ruido y la forma (punteada) mediante la cual el ruido $n(t)$ introduce un error $\Delta\tau$ en la posición del impulso.

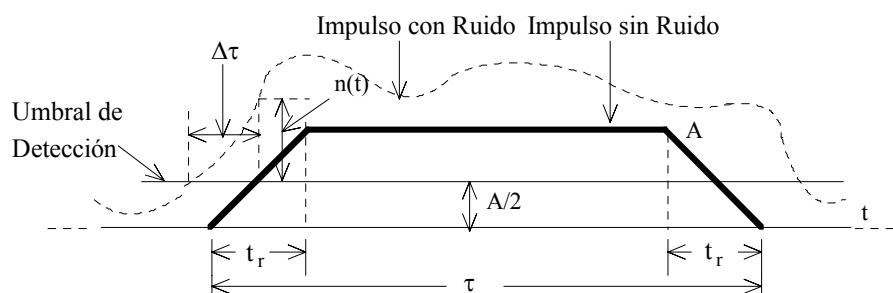


Fig. 5.29. Influencia del Ruido en PPM. Impulsos Recibidos.

De la geometría de la Fig. 5.29,

$$\frac{\Delta\tau}{t_r} = \frac{n(t)}{A} \quad (5.63)$$

Si $n(t)$ varía, entonces $\Delta\tau$ variará proporcionalmente. Vemos también que si $\Delta\tau$ es proporcional a $n(t)$, su potencia promedio será proporcional a la potencia promedio de $n(t)$, es decir,

$$\langle \Delta\tau^2 \rangle = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \langle n^2(t) \rangle \quad (5.64)$$

Sea entonces N_τ la potencia promedio de $\Delta\tau$; si el ruido es blanco y tiene una densidad espectral $\eta/2$, dentro de la banda de transmisión B se verifica que

$$N_\tau = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 \eta B = \left(\frac{t_r}{A}\right)^2 N_i \quad (5.65)$$

donde N_i es la potencia de ruido a la entrada del demodulador en el receptor.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El valor t_r se puede relacionar con B en la forma dada en el Capítulo II, Ejemplo 2.19(a), es decir, $t_r \approx 1/2B$. Por consiguiente,

$$N_\tau = \frac{1}{4A^2B^2} N_i$$

Como la salida es proporcional a la entrada con una constante k de proporcionalidad o de demodulación, entonces,

$$N_o = k^2 N_\tau = \frac{k^2}{4A^2B^2} N_i$$

En cuanto a la señal, $s_o(t) = k m(t)$ y $S_o = \langle s_o^2(t) \rangle = k^2 \langle m^2(t) \rangle$

La potencia de entrada de la señal PPM, para $\tau \gg 2t_r$, es, de la Fig. 5.29,

$$S_i = \frac{\tau}{T_s} A^2 \quad (5.66)$$

La relación de postdetección S_o/N_o será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{4A^2B^2 \langle m^2(t) \rangle}{N_i} \quad (5.67)$$

Reemplazando en (5.67) el valor de A^2 dado por (5.66), la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 4 \frac{T_s}{\tau} B^2 \langle m^2(t) \rangle \quad \text{en PPM} \quad (5.68)$$

La expresión (5.68) puede expresarse en otra forma. Si la modulación es sinusoidal y a máxima modulación (con $m_t = 1$), su efecto es el de producir un desplazamiento $\Delta(t)$ de la forma

$\Delta(t) = m(t) = \frac{1}{2}(T_s - \tau) \cos(\omega_m t)$, como se muestra en la Fig. 5.30.

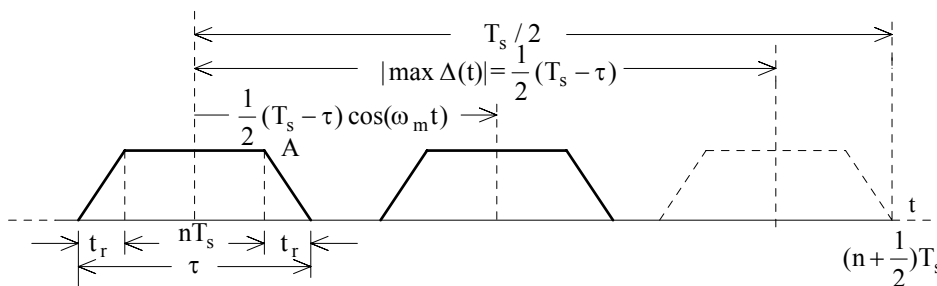


Fig. 5.30. Desviación Sinusoidal de la Posición de los Impulsos en PPM.

Se tiene entonces que $\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{8}(T_s - \tau)^2$

Si el muestreo se ha efectuado a la frecuencia de Nyquist ($T_s = 1/2f_m$) y haciendo la aproximación $B = 1/\tau$, la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = \frac{B}{4f_m} \left[\frac{B}{2f_m} - 1 \right]^2 = \frac{\beta_m}{4} \left(\frac{\beta_m}{2} - 1 \right)^2 \quad \text{en PPM} \quad (5.69)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Si $\beta_m \gg 2$, la expresión (5.69) se reduce a

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1}{16} \beta_m^3 \quad \text{en PPM} \quad (5.70)$$

La ganancia de conversión en PPM es proporcional al cubo de la relación de expansión del ancho de banda β_m . Cuando B aumenta, S_o/N_o aumenta y es posible intercambiar ancho de banda por relación S/N. La potencia de la señal pudiera disminuirse sin que la relación S_o/N_o cambie; esto ocurre, sin embargo, solamente si la relación S_i/N_i está sobre cierto umbral. En la literatura se toma el nivel umbral para una relación $[S_i/N_i] \approx 4$ (6 dB).

En el caso PDM, la operación de detección sobre el umbral de detección elimina todos los efectos del ruido excepto el desplazamiento en el tiempo que hemos evaluado en PPM. En la Fig. 5.31 se muestra la señal PDM recibida en la cual una porción de amplitud constante y duración $d(t)$ viene precedida y seguida por los flancos montantes o bajantes, respectivamente, idénticos a los vistos en PPM.

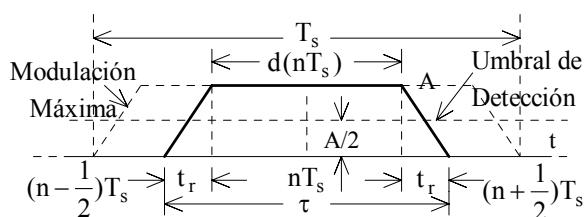


Fig. 5.31. Impulsos Recibidos en PDM.

En lo que se refiere a la potencia promedio en PDM, ella será la suma de las potencias promedio, referidas a un período T_s , de un rectángulo de amplitud A y duración promedio d_n , y de las dos rampas del trapecio que equivalen a un triángulo de la forma $A\Lambda(t/t_r)$, ya que estas señales no se solapan en el tiempo. Por consiguiente, la potencia promedio de la señal PDM viene dada por

$$S_i = \frac{A^2 d_n}{T_s} + \frac{2A^2 t_r}{3T_s} = \frac{A^2}{T_s} \left(d_n + \frac{2}{3} t_r \right) \quad (5.71)$$

La duración $d(t)$ de los impulsos PDM recibidos se puede expresar, para una señal sinusoidal de prueba y máxima modulación, a partir de la Fig. 5.31 en la forma

$$d(t) = \frac{1}{2} (T_s - 2t_r) \cdot [1 + \cos(\omega_m t)] \quad (5.72)$$

cuyo valor promedio es $d_n = \frac{1}{2} (T_s - 2t_r) \approx \frac{T_s}{2}$ puesto que $T_s \gg 2t_r$. En este caso, la potencia de entrada de la señal PDM, expresión (5.71), será

$$S_i = \frac{A^2}{2} + \frac{2A^2 t_r}{3T_s} = \frac{A^2}{T_s} \frac{3T_s + 4t_r}{6} \quad (5.73)$$

Si hacemos $B = 1/2t_r$, entonces

$$S_i = \frac{A^2}{T_s} \frac{3BT_s + 2}{6B} \quad (5.74)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Reemplazando A^2 de (5.74) en (5.67),

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{24T_s B^3 \langle m^2(t) \rangle}{3BT_s + 2} \frac{S_i}{N_i}, \text{ de donde}$$

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{24T_s B^3}{3BT_s + 2} \langle m^2(t) \rangle \quad \text{en PDM} \quad (5.75)$$

Si $B \gg 2f_m$, es decir, si $BT_s \gg 1$, la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 8B^2 \langle m^2(t) \rangle \quad \text{en PDM} \quad (5.76)$$

Con modulación sinusoidal y modulación máxima, $m(t) = \frac{1}{2}(T_s - 2t_r) \cdot \cos(\omega_m t)$, cuya potencia promedio es $\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{8}(T_s - 2t_r)^2$. Reemplazando en (5.75) con $T_s = 1/2f_m$ y $B = 1/2t_r$, se obtiene finalmente

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{3B}{2f_m} \frac{(\frac{B}{2f_m} - 1)^2}{(\frac{3B}{2f_m} + 2)} = \frac{3}{2} \beta_m \frac{(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2}{(\frac{3}{2} \beta_m + 2)} \quad \text{en PDM} \quad (5.77)$$

Si $\beta_m \gg 2$,

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1}{4} \beta_m^2 \quad \text{en PDM} \quad (5.78)$$

La ganancia de conversión en PDM es proporcional al cuadrado del factor de expansión del ancho de banda β_m . El sistema de modulación PDM es un sistema de banda ancha que permite intercambiar ancho de banda por potencia.

5.3.5. Comparación entre las Ganancias de Conversión en Sistemas PAM, PDM y PPM

En las secciones anteriores se ha determinado las ganancias de conversión para los sistemas PAM, PPM y PDM. En todos los casos se ha tomado la potencia de ruido a la entrada igual a ηB , donde B es el ancho de banda de la banda de base. En función de la relación de expansión del ancho de banda $\beta_m = B/f_m$, se tiene

$$\text{En PAM:} \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \beta_m \quad (5.79)$$

$$\text{En PPM:} \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\beta_m}{4} \left(\frac{\beta_m}{2} - 1 \right)^2 \quad (5.80)$$

$$\text{Si } \beta_m \gg 2, \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\beta_m^3}{16} \quad (5.81)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\text{En PDM: } \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{3}{2} \beta_m \frac{(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2}{(\frac{3}{2} \beta_m + 2)} \quad (5.82)$$

$$\text{Si } \beta_m \gg 2, \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\beta_m^2}{4} \quad (5.83)$$

Si el ruido y el ancho de banda son los mismos en los tres sistemas, se puede comparar PPM con PAM. En efecto, de (5.79) y (5.80),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PPM}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\beta_m}{2} - 1 \right)^2 \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PAM}} \quad (5.84)$$

Por ejemplo, si $\beta_m = 24$, situación que puede presentarse en sistemas con multiplex, el mejoramiento de la ganancia de conversión en PPM es 14,8 dB superior a PAM. El sistema PPM es superior a PAM para $\beta_m > 6$.

Comparemos ahora PDM con PAM. De (5.79) y (5.82),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PDM}} = \frac{3}{2} \frac{(\frac{\beta_m}{2} - 1)^2}{(\frac{3}{2} \beta_m + 2)} \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PAM}} \quad (5.85)$$

Para $\beta_m = 24$, el mejoramiento de la ganancia de conversión en PDM sobre PAM es de 6,8 dB. El sistema PDM es superior a PAM para $\beta_m > 8$.

Veamos ahora la comparación entre PPM y PDM. De (5.80) y (5.82),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PPM}} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} \beta_m + 2 \right) \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PDM}} \quad (5.86)$$

El mejoramiento de la ganancia de conversión en PPM, para $\beta_m = 24$, es de 8 dB superior a PDM. El sistema PPM es superior a PDM para $\beta_m > 3$.

En general, para las ganancias de conversión y con $\beta_m > 8$ se cumple que

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PPM}} > \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PDM}} > \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\text{PAM}} \quad (5.87)$$

Estas consideraciones se pueden apreciar mejor en la Fig. 5.32, en donde se muestra la variación de las ganancias de conversión en función del factor de expansión del ancho de banda β_m

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

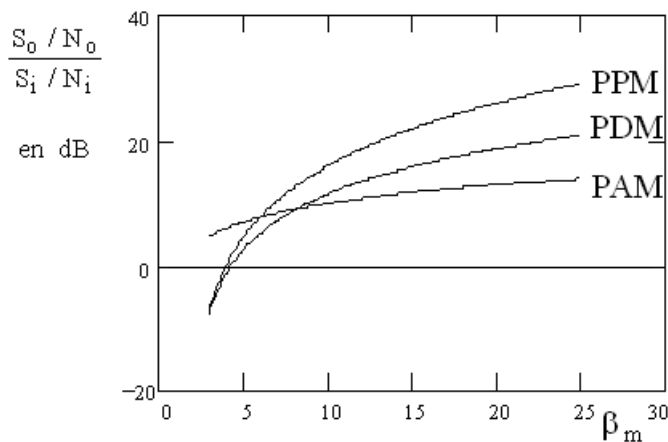


Fig.5.32. Ganancias de Conversión vs β_m

En relación con los anchos de banda, de la expresión (5.62),

$$B_{PPM} > B_{PDM} > B_{PAM} \quad (5.88)$$

En la determinación de las ganancias de conversión anteriores no se ha tomado en cuenta los falsos impulsos producidos por los picos de ruido, los cuales tienen una cierta probabilidad de ocurrencia cuando el ruido es gaussiano.

Cuando el ancho de banda aumenta, el correspondiente aumento en la potencia de ruido produce una cantidad suficiente de falsos impulsos que impiden aumentar el ancho de banda; se llega entonces a una “**región umbral**” no importa si se aumenta el valor A de la amplitud de la portadora a fin de mantener una relación S_i / N_i fija; este umbral es uno de los factores limitativos de los sistemas de banda ancha, como podremos constatarlo a medida que avancemos en el texto. Las condiciones prácticas del medio establecerán el nivel umbral y los valores apropiados correspondientes de la relación S_i / N_i .

5.4. SISTEMAS DE MODULACIÓN DIGITAL DE IMPULSOS

5.4.1. Introducción

En los sistemas PAM, PDM y PPM solamente el tiempo se expresa en forma discreta, mientras que los respectivos parámetros de modulación (amplitud, duración y posición) varían en forma continua de acuerdo con la señal mensaje. La transmisión de información se lleva a cabo entonces en forma analógica en tiempos o instantes discretos. En la modulación digital de impulsos el mensaje es representado por secuencias de impulsos digitales, donde la palabra “digital” significa “amplitud y duración discreta”. En este tipo de modulación cada valor de muestra de la señal mensaje se codifica en secuencias de impulsos en el sentido visto en el Capítulo IV, cuando introducimos el concepto de codificación binaria y m-aria. Los sistemas prácticos de modulación digital de impulsos, por cuestiones de tipo tecnológico, son esencialmente sistemas binarios.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Los tres sistemas básicos de modulación digital de impulsos son:

- **La Modulación de Impulsos Codificados (Pulse-Code Modulation, PCM)**
- **La Modulación Diferencial de Impulsos Codificados (Differential Pulse-Code Modulation, DPCM)**
- **La Modulación Delta Lineal (Delta Modulation, DM)**

5.4.2. Modulación de Impulsos Codificados (PCM)

En 1926, P. M. Rainey, de los Estados Unidos, desarrolló un método para transmitir una representación de una señal continua mediante una sucesión de valores discretos de la misma señal. Posteriormente, en 1936, A. H. Reeves, entonces ingeniero de la ITT en Francia, patentó un sistema para la transmisión de voz basado en el método de Rainey. Este sistema se conoce desde entonces con el nombre de Modulación de Impulsos Codificados (PCM). Durante más de 20 años el concepto PCM se consideró como una simple curiosidad científica, pues los componentes electrónicos existentes para la época no eran apropiados para la codificación digital de señales, y fueron los dispositivos de estado sólido los que iniciaron el gigantesco desarrollo que estamos presenciando.

Los tres tipos de modulación de impulsos vistos en las secciones anteriores han sido representaciones analógicas del mensaje, pero la modulación de impulsos codificados es completamente diferente en concepto. En efecto, en la modulación PCM cada muestra del mensaje se representa o codifica en una secuencia de impulsos, generalmente binarios, en el sentido visto en el Capítulo IV. Las muestras del mensaje se presentan en forma de una señal PAM que se aplica a un codificador binario o convertidor cuya salida son secuencias de impulsos binarios que representan la amplitud de los impulsos PAM. Por su contenido de información, estas secuencias son secuencias aleatorias binarias como las que vimos en el Capítulo IV.

El sistema PCM es el sistema de modulación de impulsos más utilizado por las muchas ventajas que ofrece. Algunas de estas ventajas son:

- Los circuitos y componentes digitales utilizados son muy baratos y fáciles de adquirir.
- Las señales PCM derivadas de todos los tipos de fuentes analógicas (audio, video, señales de control industrial, etc.) se pueden mezclar con señales de datos (por ejemplo, las señales de salida de los computadores digitales) y transmitirse por un canal de alta velocidad. Esta técnica se denomina “**multiplicidad o multicanalización por división de tiempo, (TDM)**”, que veremos posteriormente.
- En transmisión a larga distancia las señales PCM contaminadas con ruido se pueden regenerar y retransmitir sin mucha pérdida de calidad.
- En relación con el ruido, los sistemas PCM tienen un comportamiento superior al de un sistema analógico. Además, la probabilidad de error en el destino se puede reducir mediante la aplicación de técnicas de codificación apropiadas.

La desventaja principal de los sistemas PCM es que su ancho de banda es superior al de un sistema analógico similar (similar en el sentido de transmitir la misma cantidad de información).

Cuantificación y Codificación

Aunque en la práctica no suele usarse, para comprender el mecanismo de la modulación PCM, se le puede descomponer en una secuencia de tres operaciones distintas: Muestreo (formación de la señal PAM), Cuantificación y Codificación, como se muestra en las Figs. 5.33 y 5.34.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

De la expresión (4.22), para impulsos binarios, la relación entre el número de muestras de entrada N y el número de impulsos n de la muestra codificada es $N = 2^n$; por lo tanto, el número de muestras de entrada al convertidor debe ser un número finito. Pero como el número de amplitudes de los impulsos PAM es teóricamente infinito, es necesario efectuar previamente un proceso de “redondeamiento” de los valores de amplitud para generar un conjunto finito de valores fijos o niveles, de tal manera que el número de niveles sea N . Este proceso se denomina “**cuantificación**” y es similar al redondeamiento de los últimos dígitos en un proceso numérico. En la Fig. 5.34 se muestra este proceso. La salida PCM es entonces una secuencia aleatoria binaria. (Nótese que se utiliza la letra “ m ” para indicar el orden de la muestra, a fin de no confundirla con “ n ”, el número de impulsos de la muestra codificada).

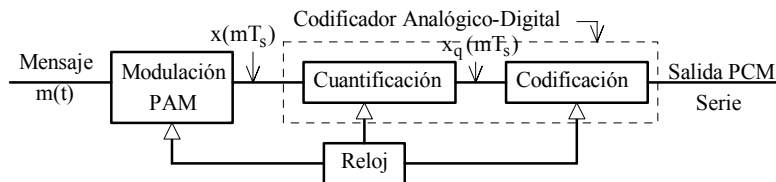


Fig. 5.33. Mecanismo de Generación de Señales

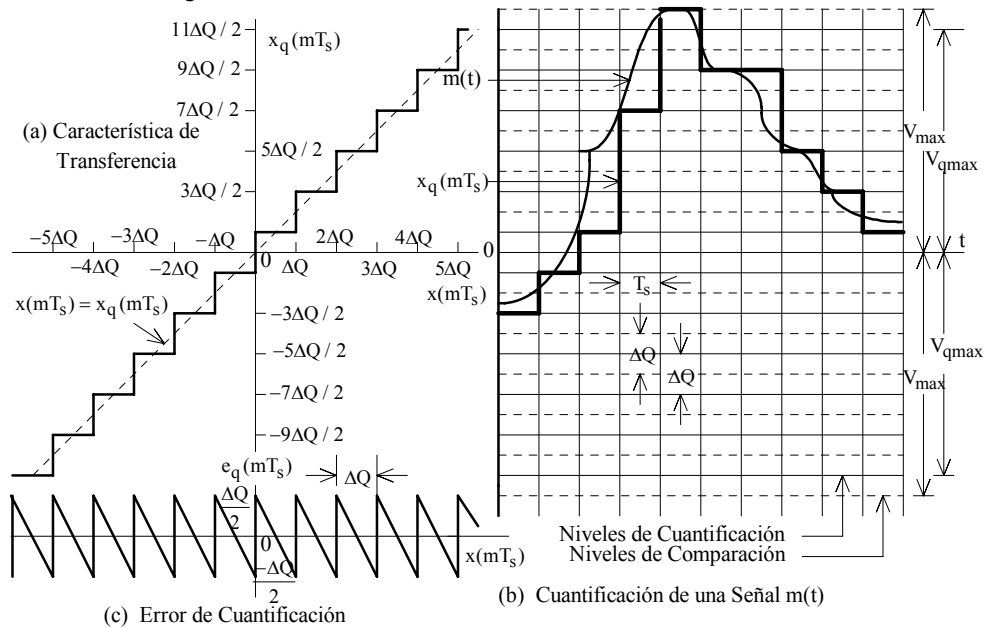


Fig. 5.34. Principio de la Cuantificación de Señales en Modulación PCM.

En la Fig. 5.34(a) se muestra la característica de transferencia de un cuantificador uniforme, y en (b) la operación de redondeamiento efectuada. Obsérvese que los valores instantáneos de amplitud $x(mT_s)$ se redondean al valor más cercano $x_q(mT_s)$ de un conjunto de N niveles fijos de amplitud. Estos valores fijos se denominan “**niveles de cuantificación**” y la diferencia ΔQ entre dos niveles, “**paso de cuantificación**”. Cuando el paso de cuantificación es constante, se dice que la cuantificación es uniforme, a diferencia de algunos sistemas en los cuales el paso de cuantificación es variable.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Consideremos el proceso de cuantificación uniforme bipolar mostrado en la Fig. 5.34(b), donde $V_{q\max} = |x_q(mT_s)|_{\max}$ y $V_{\max} = |x(mT_s)|_{\max}$ son los valores máximos o pico de la señal cuantificada y de la señal muestreada PAM, respectivamente. ΔQ es el paso de cuantificación, $N = 2^n$ el número de niveles de cuantificación y n el número de impulsos de las secuencias codificadas. $V_{q\max}$ y n generalmente son los datos o parámetros del cuantificador y vienen dados por el fabricante del sistema.

La señal cuantificada $x_q(mT_s)$ está acotada por

$$|x_q(mT_s)| \leq (N-1) \frac{\Delta Q}{2} = (2^n - 1) \frac{\Delta Q}{2} = V_{q\max} \quad (5.89)$$

y sus valores particulares vendrán dados por

$$x_{qk}(mT_s) = \pm(2k-1) \frac{\Delta Q}{2} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2} \quad (5.90)$$

Los niveles de comparación estarán a $\Delta Q/2$ sobre o bajo $x_{qk}(mT_s)$.

$$\text{También} \quad |x(mT_s)| \leq \frac{N}{2} \Delta Q = 2^{n-1} \Delta Q \quad (5.91)$$

$$\text{Por consiguiente,} \quad V_{\max} = V_{q\max} + \frac{\Delta Q}{2} \quad (5.92)$$

Para que no haya saturación en el cuantificador, debe cumplirse también que

$$|m(t)|_{\max} \leq V_{q\max} + \frac{\Delta Q}{2} = V_{\max}$$

De (5.89) o (5.91), el paso de cuantificación es

$$\Delta Q = \frac{2V_{q\max}}{N-1} = \frac{2V_{\max}}{N} \quad (5.93)$$

En la literatura se suele definir también la “**resolución del cuantificador, R_q** ”, como el intervalo mínimo que el cuantificador puede discernir, es decir, $\Delta Q/2$; por lo tanto,

$$\text{Resolución } R_q = \frac{\Delta Q}{2} = \frac{V_{q\max}}{N-1} = \frac{V_{\max}}{N} \quad (5.94)$$

$$\text{y en por ciento,} \quad R_q \% = 100 \cdot R_q \quad (5.95)$$

Asimismo, el “**error de cuantificación, $e_q(mT_s)$** ”, Fig. 5.34(c), se define en la forma

$$e_q(mT_s) = x_q(mT_s) - x(mT_s) \quad (5.96)$$

Obsérvese que para algunos valores específicos de $m(t)$ el error es cero, pero el error máximo es, de la Fig. 5.34(c),

$$e_{\max} = |e_q(mT_s)|_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = \frac{V_{q\max}}{N-1} = \frac{V_{\max}}{N} \quad (5.97a)$$

$$\text{y en por ciento,} \quad e_{\max} \% = 100 \cdot e_{\max} \quad (5.97b)$$

Nótese que la resolución es la medida del error máximo en el cuantificador.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Algunas veces se prefiere normalizar los parámetros. En este caso se supone que el rango normalizado de la señal cuantificada es $-1 \leq x_q(mT_s) \leq 1$, para lo cual debe verificarse que $|x_q(mT_s)|_{\max} = V_{q\max} = 1$. Los parámetros normalizados serán:

$$\text{Paso de cuantificación normalizado: } \Delta Q_n = \frac{2}{N-1} \quad (5.98)$$

$$\text{Resolución normalizada: } R_{qn} = \frac{1}{N-1} \quad (5.99)$$

$$\text{Resolución normalizada porcentual: } R_{qn} \% = \frac{100}{N-1} \quad (5.100)$$

En general, la cuantificación transforma un conjunto infinito de amplitudes en un conjunto finito de N amplitudes; como consecuencia, después de la conversión la señal $m(t)$ nunca podrá ser recuperada en su forma original (aún en el caso de que el ruido de transmisión sea nulo) debido al denominado “**ruido de cuantificación**”. En efecto, el proceso de cuantificación introduce una cantidad inicial de distorsión, la cual es inherente al sistema pero que podemos controlar y hacer tan pequeña como queramos, dependiendo del número de niveles de cuantificación elegidos. Esto significa que la señal original puede aproximarse mediante una señal que se construye a partir de un conjunto disponible de amplitudes discretas elegidas sobre una base de error mínimo. La existencia de un número finito de niveles de amplitud discreta es una condición básica en PCM. Lógicamente, si se asigna niveles de amplitud discreta con un espaciamiento lo suficientemente pequeño, se puede lograr que la señal cuantificada prácticamente no se distinga de la señal original.

La codificación binaria natural es el proceso de transformación de la amplitud de la muestra PAM cuantificada en secuencias de n impulsos binarios conocidas como “**grupos de codificación**”. A cada nivel de cuantificación se asigna un grupo de codificación diferente, es decir, habrá $N = 2^n$ grupos de codificación, palabras o secuencias binarias de n impulsos (llamados también “dígitos binarios” o bits (del inglés “binary digit”)) cada una, como se muestra en la Fig. 5.35(a).

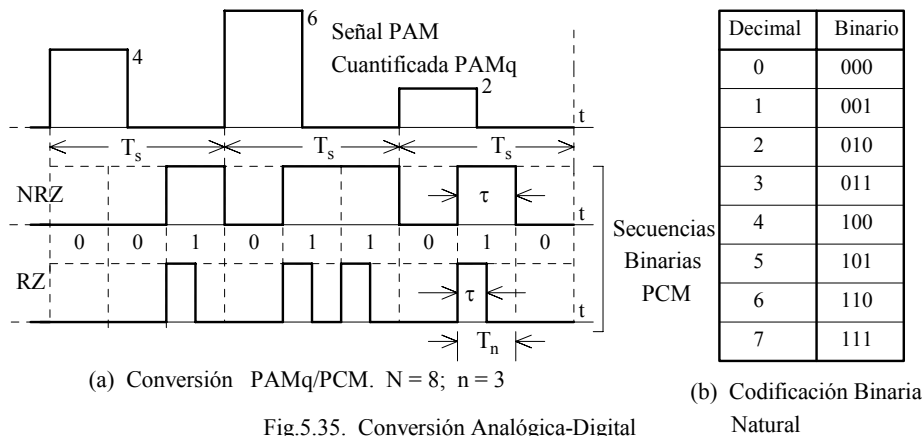


Fig.5.35. Conversión Analógica-Digital

En la Fig. 5.35(a) se tiene unas muestras PAM cuantificadas y sus correspondientes secuencias binarias codificadas en PCM (NRZ y RZ). Nótese que en este caso se han empleado 8 niveles (2^3) para cuantificar las muestras; por lo tanto, un código de tres dígitos será suficiente para codificación completa; nótese también que el bit de menor peso se transmite de primero. En la Tabla, Fig. 5.35(b), se muestra la codificación empleada. En general, los fabricantes de los

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

codificadores o convertidores especifican el correspondiente código de salida (binario natural, BCD, OFF-SET, etc.).

La codificación binaria, en sus distintas variedades, es la más utilizada debido a su simplicidad de generación, regeneración y detección, y por su gran inmunidad al ruido de transmisión. Esta inmunidad se debe a que: (a) solamente una parte de la información total es afectada por la pérdida o distorsión de uno o más impulsos de un grupo de codificación, y (b) que se puede tolerar grandes cantidades de ruido y distorsión en la detección de los impulsos individuales porque la selección o decisión se efectúa solamente entre dos estados: el estado “CERO” o el estado “UNO”.

Demodulación de Señales PCM

El mecanismo de recepción de señales PCM se muestra en la Fig. 5.36.

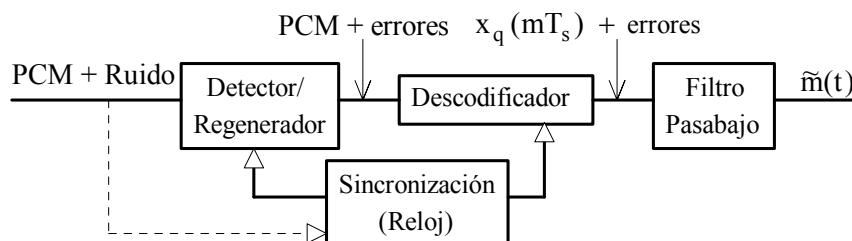


Fig. 5.36. Recepción de Señales PCM.

La señal de banda de base que llega al receptor está contaminada con ruido blanco $n(t)$. En el detector/regenerador se determina si llegaron o no impulsos, se regeneran y se encuadran en los correspondientes grupos de codificación incluyendo los errores producidos por el ruido $n(t)$. Esta secuencia de grupos se aplica al descodificador que los convierte en las muestras de una señal PAM cuantificada (incluyendo los errores debido al ruido). Esta señal se filtra en un filtro pasabajo de ancho de banda $B = f_m$ para extraer el mensaje $m(t)$. Nótese que la señal de salida $\tilde{m}(t)$ del receptor no es idéntica a $m(t)$ debido a los efectos del ruido aditivo $n(t)$ y del ruido de cuantificación; en otras palabras, en el sistema PCM la reconstrucción perfecta de una señal de variación continua es imposible aún cuando el ruido $n(t)$ sea despreciable.

El empleo cada vez mayor de las señales digitales en las telecomunicaciones se basa mucho en la facilidad mediante la cual las señales digitales (impulsos discretos) se pueden regenerar y acondicionar. En efecto, todos los canales de comunicación en mayor o menor grado atenúan y distorsionan las señales. En el caso de señales digitales en transmisión en banda de base, se utiliza estaciones repetidoras para regenerar los impulsos deformados por el ruido y por las características físicas del canal; estas repetidoras están situadas a distancias apropiadas a lo largo de la trayectoria de transmisión. El número de repetidoras y el espaciado entre ellas depende de una cantidad de factores tales como el medio de transmisión (conductores metálicos, fibras ópticas, radio, etc.), de su atenuación y distorsión de fase por unidad de longitud, de la longitud total del enlace, de la frecuencia de portadora, etc. El tema de las repetidoras, aunque interesante, está fuera de los objetivos de este texto.

En la práctica, el proceso de cuantificación y codificación es efectuado por un solo dispositivo denominado “**convertidor analógico-digital, (CAD)**”. La operación inversa en el

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

receptor, es decir, la conversión de la señal PCM en una señal analógica PAM, se efectúa con un “**convertidor digital-analógico, (CDA)**”. Estos dos convertidores son fácilmente disponibles a costos moderados como circuitos de mediana y gran escala de integración (MSI y VLSI), en todas las tecnologías (TTL, MOS, etc.), para cualquier valor de n y para diferentes velocidades de conversión y códigos de salida.

Hay que señalar que en los convertidores analógico-digitales prácticos la salida se presenta en forma paralela, pero como la señal PCM de banda de base es una secuencia serie, es necesario efectuar una transformación paralelo/serie utilizando comúnmente registros de desplazamiento (“shift-registers”), como se muestra en la Fig. 5.37(a).

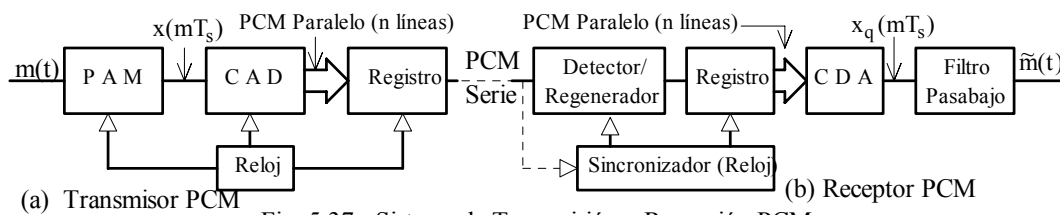


Fig. 5.37. Sistema de Transmisión y Recepción PCM

Para la demodulación el proceso es contrario: la señal PCM es procesada en el detector regenerador, en el registro se transforma en PCM paralela, se aplica luego al convertidor digital-analógico y por último se pasa por un filtro pasabajo, como se muestra en la Fig. 5.37(b). Sin embargo, en el comercio se encuentran tres tipos de circuitos integrados que producen salidas serie normalizadas: el transmisor/receptor asincrónico universal (UART), el transmisor/receptor síncrono universal (USRT) y el transmisor/receptor síncrono/asincrónico universal (USART). La operación y descripción de estos circuitos se puede hallar en cualquier catálogo de componentes (Motorola, Nacional Semiconductors, RCA, etc.).

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PCM

Los impulsos transmitidos en PCM fluyen generalmente a una velocidad constante, es decir, el espaciado entre impulsos es uniforme a fin de ocupar el mínimo ancho de banda. A este respecto, hay que considerar si las secuencias PCM son sin o con retorno a cero (NRZ o RZ), como se muestra en la Fig. 5.35(a).

Cada muestra ha sido codificada en secuencias de n impulsos; en consecuencia, para $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ se tiene:

$$\text{Secuencias NRZ: } \begin{cases} T_s = n\tau; B_{\text{PCM}} \geq \frac{1}{\tau} = 2nf_m = 2f_m \log_2 N \\ \frac{B_{\text{PCM}}}{f_m} = \beta_m \geq 2n = 2 \log_2 N \end{cases} \quad (5.101)$$

$$\text{Secuencias RZ: } T_s = nT_n; R_T = \frac{\tau}{T_n}; B_{\text{PCM}} \geq \frac{1}{\tau} = \frac{2nf_m}{R_T} = \frac{2f_m}{R_T} \log_2 N \quad (5.102)$$

$$\text{y } \beta_m = \frac{2}{R_T} \log_2 N$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

donde R_T es el ciclo de trabajo, f_m la frecuencia máxima de la señal mensaje $m(t)$, $N = 2^n$ el número de niveles de cuantificación y β_m la relación de expansión del ancho de banda.

La importancia de estos resultados es que *la relación de expansión del ancho de banda en PCM es proporcional al número de impulsos por grupo de codificación*, y, como tal, está relacionada con la exactitud con la cual se puede recobrar la señal. Puesto que $\beta_m \gg 2$, vemos también que el sistema PCM es un sistema de banda ancha en el cual se puede intercambiar ancho de banda por relación señal-ruido.

Otra forma de estimación del ancho de banda en sistemas PCM es mediante consideración de la densidad espectral de una Secuencia Aleatoria Unipolar NRZ, como la mostrada en la Fig. 3.21(c). Si tomamos como ancho de banda de la señal la distancia al primer cero de $S_x(f)$, se tiene que $T_b B = 1$, de donde $B = 1/T_b$. De la Fig. 5.35(a) $T_b = T_s/n$; entonces $B = n/T_s$ y como

$T_s = 1/2f_m$, se obtiene $B = 2nf_m$, igual que el ancho de banda dado en la expresión (5.101). En la práctica el parámetro más “accesible” o “visible” es T_b (el período de señalización) de modo que en primera instancia el ancho de banda de la señal viene dado por $B = 1/T_b$. Estos conceptos los utilizaremos en la transmisión PCM con portadora modulada, como veremos más adelante.

Como ejemplo de los requerimientos de ancho de banda en PCM, consideremos la transmisión digital de la voz en sistemas telefónicos. Aunque la voz contiene frecuencias superiores a los 10 kHz, la mayor parte de su energía está concentrada en la gama de 100 a 600 Hz y un ancho de banda de 3 kHz es suficiente para una buena inteligibilidad. Como norma en los sistemas telefónicos, la señal de voz se filtra primero en un filtro pasabajo de 3,2 kHz y luego se muestrea a una frecuencia de 8000 muestras por segundo. Las muestras se cuantifican en grupos de 8 dígitos (256 niveles) y el ancho de banda de la señal PCM será, de acuerdo con (5.101), de 64 kHz, el cual es mucho mayor que el ancho de banda nominal de 4 kHz del canal de voz. Esta es la razón por la cual no se puede transmitir voz digitalizada en PCM por los canales telefónicos corrientes.

En cuanto al ruido, en los sistemas PCM hay dos tipos de ruido, ya mencionados, que son de interés: uno es el **ruido de transmisión**, y el otro el **ruido de cuantificación**. El ruido de transmisión se puede introducir en cualquiera parte entre el transmisor y el receptor, mientras que el ruido de cuantificación se genera únicamente en el transmisor y es llevado hasta la salida del receptor. Como ya lo hemos señalado, el ruido de transmisión, denominado también “**ruido de descodificación**”, puede causar errores de decisión en el detector, con el resultado que éste emite la correspondiente secuencia de impulsos regenerados pero erróneos. Estos grupos erróneos son interpretados en el descodificador como amplitudes falsas que, por supuesto, distorsionan la señal $m(t)$ recuperada. Aparte de estos errores ocasionales, generalmente el ruido de transmisión no aparece a la salida, esto es, no hay un camino continuo de transmisión para el ruido como lo hay en los sistemas de modulación analógica ya vistos.

Como en el caso de los sistemas PAM, PDM y PPM, en PCM existe también una región umbral bajo la cual el comportamiento del sistema disminuye rápidamente debido a los errores producidos por el ruido de transmisión. Sobre la región umbral, sin embargo, el efecto del ruido de transmisión es despreciable y la calidad del proceso de detección mejora rápidamente a medida que la potencia de la señal aumenta sobre la región umbral, y normalmente el ruido de transmisión no se toma en cuenta en el diseño original del sistema. Cuando se opera con relaciones S/N de entrada muy por encima de la región umbral, la relación S/N a la salida está limitada únicamente por el ruido de cuantificación. Asimismo, si consideramos que la señal es regenerada en cada estación repetidora, el ruido de transmisión se hará muy pequeño en comparación con el ruido de cuantificación (caso de alta relación S/N).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Se ha demostrado [Gregg, 1977] que las potencias promedio de la señal PCM y del ruido de cuantificación a la salida del descodificador, en PCM binario, son, respectivamente,

$$\langle s_o^2(t) \rangle = S_o = \frac{(\Delta Q)^2}{12} (2^{2n} - 1) \quad (5.103)$$

$$\text{y } \langle n_q^2(t) \rangle = N_o = \frac{(\Delta Q)^2}{12} \quad (5.104)$$

La relación S/N de postdetección será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = 2^{2n} - 1 = N^2 - 1 \quad (5.105)$$

Para altas relaciones S_i / N_i en el canal (10 dB o más), la expresión (5.105) es válida. Sin embargo, para relaciones S_i / N_i menores, se puede caer dentro de la región umbral y los resultados de dicha expresión ya no serían válidos, como veremos más adelante.

Cuando $n \geq 4$, entonces $2^{2n} \gg 1$ y

$$\frac{S_o}{N_o} = 2^{2n} = N^2 \quad \text{para } n \geq 4 \quad (5.106)$$

Consideremos secuencias PCM NRZ. De (5.101), $n = \frac{B}{2f_m} = \frac{\beta_m}{2}$; $\beta_m = 2n$, de donde

$$\frac{S_o}{N_o} = 2^{\beta_m} = N^2 \quad \text{en PCM NRZ} \quad (5.107)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} = 3,01 \cdot \beta_m = 20 \cdot \log_{10} N = 6,02 \cdot n \quad \text{en PCM NRZ} \quad (5.108)$$

La relación señal/ruido de cuantificación crece exponencialmente en función de la relación de expansión del ancho de banda. Cuando se compara PCM con PAM, PDM o PPM, se observa que el intercambio “ancho de banda-relación S/N” es mucho más favorable en PCM que en los otros sistemas. El sistema PCM es, pues, un sistema de banda ancha.

Si el ruido de descodificación no puede ser despreciado, la potencia total de ruido a la salida será entonces

$$N_o = \langle n_q^2(t) \rangle + \langle n_d^2(t) \rangle \quad (5.109)$$

donde $\langle n_d^2(t) \rangle$ es la potencia del ruido de descodificación y $\langle n_q^2(t) \rangle$ viene dada por (5.104).

El cálculo de la potencia del ruido de descodificación es complicado por el hecho de que el número de errores por grupo de codificación es aleatorio y la severidad de un error depende de si él ocurre o no en los dígitos más significativos del grupo de codificación. La probabilidad P_e de que el detector produzca un estado “1” cuando un estado “0” fué transmitido (o viceversa) es un parámetro necesario en el cálculo de la potencia del ruido de descodificación.

Se demuestra [Shanmugan, 1979], que la potencia promedio del ruido de descodificación es

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\langle n_d^2(t) \rangle = \frac{(\Delta Q)^2}{3} 2^{2n} \cdot P_e \quad (5.110)$$

donde P_e , la probabilidad de error, depende del tipo de modulación utilizado y de la relación de predetección S_i / N_i a la entrada del receptor. (En la referencia citada más arriba [Shanmugan, 1979], se calcula la probabilidad de error P_e para diferentes esquemas de modulación PCM; véase también [Schwartz, Bennet y Stein, 1966; Benedetto, Biglieri y Castellani, 1987; etc.]).

La relación de postdetección S_o / N_o en PCM, cuando se toma en cuenta el ruido de descodificación es, de (5.103), (5.104) y (5.110),

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n} - 1}{1 + 2^{2(n+1)} \cdot P_e} \approx \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2(n+1)} \cdot P_e} \quad \text{en PCM} \quad (5.111)$$

$$\text{y en dB} \quad \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} = 6,02 \cdot n - 10 \log_{10} [1 + 2^{2(n+1)} \cdot P_e] \quad \text{en PCM} \quad (5.112)$$

En la Fig. 5.38(a) se grafica la relación S_o / N_o en dB para diferentes valores de n

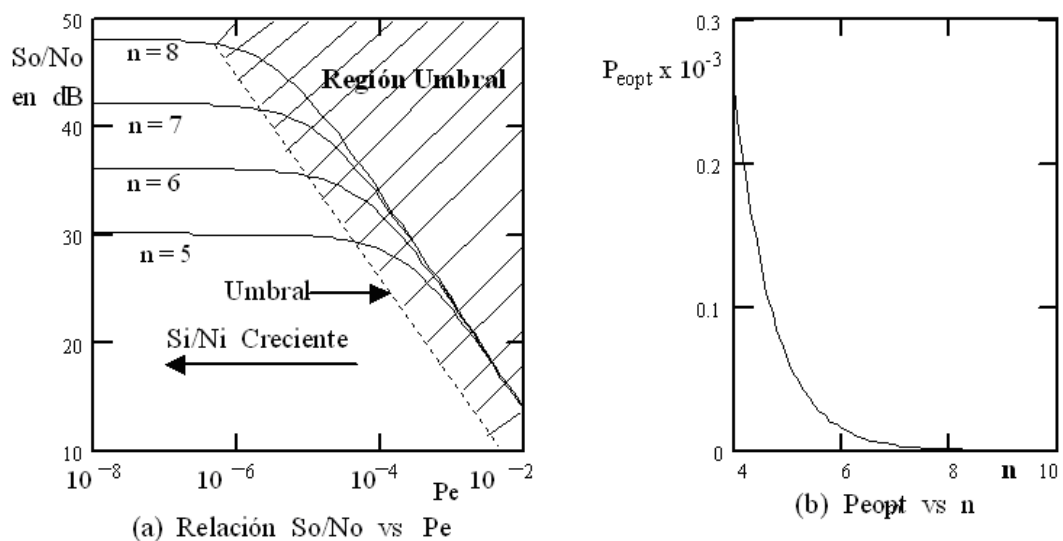


Fig. 5.38.

Puede observarse el efecto del umbral para valores altos de P_e (baja relación S_i / N_i); para valores bajos de P_e (alta relación S_i / N_i), la relación S_o / N_o es prácticamente constante.

El umbral se define arbitrariamente [Shanmugan, 1979] como “*el valor de la probabilidad de error P_e para el cual la relación $[S_o / N_o]_{\text{dB}}$ cae en 1 dB respecto a su valor máximo constante*”. Este valor de P_e corresponderá a la mínima potencia transmitida (o recibida) y se puede considerar como el valor óptimo de la probabilidad de error, pues aumentos en la relación de predetección S_i / N_i no se traducen en aumentos en la relación de postdetección S_o / N_o .

Se puede definir entonces la “**probabilidad de error óptima, P_{eopt}** ” a partir de la expresión (5.112). En efecto, de la definición de umbral se obtiene

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$P_{\text{eopt}} = \frac{6,473 \times 10^{-2}}{2^{2n}} \quad \text{para } n \text{ entero} \quad (5.113)$$

En la Fig. 5.38(b) se grafica P_{eopt} vs n .

La expresión (5.113) permite determinar rápidamente la probabilidad de error correspondiente a la mínima potencia transmitida (o recibida) para un valor dado de n y máxima relación S_o / N_o .

Puesto que la probabilidad de error P_e depende del esquema de modulación empleado y de la relación de predetección a la entrada del receptor, y por cuanto P_{eopt} corresponde a la mínima relación S_i / N_i , entonces esta relación S_i / N_i mínima se puede deducir a partir de la expresión (5.113). En efecto, si la probabilidad de error es una función de S_i / N_i , es decir,

Si $P_e = g\left(\frac{S_i}{N_i}\right)$, entonces $P_{\text{eopt}} = f\left(\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right)$ y de la expresión (5.113),

$$P_{\text{eopt}} = f\left(\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right) = \frac{6,473 \times 10^{-2}}{2^{2n}} \quad \text{para } n \text{ entero, que es la misma expresión (5.113)}$$

La expresión (5.113) permite determinar la relación de predetección mínima S_i / N_i para un valor determinado de n .

La función $g(\cdot)$ depende del esquema de modulación utilizado. Algunas de estas funciones $g(\cdot)$ las veremos más adelante, en la Sección 5.7.4, al estudiar algunos esquemas de modulación de impulsos mediante portadora modulada.

En resumen, cuando se aumenta la potencia de la señal de entrada, la relación de postdetección S_o / N_o alcanza el valor de 6,02n dB, que es independiente de la relación de predetección S_i / N_i . En consecuencia, sobre el umbral, aumentos en la relación de predetección no se traducen en aumentos en la relación S/N de postdetección. El valor máximo de la relación S/N de postdetección será de 6,02n dB, mientras que el correspondiente valor mínimo de la relación S/N de predetección se puede determinar a partir de la expresión (5.113). El valor límite de S_o / N_o dependerá solamente del número n de impulsos de las secuencias PCM. Más adelante volveremos sobre este tema.

♣ Ejemplo 5.8

Se quiere transmitir en PCM NRZ una señal $m(t)$ cuya frecuencia máxima es de 5 kHz y cuya amplitud varía entre -10 V y +15 V. Se desea que la resolución o error máximo esté dentro del $\pm 5\%$ del valor pico de la señal mensaje. Vamos a calcular todos los parámetros asociados.

$$\text{De acuerdo con los datos, } V_{\max} = |m(t)|_{\max} = 15 \text{ V; } T_s = \frac{1}{2f_m}$$

Se quiere que $e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = 0,05 \cdot V_{\max} = 0,05 \frac{2^n}{2} \Delta Q$, de donde $2^n = 20 \rightarrow n = 5$, pues n es un número entero. También, $N = 2^n = 32$ niveles.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\text{De (5.93), } \Delta Q = \frac{2V_{\max}}{N} = \frac{30}{32} = 0,938 \text{ V}$$

$$\text{De (5.89), } V_{q\max} = (N-1) \frac{\Delta Q}{2} = 14,531 \text{ V}$$

de donde, $-14,531 \text{ V} \leq x_q(mT_s) \leq 14,531 \text{ V}$; el cuantificador tendrá 32 niveles con una separación de 0,938 V entre niveles. De acuerdo con la expresión (5.90), el valor mínimo de $m(t)$, ($m(t) = -10 \text{ V}$), está entre -9,844 V ($k = 11$) y -10,781 V ($k = 12$), siendo el nivel de comparación igual a -10,313; por lo tanto, la salida cuantificada correspondiente a una entrada de -10 V tiene el valor -9,844 V.

Cálculo de otros parámetros:

$$\text{Ancho de banda de la banda de base: } B = 2nf_m = 2 \times 5 \times 5 \times 10^3 = 50 \text{ kHz; } \beta_m = 10$$

$$\text{Relación S/N de postdetección: } \frac{S_o}{N_o} = N^2 = 1024 = 30,1 \text{ dB}$$

$$\text{Probabilidad de error óptima: } P_{\text{eopt}} = 6,32 \times 10^{-5}$$

De (4.18), la velocidad de información es $V_i = \frac{\log_2 N}{T_s} = 50 \text{ kbps}$. Como el sistema es binario y no se especifica impulsos redundantes, la velocidad de modulación es de 50 kbaudios.

♣

♣ Ejemplo 5.9

Sea una señal $m(t)$ como la mostrada en la Fig. 5.39(a), la cual queremos codificar en PCM NRZ. Vamos a determinar todos los parámetros asociados y las formas de las secuencias PAM_q RZ y PCM NRZ.

La amplitud de $m(t)$ varía entre 0 V y 7 V con un error máximo tolerable de 0,5 V. La frecuencia máxima de la señal es de 500 Hz.

Este es un caso de cuantificación uniforme unipolar y las ecuaciones que caracterizan al cuantificador son ligeramente diferentes de las determinadas para cuantificación bipolar, Fig. 5.34.

Para un cuantificador uniforme unipolar, se tiene, a partir de la Fig. 5.39(a),

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

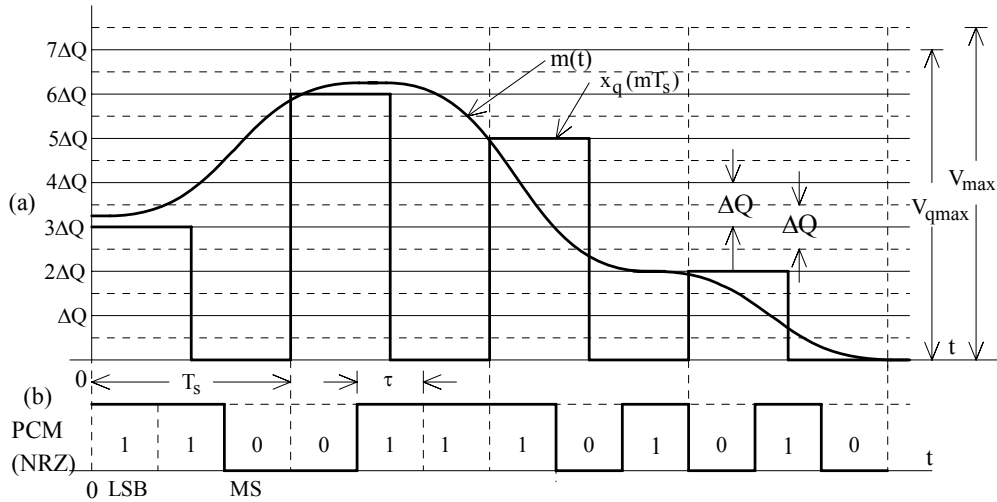


Fig. 5.39.

$$V_{q\max} = (N - 1)\Delta Q = (2^n - 1)\Delta Q; \quad N \text{ y } n \text{ son siempre números enteros}$$

$$V_{\max} = V_{q\max} + \frac{\Delta Q}{2} = (2N - 1)\frac{\Delta Q}{2}; \quad e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = R_q \quad (5.114)$$

Para que el cuantificador no se sature o recorte la señal, $0 \leq m(t) \leq V_{\max}$.

Se tiene entonces,

$$V_{q\max} = \text{valor máximo de la señal PAM cuantificada } x_q(mT_s)$$

$$V_{\max} = \text{valor máximo de la señal PAM muestreada } x(mT_s)$$

$$\Delta Q = \text{paso de cuantificación}; \quad e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = \text{error máximo o resolución}$$

$$\text{En el presente ejemplo, } e_{\max} = \frac{\Delta Q}{2} = 0,5 \cdot V \therefore \Delta Q = 1 \text{ V}$$

$$|m(t)|_{\max} = 7 = V_{\max} = (2N - 1)\frac{\Delta Q}{2} \therefore N = 8 \text{ y } n = 3$$

$$\text{También, } f_s = 2f_m = 1 \text{ kHz}; \quad T_s = 1 \text{ ms}; \quad \tau = \frac{T_s}{3}; \quad B = \frac{1}{\tau} = 3 \text{ kHz}$$

$$P_{\text{eopt}} = 1,01 \times 10^{-3}; \quad V_i = \frac{n}{T_s} = 3 \text{ kbps}$$

De la Fig. 5.39(a), los valores de la señal PAM cuantificada $x_q(mT_s)$ en los instantes 0, T_s , $2T_s$ y $3T_s$ son, respectivamente, 3 V, 6 V, 5 V y 2 V, que corresponden a las secuencias binarias (de tres dígitos cada una) 011, 110, 101 y 010, respectivamente. En la Fig. 5.39(b) se muestra la forma de la señal PCM NRZ, en la cual, siguiendo la práctica usual, el bit de menor peso (LSB) se transmite de primero, mientras que el bit de mayor peso (MSB) se transmite de último.

♣

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.4.3. Modulación Diferencial de Impulsos Codificados (DPCM)

Cuando una señal de voz, música o video se muestrea a frecuencias ligeramente superiores a la frecuencia de Nyquist, se observa que la variación de amplitud entre muestras adyacentes presenta una alta correlación, es decir, que en promedio la señal no varía demasiado entre una muestra y la siguiente. Cuando estas muestras son codificadas en PCM convencional, las muestras codificadas contienen información redundante que no es absolutamente esencial para la transmisión de la información. La eliminación de esta redundancia permite aumentar el rendimiento del sistema, esto es, su velocidad de información. El mecanismo para disminuir la redundancia es el siguiente: en vez de codificar y transmitir cada muestra por separado, se codifica y transmite la diferencia entre dos muestras adyacentes. La información está contenida en esta diferencia, pero, comparado con el sistema PCM convencional, el número de dígitos de los grupos de codificación será menor. Este esquema de modulación de impulsos se denomina “**Modulación Diferencial de Impulsos Codificados, DPCM**”.

En la Fig. 5.40 se muestra el diagrama de bloques funcional de un sistema (transmisor y receptor) DPCM.

En el transmisor, Fig. 5.40(a), la señal de entrada al cuantificador es

$$x(mT_s) = m(mT_s) - \tilde{m}(mT_s) \quad (5.115)$$

siendo su salida

$$x_q(mT_s) = [m(mT_s) - \tilde{m}(mT_s)]_q = x(mT_s) + e_q(mT_s) \quad (5.116)$$

donde $e_q(mT_s)$ es el error de cuantificación.

A la entrada de la red de retardo T_s la señal es

$$\tilde{m}_q(mT_s) = \tilde{m}(mT_s) + x_q(mT_s) = \tilde{m}(mT_s) + x(mT_s) + e_q(mT_s)$$

Reemplazando $x(mT_s)$ dado por (5.115),

$$\tilde{m}_q(mT_s) = m(mT_s) + e_q(mT_s) \quad (5.117)$$

La señal $\tilde{m}_q(mT_s)$ es entonces la versión cuantificada de la señal de entrada muestreada $m(mT_s)$, y como $\tilde{m}(mT_s) = \tilde{m}_q[(m-1)T_s]$, entonces $\tilde{m}(mT_s)$ representa la versión cuantificada de $m(t)$ en el intervalo T_s anterior. La señal $x(mT_s)$ dada por (5.115) es la diferencia entre dos muestras consecutivas que una vez cuantificada y codificada dará origen a la señal DPCM.

La señal cuantificada será, de (5.116), $x_q(mT_s) = \{m(mT_s) - \tilde{m}_q[(m-1)T_s]\}_q$ y tendrá valores discretos en el intervalo $\frac{\Delta Q}{2} \leq |x_q(mT_s)| \leq (N-1) \frac{\Delta Q}{2}$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

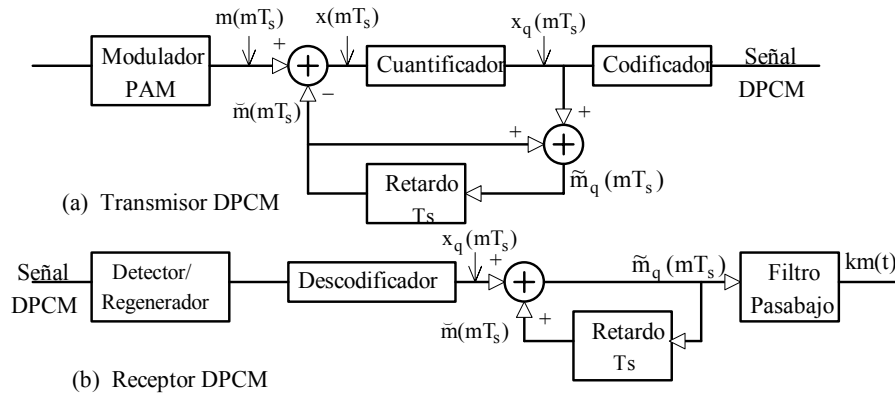


Fig. 5.40. Sistema de Modulación DPCM.

Puede verse que si $N > 2$, la instrumentación en DPCM es tan compleja como en PCM convencional, pero en retorno el ancho de banda de la banda de base se reduce pues la diferencia $[m(mT_s) - \tilde{m}(mT_s)]$ se puede representar con pocos niveles de cuantificación si $m(t)$ no experimenta cambios drásticos de una muestra a la siguiente. Por ejemplo, un sistema DPCM con $N = 8 = 2^3$ (código de 3 dígitos) es aceptable para transmitir una señal de video, mientras que en PCM convencional se necesitaría, por lo menos, $N = 256 = 2^8$ (código de 8 dígitos) para tener una calidad comparable. En este caso particular, el ancho de banda de la banda de base se reduce en $3/8$.

La red de retardo en el lazo de retroalimentación del transmisor se puede reemplazar por un filtro predictor, pues si se conoce el comportamiento anterior de una señal hasta un cierto punto en el tiempo, es posible hacer una cierta inferencia acerca de sus valores futuros. La señal $\tilde{m}(mT_s)$ es entonces una “predicción de $m(mT_s)$ ”, y la señal $x(mT_s)$ es el “error de predicción”, ya que es la cantidad mediante la cual el filtro de predicción falla en la predicción exacta de la entrada. En este caso el sistema se denomina “**Modulación Diferencial Adaptativa de Impulsos Codificados, ADPCM**”. En la Recomendación G.722 de la UIT-T se establece una frecuencia de muestreo de 16 kHz con 14 dígitos binarios por muestra. Esto permite, utilizando ADPCM, lograr aumentar el ancho de banda de la banda de base hasta 7 kHz para transmisión de voz de alta calidad.

El cálculo del ancho de banda de la banda de base y de la relación S/N de cuantificación es similar al del PCM convencional y no lo discutiremos aquí.

5.4.4. Modulación Delta Lineal (DM)

En el esquema de modulación DPCM la diferencia de amplitud entre dos muestras adyacentes, cuando se muestrea a frecuencias normales ($f_s \geq 2f_m$), puede ser importante y corresponder a un gran número de niveles de cuantificación. Si se aumenta la frecuencia de muestreo hasta que se esté seguro de que la diferencia de amplitud entre una muestra y la siguiente no sea mayor que un cierto paso de cuantificación, la información a transmitir de cada muestra se puede representar en forma binaria como el sentido de la variación respecto a la muestra precedente, es decir, la diferencia de amplitud entre dos muestras adyacentes se cuantifica en dos niveles $+\Delta$ ó $-\Delta$, y la salida del cuantificador se representa entonces mediante un simple dígito binario que indica el signo (positivo o negativo) de la diferencia entre las muestras. El cuantificador es, pues, un “operador signo” mucho más sencillo de instrumentar que un cuantificador multiniveles

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

convencional. Este esquema de codificación se conoce con el nombre de “Modulación Delta Lineal” y puede considerarse como un caso especial del sistema DPCM con $N = 2$.

El diagrama de bloques funcional de un sistema de modulación delta lineal es idéntico al del sistema DPCM mostrado en la Fig. 5.40, con el cuantificador reemplazado por un operador signo, comúnmente denominado “limitador estricto (hard limiter)”. El elemento de retardo y el sumador en el lazo de retroalimentación se pueden reemplazar por un integrador cuya entrada es una secuencia de impulsos bipolares de período T_s , duración τ y amplitud $\pm A$, y cuya salida es una señal en escalera que representa una versión cuantificada de la señal de entrada. Asimismo, el sumador y el operador signo se pueden instrumentar mediante un comparador; como el paso de cuantificación es constante y de valor Δ , se dice entonces que éste es un sistema de modulación delta lineal. Como consecuencia, se tiene el sistema de modulación delta lineal mostrado en la Fig. 5.41. Nótese la simplicidad en la instrumentación.

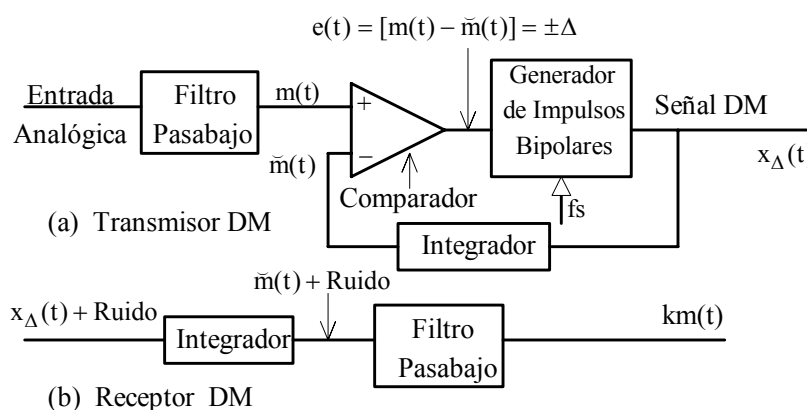


Fig. 5.41. Sistema de Modulación Delta Lineal.

En el transmisor, Fig. 5.41(a), la señal $m(t)$ se compara con una aproximación en escalera de ella misma, $\tilde{m}(t)$. La salida del comparador serán niveles de amplitud $\pm \Delta$, dependiendo del signo de $e(t)$. Si $e(t)$ es positiva en un instante de muestreo dado, se produce un impulso de amplitud A a la salida; cuando este impulso se integra, $\tilde{m}(t)$ se incrementa en un escalón de amplitud Δ ; esta nueva $\tilde{m}(t)$ se vuelve a comparar con el $m(t)$ actual. Si $e(t)$ no se ha vuelto negativa, la salida será de nuevo un impulso positivo y el integrador incrementará otro escalón. En algún instante $\tilde{m}(t)$ se hará mayor que $m(t)$, lo que ocasionará que $e(t)$ sea negativa y en el instante de muestreo siguiente se producirá un impulso de salida negativo resultando en un decremento de $\tilde{m}(t)$ en un escalón. Esta estructura en retroalimentación minimiza la diferencia, que constituye la señal de error, variando la polaridad de los impulsos de salida.

Nótese que cuando la pendiente de $m(t)$ es positiva, se generan más impulsos positivos que negativos. La situación se invierte cuando la pendiente es negativa. En aquellos puntos de $m(t)$ en los cuales la pendiente es muy pequeña, hay aproximadamente igual número de impulsos positivos y negativos, de modo que el valor promedio de la señal $x_\Delta(t)$ es cero. En general, si se cumple ciertas condiciones que veremos más adelante, $\tilde{m}(t)$ tiende en promedio a $m(t)$ y el valor promedio de $x_\Delta(t)$ será cero.

La señal modulada en delta, $x_\Delta(t)$, tendrá entonces la forma

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot \text{sgn}[m(nT_s) - \tilde{m}(nT_s)] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{\tau}\right) \quad (5.118)$$

Esta es una secuencia binaria aleatoria bipolar de amplitud $\pm A$, período T_s y duración τ . La información va contenida en la operación signo.

El receptor DM, Fig. 5.41(b), es bastante sencillo y consta de un integrador y de un filtro pasabajo.

En la Fig. 5.42 se muestran todas las formas de onda en modulación delta lineal en operación normal.

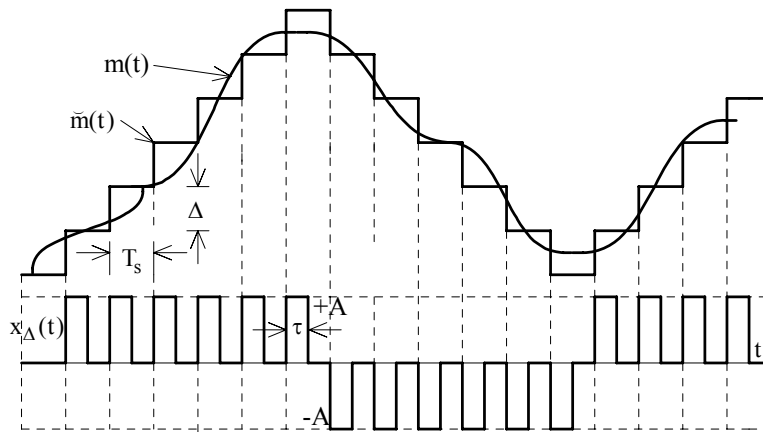


Fig. 5.42. Formas de Onda en Modulación Delta Lineal. Operación Normal.

Algunos de los problemas que ocurren cuando se utiliza la modulación delta lineal para la transmisión de señales analógicas se pueden observar en la Fig. 5.43.

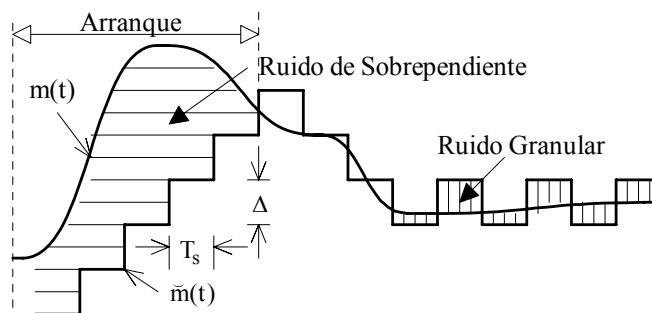


Fig. 5.43. Ruido Granular y de Sobrependiente en Modulación Delta Lineal.

Supongamos que inicialmente $\tilde{m}(t) < m(t)$, de manera que el primer impulso de salida sea positivo. Cuando este impulso se retroalimenta a través del integrador, se produce un incremento Δ en $\tilde{m}(t)$. Este proceso continúa durante el “intervalo de arranque” hasta que $\tilde{m}(t)$ excede a $m(t)$ y

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

se produce un impulso negativo. Si $m(t)$ permanece constante, $\tilde{m}(t)$ exhibe un comportamiento de rastreo sobre $m(t)$ lo que da origen al “error o ruido granular”, como se muestra en la Fig. 5.43.

El error o ruido granular se puede reducir aumentando la frecuencia de muestreo y/o disminuyendo la amplitud del paso de cuantificación Δ . Cuando $m(t)$ cambia, $\tilde{m}(t)$ la sigue en forma escalonada mientras las muestras sucesivas de $m(t)$ no sean mayores que Δ . Cuando la diferencia es mayor que Δ , $\tilde{m}(t)$ ya no puede seguir a $m(t)$ produciéndose el fenómeno de “sobrecarga o sobrependiente”, como se muestra en la Fig. 5.43. Este tipo de sobrecarga no está determinado por la amplitud de $m(t)$ sino más bien por su pendiente, de ahí el nombre de “sobrependiente”.

El fenómeno de sobrependiente es una limitación básica en la modulación delta lineal, y se produce cuando la pendiente de $m(t)$ es superior a la pendiente máxima de $\tilde{m}(t)$. Vamos a determinar las condiciones necesarias para prevenir la sobrependiente.

Supongamos que $m(t)$ es sinusoidal de la forma $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$. La pendiente máxima de $m(t)$ será

$$\left[\frac{d}{dt} m(t) \right]_{\max} = 2\pi f_m A_m \quad (5.119)$$

La pendiente máxima de $\tilde{m}(t)$ es Δ / T_s , de modo que una condición suficiente para evitar la sobrependiente es que

$$2\pi f_m A_m \leq \frac{\Delta}{T_s} = \Delta \cdot f_s \quad (5.120)$$

La amplitud máxima de $m(t)$ a partir de la cual se produce sobrependiente será, de (5.120),

$$A_m = \frac{\Delta}{2\pi} \left(\frac{f_s}{f_m} \right) \quad (5.121)$$

Cuando la variación de $m(t)$ es menor que Δ , $\tilde{m}(t)$ será una señal periódica rectangular de amplitud pico a pico igual a Δ , y permanecerá en este estado mientras la variación de la señal de entrada no sobrepase el valor Δ . Aunque en este caso la distorsión de salida es muy severa, se puede establecer un límite superior del rango de amplitudes tomando precisamente este valor como el de la mínima entrada reconocible por el codificador.

Sea entonces $A_{\min} = \Delta$; el rango dinámico de amplitud se puede definir en la forma

$$R_A = \frac{A_m}{A_{\min}} = \frac{A_m}{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{f_s}{f_m} \right) \quad (5.122)$$

El rango dinámico R_A puede considerarse como el número de escalones de amplitud Δ necesarios para alcanzar la amplitud A_m .

La frecuencia de muestreo f_s debe ser mucho mayor que la frecuencia máxima de la señal mensaje si se quiere un rango de amplitud razonable; pero por otro lado, el rango de amplitud no puede ser muy alto porque ello implicaría altos anchos de banda de la banda de base.

El problema de la sobrependiente se puede reducir entonces disminuyendo f_m mediante filtrado de $m(t)$, o aumentando el valor del paso de cuantificación Δ o la frecuencia de muestreo f_s .

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Si se disminuye f_m o se aumenta Δ , la resolución de la señal será muy pobre y la distorsión aumentará; asimismo, si se aumenta la frecuencia de muestreo se aumentan los requerimientos de ancho de banda de la banda de base.

El mejor método para evitar la sobrependiente es la de detectar la condición de sobrecarga y ajustar el valor de Δ haciéndolo más grande mediante un control de ganancia en el lazo de retroalimentación del modulador. Los métodos de control de ganancia han dado origen a diferentes técnicas de la modulación delta. Por ejemplo, en la Modulación Delta de Pendiente Continuatamente Variable (CVSD) el valor de la ganancia se ajusta sobre un rango continuo; en la Modulación Delta de Pendiente Variable (VSD) la ganancia se ajusta sobre una base discreta; en la Modulación Delta Controlada Digitalmente (DCD) se utiliza un comparador digital que, operando sobre una secuencia de error, controla la ganancia. Estas tres son formas de la Modulación Delta Adaptativa, denominación adoptada para distinguirla de la Modulación Delta Lineal. Para más información sobre las técnicas adaptativas, ver la bibliografía.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas de Modulación Delta Lineal

Como la señal de banda de base en modulación delta básicamente es una secuencia de impulsos de período T_s y duración τ , Fig. 5.42, su ancho de banda será

$$B_{DM} \geq \frac{1}{\tau}; \text{ si definimos } \frac{\tau}{T_s} = \frac{1}{2}, \text{ entonces } B_{DM} \geq 2f_s \quad (5.123)$$

El ancho de banda de la banda de base es bastante grande; por ejemplo, en la transmisión de voz en PCM con $f_s = 8000$ y $n = 8$, el ancho de banda es del orden de 64 kHz, mientras que en la modulación delta, para una calidad comparable, el ancho de banda es mayor, como veremos más adelante.

Veamos ahora la influencia del ruido en modulación delta lineal. La salida del demodulador difiere de la entrada del modulador debido a la presencia del ruido de cuantificación (granular) $n_q(t)$ y del ruido de sobrependiente $n_s(t)$, esto es

$$y(t) = s_o(t) + n_q(t) + n_s(t) \quad (5.124)$$

La relación S/N de postdetección será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\langle s_o^2(t) \rangle}{\langle n_q^2(t) \rangle + \langle n_s^2(t) \rangle} = \frac{S_o}{N_{oq} + N_{os}} \quad (5.125)$$

Para simplificar el cálculo de la potencia promedio de la señal, consideremos el peor caso en la modulación delta lineal donde toda la potencia está concentrada en la parte superior de la banda de base, es decir, que $s_o(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$ cuya potencia promedio es

$$S_o = \langle s_o^2(t) \rangle = \frac{A_m^2}{2} \quad (5.126)$$

En cuanto a las potencias de ruido, se demuestra [Schwartz, 1990], que

$$N_{oq} = \langle n_q^2(t) \rangle = \frac{\Delta^2}{3} \quad (5.127a)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$y \quad N_{os} = \langle n_s^2(t) \rangle = \frac{A_m^2}{2} 1,8 \cdot \left[1 - \frac{\Delta \cdot f_s}{2\pi f_m A_m} \right]^{5/2} \quad (5.127b)$$

Generalmente se define el “**Escalón o Paso Relativo, Δ_r** ” y la “**Frecuencia de Muestreo Normalizada, F_s** ” en la forma

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{A_m} = \frac{\Delta}{|m(t)|_{\max}} \quad y \quad F_s = \frac{f_s}{f_m} \quad (5.128)$$

Nótese que, de (5.122), Δ_r es el inverso del rango dinámico R_A .

La relación de postdetección S_o/N_o se puede expresar en términos de Δ_r y F_s . En efecto,

$$\frac{S_o}{N_o} = \begin{cases} \frac{1}{1,8 \cdot \left[1 - \frac{\Delta_r \cdot F_s}{2\pi} \right]^{5/2} + \frac{2}{3} \Delta_r^2} & \text{para } \Delta_r \cdot F_s \leq 2\pi \\ \frac{3}{2\Delta_r^2} & \text{para } \Delta_r \cdot F_s > 2\pi \end{cases} \quad (5.129)$$

En la Fig. 5.44(a) se grafica la relación de postdetección S_o/N_o , en dB, en función del escalón relativo Δ_r para diferentes valores de la frecuencia de muestreo normalizada F_s . Nótese que la relación S_o/N_o es máxima cuando $\Delta_{rop} \cdot F_s = 2\pi$, donde Δ_{rop} es el “**escalón relativo óptimo**” correspondiente. El valor máximo de la relación S_o/N_o será entonces

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\max} = \frac{3}{2\Delta_{rop}^2} \quad (5.130)$$

En la Fig. 5.44(b) se relacionan los parámetros F_s y Δ_{rop} de tal manera que, conocido un parámetro, se puede estimar rápidamente, a partir de la gráfica, el valor del otro para máxima relación de postdetección S_o/N_o .

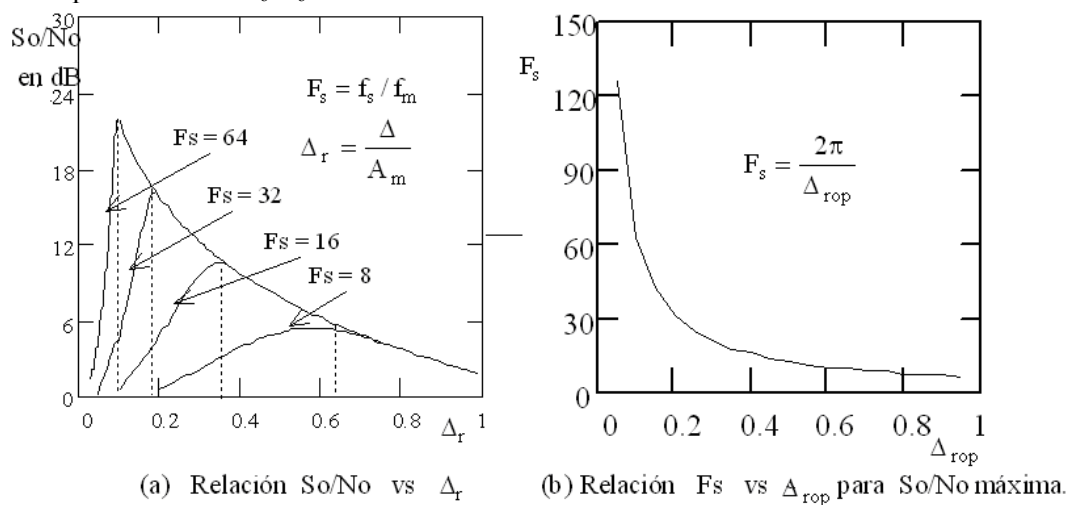


Fig. 5.44.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

En la Fig. 5.44(a) se puede notar el rango de valores del escalón relativo en el cual la relación de postdetección es máxima. Para valores pequeños del escalón Δ_r , el ruido de cuantificación se reduce pero el ruido de sobrependiente aumenta rápidamente. Para valores altos, el ruido de sobrependiente desaparece pero el ruido de cuantificación o granular aumenta. Los valores óptimos del escalón relativo Δ_r corresponden a los picos de las curvas (indicados por las líneas a trazos): a la derecha de los valores óptimos domina el ruido granular, mientras que a la izquierda domina el ruido de sobrependiente. Nótese que la relación S_o/N_o mejora aumentando la frecuencia de muestreo f_s (para f_m constante), puesto que si se aumenta f_s se reduce el paso o escalón Δ requerido para mantener un nivel específico de ruido de sobrependiente. Esto, a su vez, reduce el ruido de cuantificación. Si el ancho de banda del canal lo permite, el mejor compromiso en modulación delta lineal es entonces el de aumentar la frecuencia de muestreo f_s (o F_s).

Se puede comparar el comportamiento de los sistemas PCM y DM en términos de la señal y de la complejidad de instrumentación. Para asegurar que la comparación se efectúa en idénticas condiciones, vamos a suponer que ambos sistemas utilizan aproximadamente el mismo ancho de banda para transmitir una señal analógica cuya frecuencia máxima es f_m . Esto implica, de (5.128) y (5.101), que $2f_s = 2nf_m$ o $F_s = n$, donde F_s es la frecuencia de muestreo normalizada en modulación delta y n el número de dígitos por grupo de codificación en modulación PCM. Por ejemplo, si consideramos un sistema PCM de 8 dígitos binarios ($n = 8$) para transmitir una señal de $f_m = 4$ kHz de ancho de banda, la frecuencia de muestreo normalizada en DM es $F_s = 8$. La comparación se puede efectuar observando la curva para $n = 8$ de la Fig. 5.38(a) en PCM y la curva para $F_s = 8$ de la Fig. 5.44(a) en DM. Nótese que, sobre el umbral, el sistema PCM está por encima del valor óptimo del sistema DM en más de 43 dB. Por consiguiente, para un mismo ancho de banda de la banda de base, el comportamiento en PCM es superior al de DM.

El comportamiento del sistema DM se puede mejorar considerablemente utilizando las técnicas de la Modulación Delta Adaptativa. Por ejemplo, en transmisión de voz el sistema CVSD, ya mencionado, necesita un ancho de banda de 32 kHz que es la mitad de lo requerido en PCM.

En cuanto a la complejidad del equipo, el sistema de modulación delta es mucho más sencillo que en PCM, y aún más ahora que se consiguen circuitos integrados para la modulación delta adaptativa, como, por ejemplo, el C.I. MC3418 que es un modulador/demodulador delta de pendiente continuamente variable que permite operar entre 9600 bps y 64 kbps, y cuya relación S/N de postdetección es del mismo orden que en PCM. Esta simplicidad, combinada con una buena calidad de voz, ha generado un considerable interés en el uso de las técnicas de la modulación delta en sistemas de telefonía comercial, de comunicaciones militares, industriales y espaciales, así como para otros distintos usos en muchas áreas afines.

♣ Ejemplo 5.10

Se desea transmitir en DM una señal de audio de la forma $m(t) = 4 \cos(8 \times 10^3 \pi t)$. Vamos a determinar los parámetros necesarios para su transmisión con una relación de postdetección superior a los 15 dB.

En primer lugar hay que determinar la frecuencia de muestreo normalizada F_s y el escalón relativo Δ_{rop} óptimo correspondiente. De la forma de $m(t)$, $A_m = |m(t)|_{\max} = 4$ y $f_m = 4$ kHz.

De la Fig. 5.44(a), para una relación S/N de 15 o más dB, se puede tomar $F_s = 32$, de donde $f_s = 32f_m = 128$ kHz. La relación de postdetección S_o/N_o es máxima cuando $F_s = 2\pi / \Delta_{rop}$; entonces,

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\Delta_{\text{rop}} = \frac{2\pi}{F_s} = \frac{\Delta}{|m(t)|_{\text{max}}} = 0,196 \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{2\pi|m(t)|_{\text{max}}}{F_s} = 0,785 \approx 0,8\text{V}$$

La amplitud $|m(t)|_{\text{max}} = 4$ se cubrirá con 5 escalones de amplitud $\Delta \approx 0,8\text{V}$.

El valor máximo de la relación de postdetección se puede calcular a partir de (5.130). En efecto,

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{max}} = \frac{3}{2\Delta_{\text{rop}}^2} = 38,907 = 15,9 \text{ dB}$$

De (5.123), el ancho de banda de la banda de base es $B = 2f_s = 256 \text{ kHz}$.

En resumen, los parámetros para transmisión en DM son:

Frecuencia de muestreo: $f_s = 128 \text{ kHz}$

Amplitud del escalón: $\Delta = 0,8 \text{ V}$

Relación S/N de postdetección: $\frac{S_o}{N_o} = 15,9 \text{ dB}$

Ancho de banda de la banda de base: $B = 256 \text{ kHz}$

Nótese que si la transmisión fuera en PCM, los correspondientes parámetros serían:

Frecuencia de muestreo: $f_s = 2f_m = 8 \text{ kHz}$; Número de impulsos por grupo: $n = 8$ (típico)

Relación S/N de postdetección: $\frac{S_o}{N_o} = 2^{2n} = 65536 = 48,165 \text{ dB}$

Ancho de banda de la banda de base: $B = 2nf_m = 64 \text{ kHz}$

Para este caso particular, la relación S_o/N_o en PCM es 32,3 dB superior a la de DM. ♣

5.5. TÉCNICAS EN LA TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.5.1. Introducción

En general, un sistema digital de banda de base es aquel que transmite información digital generalmente a bajas frecuencias y por canales pasabajo, denominados **canales de banda de base**; la información digital (secuencias de impulsos) se transmite tal como se genera, sin ningún otro tipo de procesamiento o codificación que no sea digital. La señal de banda de base será, en general, una secuencia de impulsos PCM (RZ o NRZ) que se transmite por conductores metálicos u ópticos, que son los que pueden transmitir señales desde CC en adelante.

Para generalizar el enfoque, consideremos el modelo de un sistema de transmisión binario en banda de base mostrado en la Fig. 5. 45.

La salida del modulador es una secuencia aleatoria binaria, es decir, impulsos binarios de duración τ que se aplican a un filtro lineal que modifica el perfil de los impulsos de acuerdo con las características del canal. El canal está modelado mediante un sistema lineal invariante en el tiempo de función de transferencia $H_c(f)$ y una fuente de ruido aditivo $n(t)$ que

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

podemos suponer gaussiano, de valor promedio cero, de densidad espectral $S_n(f)$ e independiente de la señal $v(t)$.

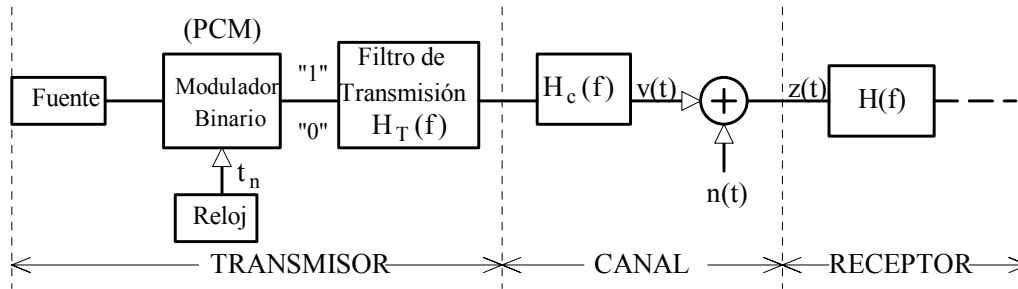


Fig. 5.45. Transmisión Binaria en Banda de Base.

La señal $z(t)$ recibida puede estar degradada debido a (a) el efecto combinado de las características de los sistemas $H_T(f)$ y $H_c(f)$, efecto conocido con el nombre de “interferencia intersímbolo”, y (b) la degradación producida por el ruido $n(t)$.

Hay otros factores que intervienen también en menor grado en la degradación de la señal, entre otros la interferencia intercanal, la fluctuación de fase (“jitter”) y el desvanecimiento selectivo, pero solamente consideraremos la interferencia intersímbolo y el efecto del ruido. El filtro $H(f)$ de entrada al receptor debe ser diseñado entonces tomando en cuenta todos esos factores. Esto lo haremos más adelante.

5.5.2. Técnicas de Multicanalización o Multiplicidad

En las secciones anteriores se han discutido varias de las técnicas de modulación de impulsos en términos de su habilidad para transportar información generada por una sola fuente. Pero en la práctica es necesario enviar simultáneamente una gran cantidad de mensajes diferentes por un medio de transmisión dado. El proceso de operación multicanal permite, mediante las técnicas llamadas de “multiplicidad”, “multiplex” o “multiplexaje”, combinar en el transmisor los mensajes de varias fuentes de información, transmitirlos como un solo bloque y luego separarlos en el receptor. Como solamente se necesita un transmisor y un receptor, aunque mucho más complicados, una ventaja de la operación multicanal es la disminución de equipo y, por supuesto, costo. La banda de frecuencias o intervalo de tiempo asignado a cada mensaje individual se denomina comúnmente “canal”.

Las dos formas básicas de multicanalización de interés son:

1. La “**Multiplicidad por División de Tiempo (Time-Division Multiplex, TDM)**”
2. La “**Multiplicidad por División de Frecuencia (Frequency-Division Multiplex, FDM)**”

El sistema FDM, el cual es directamente aplicable a señales continuas, en esencia consiste en colocar lado a lado, mediante modulación y sin solapamiento, los espectros de las señales mensaje individuales y formar así un espectro compuesto o señal de banda de base compuesta que se transmite; las señales se transmiten simultáneamente pero ellas se reparten el ancho de banda disponible del canal de transmisión. Este tipo de multicanalización lo estudiaremos con más detalle en el Capítulo VI. En el Apéndice B se describe también el sistema OFDM (Orthogonal Frequency-

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Division Multiplex) utilizado en los sistemas de transmisión de Radiodifusión y Televisión Digitales.

El sistema TDM combina, en el tiempo y sin solapamiento, los valores de muestra, codificados o no, de los mensajes individuales; el tiempo es compartido por las señales individuales, las cuales disponen para su transmisión de todo el ancho de banda del canal. La separación de las señales individuales en el receptor se efectúa mediante circuitos de sincronización apropiados.

Técnicas de Multiplicidad por División de Tiempo (TDM)

En el teorema del muestreo se demuestra que es posible transmitir la información contenida en una señal mensaje continua de banda limitada mediante la transmisión de sus muestras tomadas a intervalos regulares. La transmisión de cada muestra ocupa todo el ancho de banda del canal pero sólo una parte del tiempo, pudiéndose aprovechar el intervalo entre muestras para transmitir las muestras de otras señales mensaje. Esto se efectúa muestreando todas las señales y entrelazándolas, como se muestra en la Fig. 5.46 para cuatro señales diferentes. En esta sección haremos énfasis en la transmisión en banda de base.

Consideremos el transmisor, Fig. 5.46(a). Cuatro señales diferentes, limitadas a una banda f_m por los filtros pasabajo (FPB) de entrada, se muestrean en forma secuencial mediante un interruptor rotatorio o “conmutador”. El conmutador efectúa f_s revoluciones por segundo y extrae una muestra de cada entrada durante una revolución. La salida del conmutador es una señal compuesta PAM/TDM que contiene las muestras de cada una de las señales de entrada entrelazadas periódicamente en el tiempo, como se muestra en la Fig. 5.46(c). Esta señal PAM/TDM puede ahora modularse en cualquiera de los sistemas de modulación de impulsos vistos en las secciones anteriores. La forma más común es la modulación PCM, en cuyo caso se tendrá un sistema PCM/TDM. La señal PCM/TDM tendrá una configuración como la mostrada en la Fig. 5.35(a), con la diferencia de que cada grupo de codificación corresponde a un mensaje diferente.

En el receptor, Fig. 5.46(b), el proceso es inverso: la señal PCM/TDM es demodulada y convertida en una señal PAM/TDM y mediante el “distribuidor” se separa cada una de las señales mensaje las cuales se envían a sus respectivos canales. El sincronismo entre el transmisor y el receptor debe ser exacto a fin de que no se produzca distorsión cruzada (“cross-talk”) entre los diferentes canales. Para lograr esta sincronización, en algunos sistemas se transmite impulsos especiales de sincronización, incluidos en la misma señal de banda de base o por canales separados, lo cual permite un control exacto de la sincronización. También puede lograrse la sincronización mediante métodos que veremos más adelante. En la Fig. 5.47 se muestra el entrelazamiento de M canales en PCM/TDM y PAM/TDM, y los parámetros de interés.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

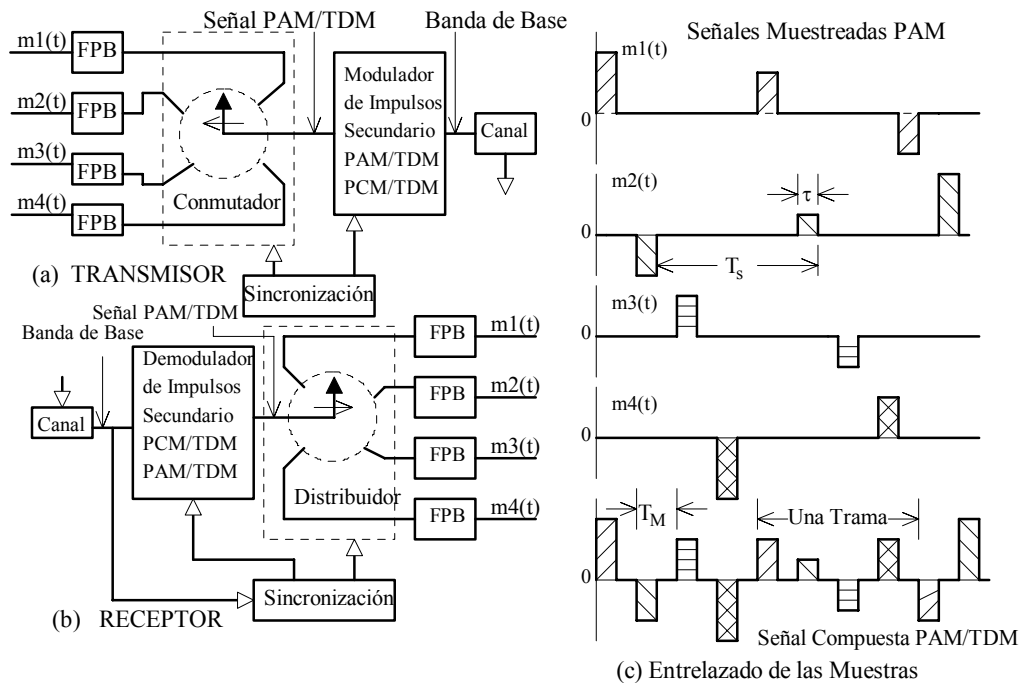


Fig. 5.46. Sistema Multiplex por División de Tiempo (TDM).

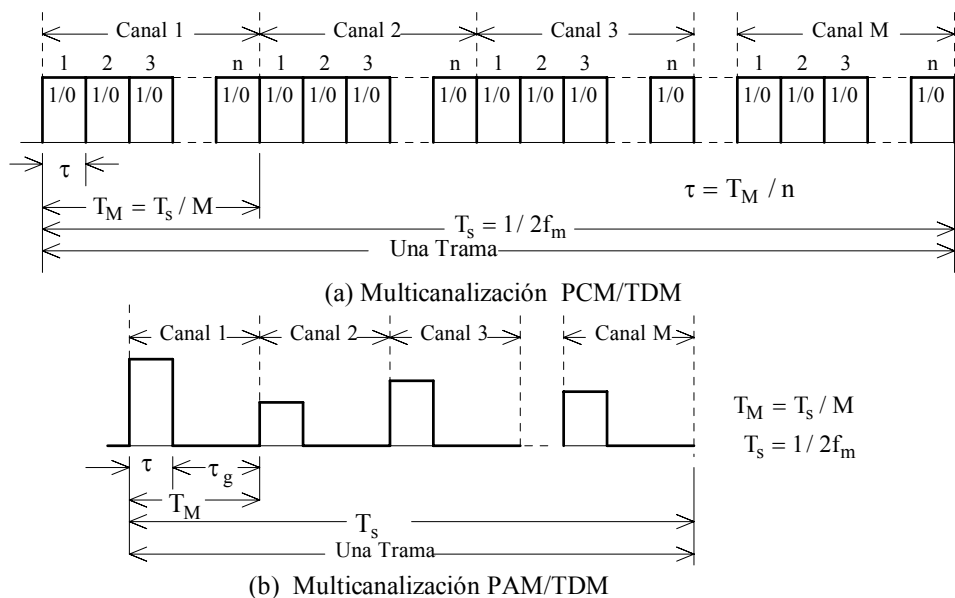


Fig. 5.47. Entrelazamiento de las Muestras en Multicanalización TDM

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El período de base T_s corresponde al intervalo de Shannon y el conjunto de impulsos en él incluidos se denomina “**trama**”. Cada canal está asignado a un intervalo o ranura de tiempo de duración $T_M = T_s / M$ que contiene en PCM NRZ los n impulsos de duración τ por muestra, y en PAM un impulso de duración τ y un “**intervalo de guarda**” de duración τ_g para prevenir la interferencia mutua o solapamiento entre impulsos de canales adyacentes. Entonces, de la Fig. 5.47,

$$T_M = \frac{T_s}{M} = \frac{1}{2Mf_m} = \tau + \tau_g$$

y en PCM / TDM,
$$\tau = \frac{T_M}{n} = \frac{T_s}{nM} = \frac{1}{2nMf_m}$$

La frecuencia f_m es la frecuencia máxima de las señales de entrada; esta frecuencia está limitada por los filtros pasabajo de entrada. Sin embargo, si las frecuencias máximas de las señales de entrada fueran diferentes, la frecuencia de muestreo f_s dependerá de la mayor frecuencia presente. Por ejemplo, si f_{MAX} es la frecuencia más alta del conjunto de señales de entrada, entonces el intervalo de muestreo $T_s = 1/2f_{MAX}$. Las señales cuyas frecuencias máximas son menores que f_{MAX} resultarán sobremuestreadas, pero este sobremuestreo no representa ningún problema. En los Ejemplos 5.11 y 5.12, veremos algunas aplicaciones de estos conceptos.

5.5.3. Interferencia Intersímbolo

Un aspecto de considerable importancia en la transmisión de impulsos en banda de base es el ancho de banda requerido para el canal de transmisión, especialmente en transmisión de señales PCM/TDM NRZ. Si B es el ancho de banda del canal y τ la duración de los impulsos a transmitir, se suele aplicar dos criterios para la selección del ancho de banda B :

1. El producto $B\tau = 1$, es decir,
$$B = \frac{1}{\tau} \quad (5.131a)$$

2. A expensas de una pérdida de resolución entre impulsos adyacentes se puede disminuir el ancho de banda para tener el producto $B\tau = 1/2$, es decir,

$$B = \frac{1}{2\tau} \quad (5.131b)$$

Si $B\tau > 1$, generalmente no hay problemas en la transmisión de impulsos en banda de base.

La cuestión de si el ancho de banda debe ser calculado de acuerdo con (5.131a) o (5.131b) o en cualquiera otra forma, dependerá de la dispersión permisible de un impulso sobre los impulsos adyacentes. Esta dispersión se denomina “**interferencia intersímbolo**” y es de particular importancia en sistemas PCM/TDM NRZ, pues resulta en distorsión cruzada o de intermodulación. La cantidad de interferencia depende del ancho de banda del canal; en efecto, si el ancho de banda del canal es demasiado pequeño, los impulsos que pueden estar bien separados en el punto de origen, presentarán una gran dispersión cuando llegan al receptor y se solaparán con los impulsos adyacentes; a esto hay que agregar otros factores como el perfil del impulso y el método de detección en el receptor.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Supongamos que en el receptor se muestrea la señal recibida mediante muestreo instantáneo y que el impulso recibido tiene su valor máximo en el instante de muestreo y se hace cero en los instantes de muestreo adyacentes, como se muestra en la Fig. 5.48(a) o (b) para una secuencia binaria NRZ 1 1 0 1 1.

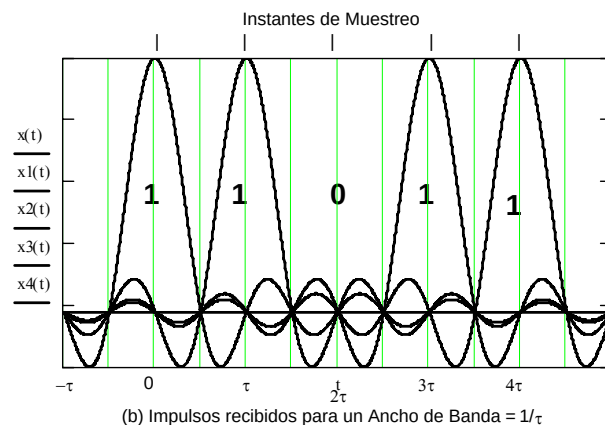
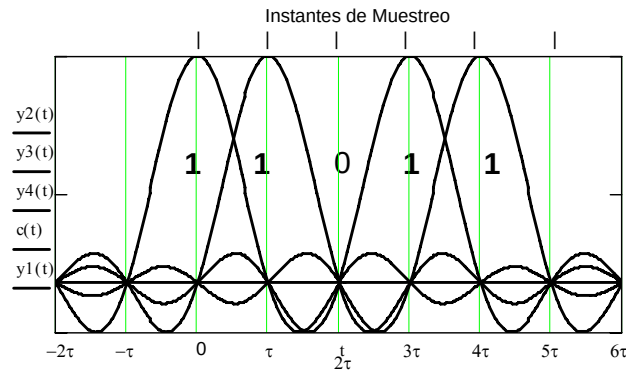


Fig. 5.48. Secuencias **11011** recibidas sin Interferencia Intersímbolo

En estos casos no se produce interferencia intersímbolo, aunque las colas de los impulsos, algunas veces llamadas “ecos”, persistan durante varios intervalos. Esto resulta así cuando los impulsos recibidos tienen la forma $a_n \text{sinc}[(t - n\tau)/\tau]$, donde $a_n = 0$ ó 1 , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y τ es la duración de los impulsos. Este perfil, mostrado en la Fig. 5.48(a), se obtiene utilizando impulsos unitarios en el transmisor y considerando el canal como un filtro pasabajo de ancho de banda $B = 1/2\tau$, en cuyo caso se tiene la relación duración-ancho de banda dada por (5.131b). Nótese lo cercanos que están los impulsos en la Fig. 5.48(a); pero más importante es el efecto de la amplitud de las colas, efecto que puede introducir una cierta incertidumbre respecto al instante de muestreo y producir distorsión a pesar de no existir interferencia intersímbolo. No obstante, la expresión (5.131b) marca el límite teórico del ancho de banda y está de acuerdo con la frecuencia de Nyquist. Esto significa que si se dispone de un ancho de banda B , se puede transmitir teóricamente $2B$ símbolos por segundo.

En la práctica hay que utilizar anchos de banda más grandes porque la característica pasabajo ideal es imposible de realizar y también porque la inexactitud en los instantes de muestreo producida por fluctuaciones de fase, resultaría en distorsión de intermodulación. Cuando el ancho de banda aumenta al doble, es decir, $B = 1/\tau$, los impulsos recibidos tendrán la forma mostrada en la Fig. 5.48(b); en este caso la situación ha mejorado pero ésta seguiría siendo la salida de un filtro

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

pasabajo ideal que, como sabemos, no es físicamente realizable. Los filtros reales deben aproximarse a esta característica ideal pero deben poseer las siguientes propiedades, establecidas por Nyquist, para que no se produzca interferencia intersímbolo: (a) que los ceros del impulso recibido pasen por los instantes de muestreo adyacentes, (b) que la amplitud de las colas o lóbulos laterales sea muy pequeña, y (c) que el ancho de banda máximo del impulso sea $B \leq 1/\tau$, donde τ es su duración. Un sistema que cumple con estas características son los Filtros de Nyquist que estudiamos en el Ejemplo 2.20. Por ejemplo, para la primera forma del Filtro de Nyquist,

$$H(f) = \frac{1}{2B} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi f}{B}\right) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \Leftrightarrow h(t) = \frac{\text{sinc}(2Bt)}{1 - (2Bt)^2}$$

En la Fig. 2.29(a), Capítulo II, se muestra la forma de $H(f)$, donde $H(f) = 0$ para $|f| > B$, y si $B = 1/\tau$, el primer cero de $h(t)$ estará en $t = 1/B$ y la amplitud de las colas prácticamente es despreciable. Igual razonamiento se aplica para la segunda forma del Filtro de Nyquist. En estos casos el roll-off β se ajusta según el caso.

En la Fig. 5.49 se muestra la secuencia de impulsos NRZ 1 1 0 1 1 recibida cuando se aplica el criterio de Nyquist, donde $B = 1/\tau$, que corresponde a la expresión (5.131a). La incertidumbre respecto a los instantes de muestreo es menor y no se produce interferencia intersímbolo. Nótese que la forma de la salida del filtro de Nyquist tiene características similares a las de la salida ideal mostrada en la Fig. 5.48(a), pero sin las indeseables colas de los impulsos. Esto es así porque las colas en los filtros de Nyquist decrecen con $1/t^3$, mientras que las colas de la Fig. 5.48(a) o (b) decrecen solamente con $1/t$.

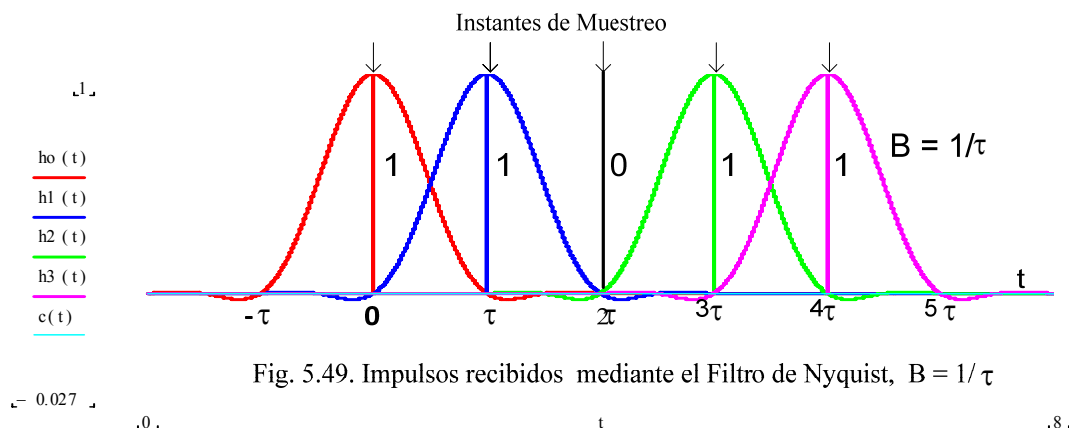


Fig. 5.49. Impulsos recibidos mediante el Filtro de Nyquist, $B = 1/\tau$

En resumen, si en el transmisor se procesan los impulsos de salida de tal manera que sus espectros sean en coseno elevado (o equivalente) con un ancho de banda $B \leq 1/\tau$, y si el canal tiene un ancho de banda B , entonces los impulsos recibidos tendrán la forma mostrada en la Fig. 5.49 y no se producirá interferencia intersímbolo. El costo que hay que pagar es que se podrá transmitir solamente B símbolos por segundo. Nótese, sin embargo, que en la práctica las características de los canales son muy variadas y por lo general no pueden ser modificadas; por ejemplo, las troncales telefónicas pueden tener diferentes características de fase y amplitud y pueden producir interferencia intersímbolo en la transmisión en banda de base de señales digitales. En este caso es necesario colocar redes ecualizadoras en los dos extremos del canal. Esto significa, en relación con la Fig. 5.45, que los sistemas $H_T(f)$, $H_c(f)$ y $H(f)$ deben ser diseñados conjuntamente de acuerdo con el esquema de modulación utilizado y las normas técnicas aplicables.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

En la transmisión de radio y televisión digitales se utiliza la modulación OFDM (Orthogonal Frequency-División Multiplex) que permite la transmisión adyacente de muchos canales sin que haya interferencia entre ellos. Ver el Apéndice B. Un buen tratamiento de la Interferencia Intersímbolo se puede encontrar en [Couch, 1990].

5.5.4. Códigos de Línea

Hasta ahora hemos supuesto que las señales PCM transmitidas estaban codificadas en binario natural con o sin retorno a cero. Mientras algunos sistemas pueden transmitir directamente en binario natural, otros convierten las secuencias binarias originales en nuevas secuencias binarias, denominadas “**Códigos de Línea**”. Estas formas tienen algunas ventajas en términos de facilidad de procesamiento y sincronización, requerimientos de ancho de banda, facilidad en la detección de errores, y otros factores.

En general, los códigos de línea deben cumplir, entre otras, con las siguientes condiciones:

1. Que la amplitud de la componente continua sea lo más pequeña posible. La componente continua, además de demandar potencia adicional, produce “derivas” en la línea de base de la señal. Por otro lado, la presencia de componentes continuas produce impulsos unitarios periódicos en el espectro, los cuales complican los circuitos de control automático de ganancia en el receptor.
2. Que las señales de temporización puedan ser fácilmente extraídas de la señal recibida. La señal codificada debe poseer muchas transiciones o cruces por cero, aunque la señal original contenga largas secuencias de UNOS o CEROS.
3. Que el contenido espectral sea el más adecuado según las características del medio de transmisión. El espectro deberá estar contenido dentro de una banda restringida, es decir, deberá ser cero en los bordes de la banda y máximo en el centro de la misma.
4. Que la señal codificada pueda ser descodificada unívocamente para permitir la recuperación fiel de la secuencia original. Para ello, el código de línea debe satisfacer la “condición del prefijo”, esto es, ninguna “palabra” del “alfabeto” utilizado debe ser la primera parte de otra palabra. También es deseable que la descodificación pueda realizarse inmediatamente luego de recibida la secuencia.
5. El código debe ser eficiente para aprovechar al máximo la capacidad del canal y ser inmune a las interferencias y ruido, lo cual produce una elevada tasa de errores.
6. Además de los aspectos puramente técnicos, hay que tomar en cuenta el aspecto económico. Es deseable que el código sea sencillo, fácil de generar y detectar a fin de reducir la complejidad y costo del sistema. De esta manera se asegura una mayor confiabilidad.

Es muy difícil que un solo código pueda satisfacer todas las condiciones anteriores, y la selección de un determinado código va a depender de su aplicación. En la Fig. 5.50 se muestra algunos de los códigos de línea utilizados en la práctica. Otros códigos utilizados en la práctica son de propiedad privada (protegidos por patentes).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

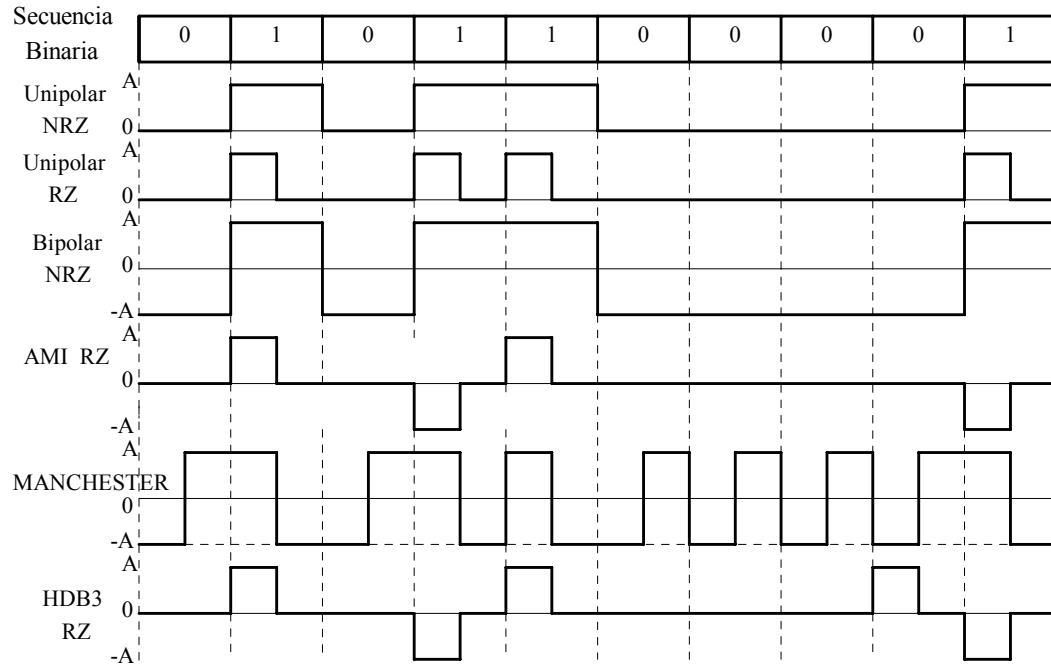


Fig. 5.50. Códigos de Línea.

Densidades Espectrales de algunos Códigos de Línea

En el Capítulo III, Sección 3.9.2, se muestran las densidades espectrales de potencia de algunos de estos códigos con sus correspondientes formas de onda, que repetiremos a continuación:

Para una Secuencia Aleatoria Unipolar NRZ de Amplitud A:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{16} \left[T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) + \delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right], \text{ Fig. 3.21(c), ecuación (3.170)}$$

Para una Secuencia Aleatoria Unipolar RZ de amplitud A:

$$S_x(f) = \frac{A^2}{16} \left[T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) + \delta(f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right], \text{ Fig. 3.22(c), (ec. 3.173)}$$

Para una Secuencia Aleatoria Bipolar NRZ de amplitudes $\pm A$:

$$S_x(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2(T_b f), \text{ Fig. 3.23(c), ecuación (3.175)}$$

Para una Secuencia Aleatoria Bipolar AMI RZ de amplitudes $\pm A$:

$$S_x(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \text{sen}^2(\pi T_b f), \text{ Fig. 3.24(c), ecuación (3.177):}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Para una Secuencia Aleatoria Bipolar MANCHESTER se amplitudes $\pm A$:

$$S_X(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2\left(\frac{T_b}{2} f\right) \text{sen}^2\left(\pi \frac{T_b}{2} f\right), \text{ Fig. 3.25(c), ecuación (3.179)}$$

En la Fig. 3.25(a) se muestra la forma de estas densidades espectrales

Estas densidades espectrales las aplicaremos en la transmisión y recepción de impulsos mediante portadora modulada.

Algunos de los códigos de línea mostrados en la Fig. 5.50 en la práctica aparecen con otras denominaciones; por ejemplo, al código Bipolar NRZ se le llama Polar NRZ o NRZ-L; al AMI RZ se le llama Bipolar RZ, etc. En la práctica se encuentran muchos códigos de línea, unos de dominio público y otros de dominio privado y protegidos por patentes.

Rendimiento Espectral de algunos Códigos de Línea

De acuerdo con la expresión (4.42), el rendimiento espectral de estos códigos de línea se puede determinar en la forma siguiente.

Consideremos, por ejemplo, la secuencia unipolar NRZ de amplitud A . La velocidad de información asociada a esta señal binaria es $V_i = \frac{1}{T_b} \log_2 2 = \frac{1}{T_b}$ bps. Por otro lado, de la Fig. 3.21(c), su ancho de banda se puede definir como la distancia al primer cero de $S_X(f)$. Entonces, $B = \frac{1}{T_b}$ Hz. El rendimiento espectral η_B para una señal unipolar NRZ de amplitud A será:

$$\eta_B = \frac{V_i}{B} = \frac{\frac{1}{T_b}}{\frac{1}{T_b}} = 1 \text{ bps/Hz}$$

En la misma forma se puede determinar el rendimiento espectral de los otros códigos de línea, cuyos valores se muestran en el presente Cuadro.

Rendimiento Espectral de algunos Códigos de Línea

Código de Línea	Rendimiento bps/Hz
Unipolar NRZ	1
Unipolar RZ	1/2
Bipolar NRZ	1
AMI RZ	1
Manchester Bipolar	1/2

♣ Ejemplo 5.11. Los Sistemas Troncales T1 y E1

El Sistema Troncal T1

Un ejemplo muy interesante de la aplicación de los sistemas PCM/TDM es el sistema de transmisión de voz y datos T1, desarrollado por la Compañía Bell de los Estados Unidos a principios de los años 60 para interconectar centrales telefónicas separadas hasta 80 km. El Sistema T1 es el primer nivel de la Jerarquía Norteamericana. Conviene señalar aquí que, en general, los “datos” son señales digitales generadas por máquinas: terminales, computadoras, teletipo, telex, etc., y cuyas velocidades de información van desde unos pocos bps hasta los Gigabps. Sin embargo, fundamentalmente no hay ninguna diferencia, por ejemplo, entre una señal de voz digitalizada en PCM y una señal digital producida por un terminal de datos.

El Sistema Bell T1 fue inicialmente diseñado para que fuera compatible con los sistemas de comunicación analógicos existentes. Estos equipos habían sido diseñados principalmente para los

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

enlaces telefónicos intercentrales, pero pronto emergieron las técnicas PCM que ofrecían una mejor inmunidad al ruido y a medida que avanzaba la tecnología de los circuitos integrados, los costos de los equipos digitales se hicieron cada vez más bajos que los analógicos. Además, la transmisión de la información de señalización requerida para el control de las operaciones de conmutación telefónica era más fácil y económica en forma digital que en analógica.

En el Sistema T1 básico se multiplexan 24 señales de voz que forman la llamada Trama T1, de acuerdo con la Recomendación G.733 de la UIT-T. Estas señales se muestrean a 8000 muestras por segundo y las muestras resultantes se codifican en 8 dígitos binarios o “bits” con el código de línea AMI RZ, Fig.5.51(A), formando una trama de 192 dígitos a los cuales se les agrega un dígito adicional para sincronización de trama. La trama contiene entonces 193 dígitos y la frecuencia de señalización es de 1544 kHz, aunque en la práctica se dice 1544 kbps. La duración de la trama es de 125 μ seg y la de cada dígito de 0,6477 μ seg. La sincronización por canal se incorpora en la Trama T1 reemplazando el octavo dígito binario (el menos significativo en cada uno de los 24 canales) por un dígito de señalización cada seis tramas. La velocidad de señalización para cada uno de los 24 canales será entonces de 1333 bps. La señal de banda de base en T1 es una secuencia AMI RZ de valores $\pm 3V$ sobre una resistencia de 100 Ohm. En consecuencia, la señal T1 no contiene una componente continua y su espectro tiene la forma mostrada en la Fig. 3.24(c); el primer cero del espectro está a una frecuencia de 1544 kHz y el valor máximo está a 772 kHz. En el Sistema T1 se agrupan las tramas para formar multitramas de 12 tramas cada una; la duración de la multitrama es de 1,5 mseg. El dígito de sincronización de trama en la multitrama tiene la forma 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 y se repite en la multitrama siguiente.

En la Fig. 5.51(A) se muestra la configuración de la Trama T1.

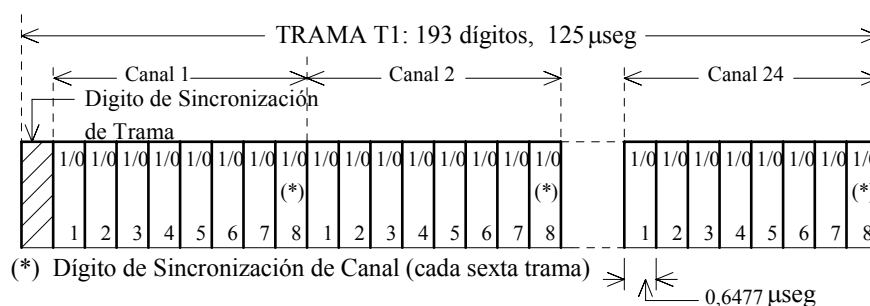


Fig. 5.51(A). Formato de la TRAMA T1

El Sistema Troncal E1

El sistema E1, denominado también CEPT-1 PCM-30 (es el Nivel M1 de la Jerarquía Europea, Fig. 5.52) está formado por 32 canales, con 8 dígitos por canal para un total de 256 dígitos por trama; se utiliza el Código de Línea HDB3 RZ, Fig.5.50. Como la frecuencia de muestreo es de 8000 muestras por segundo, la velocidad de la trama E1 es de 2048 kbps. La duración de cada trama es de 125 microsegundos, el período de cada ranura es de 3906 nanosegundos, siendo 488 nanosegundos la duración de cada dígito. La trama contiene 32 ranuras de tiempo RT de las cuales dos son para señalización y alineación, y treinta para los canales de Voz/Datos; la multitrama, formada por 16 tramas, tiene una duración de 2 ms, Fig. 5.51(B) .

En el formato CEPT-1, las informaciones de alineación y de señalización van en las dos primeras tramas, en las ranuras RT0 y RT1. La palabra de alineación de trama tiene la forma 0011011 y va en la ranura de tiempo RT0 de las tramas pares. Esta señal se utiliza para permitir que cada trama sea reconocida en el receptor. Un dígito de la misma ranura contiene el Dígito

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Internacional I. Las tramas impares llevan información de Señalización Nacional e Internacional, además de una indicación de alarma. La señalización para los canales 1 y 16 va en la ranura RT16 de la trama T1. Las tramas siguientes T2, T3, T4,.....,T15, llevan en la correspondiente ranura la información de señalización de los canales 2 y 17, 3 y 18, 4 y 19,.....,15 y 30, respectivamente.

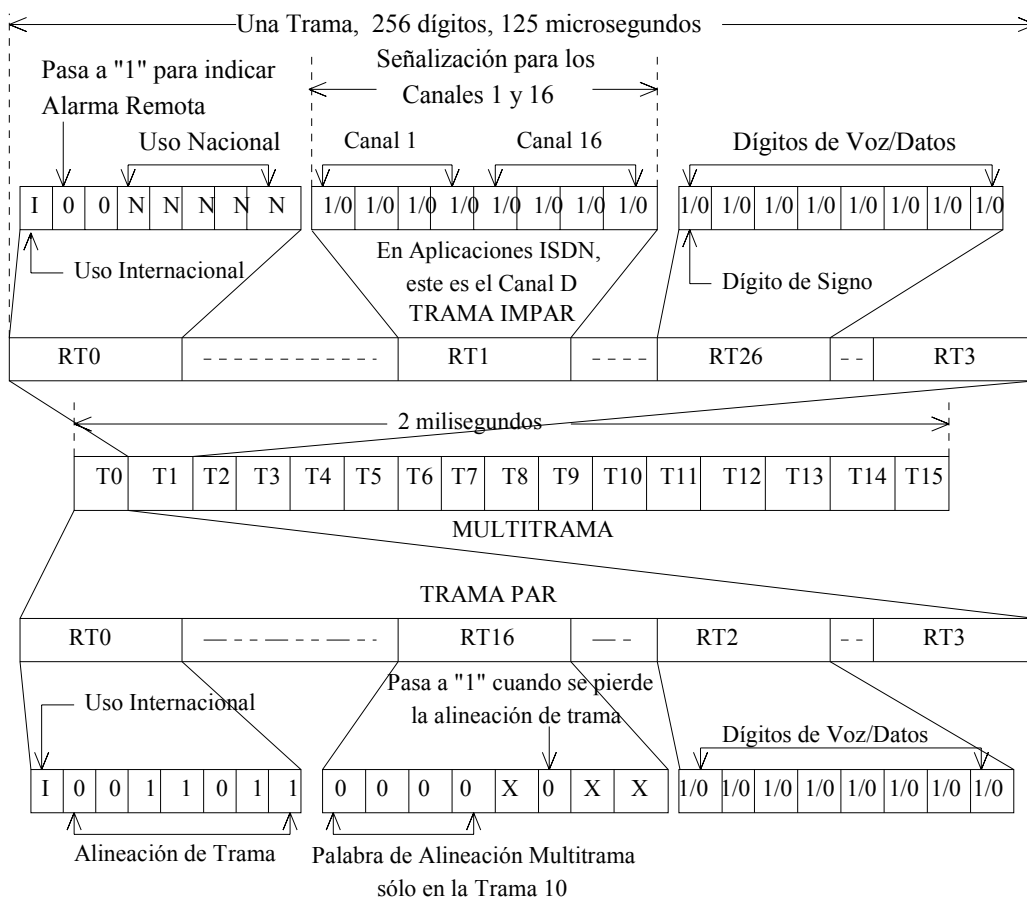


Fig. 5.51(B). Formato de la Trama E1.

Las Recomendaciones G.711, G.12 y G.32 del IUT-T establecen todos los requerimientos para un comportamiento satisfactorio del sistema. El equipo E1 debe efectuar el multiplexaje TDM de los 30 canales de voz o datos agregando los sistemas de supervisión y alineamiento para transmitir la señal compuesta por una línea de transmisión de 4 conductores y a una velocidad de 2048 kbps. Cuando los dígitos I y N no se utilizan, se suele ponerlos a UNO; sin embargo, algunas veces se pueden utilizar para transmitir información adicional; en este caso las velocidades de transmisión son de 1,5 kbps y 28 kbps con los dígitos I y N, respectivamente.



♣ Ejemplo 5.12. Jerarquías en los Sistemas de Transmisión de Datos

Una Jerarquía Digital, llamada también Jerarquía PCM, es una secuencia ordenada de velocidades de información (en bps) que constituye cada una un nivel jerárquico dado. Los equipos jerárquicos de multiplex combinan un número definido de señales digitales del nivel (n-1) en una señal digital con velocidad del nivel n. Los bancos de canales PCM, los CODECs de banda ancha y

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

los equipos de línea y multicanalización, deben operar únicamente a una velocidad igual o múltiplo de las velocidades jerárquicas. En la Fig. 5.52 se muestran las tres jerarquías actualmente en uso. Las dos primeras jerarquías han sido aprobadas por la UIT-T.

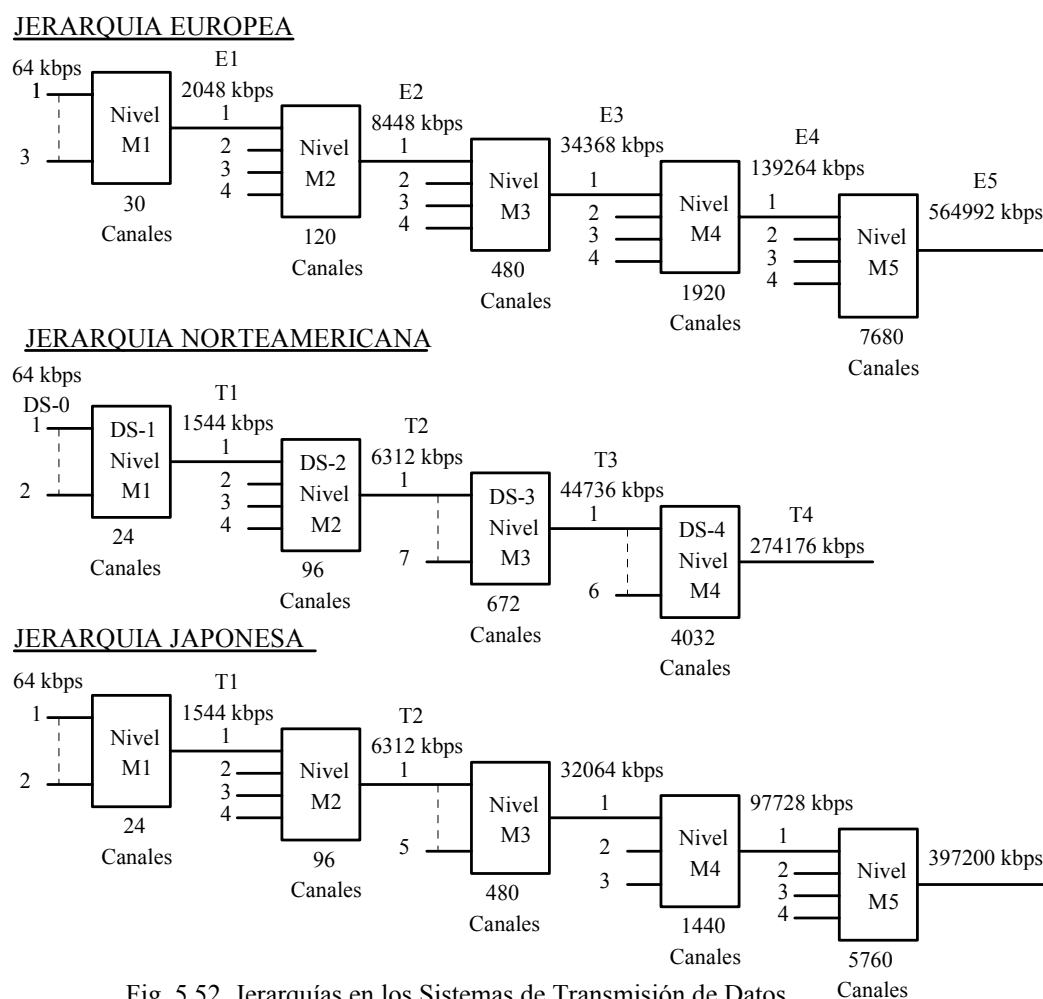


Fig. 5.52. Jerarquías en los Sistemas de Transmisión de Datos.

Estas jerarquías se utilizan exclusivamente para la transmisión de datos, pero la tendencia actual es la de establecer una sola red por la cual se pueda transmitir voz, datos e imágenes. A este efecto, la UIT-T ha promovido la creación de la llamada “Red Digital de Servicios Integrados (Integrated Service Digital Network, ISDN)”. La Red ISDN permitirá la integración de servicios de datos, voz y video en una sola red, sobre una sola línea, bajo el mismo número y a nivel mundial.

5.5.5. Métodos de Acceso Múltiple

En algunos sistemas de comunicación muchos usuarios comparten un medio de transmisión común y el acceso a ese medio debe arbitrarse en alguna forma. Esta es una situación que se presenta en los sistemas satelitales en los cuales múltiples estaciones terrenas utilizan un satélite como repetidora y el acceso a ese satélite debe ser muy bien controlado para evitar colisiones e

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

interferencias mutuas. Para acceder al satélite se utilizan tres técnicas denominadas “métodos de acceso múltiple”:

1. **Acceso Múltiple por División de Tiempo** (Time-Division Multiple Access, **TDMA**)
2. **Acceso Múltiple por División de Código** (Code-Division Multiple Access, **CDMA**)
3. **Acceso Múltiple por División de Frecuencia** (Frequency-Division Multiple Access, **FDMA**).

La técnica CDMA la veremos más adelante, Sección 5.9.2, mientras que la técnica FDMA la estudiaremos con más detalle en el Capítulo VI.



Acceso Múltiple por División de Tiempo (TDMA)

Transmisión Satelital

En el sistema TDMA, basado en los principios TDM, a cada estación terrena se le asigna un intervalo o ranura de tiempo para que ella transmita información; esta asignación la efectúa una estación terrena de referencia que controla la temporización y la sincronización de las estaciones presentes en el sistema. Durante ese intervalo, una estación utiliza todo el ancho de banda del repetidor o “**transpondedor**” del satélite para enviar una trama que contiene la información a transmitir. En el satélite se recibe una multitrama TDMA que contiene las tramas de todas las estaciones terrenas. Esta multitrama TDMA se regenera en el satélite y se retransmite a una frecuencia de portadora diferente de la frecuencia de la portadora de entrada. En la práctica a estas frecuencias se las denomina “frecuencias de subida” y “frecuencias de bajada”, respectivamente.

Consideremos entonces un sistema satelital formado por un satélite y seis estaciones terrenas A, B, C, D, E y F; una cualquiera de estas estaciones puede actuar como estación de referencia. La multitrama TDMA tiene la forma mostrada en la Fig. 5.53, parte (a).

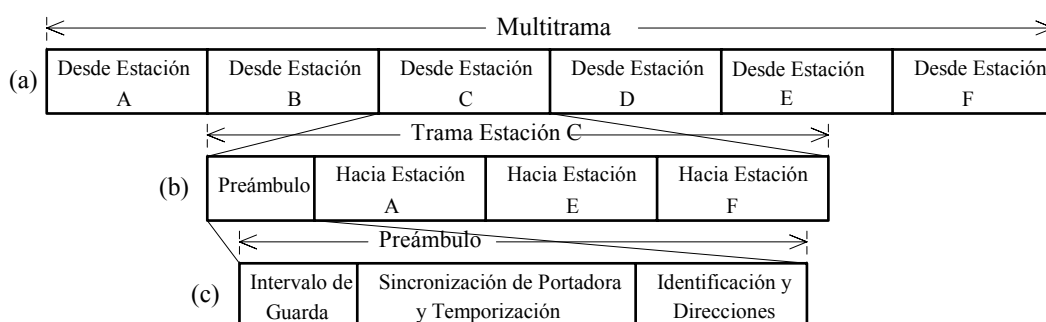


Fig. 5.53. Formato TDMA Típico

En el ejemplo de la Fig. 5.53, la estación C está enviando información a las estaciones A, E y F. La multitrama TDMA, parte (a), que llega al satélite contiene las tramas de todas las estaciones que están transmitiendo. En la parte (b) se muestra la estructura de la trama transmitida por la Estación C. Esta trama consta de dos partes: un preámbulo, y los varios campos que contienen la información para las diferentes estaciones de destino. El preámbulo, parte (c), incluye un intervalo de guarda, un campo que contiene caracteres para activar los circuitos de sincronización de portadora y señalización, y un campo donde va la dirección o identificación de la estación llamante y las direcciones de las estaciones llamadas. Cada estación escucha toda la multitrama pero

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

solamente copia la información a ella dirigida. En este caso se dice que el sistema es radiante o difusor (“broadcast”).

Los sistemas TDMA trabajan generalmente en QPSK y a velocidades hasta 120 Mbps; se emplean en la transmisión de video digital, televisión de alta definición y en la transmisión de cientos de miles de canales de voz de 64 kbps. Las técnicas TDMA se utilizan actualmente en los satélites INTELSAT VI y VSAT, y en telefonía celular.

5.6. RECEPCIÓN DE IMPULSOS EN BANDA DE BASE

5.6.1. Introducción

Las características de la señal recibida dependen tanto del perfil de la señal transmitida como de las características físicas del canal. El impulso transmitido puede ser en coseno elevado y el canal un filtro pasabajo; alternatively, el canal puede ser en coseno elevado (o equivalente) y el impulso transmitido puede tener un espectro determinado dentro de la banda de paso del canal. En realidad, la verdadera situación es mucho más complicada, pues el canal contribuye no solamente a modificar el perfil de la señal recibida, sino que aporta también una cantidad de ruido aditivo de densidad espectral $S_n(f)$. En relación con los efectos del ruido, un buen diseño de los filtros es esencial.

El mecanismo de recepción en un receptor binario consiste fundamentalmente en procesar en alguna forma la señal recibida y decidir, en los instantes de muestreo t_n , si se ha recibido el estado “CERO” o el estado “UNO”, que corresponden a los dos estados de la señal binaria $v(t)$. El mecanismo de detección debe tomar en cuenta también los efectos del ruido aditivo que se agrega a la señal a su paso por el canal. En la Fig. 5.54 se muestra el modelo de un receptor binario en banda de base.

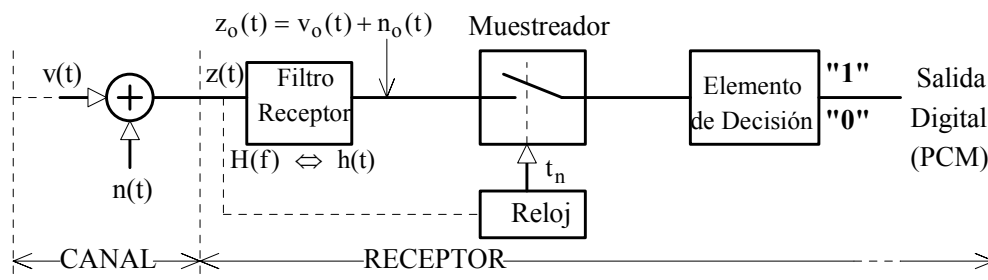


Fig. 5.54. Receptor Binario en Banda de Base.

El receptor digital consta básicamente de un filtro lineal o filtro receptor, un muestreador de retención y un elemento de decisión o detector que decide, muestra a muestra y de acuerdo con algún algoritmo preestablecido, qué estado fue transmitido.

En general, la operación de detección consiste esencialmente en una toma de decisión en los instantes de muestreo t_n , relativa al estado (“CERO” o “UNO”) del impulso binario recibido en esos instantes. Esta decisión se basa en un criterio más o menos elaborado, como veremos en su oportunidad. Para la generación de los instantes de muestreo t_n en el receptor, se necesita una señal de reloj que esté sincronizada con la señal de reloj en el transmisor. Este problema de sincronización de temporización lo trataremos más adelante.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

La influencia del ruido introduce errores en las decisiones tomadas, pero en vez de definirse una relación S/N que tenga en cuenta la influencia de los errores sobre la señal transmitida, se prefiere más bien definir la probabilidad de errores en la decisión, probabilidad que caracterizará en mayor o menor grado la calidad de la señal. Sin embargo, el procesamiento previo al muestreo debe ser tal que el valor muestreado sea el más probable de producir una decisión correcta y esto implica disminuir los efectos indeseables del ruido aditivo o, lo que es equivalente, aumentar la relación S/N a la salida del filtro receptor.

La demodulación binaria ya no es entonces el reconocimiento de una “forma” (amplitud, posición o duración del impulso) más o menos alterada por el ruido, sino más bien el reconocimiento de una “presencia”: el estado “CERO” o el estado “UNO”. Este reconocimiento puede efectuarse con gran precisión, pues para relaciones S/N de entrada razonables, la probabilidad de error es muy pequeña.

5.6.2. El Filtro Acoplado

El filtro acoplado es una técnica para el procesamiento de una señal digital en presencia de ruido. Una propiedad muy importante del filtro acoplado es que maximiza la relación S/N a su salida. En efecto, Fig. 5.54, cuando la señal de entrada $z(t)$ al filtro receptor es la suma de una señal $v(t)$ más un ruido aditivo $n(t)$, la salida $z_o(t)$ en un instante $t = t_o$ constará de dos términos: el primer término es $v_o(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)H(f) \exp(j2\pi f t_o) df$, donde $V(f)$ es la transformada de Fourier de $v(t)$ y $H(f)$ la función de transferencia del filtro receptor; el segundo término es el ruido $n_o(t_o)$ cuya potencia es $\langle n_o^2(t_o) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(f)|^2 df$, donde $S_n(f)$ es su densidad espectral de potencia.

Si a la salida del filtro la relación S/N en el instante $t = t_o$ se define en la forma

$$\rho = \frac{|v_o(t_o)|^2}{\langle n_o^2(t_o) \rangle} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f)H(f) \exp(j2\pi f t_o) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(f)|^2 df} \quad (5.132)$$

la función de transferencia $H(f)$ del filtro receptor se seleccionará de tal manera que se maximice la relación ρ . En este caso el filtro receptor pasará a denominarse “filtro acoplado”. Nótese que la señal $v(t)$ es un impulso de cualquier perfil y de duración τ , que forma un tren de impulsos de período τ .

Para maximizar ρ , se aplica la “desigualdad de Schwartz”, la cual establece que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones complejas, entonces

$$\left| \int f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \cdot \int |g(x)|^2 dx \quad (5.133)$$

$$\text{verificándose la igualdad si y solamente si} \quad f(x) = k \cdot g^*(x) \quad (5.134)$$

donde k es una constante cualquiera y $g^*(x)$ es el conjugado de $g(x)$. Una demostración muy sencilla de la desigualdad de Schwartz se encuentra en [Roden M. S., 1988].

Para maximizar ρ , el numerador de la expresión (5.132) se puede escribir en la forma

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f)H(f) \exp(j2\pi t_o f) df \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[H(f) \cdot \sqrt{S_n(f)} \right] \cdot \left[\frac{V(f) \exp(j2\pi t_o f)}{\sqrt{S_n(f)}} \right] df \right|^2$$

Esta representación es posible porque $S_n(f)$ es par y positiva para todo f . Reemplazando esta expresión en (5.132) y con ayuda de la desigualdad de Schwartz, se obtiene

$$\rho \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(f)|^2}{S_n(f)} df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_n(f) df} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (5.135)$$

Si el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$, y con la ayuda del Teorema de Raleigh,

$$\rho \leq \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{2}{\eta} E_b \quad (5.136)$$

donde E_b es la energía del impulso $v(t)$. Nótese que (5.136) es válida únicamente si el ruido es blanco.

El valor máximo de ρ será entonces

$$\rho_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (5.137)$$

$$\rho_{\max} = \frac{2}{\eta} E_b \quad \text{si el ruido es blanco} \quad (5.138)$$

Este valor máximo se obtiene a partir de la condición (5.134), es decir, cuando

$$H(f)\sqrt{S_n(f)} = k \cdot \left[\frac{V(f) \exp(j2\pi t_o f)}{\sqrt{S_n(f)}} \right]^* = k \cdot \frac{V(-f) \exp(-j2\pi t_o f)}{\sqrt{S_n(-f)}}$$

Puesto que $S_n(f)$ es una función par de f , se tiene

$$H(f) = k \cdot \frac{V(-f) \exp(-j2\pi t_o f)}{S_n(f)} \quad (5.139)$$

Esta es la función de transferencia del filtro acoplado. Si suponemos que el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$,

$$H(f) = \frac{2k}{\eta} V(-f) \exp(-j2\pi t_o f) \quad (5.140)$$

Nótese que esta función de transferencia puede no ser físicamente realizable.

El lector puede verificar fácilmente que la respuesta impulsional del filtro acoplado es $h(t) = (2k/\eta)v(t_o - t)$, pero como $v(t)$ es un impulso de duración τ , se toma este valor para t_o ; entonces

$$h(t) = \frac{2k}{\eta} v(\tau - t) \Leftrightarrow H(f) = \frac{2k}{\eta} V(-f) \exp(-j2\pi \tau f) \quad (5.141a)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Para simplificar (5.141a) se puede hacer $(2k/\eta) = 1$, es decir, $k = \eta/2$. Por consiguiente,

$$h(t) = v(\tau - t) \Leftrightarrow H(f) = V(-f)\exp(-j2\pi\tau f) \quad (5.141b)$$

En esta forma, tanto $v(t)$ como $h(t)$ tendrán una duración de τ segundos. En consecuencia, $v_o(t)$, que es la convolución de $v(t)$ y $h(t)$, tendrá una duración de 2τ segundos, con un valor máximo en $t = \tau$ y simétrica respecto a $t = \tau$. Si se trata de un tren de impulsos, la salida del impulso anterior termina y es cero cuando $t = \tau$. En forma similar, el impulso de salida siguiente se inicia y tiene un valor cero en $t = \tau$. Por lo tanto, en los instantes de muestreo t_n no ocurre interferencia intersímbolo.

El filtro acoplado se puede considerar también como una forma de correlador. En efecto, la salida total del filtro acoplado se puede determinar mediante convolución, es decir,

$$z_o(t) = v_o(t) + n_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t') + n(t')] \cdot h(t - t') dt'$$

pero $h(t - t') = v[\tau - (t - t')] = v(t' + \tau - t)$, de donde

$$z_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t') + n(t')] \cdot v(t' + \tau - t) dt'$$

Puesto que $t = \tau$ en el instante de decisión, entonces

$$z_o(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [v(t') + n(t')] \cdot v(t') dt'$$

La suma $[v(t) + n(t)]$ se inicia en $t = 0$, y $v(t) = 0$ para $t > \tau$, entonces la salida del filtro acoplado en el instante $t = \tau$ es

$$z_o(\tau) = \int_0^{\tau} [v(t) + n(t)] \cdot v(t) dt \quad (5.142a)$$

pero como $v(t)$ y $n(t)$ no están correlacionados, entonces $\int_0^{\tau} v(t)n(t) dt = 0$; de donde

$$z_o(\tau) = \int_0^{\tau} v^2(t) dt = E_b \quad (5.142b)$$

expresión que está de acuerdo con (5.136).

Demostramos en esta forma que en los instantes de decisión la salida $z_o(t)$ del filtro acoplado es máxima e igual a la energía del impulso $v(t)$; este hecho es de particular importancia pues la amplitud máxima de $z_o(t)$ no depende de la forma de $v(t)$ sino solamente de su energía. La probabilidad de una decisión correcta es entonces la óptima y por esta razón a los filtros acoplados se les denomina también “filtros óptimos”. Los filtros óptimos son de gran aplicación en sistemas de radar y en la detección de señales digitales tanto en banda de base como en portadora modulada, como veremos más adelante.

La expresión (5.142a) se puede instrumentar entonces en la forma mostrada en la Fig. 5.55, que es equivalente a la Fig. 5.54.

El comportamiento de los sistemas de modulación digital en presencia de ruido dependerá del método de detección empleado, y para caracterizar este comportamiento normalmente se utiliza las relaciones Probabilidad de Error (P_e) vs Ganancia de Predetección (S_i / N_i) que dependen de la forma de detección utilizada. El comportamiento del receptor se mide entonces en términos de la

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

probabilidad de error y se dice que el receptor es óptimo cuando la probabilidad de error a su salida es la mínima. Esto, a su vez, está asociado con la presencia de un filtro acoplado colocado antes del elemento de decisión.

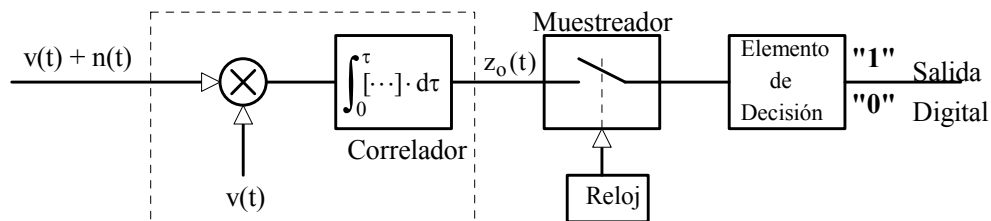


Fig. 5.55. Receptor Digital Correlador.

♣ Ejemplo 5.13

El impulso de entrada a un filtro óptimo tiene la forma $v(t) = A\Pi(\frac{t-\tau/2}{\tau})$, como se muestra en la Fig. 5.56(a); se supone que $k = \eta/2$. De acuerdo con (5.141b), la respuesta impulsional del filtro óptimo es $h(t) = v(\tau - t) = A\Pi(\frac{\tau - t - \tau/2}{\tau}) = A\Pi(\frac{t - \tau/2}{\tau})$ cuya función de transferencia es $H(f) = A\tau \text{sinc}(\tau f) \exp(-j\pi\tau f)$.

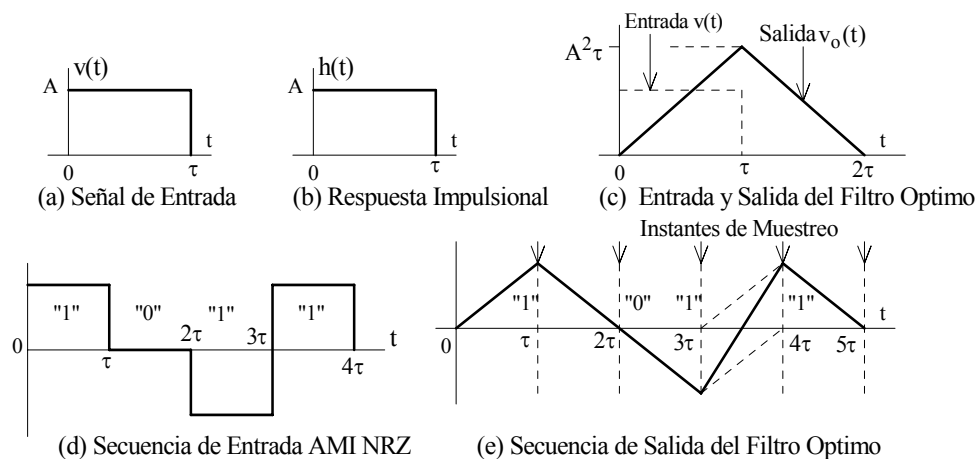


Fig. 5.56.

La respuesta impulsional $h(t)$ se muestra en la Fig. 5.56(b). Nótese que en este caso en particular, $v(t)$ y $h(t)$ tienen el mismo perfil.

La señal de salida del filtro será $v_o(t) = h(t) * v(t) = A^2 \tau \Lambda(\frac{t - \tau/2}{\tau})$, la cual se muestra en la Fig. 5.56(c). Nótese que $v_o(t)$ es máxima para $t = \tau$.

La relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado será, de (5.136),

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\rho_{\max} = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{2}{\eta} \int_0^{\tau} A^2 dt = \frac{2A^2\tau}{\eta}$$

La forma de $v_o(t)$ nos permite deducir fácilmente la salida de un filtro acoplado cuando a su entrada se aplica una secuencia de impulsos. Por ejemplo, para la secuencia de entrada AMI NRZ 1011, mostrada en la Fig. 5.56(d), la salida del filtro tendrá la forma mostrada en la Fig. 5.56(e), en la que se indica también los instantes de muestreo de la señal. ♣

5.7. TRANSMISIÓN Y RECEPCIÓN DE SEÑALES BINARIAS MEDIANTE PORTADORA MODULADA

5.7.1. Introducción

Los impulsos digitales producidos por los diferentes sistemas vistos en este capítulo, así como las señales de datos de terminales digitales y dispositivos afines, generalmente no se transmiten a gran distancia en la forma de señal de banda de base, sino en forma de una señal modulada en forma analógica; en efecto, los impulsos modulan una portadora sinusoidal cuya frecuencia es compatible con el medio de transmisión utilizado; este tipo de transmisión se denomina “**transmisión digital binaria mediante portadora modulada**”. Por ejemplo, en un enlace de HF la frecuencia de portadora puede ser de unos cuantos Megahertz, pero en un enlace de microondas la frecuencia de portadora puede alcanzar la gama de los Gigahertz. Si la transmisión se efectúa por un canal telefónico de 4 kHz de ancho de banda, la frecuencia de portadora está entre 1 y 2 kHz.

La modulación digital se realiza con un dispositivo denominado “**MODEM**” (de las palabras **MOD**ulador y **DEM**odulador) en el cual los impulsos PCM modulan la amplitud, la frecuencia o la fase de una señal sinusoidal, la portadora. Como la señal PCM es una secuencia de impulsos binarios (2 estados), las magnitudes moduladas tomarán también dos valores, de ahí que a estos procesos se les denomina también “**técnicas de modulación binaria**”.

En la Fig. 5.57 se muestra los modelos para la transmisión y recepción de señales binarias mediante portadora modulada y en la Fig. 5.58 la forma de las señales binarias moduladas.

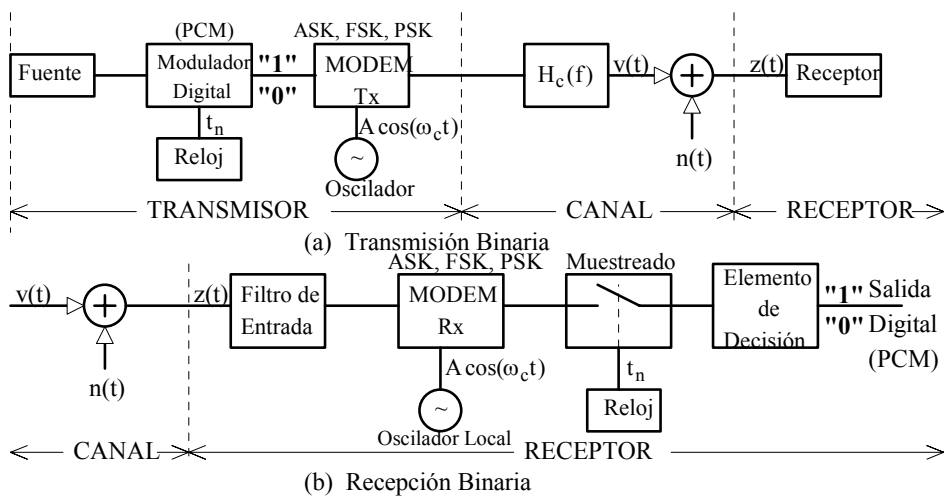


Fig. 5.57. Transmisión y Recepción Binaria mediante Portadora Modulada

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El “canal” puede ser un canal telefónico, conductores metálicos (cable coaxial, par trenzado o guías de onda), fibras ópticas, un canal de radio (HF, microondas, etc.), rayos infrarrojos o láser. Los filtros $H_T(f)$ y el filtro receptor están incorporados en el Modem y su diseño está integrado al mismo de acuerdo con la aplicación y normas correspondientes.

Las formas básicas de la modulación binaria mediante portadora modulada son:

1. **La Modulación Binaria de Amplitud** (Amplitude-Shift Keying, **ASK**)
2. **La Modulación Binaria de Frecuencia** (Frequency-Shift Keying, **FSK**)
3. **La Modulación Binaria de Fase** (Phase-Shift Keying, **PSK**)
4. **La Modulación Binaria Diferencial de Fase** (Differential PSK, **DPSK**)

Los nombres en inglés son reminiscencias del antiguo arte de la telegrafía manual.

En la Fig. 5.58 se muestra la forma de las señales moduladas ASK, FSK y PSK a la secuencia binaria dada. La forma de la señal DPSK básicamente es idéntica a la de PSK. Hay otros métodos más avanzados de modulación pero no los trataremos aquí.

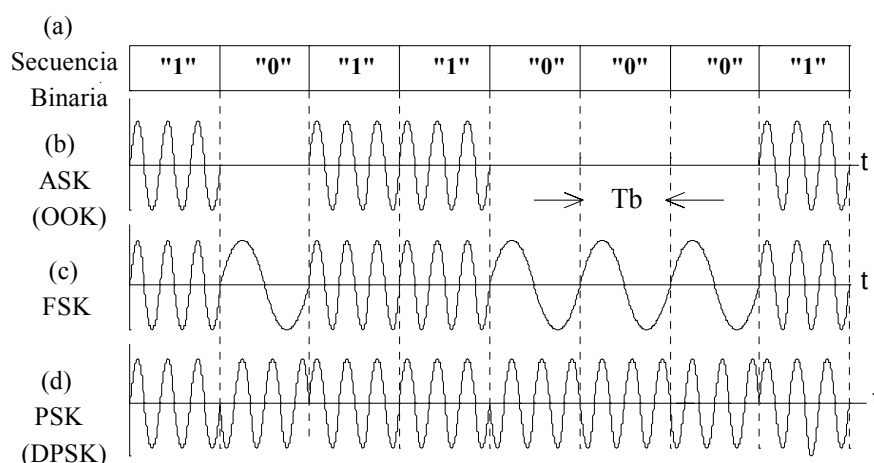


Fig. 5.58. Señales Binarias Moduladas ASK, FSK y PSK (DPSK).

Como la señal digital se convierte en una señal analógica (por efecto de la multiplicación por una señal sinusoidal), la modulación digital no es un proceso ni puramente digital ni puramente analógico, sino que posee atributos comunes a ambas áreas. Sin embargo, estas señales digitales pueden ser tratadas con los métodos teóricos desarrollados en el Capítulo I y II aplicables a las señales moduladas y particularmente a la demodulación o extracción de la señal mensaje portadora de información.

5.7.2. Demodulación y Sincronización de Señales Binarias Moduladas

Métodos de Demodulación

Como mencionamos brevemente en el Capítulo II, hay esencialmente dos métodos comunes de demodulación o detección de señales moduladas con portadora sinusoidal:

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

1. La “**Demodulación Sincrónica o Coherente**”
2. La “**Detección de Envolvente**”

La demodulación o detección sincrónica o coherente consiste simplemente en multiplicar la señal modulada recibida por la portadora, generada localmente, y mediante filtrado pasabajo se obtiene la señal original portadora de información. Este proceso se muestra en la Fig. 5.59(a) y ya lo aplicamos en el Capítulo II, Problema de Aplicación 2.28.

Sea, por ejemplo, $\cos(2\pi f_c t + \phi)$ la portadora transmitida; si la portadora generada localmente fuera de la forma $2 \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi_o]$, el lector puede demostrar fácilmente que la salida del detector estará multiplicada por el factor $\cos[2\pi\Delta f t + (\phi_o - \phi)]$ que afectará seriamente la amplitud de la salida. Para evitar esta atenuación de la señal, la frecuencia y la fase de la portadora local deben ser idénticas a las de la portadora de transmisión, es decir, que $\Delta f = 0$ y $\phi_o = \phi$. Los dispositivos de sincronización en el receptor deben lograr la coherencia entre las dos portadoras.

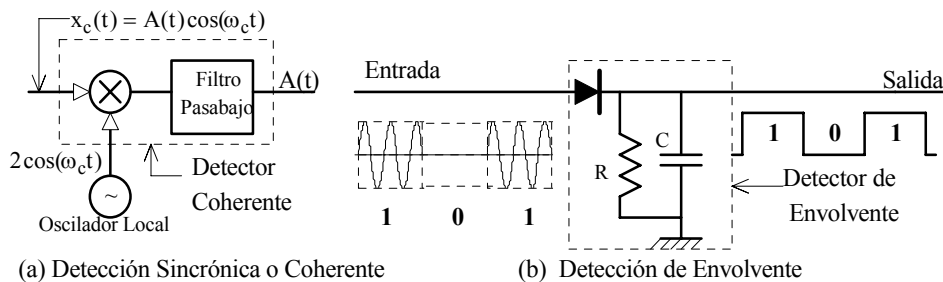


Fig. 5.59. Métodos de Demodulación o Detección de Señales Moduladas

Hay que hacer notar que con osciladores de gran precisión puede mantenerse la igualdad entre las frecuencias, pero el sincronismo de fase es más difícil de alcanzar, particularmente en transmisión a grandes distancias. La información de fase se puede obtener a partir de una portadora piloto superpuesta a la señal modulada que, una vez recuperada mediante filtrado, puede utilizarse para sincronizar el oscilador local. Como veremos más adelante, puede utilizarse circuitos especiales para lograr la sincronización a partir de la señal recibida. Esta situación encarece y complica el sistema; sin embargo, la demodulación sincrónica o coherente se utiliza pues es superior, en presencia de ruido, a la detección no coherente o de envolvente, como veremos posteriormente.

La demodulación por detección de envolvente se efectúa con el sencillo circuito mostrado en la Fig. 5.59(b). Con la detección de envolvente se evitan los problemas de sincronización de fase y de frecuencia de la detección coherente; sin embargo, la detección de envolvente no se puede aplicar en sistemas de modulación de fase, porque el proceso de detección de envolvente elimina la fase de la señal. Como su nombre lo indica, la salida del detector representa la envolvente positiva (o negativa, según la polaridad del diodo). La constante de tiempo RC debe ser lo suficientemente grande para seguir los picos de la señal modulada de entrada, pero lo suficientemente pequeña comparada con un período T_b de la señal binaria.

Los métodos de demodulación coherente y por detección de envolvente los utilizaremos también en los sistemas de modulación de ondas continuas, que veremos en el Capítulo VI.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Sincronización de Portadora y de Temporización

La demodulación coherente de las señales digitales ASK, FSK y PSK requiere el conocimiento de la frecuencia y la fase exactas de la portadora. La frecuencia puede aproximarse tanto como se quiera pues con osciladores a cristal de gran precisión se puede mantener la frecuencia con una gran estabilidad; en cambio, el desfase entre los osciladores del transmisor y del receptor puede ser grande, sobre todo cuando los modems inician una transmisión. En estos casos los modems están desfasados y necesitan un período inicial, antes de transmitir información, para sincronizar sus osciladores. En este período, denominado “tiempo o fase de adquisición”, los módems transmiten trenes de impulsos hasta que se produce la sincronización. Al finalizar la fase de adquisición los osciladores quedan “enganchados” en fase y en frecuencia, y la transmisión de información puede comenzar. Durante la transmisión es necesario mantener el desfase entre los osciladores dentro de ciertos límites específicos; esta operación se conoce como la “fase de seguimiento o de rastreo”.

El receptor debe poseer entonces dispositivos de sincronización tanto de portadora como de temporización. En efecto, hay que tener en cuenta que los instantes de decisión t_n también necesitan sincronización para poder detectar la presencia o ausencia de los impulsos recibidos ya demodulados. En consecuencia, en el receptor no sólo se efectúa la sincronización de fase y de frecuencia, sino también la sincronización de señalización o temporización.

En un sistema de transmisión digital a menudo se necesita diferentes niveles de sincronización. Como ejemplo, consideremos un sistema PCM/TDM/PSK; en este caso son necesarios cuatro niveles de sincronización: sincronización de trama, sincronización de canal, sincronización de dígito y sincronización de portadora, los cuales se muestran en la Fig. 5.60(a). La localización típica de los sincronizadores de portadora y temporización en un receptor se muestra en la Fig. 5.60(b).

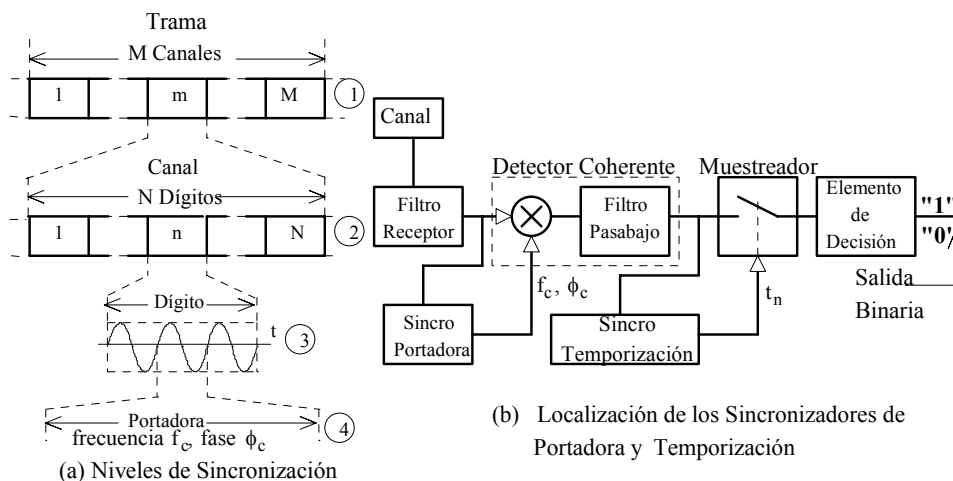


Fig. 5.60. Sincronización de Portadora y Temporización.

La mayoría de los sistemas de modulación digital suprimen la portadora y los diferentes códigos de línea utilizados no contienen líneas espectrales a las frecuencias de reloj para la extracción de la temporización. Por lo tanto, los circuitos de sincronización de portadora y de temporización estarán constituidos por dos partes conceptualmente distintas: (1) un circuito no

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

lineal que regenera la portadora y/o el reloj a partir de la señal recibida, y (2) un dispositivo sintonizado de banda angosta (típicamente un filtro sintonizado o un enganchador de fase (phase-locked loop, PLL)) que filtra y regenera las señales de portadora y/o reloj.

En la Fig. 5.61 se muestran dos circuitos de sincronización de portadora muy utilizados en la práctica: el sincronizador cuadrático y el denominado Lazo de Costas.

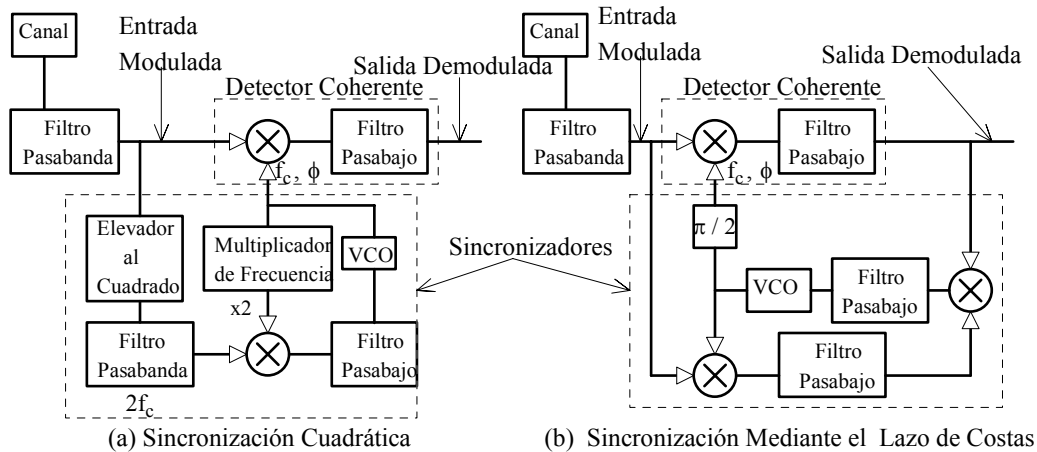


Fig. 5.61. Circuitos de Sincronización de Portadora.

Estos circuitos de sintonización de portadora no solamente se utilizan en los sistemas digitales sino también en los sistemas de modulación de ondas continuas, que veremos en el Capítulo VI.

En cuanto a la temporización, el proceso de extracción de la temporización se efectúa operando sobre la señal demodulada. La salida del sincronizador de temporización será una señal periódica (señal de reloj) de período τ y con una fase tal que indique los instantes de muestreo dentro de cada intervalo de duración τ . En general, la señal de reloj está afectada por fluctuación de fase (jitter), llamada también “auto-ruido”, causada por interferencia intersímbolo y ruido en el sistema. En muchas aplicaciones esta componente de auto-ruido es mucho más pronunciada que el mismo ruido gaussiano; el diseño óptimo de los circuitos de sincronización es, por lo tanto, muy importante para el desempeño global del sistema.

En la Fig. 5.62 se muestra un circuito de sincronización de temporización.

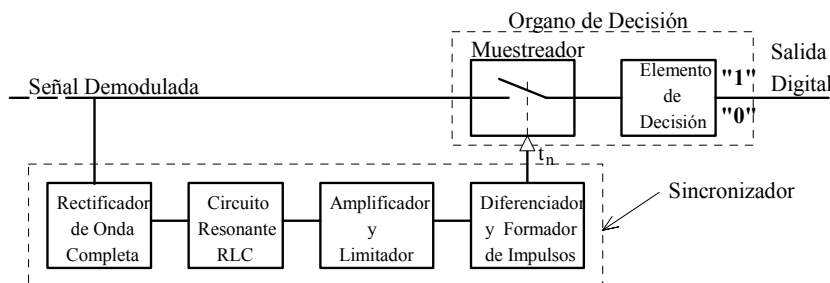


Fig. 5.62. Sincronización de Temporización.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El análisis detallado de los circuitos de sincronización anteriores, incluidos los PLL, se puede hallar en cualquier texto de electrónica [Miller, 1993; Gardner y Lindsey, 1980, etc.].

5.7.3. Modulación Binaria de Amplitud (ASK)

En la modulación binaria de amplitud ASK, la amplitud de la portadora sinusoidal se conmuta entre dos valores en respuesta al código PCM. Por ejemplo, el estado “0” se puede transmitir como una amplitud de cero volts, mientras que el estado “1” se transmite como una señal sinusoidal de amplitud fija A volts. La señal ASK resultante consiste en impulsos, llamados “Marcas”, que representan el estado “1”, y “Espacios” que representan el estado “0”, como se muestra en la Fig. 5.58(b) para la secuencia binaria dada. Este tipo de modulación se conoce también con el nombre de “**modulación OOK (On-Off Keying)**”.

La señal ASK tiene entonces la forma

$$x_{ASK}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i \cdot \cos(2\pi f_c t + \phi_c) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.143)$$

$$\text{donde } b_i = \begin{cases} 1 & \text{si se transmite un "1"} \\ 0 & \text{si se transmite un "0"} \end{cases}$$

A y f_c son la amplitud y frecuencia de la portadora, respectivamente; T_b es el intervalo de señalización y ϕ_c un desfase inicial constante. En general, se verifica que $f_c \gg f_b = \frac{1}{T_b}$, donde f_b es la frecuencia de señalización, la cual es igual a la velocidad de modulación V_b .

La operación de demodulación consiste esencialmente en una toma de decisiones en los instantes de muestreo t_n en relación con el valor o estado (“1” ó “0”) transmitido. Esta decisión reposa sobre un criterio más o menos elaborado, como veremos más adelante.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas ASK

La señal ASK se puede escribir en la forma (haciendo $\phi_c = 0$),

$$x_{ASK}(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (5.144)$$

$$\text{donde } A(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_i \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.145)$$

es una secuencia aleatoria binaria unipolar NRZ de amplitud A que contiene la información.

En el Capítulo III, Sección 3.9.2, expresiones (3.170) y (3.171), demostramos que la función de autocorrelación y la densidad espectral de una secuencia aleatoria binaria unipolar NRZ de amplitud A eran, respectivamente,

$$R_A(\tau) = \frac{A^2}{4} \left[1 + \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \right] \Leftrightarrow S_A(f) = \frac{A^2}{4} \left[\delta(f) + T_b \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right) \right]$$

De la expresión (1.113), la potencia promedio de la señal $x_{ASK}(t)$ es

$$\langle x_{ASK}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle A^2(t) \rangle. \text{ Pero como } \langle A^2(t) \rangle = R_A(\tau)|_{\tau=0} = \frac{A^2}{2}, \text{ entonces}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\langle x_{\text{ASK}}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{4}$$

La potencia promedio de entrada o “potencia de portadora” de una señal ASK a la entrada del detector será

$$S_i = \frac{A^2}{4} \quad (5.146)$$

Para calcular la potencia de ruido es necesario conocer las características espectrales de la señal ASK.

De acuerdo con el teorema de la modulación para señales de potencia, la densidad espectral $S_{\text{ASK}}(f)$ de $x_{\text{ASK}}(t)$ será

$$S_{\text{ASK}}(f) = \frac{1}{4} [S_A(f + f_c) + S_A(f - f_c)]$$

$$S_{\text{ASK}}(f) = \frac{A^2}{16} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A^2 T_b}{16} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_b}\right) \right] \quad (5.147)$$

y tendrá la forma mostrada en la Fig. 5.63 (frecuencias positivas solamente). Esta densidad ya la mostramos en el Capítulo III, Sección 3.92, expresión (3.172).

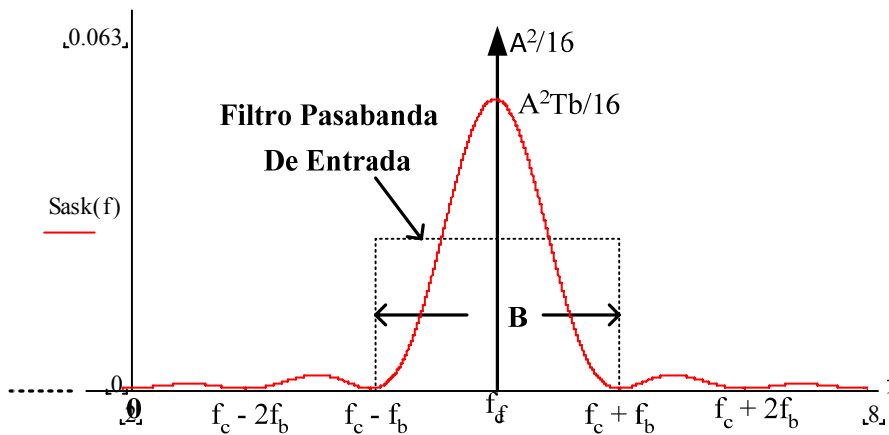


Fig. 5.63. Densidad Espectral de Potencia de Señales ASK.

En cuanto al ancho de banda en ASK, sea B el ancho de banda que comprende el lóbulo principal de $S_{\text{ASK}}(f)$, Fig. 5.63. Por consiguiente,

$$B = 2f_b = \frac{2}{T_b} \quad (5.148)$$

Este será entonces el ancho de banda del filtro pasabanda a la entrada del receptor y, por supuesto, el ancho de banda mínimo del canal de transmisión. Este valor de B será utilizado en los cálculos de la Relación Señal/Ruido (S/N).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Se puede demostrar, ver Problema de Aplicación 5.41, que la potencia contenida dentro del ancho de banda B es el 95% de la potencia total de la señal ASK, y que la mitad de la potencia de la señal ASK se consume en la transmisión de la portadora. Los sistemas ASK son sistemas de doble banda lateral y por lo tanto no son muy eficientes en cuanto a ancho de banda y consumo de potencia.

Si el ruido en el canal es blanco de densidad espectral $\eta/2$, la potencia promedio de ruido a la entrada del detector será, de (2.146),

$$N_i = B\eta = \frac{2\eta}{T_b} = 2\eta f_b \quad (5.149)$$

y la relación S/N de predetección

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A^2}{4B\eta} = \frac{A^2 T_b}{8\eta} \quad \text{en ASK} \quad (5.150)$$

Algunas veces el ancho de banda se define en la forma $B = 3f_b$, en cuyo caso la relación de predetección es $(S_i / N_i) = (A^2 T_b / 12\eta)$. Esto puede prestarse a confusión; por eso el lector debe verificar cómo se ha definido el ancho de banda al hablar de relación S/N a la entrada. En general, dependiendo del perfil de los impulsos, el ancho de banda efectivo de una señal ASK estará entre $2f_b$ y $3f_b$; nosotros utilizaremos siempre $2f_b$.

Desde un punto de vista más general, la relación S/N en un sistema se puede definir a partir de parámetros comunes para cualquier sistema de modulación. En efecto, en un sistema binario la velocidad de información es $V_i = 1/T_b = f_b$ bps, donde f_b es la frecuencia de señalización. Si E_b es la energía requerida para transmitir un dígito binario, entonces la potencia promedio de la señal se puede expresar en la forma $S = E_b / T_b = E_b V_i$. Nótese que E_b es diferente para cada esquema de modulación. Por otro lado, si B es el ancho de banda del sistema y $\eta/2$ la densidad espectral de ruido, la potencia promedio de ruido será $N = \eta B$. En la literatura se suele hacer $\eta = N_o$, pero este valor N_o lo usaremos muy poco para no confundirlo con una potencia de ruido N_o . La relación S_i/N_i de entrada o de predetección se puede escribir entonces en la forma

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{E_b V_i}{\eta B} = \frac{V_i}{B} \cdot \frac{E_b}{N_o} = \eta_B \frac{E_b}{N_o} = \eta_B \frac{E_b}{\eta} = \eta_B \frac{S_i}{\eta f_b} \quad (5.151)$$

Esta expresión muestra que la relación señal/ruido es el producto de dos cantidades muy significativas. Específicamente, la relación E_b/η es la “energía por dígito binario dividida por la densidad espectral de ruido” y es una medida del consumo de potencia del sistema. Como veremos más adelante, E_b depende del tipo de modulación empleado. La relación $\eta_B = V_i/B$ es el rendimiento espectral o de transmisión del canal respecto al ancho de banda B , expresión (4.42), y es una medida del ancho de banda requerido para una velocidad de información dada. El rendimiento máximo del canal viene dado mediante la expresión (4.52). Estos conceptos los utilizaremos posteriormente.

Con el fin de comparar el comportamiento de los diferentes sistemas de modulación binaria sobre una referencia común, se define la “**Relación Señal/Ruido Normalizada, γ** ” [Schwartz y otros, 1966] en la forma

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = \frac{A^2}{2\eta f_b} \quad (5.152)$$

donde A , f_b y η son parámetros comunes a todos los sistemas en consideración. Este valor de γ lo utilizaremos como referencia para comparar las probabilidades de error de los diferentes sistemas de modulación binaria.

La relación S/N en ASK se puede escribir entonces en la forma

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK}} = \frac{\gamma}{4} \quad (5.153a)$$

$$\text{y en dB, } [\gamma]_{\text{ASK(dB)}} = 6,02 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK(dB)}} \quad (5.153b)$$

Podemos calcular la capacidad, en el sentido de Shannon, del sistema ASK. En efecto, de (4.47), la capacidad máxima del sistema ASK viene dada por

$$C_{\text{ASK}} = B \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i} \right) = 2f_b \log_2 \left(1 + \frac{\gamma}{4} \right) \text{ bps} \quad (5.153c)$$

Esta es la máxima capacidad que teóricamente tiene el sistema ASK. Por razones tecnológicas y de tipo práctico, esta capacidad no se logra alcanzar en los sistemas de modulación prácticos.

Demodulación Coherente de Señales ASK

La razón principal de la modulación digital ASK es su simplicidad, pero la demodulación coherente es poco utilizada debido a los problemas de sincronización de portadora y del ajuste de umbral. Sin embargo, vamos a investigar el comportamiento de la demodulación coherente más que todo para propósitos de comparación y fijación de conceptos.

En la Fig. 5.64 se muestra el diagrama de bloques de un receptor ASK con demodulación coherente.

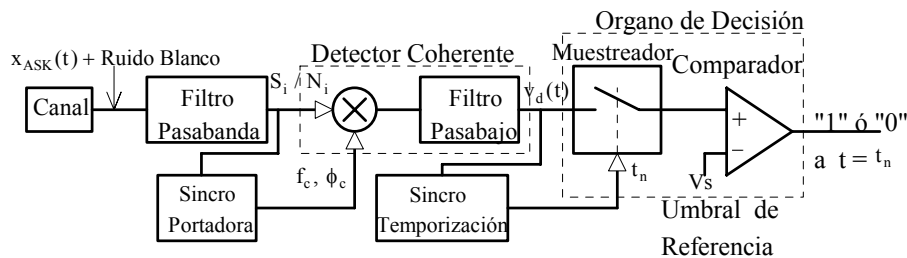


Fig. 5.64. Recepción Coherente en ASK.

A la entrada del detector coherente se tiene la señal ASK más ruido blanco pasabanda de banda angosta y densidad espectral $\eta/2$, es decir,

$$x_{\text{ASK}}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_c) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_c)$$

donde ϕ_c es un desfase constante.

Estas dos señales estarán presentes durante los intervalos en que un “1” ha sido transmitido. Si un “0” ha sido transmitido, solamente estará presente el ruido $n(t)$.

En relación con la Fig. 5.64, el lector puede demostrar fácilmente que

$$v_d(t) = \begin{cases} \frac{k}{2} [A(t) + n_c(t)] & \text{si un "1" ha sido transmitido} \\ \frac{k}{2} n_c(t) & \text{si un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

donde k es una constante que depende de las características de los filtros.

En los instantes de decisión t_n se compara $v_d(t)$ respecto a un umbral de referencia V_s . El criterio de decisión será:

$$\text{Si en el instante } t = t_n, \begin{cases} v_d(t_n) \geq V_s & \implies \text{Un "1" ha sido transmitido} \\ v_d(t_n) < V_s & \implies \text{Un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

Como $n_c(t)$ es un ruido blanco pasabajo cuya amplitud puede tomar cualquier valor con una probabilidad no nula, se puede presentar errores en la decisión tomada. Estos errores aparecerán si

$$v_d(t_n) < V_s \quad \text{cuando un "1" fue transmitido: Error sobre los "1"}$$

$$v_d(t_n) \geq V_s \quad \text{cuando un "0" fue transmitido: Error sobre los "0"}$$

Se ha demostrado [Schwartz y otros, 1966] que la probabilidad de error en sistemas ASK con un umbral de referencia b_o es

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{b_o}{\sqrt{2}} - \sqrt{\gamma} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{b_o}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (5.154)$$

donde $\operatorname{erfc}(\cdot)$ es la “función error complementaria” definida en el Apéndice E.4.

Pero como $\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$, (5.154) se reduce a

$$P_e = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\gamma} - \frac{b_o}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{b_o}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (5.155)$$

Cuando el umbral se optimiza, es decir si $b_o = b_{on}$, la probabilidad de error se reduce a

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{4}} \right) \quad (5.156)$$

$$\text{Siendo el umbral optimizado igual a} \quad b_{on} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad (5.157)$$

En la Fig. 5.65 se muestra (1.155) para diferentes valores del umbral no optimizado b_o . Se muestra el efecto del umbral sobre la probabilidad de error; para cada valor de γ hay un nivel de umbral normalizado b_o que produce la mínima probabilidad de error. Cuanto mayor es γ , mayor es el umbral. Si el umbral se mantiene constante, la probabilidad de error decrecerá en

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

función de γ hasta un cierto valor y se mantendrá constante no importa cuánto se aumente γ ; este valor constante es igual a $\text{erfc}(\frac{b_0}{\sqrt{2}})/4$ [Schwartz y otros, 1966]; este valor es muy pequeño y no se puede apreciar en la Fig. 5.65. Esta es una de las principales desventajas de los sistemas ASK, pues implica circuitos de ajuste del umbral en función de la relación S/N a la entrada (circuitos de control automático de ganancia).

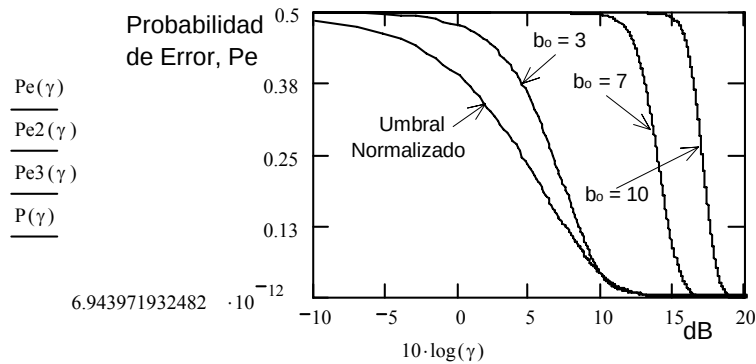


Fig. 5.65 Efecto del Umbral en ASK

Nótese que en el umbral óptimo los errores ocurren predominantemente no porque la suma [señal + ruido] excede el umbral, sino porque el ruido excede él solo el umbral.

El lector puede demostrar fácilmente que, siendo la potencia promedio en ASK igual a $A^2/4$, su energía será $E_b = A^2 T_b/4$; entonces $\gamma = 2E_b/N_o$ y

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right) \quad (5.158)$$

donde E_b es la energía requerida para transmitir un dígito binario y $N_o = \eta$. En la literatura se suele expresar la probabilidad de error con la expresión (5.158), pero, como ya lo expresamos, la igualdad $N_o = \eta$ la utilizaremos muy poco para no confundir este N_o , que es una densidad espectral, con el N_o que representa una potencia de ruido de salida.

Nótese que no hay que confundir γ con la relación S_i/N_i de predetección, pues esta última relación depende del ancho de banda, de la densidad espectral de ruido y de la potencia de la portadora, como ya lo hemos demostrado. Entonces, de la expresión (5.150), para $B = 2/T_b$,

$$\gamma = 4 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK}} \quad (5.159a)$$

$$\text{y en dB,} \quad [\gamma]_{\text{dB}} = 6,02 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK(dB)}} \quad (3.159b)$$

Esta última expresión nos permite leer directamente en la Fig. 5.78 la relación $[S_i/N_i]_{\text{ASK(dB)}}$ conociendo $[\gamma]_{\text{dB}}$ y viceversa, para una probabilidad de error P_e dada. Las expresiones (5.159a) y (5.15b) se aplican también en ASK no coherente.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

En la Fig. 5.79 se grafica la probabilidad de error dada por (5.156). En esa figura se muestra la probabilidad de error P_e con el umbral óptimo normalizado, junto con las correspondientes a los otros sistemas de modulación binaria para efectos de comparación.

Demodulación no Coherente de Señales ASK

En la Fig. 5.66 se muestra el diagrama de bloques de un receptor ASK no coherente.

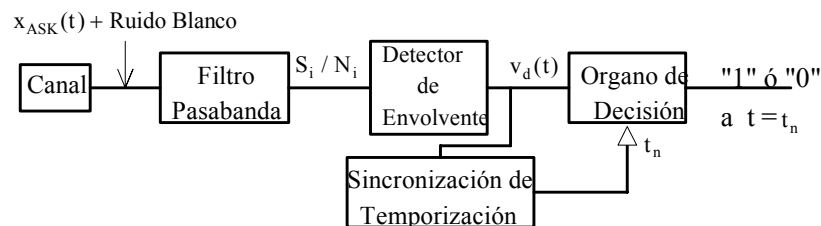


Fig. 5.66. Recepción no Coherente de Señales ASK.

En la detección no coherente de señales ASK no se requiere circuitos para sincronización de portadora, aunque sí de temporización. El detector de envoltura se muestra en la Fig. 5.59(b).

El criterio de decisión es similar al caso de detección coherente.

En cuanto a la probabilidad de error, se demuestra [Schwartz y otros, 1966] que

$$P_e \approx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\gamma} - \frac{b_{on}}{\sqrt{2}} \right) + \exp \left(-\frac{b_{on}^2}{2} \right) \right]$$

Para $\gamma > 2$ y con el umbral óptimo normalizado b_{on} , donde

$$b_{on} = \sqrt{2 + \frac{\gamma}{2}} \quad (5.160)$$

la expresión (5.160) se reduce a
$$P_e \approx \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\gamma}{4} \right) = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{4N_o} \right) \quad (5.161)$$

El gráfico de P_e vs γ tiene la misma forma general de la Fig. 5.64 con las mismas desventajas debidas al ajuste del umbral. En la Fig. 5.79 se grafica (5.161).

♣ Ejemplo 5.14

Por un canal telefónico cuyo ancho de banda útil es de 3 kHz se transmite datos binarios. La relación S/N de predetección es de 6,02 dB y la densidad espectral de ruido blanco es de 10^{-11} W/Hz. Vamos a determinar en ASK coherente y no coherente: (a) la máxima frecuencia de señalización, las potencias individuales de portadora y de ruido, la probabilidad de error y la máxima capacidad del sistema (capacidad de Shannon); (b) repetir si la velocidad de información es de 300 bps.

Recuérdese que en un sistema binario la velocidad de información (bps), la frecuencia de señalización (Hz) y la velocidad de modulación (baudios) son iguales numéricamente.

(a) El ancho de banda útil del canal es $B = 3$ kHz, entonces

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$B = 3000 = 2f_b; \quad f_b = 1500 \text{ Hz}; \quad T_b = \frac{1}{1500}; \quad V_i = 1500 \text{ bps}; \quad V_b = 1500 \text{ baudios}$$

La frecuencia máxima de señalización es de 1500 Hz y se puede transmitir información a una velocidad máxima de 1500 bps.

$$\frac{S_i}{N_i} = 6,02 \text{ dB} = 4; \quad \text{y de (3.158a), } \gamma = 4 \frac{S_i}{N_i} = 16$$

$$\text{De (5.150), } \frac{S_i}{N_i} = 4 = \frac{A^2}{8 \times 1500 \times 2 \times 10^{-11}}; \quad A^2 = 9,6 \times 10^{-7}; \quad A = 9,8 \times 10^{-4}$$

$$S_i = \frac{A^2}{4} = 2,4 \times 10^{-7} \text{ W} = -36,2 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 3000 \times 2 \times 10^{-11} = 6 \times 10^{-8} \text{ W} = -42,22 \text{ dBm}$$

$$\text{En ASK coherente: } P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(2) = 2,372 \times 10^{-3}$$

$$\text{En ASK no coherente: } P_e = \frac{1}{2} \exp(-4) = 9,158 \times 10^{-3}$$

$$\text{Capacidad: } C_{ASK} = 2f_b \log_2(1 + \frac{S_i}{N_i}) = 2 \times 1500 \log_2(1 + 4) = 6,966 \text{ Kbps}$$

(b) Si la velocidad de información es de 300 bps, entonces $f_b = 300 \text{ Hz}$,

$$T_b = \frac{1}{300} \quad \text{y} \quad B = 2f_b = 600 \text{ Hz}$$

La relación S_i/N_i sigue siendo la misma, es decir, $S_i/N_i = 6,02 \text{ dB} = 4$, $\gamma = 16$.

$$\frac{S_i}{N_i} = 4 = \frac{A^2}{4B\eta} = \frac{A^2}{4 \times 600 \times 2 \times 10^{-11}} = 1,92 \times 10^{-7}; \quad A = 4,38 \times 10^{-4} \text{ V}$$

$$S_i = \frac{A^2}{4} = 4,80 \times 10^{-8} \text{ W} = -43,19 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 600 \times 2 \times 10^{-11} = 1,2 \times 10^{-8} \text{ W} = -49,21 \text{ dBm}$$

Puesto que S_i/N_i ni γ han variado, las probabilidades de error, tanto en Coherente como en No Coherente, son iguales a la parte (a).

$$\text{Capacidad: } C_{ASK} = 600 \log_2(1 + 4) = 1393 \text{ bps}$$

C

Para las mismas amplitud de portadora y densidad espectral de ruido, el comportamiento en ASK coherente es superior al de ASK no coherente; sin embargo, el receptor no coherente es mucho más simple y por eso este tipo de demodulación fue en su época el más utilizado. Nótese que las capacidades (en el sentido de Shannon) son muy diferentes pues ellas dependen del ancho de banda del sistema.

♣

Para obtener el comportamiento óptimo, el valor del umbral debe ser ajustado para cada valor de γ de acuerdo con las expresiones (5.157) y (5.160). Por otra parte, los filtros utilizados en el receptor deben ser descargados, mediante circuitos auxiliares, al final de cada intervalo de señalización a fin de reducir la interferencia intersímbolo. Aunque el circuito resultante ya no es un filtro lineal invariante en el tiempo, él actúa como tal entre los intervalos de descarga. Si la rapidez de descarga es grande, el ancho de banda del filtro ya no es tan crítico respecto a la interferencia

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

intersímbolo. En general, estos filtros son filtros óptimos y pueden utilizarse también en FSK y PSK/DPSK.

5.7.4. Modulación Binaria de Frecuencia (FSK)

En la modulación binaria FSK la frecuencia instantánea de la portadora se conmuta entre dos valores en respuesta al código PCM. En la Fig. 5.58(c) se muestra la forma de una señal FSK.

El sistema de modulación binaria FSK se basó originalmente en el simple concepto de utilizar una señal telegráfica para modular la frecuencia de una portadora sinusoidal a fin de aumentar la relación S/N en el sistema. El sistema FSK más sencillo es aquel con modulación rectangular de frecuencia, amplitud constante y fase continua ("fase continua" significa que en la señal modulada no se producen discontinuidades cuando cambia la frecuencia).

Si $2f_d$ es la separación entre las dos frecuencias de transmisión, entonces la frecuencia instantánea en un intervalo T_b será $f_1 = f_c - f_d$ o $f_0 = f_c + f_d$, donde f_c es la frecuencia de la portadora sin modular, f_d la desviación de frecuencia respecto a f_c , f_1 y f_0 las frecuencias de transmisión de un "1" o un "0", respectivamente. La señal FSK se puede representar entonces en la forma

$$x_{\text{FSK}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi(f_c + b_i \cdot f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.162)$$

donde $b_i = \begin{cases} -1 & \text{si se ha transmitido un "1"} \\ +1 & \text{si se ha transmitido un "0"} \end{cases}$

Nótese que la asignación de valores para f_d y f_c es, en general, arbitraria. Por ejemplo, la UIT-T establece que para transmisión de datos sobre un canal telefónico a una velocidad de modulación de 300 baudios utilizando un Módem V.21, las frecuencias utilizadas son $f_1 = 980$ Hz y $f_0 = 1180$ Hz ($f_c = 1080$ Hz y $f_d = 100$ Hz). Sin embargo, en el Módem Bell 103A para la misma velocidad de modulación, las frecuencias de operación son $f_0 = 1070$ Hz y $f_1 = 1270$ Hz ($f_c = 1170$ Hz y $f_d = 100$ Hz). Evidentemente, los Módems normalizados UIT-T V.21 y Bell 103A son equivalentes pero no son compatibles.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas FSK

La determinación exacta del ancho de banda de las señales FSK es bastante complicada [Lucky y otros, 1968; Benedetto y otros, 1987] y no trataremos de reproducirla aquí. Sin embargo, podemos simplificar el problema si consideramos que la señal FSK está formada fundamentalmente por dos señales ASK de frecuencias f_0 y f_1 , respectivamente, y cuyos espectros ya conocemos, Fig. 5.62. En este caso, el espectro de la señal FSK es esencialmente la superposición de los dos espectros ASK: uno centrado en f_1 y el otro centrado en f_0 . Este enfoque permite considerar al receptor FSK como la combinación de dos receptores ASK, como se muestra en las Figs. 5.68 y 5.69. En la Fig. 5.67 se muestran las densidades espectrales correspondientes (frecuencias positivas solamente) y se define algunos parámetros. Nótese que los espectros para los UNOS y para los CEROS no ocurren simultáneamente (no se muestran los impulsos en f_1 y en f_0).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

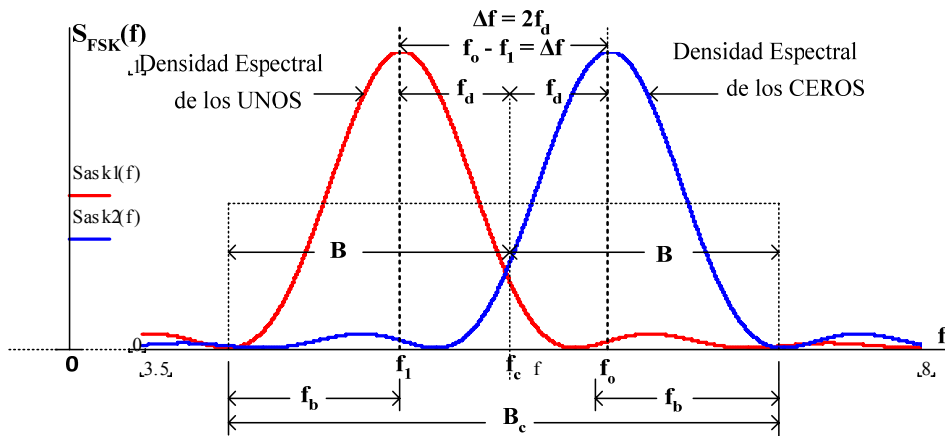


Fig. 5.67. Relaciones Espectrales en FSK.

El ancho de banda mínimo total B_c de la señal FSK se puede estimar a partir de la Fig. 5.67; en efecto, podemos definir $|f_o - f_1| = \Delta f = 2f_d$. Entonces,

$$f_c = f_1 + f_d = f_o - f_d \quad \text{y} \quad B_c = \Delta f + 2f_b = 2(f_d + f_b)$$

Sea $k = \frac{f_d}{f_b}$ y consideremos la Fig. 5.67. Si $k \ll 1$, entonces los dos espectros se acercan de tal manera que se produciría una gran interferencia mutua entre un canal y el otro. En este caso el ancho de banda de la señal FSK se puede calcular solamente con el método de Lucky. Si $\frac{1}{3} \leq k < 1$ [Shanmugam, 1979], la separación entre los dos espectros aumenta y la interferencia mutua entre canales disminuye; el ancho de banda de cada canal se puede tomar como $B = (f_b + f_d)$. Si $k \geq 1$, los espectros estarán lo suficientemente separados, la interferencia mutua entre canales será mínima y el ancho de banda de los canales "0" ó "1" será $B = 2f_b$.

En resumen, para disminuir la distorsión de intermodulación producida por las colas de un espectro sobre la gama del otro espectro, se puede tomar $k \geq 1/3$, aunque más adelante demostraremos que es preferible tomar $k \geq \frac{1}{2}$.

Principio de Ortogonalidad en Señales FSK

Se dice que dos funciones reales $s_1(t)$ y $s_0(t)$ son ortogonales, si dentro de un intervalo $(0, T_b)$ se verifica la integral $\int_0^{T_b} s_1(t)s_0(t)dt = 0$ para $s_1(t) \neq s_0(t)$.

En el caso binario, $s_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ y $s_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t) = A \cos[2\pi(f_1 + \Delta f)t]$

Entonces, de la propiedad de ortogonalidad,

$$A^2 \int_0^{T_b} \cos(2\pi f_1 t) \cos[2\pi(f_1 + \Delta f)t] dt = 0$$

$$\frac{A^2}{2} \int_0^{T_b} \cos[2\pi(2f_1 + \Delta f)t] dt + \frac{A^2}{2} \int_0^{T_b} \cos(2\pi \Delta f \cdot t) dt = 0$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Para que esta expresión se cumpla, las integrales deben ser cero en el intervalo $[0, T_b]$, es decir, debe verificarse, como se muestra en la Fig. 5.68, que el área neta de cada integral en un intervalo T_b cualquiera debe ser cero.

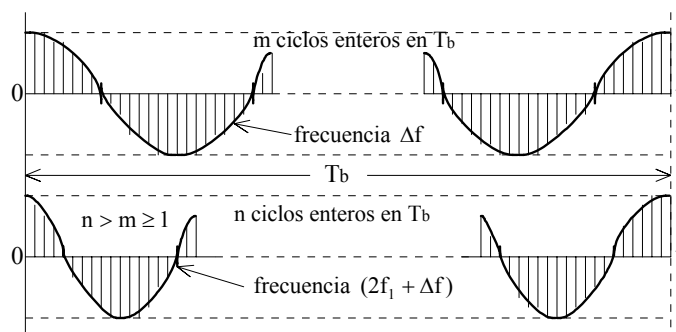


Fig. 5.68. Condiciones de Ortogonalidad en FSK.

Puede observarse, Fig. 5.68, que $\Delta f = \frac{m}{T_b}$ y $2f_1 + \Delta f = \frac{n}{T_b}$, donde m y n son enteros distintos de cero y $n > m$. Como $\Delta f = 2f_d$, entonces $f_d = m \frac{f_b}{2}$; asimismo, $2f_1 + 2f_d = \frac{n}{T_b} = nf_b$ y como $f_c = f_1 + f_d$, entonces $f_c = n \frac{f_b}{2}$. En la misma forma podemos demostrar que $f_1 = (n - m) \frac{f_b}{2}$ y $f_0 = (n + m) \frac{f_b}{2}$.

Para una velocidad de transmisión V_b bps o frecuencia de señalización f_b Hz, el principio de ortogonalidad en FSK binario establece entonces que:

Para dos enteros n y m tal que $n > m \geq 1$, se tiene

$$f_d = m \frac{f_b}{2}; \quad f_c = n \frac{f_b}{2}; \quad f_1 = (n - m) \frac{f_b}{2}; \quad f_0 = (n + m) \frac{f_b}{2}$$

En este caso se dice que la separación entre las frecuencias es ortogonal. Asimismo, el ancho de banda B_c del canal será $B_c = 2f_b + mf_b = (m + 2)f_b$. Nótese que n permite ajustar la frecuencia de portadora para colocarla en el centro del ancho de banda de transmisión.

En condiciones de ortogonalidad, la mínima separación entre las frecuencias se verifica para $m = 1$. En este caso el ancho de banda mínimo del canal será $B_c = 3f_b$. Esto también se puede interpretar diciendo que, bajo las condiciones de ortogonalidad, la máxima frecuencia de señalización en un canal de ancho de banda B_c es $f_b = \frac{B_c}{3}$ y la frecuencia de portadora correspondiente será $f_c = n \frac{f_b}{2} = n \frac{B_c}{6}$. Como ya lo observamos, el valor de f_c (o de n) se elige de tal manera que f_c quede centrada en el ancho de banda de transmisión y que n sea un número entero $> m \geq 1$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

La ortogonalidad permite estimar la máxima velocidad de transmisión por un canal de un ancho de banda dado sin efectos interferentes entre las señales.

♣ Ejemplo 5.15

Las frecuencias de los módems prácticos pocas veces cumplen con las condiciones de ortogonalidad. Por ejemplo, en el MODEM UIT-T V.23 se tiene

$f_b = 600$ Hz; $f_d = 200$ Hz; $f_c = 1500$ Hz; $f_1 = 1300$ Hz; $f_0 = 1700$ Hz. De donde,

$$m = \frac{2f_d}{f_b} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3} \neq \text{entero}; \quad n = \frac{2f_c}{f_b} = \frac{3000}{600} = 5 \text{ entero. Generalmente } n \gg m$$

Como m no es entero y además es menor que 1, las señales $s_1(t)$ y $s_0(t)$ del MODEM V.23 no son ortogonales. Sin embargo, si hacemos $m = 1$ y dejamos $n = 5$ con la misma frecuencia de señalización $f_b = 600$ Hz, las frecuencias que llenarían las condiciones de ortogonalidad de este módem serían:

$f_c = 1500$ Hz; $f_d = 300$ Hz; $f_1 = 1200$ Hz y $f_0 = 1800$ Hz

♣

Puesto que $k = \frac{f_d}{f_b}$ y $m = \frac{2f_d}{f_b}$, entonces $k = \frac{m}{2}$

Esto quiere decir que, en condiciones de ortogonalidad, k tendrá los valores fijos $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{m}{2}$. En el caso general (sin ortogonalidad) k tendrá cualquier valor $\geq \frac{1}{3}$.

En el caso especial para el cual $k = 1/2$ (para $m = 1$), la separación entre las frecuencias es la mínima ortogonal; en este caso la separación mínima entre las frecuencias de transmisión es igual a la velocidad de señalización, es decir, $\Delta f = f_b = 2f_d$; la separación ortogonal es muy utilizada en transmisión FSK m -aria. En transmisión a altas frecuencias, por ejemplo, en microondas, $k > 1$, $m > 2$ y $B = 2f_b$.

Ancho de Banda en FSK

El ancho de banda mínimo total de la señal FSK será, de la Fig. 5.67,

$$B_c = 2(f_b + f_d) = 2(k+1)f_b \quad \text{para } k = \frac{f_d}{f_b} \geq \frac{1}{3} \quad (5.163a)$$

y en condiciones de ortogonalidad

$$B_c = 2(f_b + f_d) = (2+m)f_b \quad \text{para } m \text{ entero } \geq 1 \quad (5.163b)$$

B_c es el ancho de banda mínimo del canal de transmisión y, por supuesto, del filtro de línea de entrada al receptor. Este filtro deberá estar centrado en la frecuencia $f_c = \frac{f_0 + f_1}{2}$.

Asimismo, el ancho de banda B de los canales individuales “1” ó “0” será, en el caso general,

$$B = \begin{cases} (k+1)f_b & \text{para } k < 1 \\ 2f_b & \text{para } k \geq 1 \end{cases} \quad (5.164a)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

y si hay ortogonalidad,

$$B = \begin{cases} \frac{3}{2}f_b & \text{cuando } m = 1 \\ 2f_b & \text{cuando } m > 1 \end{cases} \quad (5.164b)$$

Estos anchos de banda B son los utilizados para el cálculo de la relación S/N.

Relaciones S/N en FSK

Consideremos ahora la relación S/N en FSK. Como una señal FSK se puede considerar como la superposición de dos sistemas ASK en donde la amplitud de las portadoras es A, entonces la potencia promedio de la señal FSK será de dos veces la potencia promedio de la señal ASK, es decir, $\langle x_{FSK}^2(t) \rangle = 2 \langle x_{ASK}^2(t) \rangle = A^2 / 2$. Nótese que la potencia recibida en FSK es 3 dB mayor que en ASK; esta es una ventaja muy significativa a favor del sistema FSK.

Procediendo como en el caso ASK, obtenemos la relación S/N de predetección:

$$\text{Cuando } k < 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} = \frac{A^2}{2(k+1)f_b\eta} = \frac{\gamma}{k+1} \quad (5.165a)$$

$$\text{Cuando } k \geq 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} = \frac{A^2}{2(2f_b)\eta} = \frac{A^2}{4\eta f_b} = \frac{\gamma}{2} \quad (5.165b)$$

Si hay ortogonalidad,

$$\text{Para } m = 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} = \frac{A^2}{3f_b\eta} = \frac{2}{3}\gamma \quad (5.166a)$$

$$\text{Para } m > 1, \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} = \frac{A^2}{4\eta f_b} = \frac{A^2 T_b}{4\eta} = \frac{\gamma}{2} \quad (5.166b)$$

Nótese que para $k \geq 1$ o $m > 1$,

$$\gamma = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} \quad \text{o también} \quad [\gamma]_{(dB)} = 3,01 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK(dB)} \quad (5.166c)$$

En lo posible, para un mejor comportamiento del sistema, se debe mantener la ortogonalidad.

En cuanto a la capacidad, para $m > 1$, $f_d = f_b / 2$, $B = 2f_b$ y $S_i/N_i = \gamma/2$. Entonces,

$$C_{FSK} = 2f_b \log_2(1 + \frac{\gamma}{2}) \text{ bps} \quad (5.167)$$

Demodulación Coherente de Señales FSK

En la Fig. 5.69 se muestra el diagrama de bloques de un receptor FSK coherente.

El criterio de detección es el siguiente:

$$\text{Si en el instante } t = t_n, \quad \begin{cases} v_{d1}(t_n) \geq v_{d0}(t_n) & \implies \text{un "1" ha sido transmitido} \\ v_{d1}(t_n) < v_{d0}(t_n) & \implies \text{un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Habrá error en caso contrario.

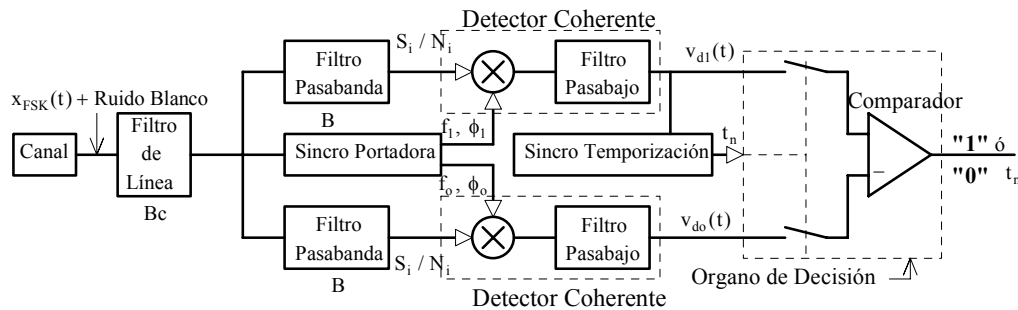


Fig. 5.69. Recepción Coherente en FSK.

Se demuestra [Schwartz y otros, 1966] que la probabilidad de error es

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right) \quad (5.168)$$

Si se compara este resultado con el correspondiente en ASK coherente, vemos que si las condiciones de amplitud de portadora, ancho de banda y densidad espectral de ruido son las mismas, entonces la relación $[S_i / N_i]_{FSK}$ es 3 dB mayor que la relación $[S_i / N_i]_{ASK}$, pero las probabilidades de error son muy distintas. Sin embargo, si las probabilidades de error son las mismas en ambos sistemas, resulta que las relaciones $[S_i / N_i]$ en ASK coherente y en FSK coherente son iguales, pero en FSK no se necesita un umbral de detección. Esta ya es otra ventaja del sistema FSK sobre el sistema ASK. El lector puede verificar fácilmente estos resultados (Ver Problemas de Aplicación 5.44 y 5.50).

En general, la demodulación coherente de señales FSK casi no se emplea y el estudio somero que hemos presentado aquí es más que todo para reafirmar conceptos y para efectos de comparación.

Demodulación no Coherente de Señales FSK

En la Fig. 5.70 se muestra el diagrama de bloques de un receptor FSK no coherente.

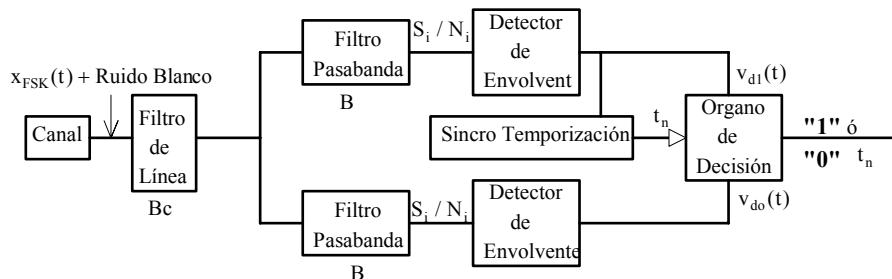


Fig. 5.70. Recepción no Coherente en FSK.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El criterio de decisión es el mismo que en el caso de detección coherente. Por ejemplo, si se ha transmitido un "1", la decisión será correcta si $v_{d1}(t_n) \geq v_{d0}(t_n)$. Si esta desigualdad se invierte, entonces se producirá un error. Nótese que $v_{d1}(t)$ y $v_{d0}(t)$ son las envolventes de las señales filtradas y como tales serán afectadas por el ruido aditivo. El lógico suponer entonces que cuanto mayor sea la relación S/N a la entrada de los detectores de envolvente, más confiable será la decisión. Esto se logra cuando los filtros pasabanda de los canales "0" ó "1" son filtros óptimos.

En cuanto a la probabilidad de error, se demuestra [Schwartz y otros, 1966], que

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_o}\right) \quad (5.169)$$

Nótese que si se compara este valor con el correspondiente en ASK no coherente, expresión (5.161), se ve que para la misma probabilidad de error en ambos sistemas las relaciones $[S_i/N_i]_{ASK}$ y $[S_i/N_i]_{FSK}$ son iguales. La desventaja más significativa del sistema ASK no coherente es la necesidad de optimizar el umbral de detección para cada valor de la relación $[S_i/N_i]_{ASK}$, mientras que este problema no existe en FSK. La expresión (5.169) se grafica en la Fig. 5.79.

♣ Ejemplo 5.16

Sobre un canal telefónico se transmite datos binarios en FSK. El ancho de banda útil del canal es de 3 kHz; las frecuencias de transmisión son $f_1 = 1500$ Hz y $f_0 = 2100$ Hz, como se muestra en la Fig. 5.71. Se utiliza un módem que trabaja a una velocidad de modulación de 300 baudios (300 bps). La relación S/N en el canal es de 6,021 dB y la densidad espectral de potencia de ruido es igual a 10^{-8} W/Hz.

Vamos a determinar la desviación de frecuencia, la frecuencia de portadora, el ancho de banda del filtro de entrada, el ancho de banda de los filtros de canal, la potencia de entrada, la probabilidad de error tanto en coherente como en no coherente y la capacidad de Shannon. Verificar también si la separación entre las frecuencias cumple con las condiciones de ortogonalidad.

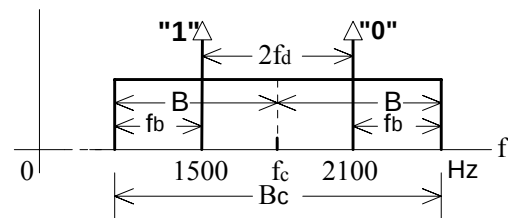


Fig. 5.71

Solución:

$$B_c = 3 \text{ kHz}; \quad f_1 = 1500 \text{ Hz}; \quad f_0 = 2100 \text{ Hz};$$

$$f_b = 300 \text{ Hz}; \quad \frac{S_i}{N_i} = 6,021 \text{ dB} = 4; \quad \eta = 2 \times 10^{-8} \text{ W/Hz}$$

$$\text{De la Fig. 5.71, } f_d = (2100 - 1500)/2 = 300 \text{ Hz}$$

$$f_c = 1500 + 300 = 1800 \text{ Hz}$$

$$\text{Filtro de entrada, } B_c = 2(f_b + f_d) = 1200 \text{ Hz.}$$

$$\text{Filtro de canal, } B = 2f_b = 2 \times 300 = 600 \text{ Hz}$$

$$\text{En FSK, } \gamma = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{FSK} = 8$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} \therefore A = \sqrt{2\eta f_b \gamma} = \sqrt{2 \times 2 \times 10^{-8} \times 300 \times 8} = 9,8 \text{ mV}$$

La potencia de entrada será $\langle x_{\text{FSK}}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} = \frac{(9,8 \times 10^{-3})^2}{2} = 0,048 \text{ mW}$

Probabilidad de error: En Coherente, $P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) = 2,339 \times 10^{-3}$

En No Coherente, $P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = 9,158 \times 10^{-3}$

Capacidad: $C_{\text{FSK}} = 600 \log_2(1+4) = 1393 \text{ bps}$

Nótese que este módem transmite normalmente a 300 bps; sin embargo, su capacidad teórica máxima en el sentido de Shannon es de 1393 bps.

Veamos si cumple con las condiciones de ortogonalidad.

$$m = \frac{2f_d}{f_b} = \frac{2 \times 300}{300} = 2 \text{ entero}; \quad n = \frac{2f_c}{f_b} = \frac{2 \times 1800}{300} = 12 \text{ entero}$$

Como m y n son enteros y $n > m$, este módem cumple con las condiciones de ortogonalidad.

♣

♣ Ejemplo 5.17

Sea el mismo canal telefónico del ejemplo anterior, donde $B_c = 3 \text{ kHz}$, $S_i/N_i = 4$, $\eta = 2 \times 10^{-8} \text{ W/Hz}$

Determine la máxima velocidad de transmisión en condiciones de ortogonalidad, la desviación de frecuencia, la frecuencia de portadora, las frecuencias de los UNOS y los CEROS, el ancho de banda de los filtros de canal, la potencia de entrada y la probabilidad de error tanto en coherente como en no coherente y la capacidad de Shannon.

Solución:

En condiciones de ortogonalidad, la máxima velocidad de transmisión por un canal de ancho de banda B_c se tiene cuando $m = 1$ y $k = 1/2$, es decir, cuando $B_c = 3f_b$. Entonces,

$$f_b = \frac{B_c}{3} = 1000 \text{ Hz}; \quad V_b = 1000 \text{ bps}; \quad f_d = \frac{f_b}{2} = 500 \text{ Hz}$$

La frecuencia de portadora f_c debe quedar centrada en el canal. Puesto que $f_c = n \frac{f_b}{2}$, la frecuencia de portadora quedará centrada en el canal cuando $n = 3$. En este caso,

$$f_c = \frac{3}{2} f_b = 1500 \text{ Hz}.$$

$$f_1 = f_c - f_d = 1000 \text{ Hz}; \quad f_0 = f_c + f_d = 2000 \text{ Hz}$$

$$\text{Filtros de canal, } B = (k+1)f_b = \frac{3}{2} f_b = 1500 \text{ Hz}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\text{En FSK, } \gamma = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = 8$$

$$\gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} \therefore A = \sqrt{2\eta f_b \gamma} = \sqrt{2 \times 2 \times 10^{-8} \times 1000 \times 8} = 17,9 \text{ mV}$$

$$\text{La potencia de entrada será } < x_{\text{FSK}}^2(t) > = \frac{A^2}{2} = \frac{(17,9 \times 10^{-3})^2}{2} = 0,16 \text{ mW}$$

$$\text{Probabilidad de error: En Coherente, } P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) = 2,339 \times 10^{-3}$$

$$\text{En No Coherente, } P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = 9,158 \times 10^{-3}$$

$$\text{Capacidad: } C_{\text{FSK}} = 1500 \log_2(1 + 4) = 3482 \text{ bps}$$

En este caso se ha hecho un uso más eficiente del canal: la velocidad de transmisión y la potencia de entrada han aumentado 3,33 veces y la capacidad aumentó 2,5 veces. Nótese que las probabilidades de error no han variado. ♣

♣ Ejemplo 5.18. Transmisión de Datos con Módems UIT-T

Sobre un canal telefónico, cuyo ancho de banda útil es de 3,2 kHz, se desea transmitir datos binarios utilizando los Módems UIT-T FSK V.23 y V.21. La amplitud de la portadora en el Módem V.23 es de 1 mV y se reduce a la mitad en el Módem V.21. La densidad espectral de ruido en el sistema es de 10^{-11} W/Hz. Vamos a determinar todos los parámetros asociados tanto en FSK coherente como en FSK no coherente.

(a) Transmisión con el Módem UIT-T V.23

El Módem V.23 transmite y recibe a las frecuencias $f_1 = 1300$ Hz y $f_0 = 2100$ Hz, con una velocidad de modulación de 1200 baudios (1200 bps). En este caso,

$$f_b = 1200 \text{ Hz; } T_b = \frac{1}{1200}; \Delta f = 2100 - 1300 = 800 \text{ Hz; } f_d = 400 \text{ y } k = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$

El ancho de banda mínimo del canal de transmisión es, de (5.163a),

$$B_c = 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot 1200 = 3200 \text{ Hz}$$

Se puede efectuar la transmisión, pues el ancho de banda de transmisión necesario es igual al ancho de banda útil del canal disponible.

Puesto que $k < 1$, de (5.164b) el ancho de banda de los canales “1” ó “0” es $B = f_b + f_d = 1200 + 400 = 1600$ Hz. Con $A^2 = 10^{-6}$ V; $\eta / 2 = 10^{-11}$ W / Hz, se tiene

$$S_i = \frac{A^2}{2} = 5 \times 10^{-7} \text{ W} = -33,01 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 1600 \times 2 \times 10^{-11} = 3,2 \times 10^{-8} \text{ W} = -44,95 \text{ dBm}$$

$$\text{de donde } \frac{S_i}{N_i} = \frac{5 \times 10^{-7}}{3,2 \times 10^{-8}} = 15,625 = 11,938 \text{ dB}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

De (5.152), $\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = \frac{10^{-6}}{2 \times 1200 \times 2 \times 10^{-11}} = 20,833$

En FSK coherente: $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma} / 2) = 2,505 \times 10^{-6}$

En FSK no coherente: $P_e = \frac{1}{2} \exp(-\gamma / 2) = 1,496 \times 10^{-5}$

Capacidad: $C_{FSK} = 1600 \log_2(1 + 15,625) = 6488 \text{ bps}$

(b) Transmisión con el Módem UIT-T V.21

El Módem UIT-T V.21 tiene dos bandas: por una recibe y por la otra transmite. En la banda inferior las frecuencias de portadora son $f_1 = 980 \text{ Hz}$ y $f_0 = 1180 \text{ Hz}$, mientras que en la banda superior $f_1 = 1650 \text{ Hz}$ y $f_0 = 1850 \text{ Hz}$. La velocidad de modulación es de 300 baudios. Entonces,

$$f_b = 300 \text{ Hz}; T_b = \frac{1}{300}; \Delta f = 200 \text{ Hz}; f_d = 100 \text{ Hz}; k = \frac{1}{3}$$

En el presente ejemplo no vamos a utilizar fórmulas para determinar el ancho de banda de los filtros y canales, sino que distribuiremos uniformemente los diferentes anchos de banda de acuerdo con las frecuencias de portadora del Módem V.21. Se obtiene así una configuración como la mostrada en la Fig. 5.72. El lector puede tomar el ancho de banda de los filtros de canal en forma diferente.

De la Fig. 5.72, se tiene los siguientes anchos de banda:

Para los filtros de canal: $B_{I1} = B_{I0} = B_{S1} = B_{S0} = 335 \text{ Hz}$, que estarán centrados en las frecuencias $f_{I1} = 912,5 \text{ Hz}$; $f_{I0} = 1248 \text{ Hz}$; $f_{S1} = 1583 \text{ Hz}$; $f_{S0} = 1918 \text{ Hz}$.

Para los filtros de banda: $B_{BI} = B_{BS} = 670 \text{ Hz}$, que estarán centrados en las frecuencias

$f_{BI} = 1080 \text{ Hz}$; $f_{BS} = 1750 \text{ Hz}$.

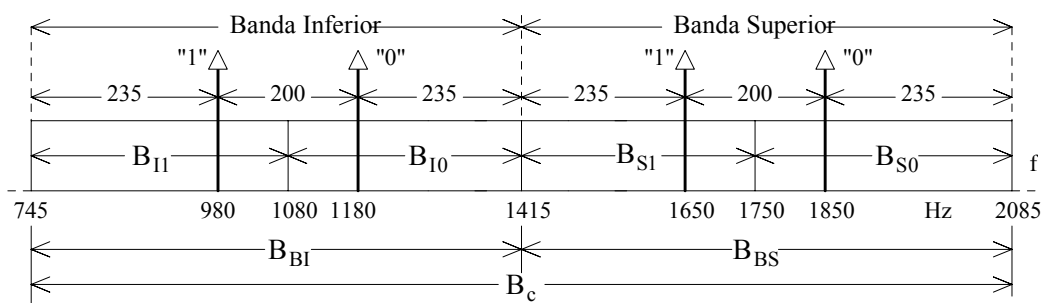


Fig. 5.72. Distribución de Anchos de Banda en el Módem UIT-T V.21.

Para el filtro de línea o ancho de banda total: $B_c = 1340 \text{ Hz}$, que estará centrado en la frecuencia $f_c = 1415 \text{ Hz}$.

El ancho de banda para el cálculo de la potencia de ruido es el ancho de banda de los filtros de canal, es decir, $B = 335 \text{ Hz}$. Entonces,

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$A = \frac{10^{-3}}{2} \text{ V}; \quad \gamma = \frac{A^2}{2\eta f_b} = \frac{10^{-6}}{4 \times 2 \times 300 \times 2 \times 10^{-11}} = 20,833$$

$$S_i = \frac{A^2}{2} = 1,25 \times 10^{-7} \text{ W} = -39,03 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 335 \times 2 \times 10^{-11} = 6,7 \times 10^{-9} \text{ W} = -51,74 \text{ dBm}; \quad \frac{S_i}{N_i} = 18,66 = 12,71 \text{ dB}$$

Capacidad: $C_{\text{FSK}} = 670 \log_2(1 + 18,66) = 2879 \text{ bps}$

Las probabilidades de error son las mismas que en el caso (a).

El Módem V.21 es un módem que puede simultáneamente transmitir por una banda y recibir por la otra. Puesto que por cada banda se puede transmitir datos a 300 bps, el intercambio neto de datos en el Módem V.21 es realmente de 600 bps.



Los ejemplos anteriores demuestran que la probabilidad de error es mayor en FSK no coherente que en FSK coherente. Sin embargo, debido a su simplicidad, el esquema FSK no coherente es el más utilizado en la práctica.

5.7.5. Modulación Binaria de Fase (PSK)

En la modulación binaria PSK (Binary Phase Shift Key, BPSK), la fase de la portadora sinusoidal se conmuta entre dos valores de acuerdo con el código PCM. Un desfase de 180° es una selección muy conveniente porque simplifica los circuitos de modulación y demodulación, por lo tanto es el más utilizado.

Existen dos tipos principales de modulación binaria de fase que dependen de si la demodulación es o no coherente. El primer tipo es la modulación binaria de fase propiamente dicha (PSK), mientras que el segundo tipo es la “**Modulación Binaria Diferencial de Fase (DPSK)**”. Nótese que cuando se dice que la demodulación DPSK no es coherente, esto no quiere decir que la demodulación pueda efectuarse con detección de envolvente, pues el detector de envolvente elimina toda la información de fase, que en DPSK es justamente el soporte de la información.

La señal PSK tiene la forma

$$x_{\text{PSK}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t - \phi_i) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad (5.170)$$

$$\text{donde } \phi_i = \begin{cases} 0 & \text{si se ha transmitido un "1"} \\ \pi & \text{si se ha transmitido un "0"} \end{cases}$$

En la Fig. 5.58(d) se muestra la forma de las señales PSK. Las inversiones de fase pueden producir transientes indeseables pero, en general, las discontinuidades son alisadas por los filtros utilizados.

Demodulación de Señales PSK

La demodulación de señales PSK es esencialmente coherente. En la Fig. 5.73 se muestra el diagrama de bloques de un receptor PSK. Nótese la semejanza con el receptor coherente ASK, Fig. 5.64, pero en el receptor PSK el elemento de decisión es mucho más sencillo pues se trata de determinar la polaridad (positiva o negativa) de $v_d(t)$ en el instante de decisión.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

El criterio de decisión adoptado es el siguiente:

$$\text{Si en el instante } t = t_n, \begin{cases} v_d(t_n) \geq 0 & \implies \text{Un "1" ha sido transmitido} \\ v_d(t_n) < 0 & \implies \text{Un "0" ha sido transmitido} \end{cases}$$

Habrá error en el caso contrario.

La probabilidad de error es [Schwartz y otros, 1966]

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) \quad (5.171)$$

Esta expresión se grafica en la Fig. 5.79.

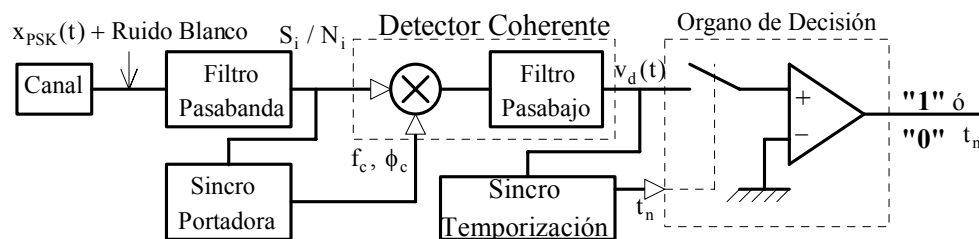


Fig. 5.73. Recepción Coherente en PSK.

Comparando estos valores respecto a ASK coherente, vemos que para la misma probabilidad de error, la relación $[S_i / N_i]_{\text{PSK}}$ es 3 dB menor que la relación $[S_i / N_i]_{\text{ASK}}$, o lo que es lo mismo, la potencia necesaria para transmitir una señal ASK coherente es el doble que la necesaria para transmitir la misma información en PSK. Esto es de particular importancia en sistemas en donde la potencia es el factor limitativo como, por ejemplo, en transmisión por microondas, en estaciones remotas o en satélites de telecomunicación.

Modulación Binaria Diferencial de Fase (DPSK)

En los sistemas de modulación binaria de fase, la referencia de fase para la demodulación se deriva a partir de la fase de la portadora en el intervalo de señalización anterior, y el receptor decodifica la información digital basada en esa diferencia de fase. Si las perturbaciones en el canal y otros factores como la estabilidad de los osciladores son lo suficientemente estables y no afectan la fase entre intervalos adyacentes, entonces la fase se puede codificar, no con respecto a un valor absoluto, por ejemplo, 0° para un "1" y 180° para un "0", sino más bien por codificación diferencial en términos del cambio de fase entre intervalos sucesivos. Por ejemplo, 0° de desfase desde el intervalo anterior puede designar un "1", mientras que un desfase de 180° puede designar un "0". En la Fig. 5.74 se muestra el diagrama de bloques de un modulador DPSK, el cual es la combinación de un codificador diferencial y un modulador PSK.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

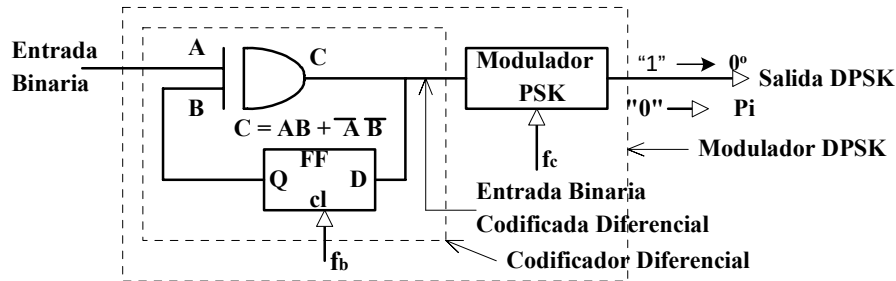


Fig. 5.74. Modulación DPSK

En la Fig. 5.75 se muestra las formas de onda de las señales moduladas PSK y DPSK para la secuencia de entrada dada.

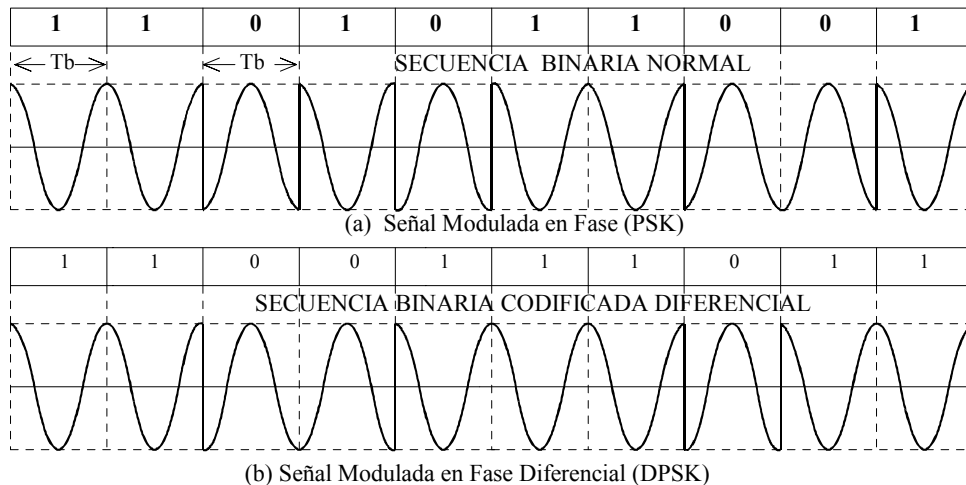


Fig. 5.75. Formas de las Señales Moduladas PSK y DPSK

Nótese que el número de transiciones en DPSK ha disminuido en relación con el número de transiciones en PSK; en efecto, en la corta secuencia de 10 dígitos binarios la señal PSK tiene 6 transiciones y al codificarla diferencialmente el número de transiciones disminuye a cuatro. Como ya lo hemos señalado, las transiciones producen transientes indeseables que pueden perjudicar la sincronización de temporización y su disminución es muy deseable. Esta es otra ventaja del sistema DPSK sobre el sistema PSK. Para facilitar el dibujo de las formas de onda, en la Fig. 5.75 suponemos que la frecuencia de portadora es igual a la frecuencia de señalización, es decir, $f_c = f_d$.

En la siguiente Tabla se muestra el mecanismo de codificación y decodificación diferencial tanto en el transmisor como en el receptor.

Nótese que la codificación diferencial, en sí misma, se puede utilizar en cualquier sistema digital y no es privativa del sistema DPSK.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Tabla de Codificación y Descodificación DPSK

Transmisor	Secuencia Binaria de Entrada	1 1 0 1 0 1 1 0 0 1
	Mensaje Cofificado Diferencial	1 1 1 0 0 1 1 1 0 1
	Fase Transmitida ϕ_n	0° 0° 0° π π 0° 0° 0° π 0° 0°
Receptor	Fase Recibida y Retardada ϕ_{n-1}	0° 0° 0° 0° π π 0° 0° 0° π 0°
	$\Delta\phi = \phi_n - \phi_{n-1} $	0° 0° 0° π 0° π 0° 0° π π 0°
	Secuencia Binaria de Salida	1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1

○ Valores Arbitrarios

Mecanismo de Codificación y Descodificación Diferencial en Modulación DPSK.

Un ejemplo de la instrumentación de un receptor DPSK se muestra en la Fig. 5.76. Esta técnica se denomina “detección por retardo” y no necesita sincronización de portadora pero sí de temporización.

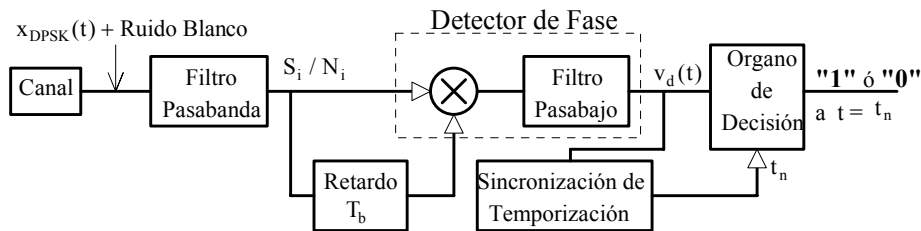


Fig. 5.76. Receptor DPSK con Detección por Retardo.

La señal DPSK recibida tiene la misma forma de la señal PSK; en efecto,

$$x_{\text{DPSK}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t - \phi_i) \quad (5.172)$$

donde $\phi_i = 0^\circ$ ó π

Consideremos un intervalo T_b de orden n , donde $t = t_n$. En ese intervalo, de (5.172),

$$x_{\text{DPSK}}(t_n) = A \cos(2\pi f_c t_n - \phi_n)$$

Como el retardo es igual a T_b , a la salida de la red de retardo estará presente la señal DPSK correspondiente al intervalo anterior ($n-1$); por lo tanto,

$$x_{\text{DPSK}}(t_{n-1}) = A \cos(2\pi f_c t_{n-1} - \phi_{n-1})$$

El lector puede verificar fácilmente que a la salida del filtro pasabanda, Fig. 5.76,

$$v_d(t_n) = \frac{A^2}{2} \cos(\phi_n - \phi_{n-1}) = \frac{A^2}{2} \cos(\Delta\phi) \quad (5.173)$$

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Como $|\Delta\phi| = 0^\circ$ o π , es suficiente verificar el signo de $v_d(t)$; el criterio de decisión será entonces igual al del caso PSK.

La probabilidad de error en modulación DPSK es [Schwartz y otros, 1966],

$$P_e = \frac{1}{2} \exp(-\gamma) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_o}\right) \quad (5.174)$$

Esta expresión se grafica en la Fig. 5.79.

Cuando se compara DPSK con PSK, se observa que el sistema DPSK requiere un poco más de potencia que el sistema PSK; sin embargo, esta desventaja se compensa con creces por el hecho de que DPSK no requiere detección coherente. Pero por otra parte, debido al retardo fijo T_b en el receptor, el sistema DPSK está “enganchado” a una frecuencia de señalización específica, lo que impide la transmisión de datos en forma asincrónica. Otro problema menor en DPSK es que los errores tienden a propagarse, por lo menos a los intervalos adyacentes, debido a la correlación entre las señales de temporización y el ruido sobre dichos intervalos.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Sistemas PSK y DPSK

Ancho de Banda en PSK y DPSK

Para efectos del cálculo de la densidad espectral y de la potencia, la modulación PSK (y DPSK) se puede considerar como una modulación ASK donde la secuencia binaria de entrada es una señal aleatoria bipolar NRZ. En este caso la señal PSK se puede escribir en la forma

$$x_{\text{PSK}}(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (5.175)$$

donde $A(t)$ es una secuencia aleatoria binaria bipolar NRZ de amplitud $\pm A$, con un período de repetición T_b .

En el Capítulo III, expresión (3.175), calculamos la función de autocorrelación y la densidad espectral para este tipo de señal:

$$R_A(\tau) = A^2 \Lambda\left(\frac{\tau}{T_b}\right) \Leftrightarrow S_A(f) = A^2 T_b \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right)$$

y del teorema de la modulación para señales de potencia,

$$S_{\text{PSK}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f+f_c}{f_b}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f-f_c}{f_b}\right) \right] \quad (5.176)$$

En la Fig. 5.77 se muestra esta densidad espectral (frecuencias positivas solamente).

Nótese que la densidad espectral de potencia de la señal PSK (y DPSK), Fig. 5.77, tiene la misma forma que la correspondiente en ASK, Fig. 5.63, con la diferencia de que la densidad espectral PSK no contiene un impulso a la frecuencia de portadora. Los requerimientos de ancho de banda son los mismos que en ASK, es decir, $B = 2f_b = 2/T_b$. Sin embargo, no hay que confundir similitud con igualdad: el sistema ASK es un esquema de modulación lineal, mientras que el sistema PSK, en el caso general, es un esquema de modulación no lineal, como veremos en el Capítulo VI.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

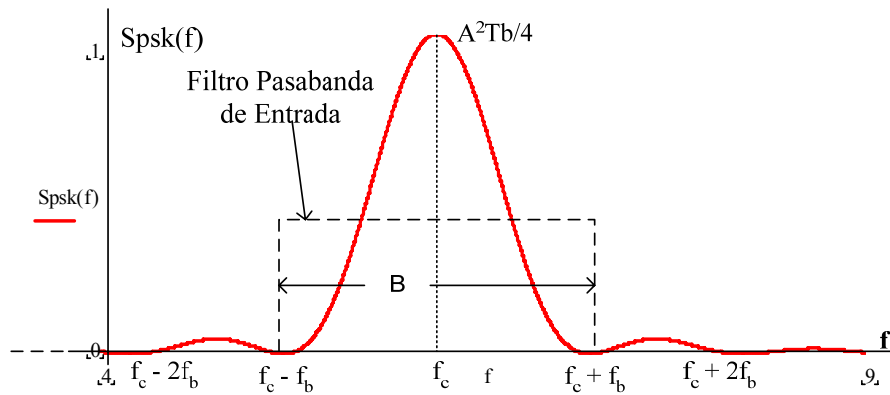


Fig. 5.77. Densidad Espectral de Potencia de Señales PSK (DPSK)

Relaciones S/N de Predetección

La potencia de la señal PSK se puede calcular en la misma forma que en el caso ASK. En efecto, de (5.175), $\langle x_{\text{PSK}}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle A^2(t) \rangle$; pero como $\langle A^2(t) \rangle = R_A(0) = A^2$, entonces,

$$\langle x_{\text{PSK}}^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} \quad (5.177)$$

Esta es la potencia de portadora en PSK, y como entre una señal PSK y una DPSK no hay diferencia desde el punto de vista espectral, la potencia en DPSK es la misma que la de PSK. La potencia dada por (5.177) es toda potencia útil, a diferencia de ASK en la cual la mitad de la potencia se pierde en la transmisión de la portadora (impulso en f_c).

Como $B = 2f_b = 2/T_b$ y la potencia de portadora es $A^2/2$, la relación S/N de predetección es igual que en el caso FSK, es decir,

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{PSK}} = \frac{A^2}{2B\eta} = \frac{A^2T_b}{4\eta} = \frac{\gamma}{2} \quad (5.178a)$$

$$\text{y en dB, } [\gamma]_{\text{dB}} = 3,01 \text{ dB} + \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{PSK(dB)}} \quad (5.178b)$$

$$\text{Capacidad: } C_{\text{PSK}} = 2xf_b \log_2(1 + S_i/N_i) \text{ bps} \quad (5.178c)$$

Estas expresiones son válidas también en DPSK.

Relaciones S/N de Postdetección

Consideremos ahora las relaciones S/N de postdetección. En la Sección 5.4.1 determinamos la relación S_o/N_o vs P_e en un sistema PCM, expresión (5.111). Utilizando esos resultados y los de la presente sección, vamos a determinar las relaciones $[S_o/N_o]$ vs $[S_i/N_i]$ tanto en PSK como en DPSK. En efecto, de (5.111) y (5.178a),

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2(n+1)}P_e} \quad \text{y} \quad \gamma = 2 \frac{S_1}{N_i}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

donde, en PSK, de (5.171), $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2 \frac{S_i}{N_i}}\right)$

y en DPSK, de (5.174), $P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-2 \frac{S_i}{N_i}\right)$

Las relaciones S/N de postdetección correspondientes serán

$$\text{En PSK, } \frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2 \frac{S_i}{N_i}}\right)} \quad (5.179a)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} = 6,02 \cdot n - 10 \cdot \log_{10} \left[1 + 2^{2n+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2 \frac{S_i}{N_i}}\right) \right] \quad \text{dB} \quad (5.179b)$$

$$\text{En DPSK, } \frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \exp\left(-2 \frac{S_i}{N_i}\right)} \quad (5.180a)$$

$$\text{y en dB, } \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\text{dB}} = 6,02 \cdot n - 10 \cdot \log_{10} \left[1 + 2^{2n+1} \exp\left(-2 \frac{S_i}{N_i}\right) \right] \quad \text{dB} \quad (5.180b)$$

En la Fig. 5.78 se grafican estas expresiones, en dB, para diferentes valores de n.

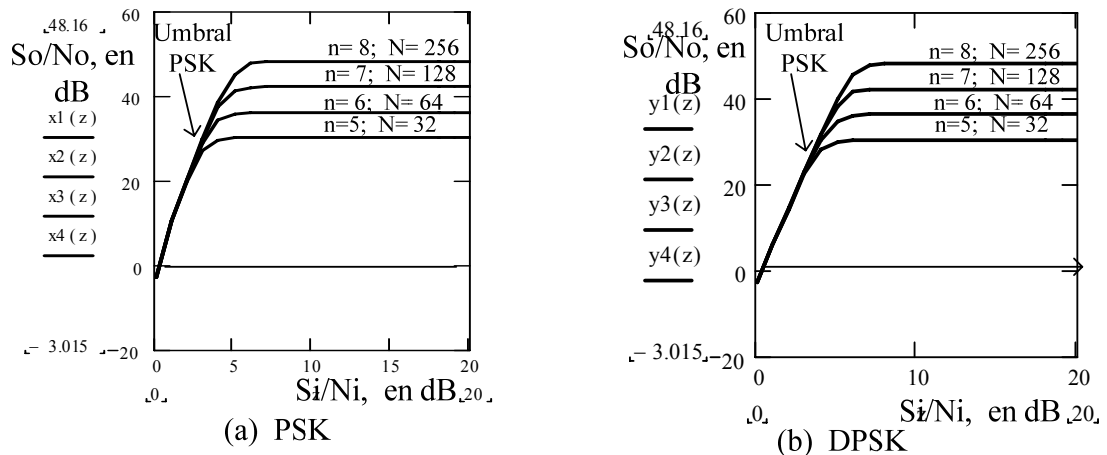


Fig. 5.78. Relaciones $[S_o/N_o]$ vs $[S_i/N_i]$ en PSK y DPSK

Nótese, en la Fig. 5.78, el efecto del umbral tanto en PSK como en DPSK. Un examen más atento de las figuras muestra que el umbral en PSK está por debajo del umbral en DPSK en aproximadamente 1 dB; por lo tanto, la relación $[S_i / N_i]_{\min}$ en PSK es aproximadamente 1 dB menor que la relación $[S_i / N_i]_{\min}$ en DPSK, lo cual nos permite aproximar el valor de la relación $[S_i / N_i]_{\min}$ en PSK conocida la correspondiente en DPSK, que es mucho más fácil de calcular. En efecto, el valor de $[S_i / N_i]_{\min}$ en DPSK se puede obtener a partir de la expresión (5.113):

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$f\left(\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-2\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min}\right) = \frac{6,473 \times 10^{-2}}{2^{2n}} \text{ para } n \text{ entero}$$

Resolviendo esta ecuación, el valor de $[S_i / N_i]_{\min}$ será

$$[S_i / N_i]_{\min} = 1,022 + 0,693n \text{ en DPSK} \quad (5.181)$$

Debe verificarse siempre que $\frac{S_i}{N_i} \geq (\frac{S_i}{N_i})_{\min}$ para no caer dentro de la región umbral.

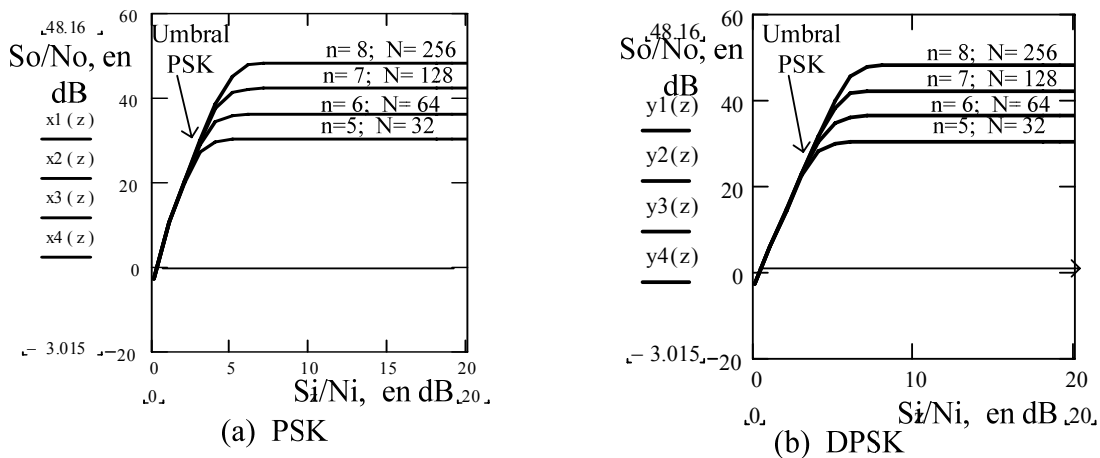


Fig. 5.78. Relaciones $[S_o/N_o]$ vs $[S_i/N_i]$ en PSK y DPSK

Ejemplo 5.19

Por un canal de microondas cuyo ancho de banda es de 3 MHz se transmite datos binarios a una velocidad de 1 Mbps. Las palabras binarias contienen 8 dígitos binarios, la densidad espectral de potencia del ruido es de 10^{-10} W/Hz y la amplitud de la portadora es de 10 milivolts. Vamos a determinar, en DPSK y en PSK, las relaciones S/N de pre y postdetección y constatar si el sistema está trabajando sobre o bajo el umbral. Calcular también las capacidades correspondientes.

$$B_c = 3 \text{ MHz}; f_b = 10^6 \text{ Hz}; T_b = 10^{-6}; \eta = 2 \times 10^{-12} \text{ W/Hz}; n = 8; A = 0,01 \text{ V}$$

El ancho de banda para el cálculo de la potencia de ruido es $B = 2f_b = 2 \text{ MHz}$.

(a) En DPSK

$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta} = 25; \quad S_i = \frac{A^2}{2} = 5 \times 10^{-5} \text{ W} = -13,01 \text{ dBm}$$

$$N_i = B\eta = 4 \times 10^{-6} \text{ W} = -23,98 \text{ dBm}$$

$$\text{La relación S/N de predetección será} \quad \frac{S_i}{N_i} = 12,5 = 10,97 \text{ dB}$$

Como $n = 8$, entonces la relación S/N mínima de predetección es, de (5.181),

$$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{\min} = 6,567 = 8,174 \text{ dB}$$

La relación S/N de postdetección es, para $n = 8$,

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right] = \frac{2^{16}}{1 + 2^{17} \exp(-2 \frac{S_i}{N_i})} = 6,554 \times 10^4 = 48,165 \text{ dB}$$

y la relación S_o/N_o mínima,

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\min} = \frac{2^{16}}{1 + 2^{17} \exp(-2 [\frac{S_i}{N_i}]_{\min})} = 5,203 \times 10^4 = 47,162 \text{ dB}$$

Nótese que esta relación está a 1 dB por debajo de S_o/N_o .

Puesto que $[S_o/N_o] > [S_o/N_o]_{\min}$, el sistema está trabajando sobre el umbral.

La probabilidad de error es $P_e = \frac{1}{2} \exp(-\frac{S_i}{N_i}) = 6,944 \times 10^{-12}$

Capacidad: $C_{\text{DPSK}} = 2 \times 10^6 \log_2(1 + 12,5) = 7,51 \text{ Mbps}$

(b) En PSK

Las relaciones S_i/N_i , γ y n , son las mismas que en el caso (a).

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right] = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \left[\text{erfc}(\sqrt{2 [\frac{S_i}{N_i}]}) \right]} = 6,554 \times 10^4 = 48,165 \text{ dB}$$

Dando valores a $[S_i/N_i]_{\min}$ para que la relación $[S_o/N_o]_{\min}$ quede a 1 dB por debajo de su valor $[S_o/N_o]$, obtenemos

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\min} = 7,5231 \text{ dB} = 5,653. \text{ De donde,}$$

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\min} = \frac{2^{2n}}{1 + 2^{2n+1} \left[\text{erfc}(\sqrt{2 [\frac{S_i}{N_i}]_{\min}}) \right]} = 47,158 \text{ dB}$$

Puesto que $[S_o/N_o] > [S_o/N_o]_{\min}$, el sistema está trabajando sobre el umbral.

Nótese que $[S_o/N_o]_{\min}$ está a 1 dB por debajo de $[S_o/N_o]$.

La probabilidad de error es $P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{2 [\frac{S_i}{N_i}]}) = 7,687 \times 10^{-13}$

La capacidad en PSK es igual a la de DPSK,



V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.7.6. Comparación entre los Sistemas de Modulación Binaria

En cualquier sistema de modulación digital la meta de un buen diseño es la de lograr el mejor compromiso entre la probabilidad de error P_e , el rendimiento de transmisión η_B , la relación S/N normalizada γ y la complejidad del equipo. Sin embargo, en la práctica la selección de un esquema de modulación depende más bien de la aplicación correspondiente, de los equipos existentes, y de los requerimientos de potencia. Nosotros vamos a comparar los sistemas en base a la potencia; a este efecto, vamos a suponer que la frecuencia de señalización f_b , la probabilidad de error P_e y las condiciones de ruido son las mismas.

Para hacer una comparación respecto a la potencia requerida, se puede utilizar las fórmulas dadas para el cálculo de la probabilidad de error P_e y la Fig 5.79 en la cual se muestra P_e vs γ , donde $\gamma = A^2 T_b / 2\eta$ es la relación S/N normalizada. El eje de las abscisas debe entenderse entonces como una función de la potencia pico recibida (o transmitida) A^2 , siendo el valor pico A^2 el mismo para todos los sistemas. Recuérdese que la potencia promedio en ASK es $A^2/4$, mientras que es $A^2/2$ en FSK, PSK y DPSK, donde A es la amplitud de la portadora a la entrada del receptor.

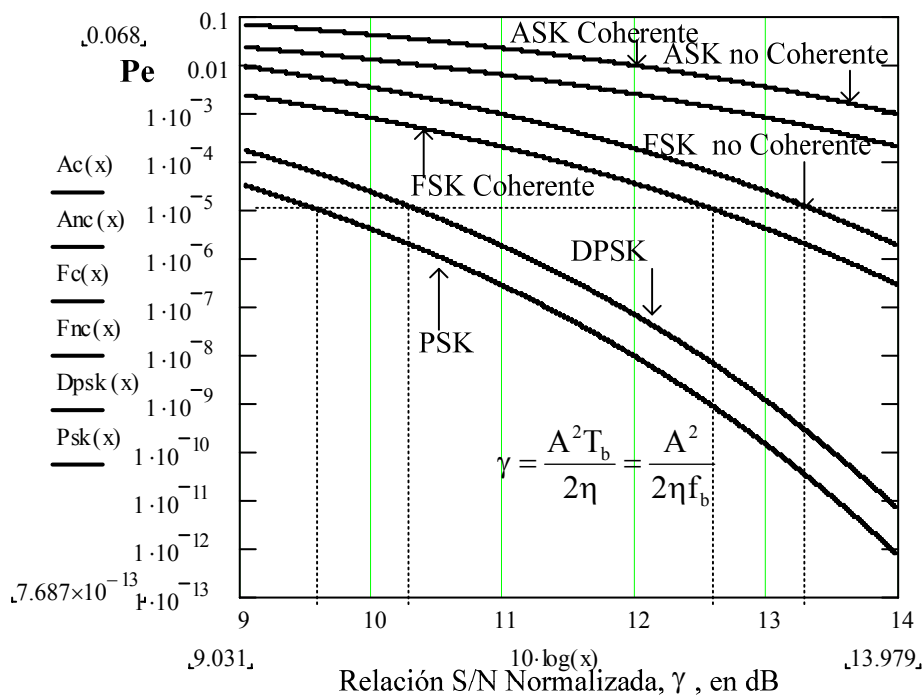


Fig.5.79. Probabilidad de Error en Sistemas de Modulación Binaria

Las curvas de la Fig. 5.79 muestran, para un P_e dado, que el sistema PSK es el que requiere menor potencia, seguido de DPSK, FSK coherente, FSK no coherente, ASK coherente y ASK no coherente. En efecto, nótese que para una probabilidad $P_e = 10^{-5}$, la relación S/N normalizada es de $\approx 9,6$ dB en PSK, $\approx 10,3$ dB en DPSK, $\approx 12,6$ dB en FSK Coherente y $\approx 13,3$ dB en FSK No Coherente. En ASK es tan alta que queda fuera del rango de la gráfica.

Si la comparación se hace en términos de la potencia promedio, entonces ASK y FSK tendrían las mismas características para un mismo P_e , pero como el diseño, y por supuesto el costo,

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

de los equipos de transmisión y recepción dependen más bien de la potencia pico que de la potencia promedio, la comparación se hace respecto a la potencia pico requerida y es lo que se ilustra en la Fig. 5.78. Con este criterio, el sistema ASK casi no se emplea por la alta potencia pico que demanda y por los problemas de ajuste del umbral; el sistema FSK coherente tampoco se emplea debido más que todo a los problemas de sincronización de las portadoras utilizadas.

En la práctica, los sistemas más utilizados son entonces el PSK, el DPSK y el FSK no coherente. Tomando como referencia el sistema PSK, el sistema DPSK está a aproximadamente 1 dB por encima, mientras que el sistema FSK coherente lo está a aproximadamente 4 dB. Los modems comerciales a menudo trabajan con los tres tipos de modulación.

En cuanto a la instrumentación práctica de estos sistemas, los sistemas PSK, DPSK, FSK y ASK difieren muy poco en lo que se refiere al transmisor, pero en el receptor la complejidad dependerá de si se utiliza detección coherente o no coherente, pues la detección coherente es, sin duda, más complicada. Entre los sistemas no coherentes, el DPSK es menos complicado que el FSK no coherente. Por otro lado, si en el canal se produce “desvanecimiento (fading)” de la señal, entonces hay que utilizar sistemas no coherentes debido a la gran dificultad para establecer la sincronización local en el receptor cuando hay perturbaciones en el canal. Sin embargo, si el transmisor tiene limitaciones severas en cuanto a la potencia disponible (caso de satélites, estaciones remotas y comunicaciones espaciales), deben utilizarse los sistemas coherentes ya que ellos demandan menor potencia que los no coherentes para una velocidad de señalización y probabilidad de error dadas. En un caso práctico, el diseñador del sistema debe ponderar cada situación y seleccionar un sistema de acuerdo con las especificaciones que se establezcan para el proyecto. Sin embargo, podemos establecer algunos criterios o guías para simplificar el procedimiento de selección. Estas guías son las siguientes:

- (a) Si el ancho de banda es el parámetro más importante, los sistemas DPSK y el PSK coherente son los más apropiados.
- (b) Si el consumo de potencia es lo más importante, los sistemas más apropiados son el PSK coherente y el DPSK.
- (c) Si la complejidad del equipo es un factor limitativo y las condiciones del canal lo permite, los sistemas no coherentes son preferibles a los coherentes.

Una fuente muy importante de información sobre los sistemas de modulación digital prácticos son los catálogos de los fabricantes de los equipos.

5.8. MODULACIÓN DIGITAL M-aria MEDIANTE PORTADORA MODULADA

5.8.1. Introducción

La mayoría de los sistemas de transmisión de datos a baja velocidad opera bajo el principio de la codificación binaria. En tales casos, la frecuencia de señalización está limitada a un valor del orden del ancho de banda del canal de transmisión. Sin embargo, si el nivel de ruido o cualquiera otra distorsión de la señal lo permite, en vez de dos se puede transmitir M valores de amplitud, frecuencia o fase de una portadora sinusoidal. En esta forma, cada baudio puede transportar más de un bit de información y por lo tanto el rendimiento del canal aumenta. Las técnicas M-arias en ASK y PSK no aumentan el ancho de banda requerido, mientras que en FSK M-aria el ancho de banda requerido es mayor para un mismo incremento en el “empaquetamiento” de bits. Utilizando las técnicas M-arias se puede transmitir información, sobre un canal telefónico, hasta 14400 bps con una velocidad de modulación máxima de 2400 baudios. Velocidades de información superiores a 14400 se pueden lograr pero solamente mediante detección de error y compresión de datos. Por ejemplo, el Módem UIT-T V.32 permite la transmisión, sobre un canal telefónico, a una velocidad

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

de 9600 bps y con una velocidad de modulación máxima de 2400 baudios, pero con técnicas de compresión de datos puede llegar a 38400 bps y a 56 kbps con el Módem V.90. En los enlaces de microondas usualmente se utiliza PSK 4-ario y 8-ario; por ejemplo, se utiliza PSK 4-ario en el sistema SPADE para la transmisión de señales PCM mediante el satélite INTELSAT, con una velocidad de transmisión de 64 kbps y un ancho de banda de 38 kHz.

En la práctica pocas veces se encuentra un canal que tenga el ancho de banda exacto para transmitir una señal mediante técnicas binarias. Cuando el ancho de banda del canal es un factor limitativo, se utilizan las técnicas M-arias para transmitir la información sobre el canal pasabanda. Aún cuando el canal tenga un ancho de banda mayor que el requerido en modulación binaria, las técnicas M-arias se utilizan para mejorar la inmunidad al ruido aunque se aumente la demanda de potencia. En efecto, las técnicas PSK y DPSK M-arias conservan el ancho de banda aunque se aumenta el requerimiento de potencia, mientras que las técnicas FSK M-arias consumen menor potencia pero aumentan el ancho de banda requerido. Los sistemas más utilizados en la práctica son el PSK M-ario, el DPSK M-ario y el FSK M-ario de Banda Ancha.

En los sistemas binarios, hemos visto, el modulador procesa cada dígito binario de duración T_b asignándole una cualquiera de dos señales diferentes, siendo la velocidad de transmisión $V_i = 1/T_b$ bps. En los sistemas M-arios el mecanismo de modulación es similar. En efecto, el modulador M-ario procesa, en el mismo tiempo T_b , bloques de L dígitos binarios asignándole a cada bloque distinto una cualquiera de M señales diferentes posibles, de acuerdo con la relación $M = 2^L$. La velocidad de transmisión ha aumentado L veces, es decir, ahora es $V_{is} = L \cdot V_i$ bps, pero se habrá introducido algunas restricciones sobre la potencia y el ancho de banda de la señal transmitida, factores que dependerán del esquema de modulación utilizado, como veremos a continuación.

5.8.2. Modulación PSK M-aria

En la modulación PSK M-aria el modulador asigna a cada bloque distinto de L dígitos y duración T_s una señal sinusoidal de amplitud A , frecuencia f_c pero con un ángulo o desfase $\phi_m = 2\pi m/M$, para $m = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$, donde $M = 2^L$. La duración de cada muestra de señal es también T_s y las M posibles formas de la señal sinusoidal son

$$s_m(t) = A \cos(2\pi f_c t - 2\pi m/M) \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots, (M-1) \quad (5.182a)$$

Como el ángulo ϕ_m se mantiene constante durante cada intervalo T_s , la señal $s_m(t)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$s_m(t) = X_m \cos(2\pi f_c t) + Y_m \sin(2\pi f_c t) \quad (5.182b)$$

$$\text{y en forma polar, } s_m(t) = \sqrt{X_m^2 + Y_m^2} \cos(2\pi f_c t - \arctg \frac{Y_m}{X_m}) \quad (5.182c)$$

donde $X_m = A \cos(\phi_m)$ y $Y_m = A \sin(\phi_m)$

Estas expresiones nos permiten expresar la señal $s_m(t)$ en forma fasorial, como se muestra en la Fig. 5.80(a). Si A es constante, el extremo del fasor ocupará M posiciones equidistantes en un círculo de radio A y a cada posición angular corresponderá un bloque de L dígitos, como se muestra en la Fig 5.81 para algunos valores de M y L .

La expresión (5.182b) tiene una forma canónica que nos permite utilizar un esquema de generación de señales M-PSK de la forma mostrada en la Fig. 5.80(b). El convertidor Serie/Paralelo forma bloques de L dígitos los cuales son aplicados a un codificador cuyas salidas

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

son X_m y Y_m . Las salidas X_m y Y_m son variables analógicas cuyos valores dependen del valor del ángulo ϕ_m asignado, el cual, a su vez, depende de la secuencia particular de L dígitos a transmitir.

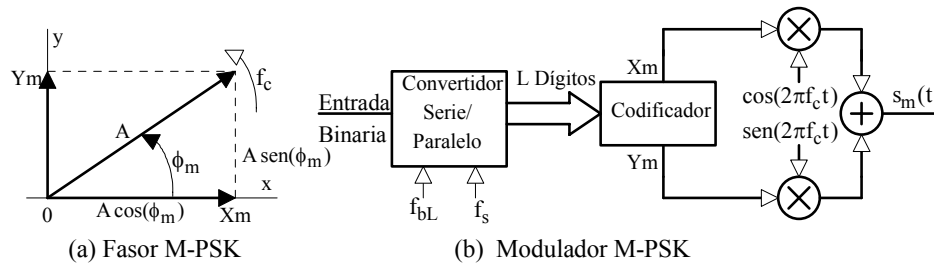


Fig. 5.80. Modulación M-PSK

Cuando $M > 8$, los ángulos ϕ_m se tornan muy pequeños lo que induce a errores en la recepción. En estos casos, se puede asignar bloques de L dígitos a combinaciones de amplitud y fase, es decir, dos fasores distintos pueden tener el mismo ángulo ϕ_m pero las amplitudes son diferentes. Este tipo de esquema, denominado modulación M-QAM, es muy utilizado en la práctica.

En la Fig. 5.81 se muestra el mecanismo de modulación M-aria, y en la Fig. 5.82 unas asignaciones de L dígitos a las M fases de señales sinusoidales representadas en forma fasorial. Estos tipos de diagrama se denominan “diagramas de Fresnel”, “patrones de fase” o “constelaciones”. La asignación mostrada es arbitraria, pero en la UIT-T estos patrones de fase han sido normalizados; por ejemplo, el patrón de fase del Módem UIT-T V.32 tiene la forma mostrada en la Fig. 5.82(d).

La señal PSK M-aria tendrá entonces la forma

$$x_{PSKM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_c t - \phi_m) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (5.183)$$

La información va en la secuencia de fases aleatorias $\{\phi_m\}$. También,

$T_s = LT_{bL}$ o $f_s = f_{bL} / L$ pues los bloques tienen L dígitos de duración T_{bL} cada uno.

Desarrollando (5.183),

$$x_{PSKM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(\phi_m) \cos(2\pi f_c t) + \sin(\phi_m) \sin(2\pi f_c t)] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)$$

Dentro de un intervalo T_s , esta expresión se puede escribir en la misma forma que (5.182b), es decir,

$$x_{Ts}(t) = A [\cos(\phi_m) \cos(2\pi f_c t) + \sin(\phi_m) \sin(2\pi f_c t)]$$

El espectro de esta expresión puede determinarse pues ϕ_m es una constante en dicho intervalo. En este caso podemos demostrar que la densidad espectral de $x_{Ts}(t)$ es

$$S_{Ts}(f) = \frac{A^2}{4f_s} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{f + f_c}{f_s}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{f - f_c}{f_s}\right) \right] \quad (5.184)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

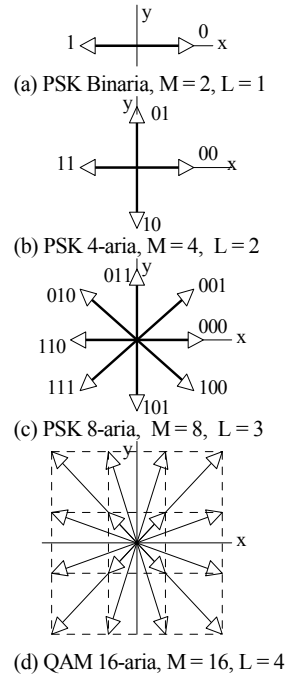
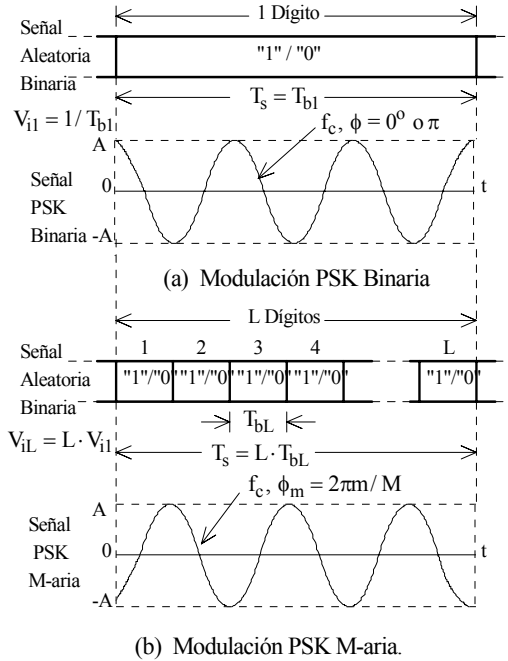


Fig. 5.81. Mecanismo de la Modulación PSK Binaria y M-aria. Fig. 5.82. Asignación de Fases en PSK M-aria

La expresión (5.184) tiene la misma forma que la (5.176) calculada para PSK binario y es válida para $f_c \geq 2f_s$, lo cual se verifica en la mayoría de los casos prácticos. De acuerdo con los criterios ya aplicados en relación con el ancho de banda, el ancho de banda de la señal PSK M-aria es del orden de $2f_s$ a $3f_s$. Como $f_s = f_{bL} / L$, entonces la señal PSK M-aria permite una reducción del ancho de banda en un factor L , y aumentar L veces la velocidad de información por el mismo canal en el caso binario. Nótese que f_{bL} es la frecuencia de señalización a la entrada del modulador y f_s la correspondiente a la salida; sin embargo, cualquiera que sea el valor de L , el canal “verá” siempre la misma velocidad de modulación compatible con su ancho de banda, es decir, el canal “verá” siempre una señal sinusoidal de frecuencia f_c con cambios de fase cada T_s segundos. Esto equivale a decir que la velocidad de modulación en el canal es siempre la misma.

Puesto que $f_{bL} = Lf_s$, se puede definir la “relación S/N normalizada M-aria, γ_s ” en la 428 forma

$$\gamma_s = \frac{A^2 T_s}{2\eta} = 2 \cdot \gamma \quad (5.185)$$

donde γ ya se definió en (5.152).

En general, para un sistema PSK M-ario la probabilidad de error P_e [Shanmugam, 1979] es

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$P_e = \text{erfc} \left[\sqrt{\gamma_s \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} \right] \quad (5.186)$$

En la Fig. 5.83 se grafica la probabilidad de error P_e vs γ_s para algunos valores de M .

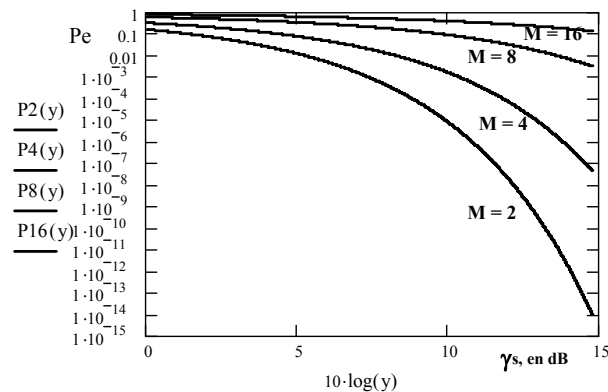


Fig. 5.83. Probabilidad de Error P_e vs γ_s en PSK M-ario

Sería de interés comparar el sistema PSK M-ario con el sistema PSK binario para una misma probabilidad de error. En efecto, si B_B , P_B , B_M y P_M son los anchos de banda y potencias en binario y M-ario, respectivamente, podemos demostrar (Problema de Aplicación 5.54) que para una probabilidad de error de 10^{-4} ,

$$B_M = \frac{B_B}{L} \quad \text{y} \quad P_M = \frac{1,094}{L \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)} P_B \quad (5.187)$$

En la Fig. 5.84 se muestran las relaciones entre los anchos de banda y la potencia en PSK M-ario y PSK binario para una probabilidad de error de 10^{-4} . Evidentemente, la mejor selección es aquella para $M = 4$, pues el ancho de banda se reduce a la mitad con un aumento de sólo el 9,4% (0,39 dB) en la potencia. Por esta razón el sistema PSK 4-ario, denominado también QPSK (“Q” de “quadrature” u ortogonal), se utiliza bastante en la práctica.

Nótese que para $M > 8$, los requerimientos de potencia se hacen excesivos y la modulación PSK M-aria no se emplea. En la práctica se suele utilizar el esquema M-QAM, que es un esquema de modulación compuesta Amplitud-Fase; por ejemplo, en la Fig. 5.82(d) se muestra el diagrama de Fresnel del Modem UIT-T QAM V.32, que transmite a 9600 bps por un canal telefónico.

M	B_M	P_M	P_M / P_B en dB
4	$B_B / 2$	$1,094 P_B$	0,39 dB
8	$B_B / 3$	$2,49 P_B$	3,96 dB
16	$B_B / 4$	$7,186 P_B$	8,57 dB
32	$B_B / 5$	$22,78 P_B$	13,57 dB

Fig. 5.84. Comparación entre PSK M-ario y PSK Binario para $P_e = 10^{-4}$

Los sistemas PSK M-arios requieren una instrumentación mucho más compleja que los sistemas PSK binarios y por lo tanto su costo es mucho mayor. La selección final queda a juicio del diseñador del sistema y según la aplicación deseada.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.8.3. Modulación DPSK M-aria

Los sistemas DPSK M-arios son muy similares a los estudiados en la Sección 5.8.2 y pueden ser representados con las mismas expresiones y gráficos, pues la diferencia básica entre PSK y DPSK es que este último ha experimentado un proceso previo de codificación diferencial.

En cuanto a la probabilidad de error, se ha demostrado [Lucky y otros, 1968] que en el sistema DPSK M-ario

$$P_e = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{2\gamma_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)}\right) \quad (5.188)$$

En la Fig. 5.85 se grafica esta probabilidad en función de γ_s para algunos valores de M.

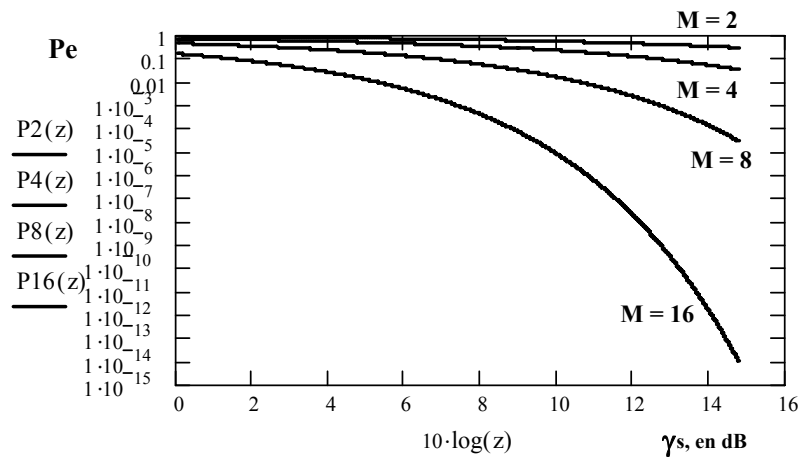


Fig. 5.85. Probabilidad de Error P_e vs γ_s en DPSK M-ario

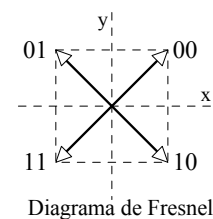
Cuando se compara la probabilidad de error en DPSK con la de PSK, se verifica que para altos valores de M el sistema DPSK M-ario requiere un aumento de potencia de aproximadamente 3 dB. Específicamente, para $M = 4$ (QDPSK) este aumento es de 2,32 dB, un aumento del 71% solamente (Ver Problema de Aplicación 5.55), pero este aumento es compensado con la simplicidad de instrumentación del sistema QDPSK. Sin embargo, en la práctica se utilizan ambos sistemas de modulación, PSK y DPSK; por ejemplo, algunos módems comerciales transmiten a 2400 bps en QPSK (UIT-T V.22bis), a 1200 bps en QDPSK (UIT-T V.22) y poseen además un canal en FSK binario para trabajar a 300 bps (UIT-T V.21).

Las Figs. 5.83 a 5.85 se aplican también en DPSK M-aria.

♣ Ejemplo 5.20

Un sistema DPSK 4-ario está caracterizado por el diagrama de Fresnel de la figura.

La secuencia binaria de entrada al modulador tiene una velocidad de transmisión de 2400 bps. El ancho de banda del canal es de 3 kHz; la amplitud de la portadora es de 1 mV y la densidad espectral de ruido es de 10^{-11} W/Hz.



- Calcule la relación S_i/N_i en el canal y la probabilidad de error
- Si la amplitud de la portadora se aumenta al doble, ¿Cuál será

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

la nueva probabilidad de error y en cuantos dB aumenta la relación S_i/N_i ?

- (c) Dibuje la señal modulada DPSK de salida correspondiente a la entrada **1 0 1 1 0 1 0 0**
(el dígito de la izquierda es el LSB, el cual se transmite de primero)

Suponga que $f_c = 1800$ Hz.

Solución:

- (a) $V_i = 2400$ bps; $B_c = 3$ kHz; $A = 10^{-3}$ V; $M = 4$; $L = 2$; $\eta = 2 \times 10^{-11}$ W/Hz

En DPSK M-ario, $P_e = \text{erfc}\left(\sqrt{2\gamma_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)}\right)$, donde $\gamma_s = \frac{A^2 T_s}{2\eta}$

$$S_i = \frac{A^2}{2} = \frac{10^{-6}}{2} \text{ W}; \quad N_i = \eta B_c = 3 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-11} = 6 \times 10^{-8} \text{ W}$$

$$\frac{S_i}{N_i} = 8,3333 = 9,208 \text{ dB}$$

$f_b = 2400$ Hz; $f_s = f_b/L = 2400/2 = 1200$ Hz ó 1200 bps. La velocidad de modulación en el canal es también de 1200 baudios.

$$\gamma_s = \frac{10^{-6}}{2 \times 2 \times 10^{-11} \times 1200} = 20,8333; \quad \sqrt{2\gamma_s \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)} = \sqrt{2 \times 20,8333 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 2.47$$

$$P_e = \text{erfc}(2.47) = 4,77 \times 10^{-4}$$

$$(b) A = 2 \times 10^{-3}; \quad \gamma_s = \frac{4 \times 10^{-6}}{2 \times 2 \times 10^{-11} \times 1200} = 83,33;$$

$$P_e = \text{erfc}\left(\sqrt{2 \times 83,3333 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right) = 2,812 \times 10^{-12}$$

El aumento en la relación S_i/N_i es de $15,23 - 9,208 = 6,02$ dB. Esto equivale a un aumento de potencia de 4 veces.

- (c) $f_s = 1200$ Hz; $T_s = 8,333 \times 10^{-4}$ seg; $f_c = 1800$ Hz

$$T_c = 5,556 \times 10^{-4} \text{ seg}; \quad T_s = 1,5 T_c$$

La señal M-DPSK tiene la forma $s_m(t) = a \cos(2\pi f_c t - \phi_m)$, y se supone que la señal de entrada **1 0 1 1 0 1 0 0** está ya codificada diferencialmente. Para su codificación DPSK y como $L = 2$, los dígitos o bits se toman de dos en dos.

De acuerdo con el diagrama de Fresnel, la codificación para la señal modulada de salida será:

Para la dupla (dibit): $1\ 0 \rightarrow \phi_1 = -45^\circ; \quad s_1(t) = A \cos(\omega_c t + 45^\circ)$

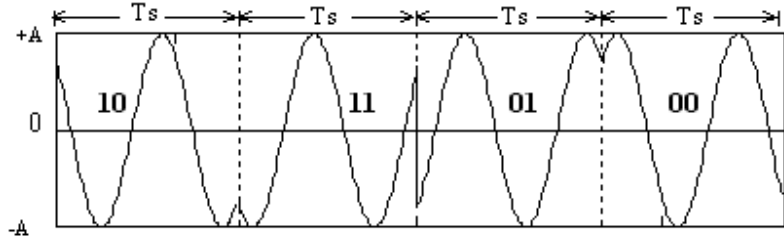
“ “ “ (dibit): $1\ 1 \rightarrow \phi_2 = -135^\circ; \quad s_2(t) = A \cos(\omega_c t + 135^\circ)$

“ “ “ (dibit): $0\ 1 \rightarrow \phi_3 = +135^\circ; \quad s_3(t) = A \cos(\omega_c t - 135^\circ)$

“ “ “ (dibit): $0\ 0 \rightarrow \phi_4 = +45^\circ; \quad s_4(t) = A \cos(\omega_c t - 45^\circ)$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Para una entrada de la forma **1 0 1 1 0 1 0 0**, la señal modulada DPSK 4-aria tendrá la forma siguiente



Señal Modulada DPSK 4-aria

♣

5.8.4. Modulación FSK M-aria de Banda Ancha

En la modulación FSK M-aria, a cada bloque diferente de L dígitos binarios y duración T_s se le asigna una señal sinusoidal de la forma $s_i(t) = A \cos(2\pi f_i t)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, M$, con $M = 2^L$. La duración de cada muestra de señal $s_i(t)$ es también de T_s segundos, donde $f_s = 1/T_s = f_b / L$ es la frecuencia de señalización a la salida del modulador, siendo f_b la frecuencia de señalización a la entrada del modulador. Si $2f_d$ es la separación entre dos frecuencias adyacentes, entonces la frecuencia instantánea en un intervalo T_s es $f_i = f_c + (2i - 1 - M)f_d$, donde f_c es la frecuencia de la portadora sin modular [Benedetto y otros, 1987].

En la Fig. 5.86 se muestra el mecanismo de modulación FSK M-aria y en la Fig. 5.87 la distribución o asignación de las frecuencias de portadora para algunos valores de M y L .

La señal FSK M-aria tendrá entonces la forma

$$x_{\text{FSKM}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos\{2\pi[f_c + (2i - 1 - M)f_d]t\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) \quad (5.189)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, M$

El ancho de banda mínimo de la señal $x_{\text{FSKM}}(t)$ se puede estimar en la forma

$$B_{\min} = (f_M + f_d) - (f_1 - f_d) = 2Mf_d \quad (5.190)$$

donde f_M y f_1 son las frecuencias máxima y mínima, respectivamente, de la señal FSK M-aria.

Si la separación mínima entre dos frecuencias adyacentes se hace igual a la frecuencia de señalización en el canal, es decir, si $2f_d = f_s$ (separación ortogonal), entonces el ancho de banda mínimo en el canal será

$$B_{\min} = Mf_s = \frac{Mf_b}{L} \quad (5.191)$$

donde f_b es la velocidad de señalización o de modulación a la entrada del modulador FSK M-ario.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

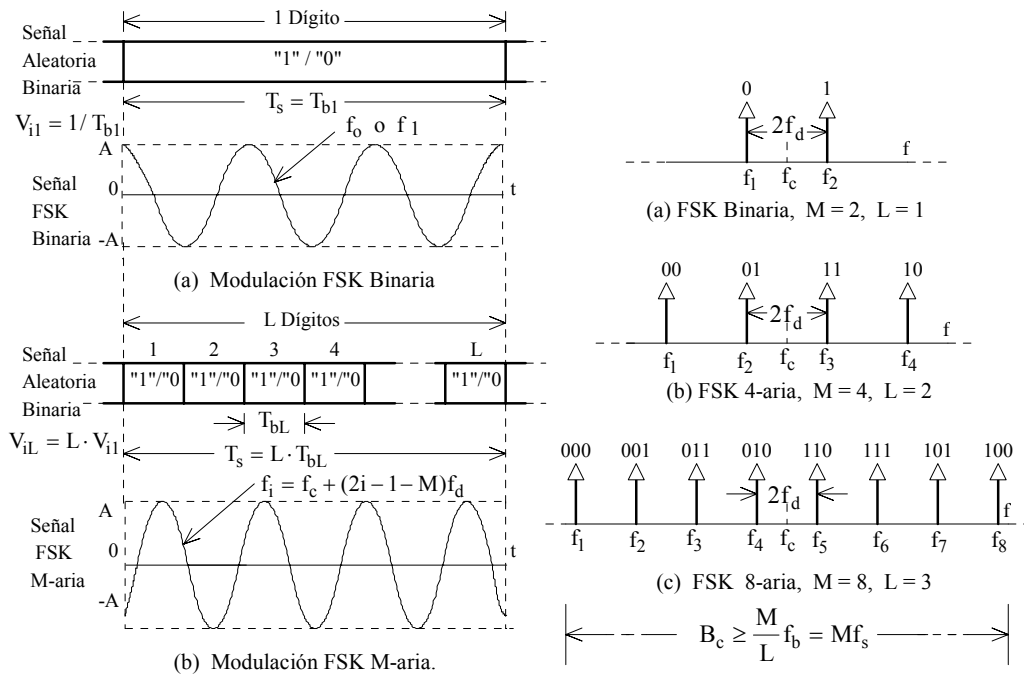


Fig. 5.86. Mecanismo de la Modulación FSK Binaria y M-aria. Fig. 5.87. Asignación de Frecuencias en FSK M-aria

La frecuencia mínima f_1 vendrá dada por $f_1 = f_c - (M-1)f_d = f_c - (M-1)\frac{f_b}{2L}$ y cualquiera frecuencia de orden j será $f_j = f_1 + (j-1)\frac{f_b}{L}$, para $j = 2, 3, 4, \dots, M$. La frecuencia mínima f_1 deberá ser igual o mayor que f_s , de modo que se puede tomar

$$f_1 = k f_s = k \frac{f_b}{L} \quad \text{para } k \text{ entero y } k \geq 1 \quad (5.192)$$

En este caso la frecuencia de portadora será

$$f_c = (2k + M - 1) \frac{f_b}{2L} \quad (5.193)$$

Por ejemplo, si $M = 8$, $L = 3$, $f_b = 2400$ bps y $k = 1$,

$$f_d = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2L} = \frac{2400}{6} = 400 \text{ Hz}; \quad 2f_d = 800 \text{ Hz}; \quad f_s = \frac{2400}{3} = 800 \text{ Hz}$$

$$f_c = (2 + 8 - 1) \frac{2400}{6} = 3600 \text{ Hz}; \quad f_1 = \frac{2400}{3} = 800 \text{ Hz};$$

$$f_8 = 800 + 7 \frac{2400}{3} = 6400 \text{ Hz}$$

$$B_{\min} = \frac{8 \times 2400}{3} = 6400 \text{ Hz}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Ortogonalidad de Señales FSK M-aria

El conjunto de señales $s_i(t)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, M$ es ortogonal, es decir, se verifica que

$$\int_0^{T_s} s_i(t) \cdot s_j(t) \cdot dt = \begin{cases} \frac{A^2 T_s}{2} = E_s & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (5.194)$$

Las señales $s_i(t)$ son ortogonales en el intervalo T_s , tienen duración T_s y todas tienen la misma energía E_s . La ortogonalidad exige también que la separación entre frecuencias adyacentes sea tal que $2f_d = f_s$. Por lo tanto, la separación mínima entre dos frecuencias adyacentes será igual a $f_s = f_b / L$, condición que hemos tomado para estimar el ancho de banda mínimo de la señal FSK M-aria, expresión (5.191).

La probabilidad de error P_e en FSK M-aria ha sido calculada [Lucky y otros, 1968; Benedetto y otros, 1987], pero la ecuación de P_e es una ecuación integral de muy difícil resolución. En la Fig. 5.88 se muestra la forma aproximada de la Probabilidad de Error vs γ_s para algunos valores de M . Se demuestra [Lucky y otros, 1968] que para grandes valores de γ_s las curvas tienden a juntarse indicando que con solamente un aumento de 3 dB en la potencia se puede aumentar el número de niveles de 2 a 1024. Sin embargo, el precio que hay que pagar es el aumento en el ancho de banda. En efecto, mientras que en un sistema FSK binario el ancho de banda mínimo es $3f_b$, en un sistema FSK M-ario el ancho de banda mínimo es Mf_b / L . Una desventaja adicional es la creciente complejidad de los equipos de transmisión y recepción tanto en recepción coherente como no coherente, aunque la recepción coherente casi no se utiliza.

El receptor óptimo coherente para el conjunto ortogonal de señales consiste en una batería de M filtros óptimos, como se muestra en la Fig. 5.89. En el receptor se muestrea las salidas de los filtros en los instantes nT_s y el elemento de decisión selecciona cual señal $s_j(t)$ estaba presente en la entrada del filtro j en el intervalo de señalización n -ésimo.

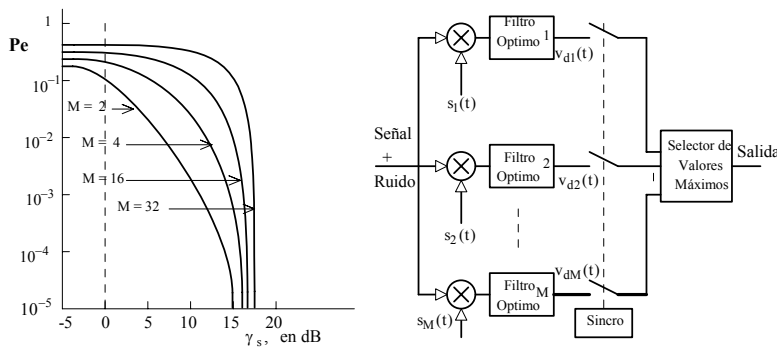


Fig. 5.88. Probabilidad de Error P_e vs γ_s en FSK M-aria. Fig. 5.89. Receptor Optimo FSK M-ario Coherente.

En general, la modulación M-aria proporciona los medios para intercambiar ancho de banda por relación S/N, es decir, se puede aumentar la velocidad de transmisión en un factor $L = \log_2 M$ pero pagando un precio adecuado en términos de ancho de banda o de relación S/N. Por ejemplo, en PSK o DPSK M-aria, podemos mantener fijo el ancho de banda de transmisión pero la potencia transmitida aumenta en forma exponencial con L ; asimismo, en FSK M-aria la potencia transmitida es prácticamente independiente de L , pero el ancho de banda aumenta también en forma exponencial con L . En consecuencia, se puede utilizar PSK M-aria o DPSK M-aria cuando el

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

ancho de banda es limitado (como en los canales telefónicos), y FSK M-aria cuando la potencia es el factor limitativo (como en las comunicaciones espaciales o por satélites). Por consiguiente, un aumento en la velocidad de transmisión de la información se puede lograr mediante un compromiso entre el ancho de banda y la relación S/N. Este compromiso, que ya hemos encontrado también en PPM, nos permite disponer de una gran flexibilidad de intercambio entre diferentes parámetros para adecuar una fuente de información dada a un canal determinado.

5.9. TRANSMISIÓN DE SEÑALES DIGITALES MEDIANTE DISPERSIÓN DEL ESPECTRO (SPREAD SPECTRUM)

5.9.1. Introducción

En los sistemas de comunicación estudiados hasta ahora los criterios de comportamiento se expresaban en función de la utilización eficiente del ancho de banda y de la relación Señal/Ruido en el canal. Sin embargo, en algunas aplicaciones hay que considerar aspectos tales como la capacidad o robustez contra interferencias (espontáneas o maliciosas), capacidad para acceso múltiple a un medio y baja probabilidad de interceptación, aspectos que son de gran importancia en las aplicaciones militares y que ahora se han llevado a aplicaciones en el dominio civil. Estos objetivos se pueden optimizar aplicando las técnicas del espectro disperso o espectro ensanchado (spread spectrum, SS), cuyos principios presentamos en el Capítulo III.

Existen varias técnicas de dispersión o ensanchamiento del espectro. Para ser considerado como un sistema SS, el sistema debe satisfacer los criterios siguientes:

1. Que el ancho de banda de la señal transmitida sea mucho mayor que el ancho de banda de la señal mensaje $m(t)$.
2. Que la dispersión del ancho de banda de la señal transmitida sea producida por una señal $s(t)$, denominada “señal dispersora”, independiente de $m(t)$, y que la señal $s(t)$ se pueda reproducir en el receptor a fin de extraer la señal mensaje $m(t)$ de la señal transmitida.

Una señal dispersora que permite cumplir con estos dos criterios es justamente la señal pseudoaleatoria o secuencia PN, cuyos principios y mecanismo de generación se dieron en el Capítulo III, Sección 3.9.3.

Los sistemas SS de más aplicación en la práctica son:

1. **Sistemas SS de Secuencia Directa** (Direct Sequence Spread Spectrum, **DSSS**).
2. **Sistemas SS mediante Conmutación de Frecuencias** (Frequency Hopping Spread Spectrum, **FHSS**).

Existen también otras técnicas híbridas que incluyen tanto DS como FH, pero no las trataremos aquí.

5.9.2. Sistemas SS de Secuencia Directa

En los sistemas de espectro disperso de secuencia directa (DSSS), el espectro de la señal mensaje original PCM $m(t)$ se ensancha mediante la utilización de una secuencia PN $s(t)$. La señal dispersada modula en PSK a una portadora de frecuencia f_c y luego se transmite. En el extremo receptor se llevan a cabo las operaciones inversas correspondientes para la recuperación de la señal mensaje $m(t)$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Consideremos entonces el modelo de un sistema PSK/DSSS mostrado en la Fig. 5.90.

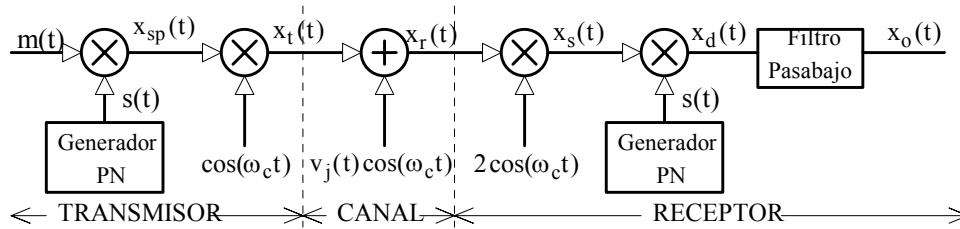


Fig. 5.90. Modelo de un Sistema de Espectro Disperso en Secuencia Directa (DSSS)

La señal $m(t)$ es una secuencia PCM en banda de base que suponemos bipolar, NRZ y de amplitudes $\pm A$, de la forma mostrada en la Fig. 3.23 y cuya densidad espectral viene dada por (3.175); la señal $s(t)$ es una secuencia pseudoaleatoria de la forma mostrada en la Fig. 3.27 y cuya densidad espectral viene dada por (3.183).

De la Fig. 5.90, $x_{sp}(t) = m(t) \cdot s(t)$

donde, de (3.175) con $A^2 T_b = 1$, $m(t) \Rightarrow S_m(f) = \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_b}\right)$ (5.195)

La señal dispersa $x_{sp}(t)$ tiene la forma de una secuencia aleatoria bipolar NRZ que contiene la información, cuya densidad espectral se muestra en la Fig. 3.31 y cuyo ancho de banda es $B \approx N f_b$. Si la señal $x_{sp}(t)$ se multiplica por $\cos(\omega_c t)$, la señal resultante $x_t(t)$, que se transmite, será una señal PSK de frecuencia de portadora f_c .

Durante la transmisión por el canal, la señal transmitida PSK/DSSS es perturbada por una señal interferente $v_j(t)$ centrada en la frecuencia de portadora. Vamos a suponer que esta interferencia es intencional (jamming) y en el caso más desfavorable cuando su ancho de banda es igual al ancho de banda de la señal útil $m(t)$. Supondremos también que la potencia de ruido en el canal es despreciable en relación con la potencia de la señal interferente. Entonces,

$$x_t(t) = m(t) \cdot s(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

La señal recibida en el receptor será

$$x_r(t) = m(t) \cdot s(t) \cdot \cos(\omega_c t) + v_j(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

La señal $x_r(t)$ es demodulada mediante multiplicación por $2 \cos(\omega_c t)$; por lo tanto,

$$x_s(t) = x_r(t) 2 \cos(\omega_c t) = 2m(t) \cdot s(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) + 2v_j(t) \cdot \cos^2(\omega_c t)$$

A esta señal se le aplica la operación de dispersión, resultando en

$$x_d(t) = x_s(t) \cdot s(t) = 2m(t) \cdot s^2(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) + 2v_j(t) \cdot s(t) \cdot \cos^2(\omega_c t)$$

pero como $s^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$, entonces

$$x_d(t) = m(t) + s(t) \cdot v_j(t) + [m(t) + v_j(t) \cdot s(t)] \cdot \cos(2\omega_c t)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Esta es la señal a la entrada del filtro pasabajo. El término de alta frecuencia centrado en $\pm 2f_c$ es eliminado, así como todas las componentes frecuenciales del producto $s(t) \cdot v_j(t)$ superiores a f_b , que es el ancho de banda del filtro. A la salida del filtro se tendrá entonces

$$x_o(t) = m(t) + \left[s(t) \cdot v_j(t) \right]_{oj}$$

donde $\left[s(t) \cdot v_j(t) \right]_{oj}$ es la salida del espectro de $s(t) \cdot v_j(t)$ para $|f| \leq f_b$, y que representa la interferencia a la salida.

La densidad espectral de potencia a la salida del filtro pasabajo será

$$S_o(f) = S_m(f) + S_{oj}(f)$$

donde $S_{oj}(f)$ es la densidad espectral de $\left[s(t) \cdot v_j(t) \right]_{oj}$.

Para cuantificar el efecto de la interferencia, supongamos que la densidad espectral $S_j(f)$ de la señal interferente es

$$S_j(f) = A_j^2 \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) = A_j^2 \text{ para } |f| \leq f_b \text{ con } A_j \ll 1 \quad (5.195)$$

Definamos entonces, $s(t) \cdot v_j(t) \Rightarrow S_{jd}(f) = S_s(f) * S_j(f)$

De (3.177) y (5.195), este producto de convolución resulta en

$$S_{jd}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} ' \frac{(N+1)A_j^2}{N^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{N}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f - nf_o}{2f_b}\right) + \frac{A_j^2}{N^2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) \quad (5.196)$$

donde $\sum_{n=-\infty}^{\infty} '$ indica que la sumatoria no incluye el valor $n = 0$.

$$\text{Entonces, } S_{oj}(f) = S_{jd}(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right)$$

De (5.196), podemos demostrar que

$$S_{oj}(f) = A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) = \frac{\eta_j}{2} \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_b}\right) \quad (5.197)$$

$$\text{donde } \frac{\eta_j}{2} = A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right]$$

es la amplitud de la densidad espectral de la señal interferente a la salida.

$$\text{Nótese que para } N \gg 1, \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] \approx \frac{1}{N} \text{ y } \eta_j = \frac{2A_j^2}{N} \quad (5.198)$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

En la Fig. 5.91 se grafican $S_m(f)$ y $S_{oj}(f)$ para $N = 1000$; $f_b = 9600$ Hz y $A_j = 1$. (La señal $S_{oj}(f)$ ha sido multiplicada por 100 para poderla observar en el gráfico).

Se puede determinar la ganancia “Potencia Util/Potencia Interferente” para demostrar la robustez del sistema DSSS contra las interferencias espontáneas o maliciosas. Dentro de la banda de paso, la Ganancia DS será

$$G_{DS} = \frac{\text{Potencia Util de Salida}}{\text{Potencia Interferente}} = \frac{P_s}{P_j}$$

$$G_{DS} = \frac{P_s}{P_j} = \frac{\int_0^{f_b} S_m(f) df}{\int_0^{f_b} S_{oj}(f) df} = \frac{\int_0^{f_b} A^2 T_b \sin^2\left(\frac{f}{f_b}\right) df}{\int_0^{f_b} A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] df}$$

$$\text{Cuando } N \gg 1, P_s = 0,90253 A^2 \text{ y } P_j = 2 A_j^2 \frac{f_b}{N}$$

$$\text{De donde, } G_{DS} = \frac{P_s}{P_j} = 0,4513 \left(\frac{A}{A_j} \right)^2 \frac{N}{f_b}$$

La ganancia es directamente proporcional a N . En la práctica, el factor $[A/A_j]^2$ es muy grande ($>10^4$). Por ejemplo, cuando $N = 1000$, $f_b = 9600$ Hz y $(A/A_j) = 100$, $G_{DS} = 26,72$ dB

Puede observarse que en este caso la señal interferente está a 26,72 dB (470 veces) por debajo de la señal útil. Esto significa que para que la fuente interferente pudiera tener alguna influencia en la recepción, su potencia debería aumentarse por lo menos en 470 veces, lo cual es prácticamente imposible por lo costoso que sería. Esta característica del sistema DSSS ha sido muy utilizada en los sistemas de comunicación militares contra las interferencias maliciosas (jamming).

La probabilidad de error en este sistema es la misma considerada en la modulación binaria de fase, Sección 5.7.4, es decir, la probabilidad de error en el sistema PSK/DSSS viene dada por (5.171). Como hemos supuesto que el ruido interferente es mucho mayor que el ruido en el canal

($\eta_j \gg \eta$), la probabilidad de error será

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2}{2\eta_j f_b}}\right) \quad (5.199)$$

Como η_j depende de la ganancia de procesamiento N , vemos que la probabilidad de error dependerá también de N . En efecto, reemplazando (5.198) en (5.199), la probabilidad de error en PSK/DSSS es

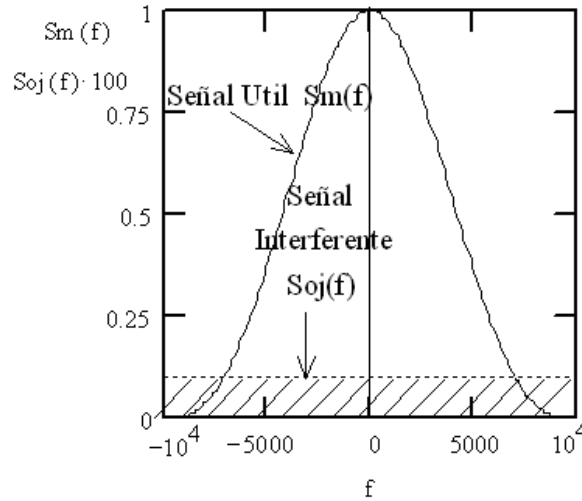


Fig. 5.91. Densidades Espectrales de Salida.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{4} \frac{A^2}{A_j^2 \left[\frac{1}{N^2} + \frac{N+1}{\pi^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{N} \right) \right] f_b}} \right) \quad (5.200)$$

Puesto que $P_s = 0,90253A^2$ y $P_j = 2A_j^2 \frac{f_b}{N} = \frac{P_i}{N}$, donde P_i es la potencia de la fuente interferente, es decir, $P_i = 2f_b A_j^2$, entonces, para $N \gg 1$, la probabilidad de error P_e en PSK/DSSS se puede reducir a la forma más sencilla

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{0,544N}{P_i/P_s}} \right) \quad \text{para } N \gg 1 \quad (5.201)$$

A la relación P_i/P_s generalmente se la conoce con el nombre de “**margen de interferencia**” y es una medida de la gravedad de la interferencia; en efecto, cuanto más alta es esta relación, más alta es la severidad de la interferencia y más alta la probabilidad de error.

La expresión (5.201) nos permite observar el efecto de la ganancia de procesamiento N sobre la probabilidad de error para diferentes valores del margen de interferencia. En efecto, en la Fig. 5.92 se muestra la variación de la probabilidad P_e vs N para diferentes valores del margen de interferencia.

La expresión (5.201) y la Fig. 5.92 demuestran la efectividad del sistema DSSS en la supresión de interferencias tanto espontáneas como maliciosas.

Es lógico que si la relación P_i/P_s es alta, la probabilidad de error será alta también; pero esta probabilidad de error se puede disminuir aumentando la ganancia de procesamiento N , como se puede observar en la Fig. 5.92. Por ejemplo, para $(P_i/P_s) = 10$, valores de N superiores a 164 mantendrán la probabilidad de error por debajo de 10^{-5} .

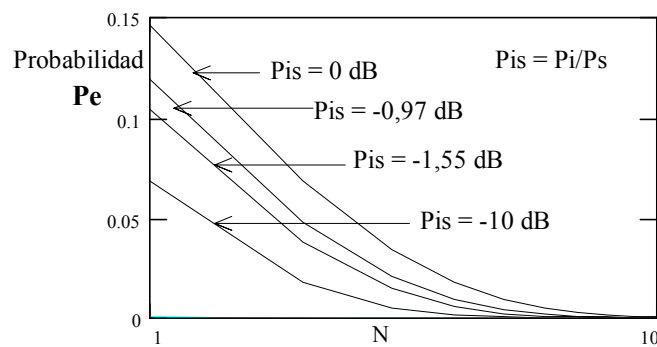


Fig. 5.92. Probabilidad P_e vs N en PSK/DSSS

Acceso Múltiple por División de Código (CDMA)

Una de las principales aplicaciones del sistema DSSS en las comunicaciones, es la posibilidad de utilización de la misma banda de frecuencias para múltiples usuarios que están transmitiendo simultáneamente. Esta es la forma de acceso múltiple denominada “**Acceso Múltiple por División de Código (CDMA)**” que mencionamos en la Sección 5.8.5.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

La idea clave en el sistema CDMA es la de que a cada usuario se le asigna una secuencia PN diferente, y aunque todos los usuarios transmiten simultáneamente por la misma banda de frecuencias, un usuario particular puede extraer de la señal compuesta transmitida la señal a él dirigida utilizando la secuencia PN apropiada.

Supongamos que hay M usuarios que transmiten en un sistema PSK/DSSS/CDMA; cada usuario transmite una señal $m_i(t)$, a una frecuencia de portadora f_c común y con una secuencia PN particular $s_i(t)$ con $i = 1, 2, 3, \dots, M$. La potencia de las señales $m_i(t)$ es la misma para todas. Vamos a suponer también que la potencia de ruido en el canal es despreciable en comparación con la potencia de las señales $m_i(t)$. El modelo del esquema de transmisión es el mismo de la Fig. 5.90.

La señal compuesta producida por los M transmisores en la misma banda de frecuencias es

$$x(t) = \sum_{i=1}^M m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Esta señal llega a los M receptores donde es multiplicada por la portadora $2 \cos(2\pi f_c t)$. La señal $x_r(t)$ de entrada en un receptor dado será la correspondiente a $(M-1)$ transmisores, entonces,

$$x_s(t) = x_r(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = \sum_{i=1}^{M-1} 2 \cdot m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t)$$

Esta señal aparece en la entrada del multiplicador de la secuencia PN de todos los receptores. En el receptor k esta señal se multiplica por su secuencia particular $s_k(t)$ y la salida correspondiente será

$$x_{dk}(t) = x_s(t) \cdot s_k(t) = \sum_{i=1}^{M-1} 2 \cdot m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot s_k(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t)$$

En el receptor k se verifica que $s_i(t) = s_k(t)$, de modo que

$$x_{dk}(t) = 2 \cdot m_k(t) \cdot s_k^2(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) + \sum_{i=1}^{M-2} 2 \cdot m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot s_k(t) \cdot \cos^2(2\pi f_c t) \quad i \neq k$$

Esta señal se pasa por el filtro pasabajo de salida que elimina los términos en $\pm 2f_c$, y como $s_k^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$, entonces a la salida del filtro pasabajo se tiene

$$x_{ok}(t) = m_k(t) + \sum_{i=1}^{M-2} m_i(t) \cdot s_i(t) \cdot s_k(t) \quad i \neq k \quad (5.202)$$

El primer término de $x_{ok}(t)$ es la señal deseada, mientras que el segundo término se puede considerar como ruido. Como suponemos que las secuencias PN están sincronizadas aunque no son las mismas, entonces el producto $s_i(t) \cdot s_k(t)$ es otra secuencia PN, por ejemplo, $s'_i(t)$. La potencia del término interferente es simplemente la suma de las potencias interferentes producidas por las otras $(M-2)$ señales transmitidas. Si $P_i = P_s$ es la potencia de cada señal interferente, entonces la potencia total interferente será

$$P_{ij} = (M-2) \cdot P_j = (M-2) \cdot \frac{P_i}{N} = (M-2) \frac{P_s}{N} \quad (5.203)$$

De (5.201), la probabilidad de error en el receptor k es

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$P_{e,k} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{0,554 \frac{P_s}{P_{tj}}} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{0,554 \frac{N}{M-2}} \right] \quad (5.204)$$

La probabilidad de error en CDMA depende entonces del número de usuarios M en el sistema. En efecto, cuanto mayor es el número de usuarios, mayor será la probabilidad de error. Por ejemplo, para una ganancia de procesamiento $N = 1000$, se verifica que para que $P_{e,k} < 10^{-5}$ el número de usuarios debe ser $M < 120$. Se puede aumentar el número de usuarios pero a costas de un aumento en la probabilidad de error, es decir, se produce una degradación en la calidad de la transmisión. Esto se puede observar en la Fig. 5.93, donde se muestra la variación de la probabilidad de error en función de M para $N = 256, 512, 1024$ y 2048 .

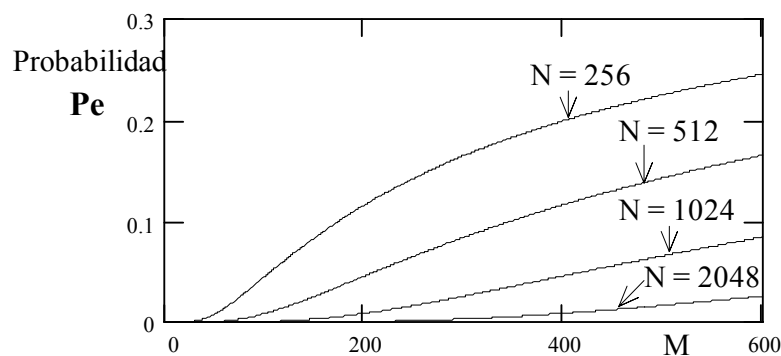


Fig. 5.93. Probabilidad de Error en CDMA

En la práctica, el sistema CDMA demanda un estricto control de la potencia de salida de cada transmisor a fin de asegurar que la señal de cada transmisor llegue a la antena receptora aproximadamente con la misma potencia. En efecto, si una o más estaciones transmiten con altas potencias, la calidad de la señal en todas las estaciones se degrada rápidamente. El lector puede verificar este fenómeno haciendo los ajustes necesarios en las expresiones (5.203) y (5.204).

Sería interesante comparar el sistema CDMA en relación con el sistema TDMA, ya estudiado. En el sistema TDMA el número de usuarios está restringido por el número de ranuras disponibles en el sistema. Una vez que todas las ranuras de tiempo han sido asignadas, un aumento en el número de usuarios sólo se puede lograr rediseñando el sistema. En CDMA este problema no se presenta; se puede agregar los usuarios que se quiera, pues el comportamiento del sistema experimentará solamente una degradación de acuerdo con la expresión (5.204).

El sistema CDMA se aplica en telefonía celular (sistema GSM), en sistemas móviles por satélite, en sistemas de localización (global positional systems, GPS), en sistemas PCS (Personal Communication Systems), en redes de área local inalámbricas (IEEE 802.11) y en los sistemas de tercera generación (cdma2000 y WCDMA).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.9.3 Dispersión del Espectro mediante Conmutación de Frecuencias (FHSS)

En los sistemas FHSS la señal digital a transmitir, generalmente FSK o DPSK, vuelve a modular una portadora cuya frecuencia cambia constantemente de acuerdo con una secuencia PN. La cantidad de frecuencias es igual a $M = 2^k$, donde k es el número de “chips” tomados de la secuencia PN. Por ejemplo, si $k = 8$, habrá 256 frecuencias de portadora diferentes que serán moduladas por la señal FSK o DPSK; esto quiere decir que durante un intervalo de tiempo T se utiliza una de las M frecuencias, y en el intervalo siguiente se cambia o “salta” en forma aleatoria a cualquiera otra de las $M - 1$ frecuencias. Como resultado, la interferencia se reduce, pues en el caso de existir una, ella tendría efecto solamente en uno de los M intervalos de tiempo. Durante los $M - 1$ intervalos de tiempo restantes, la portadora “salta” aleatoriamente a otras de las frecuencias no conocidas por el ente interferente y como consecuencia la interferencia se reduce. Por esta razón, a esta técnica se le suele llamar también “Dispersión de Espectro por Salto de Frecuencias”.

En la Fig 5.94 se muestran los “saltos” aleatorios de frecuencia y en la Fig. 5.95 se muestra el modelo de un sistema FSK/FHSS con demodulación no coherente.

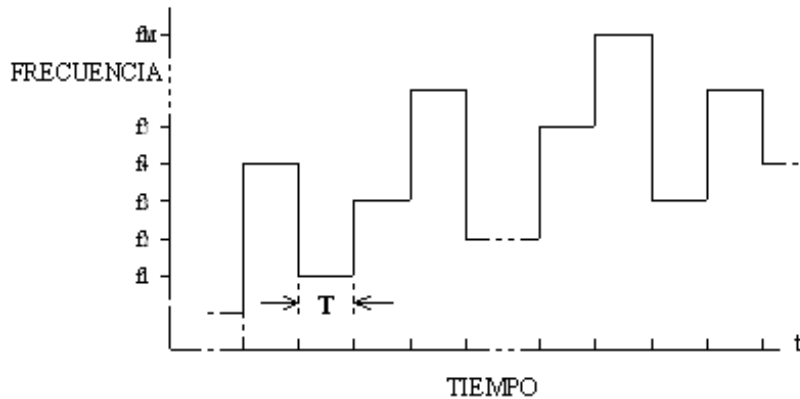


Fig. 5.94. Variaciones (“Saltos”) Aleatorias de la Frecuencia en FHSS

Las frecuencias de portadora se generan en un sintetizador de frecuencia que es controlado por k “chips” tomados de una secuencia PN, como se muestra en la Fig. 5.95; en la práctica el valor de k es igual al número de etapas r del generador de las secuencias PN. Estas frecuencias cambian cada T segundos, de modo que se puede escribir

$$s_h(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cos(2\pi f_i t) \cdot \Pi\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (5.205)$$

Dependiendo de la relación entre T y T_b , los sistemas FHSS se clasifican en sistemas FHSS Lentos cuando $T \geq T_b$, y sistemas FHSS Rápidos cuando $T < T_b$. Para simplificar el análisis, vamos a considerar el caso cuando $T = T_b$, que es una forma de FHSS Lento. Vamos a suponer también que la frecuencia inferior de dispersión es mucho mayor que f_c , es decir, que $f_l \gg f_c$.

En el canal aparece una señal interferente $v_j(t)$, cuya potencia, igual que en el caso DSSS, suponemos que es mucho mayor que la potencia de ruido ($\eta_j \gg \eta$). Asimismo, analizaremos separadamente los efectos de la señal útil y los de la interferencia.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

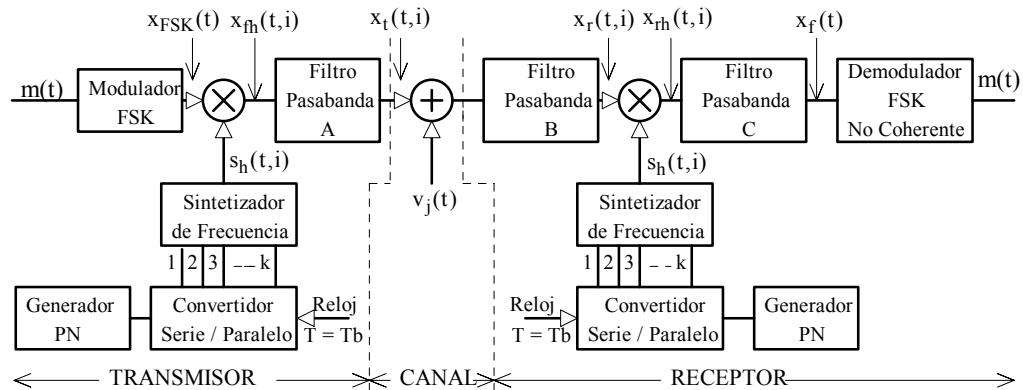


Fig. 5.95. Modelo de un Sistema de Transmisión de Espectro Disperso mediante Conmutación de Frecuencias.

De la Fig. 5.95, $x_{fh}(t,i) = x_{FSK}(t) \cdot s_h(t,i)$, donde $x_{FSK}(t)$, es, de (5.162),

$$x_{FSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos[2\pi(f_c + b_a \cdot f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

Entonces, para $T = T_b$,

$$x_{fh}(t,i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2A \cos(2\pi f_i t) \cdot \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

$$x_{fh}(t,i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \left\{ \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] + \cos[2\pi(f_c + b_a f_d - f_i)t] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

El filtro pasabanda A está centrado en $[f_c + b_a f_d + f_i]$, de modo que su salida es

$$x_t(t,i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, M \quad (5.206)$$

Esta es la señal FSK/FHSS que se transmite.

Vamos a estimar ahora el valor aproximado del ancho de banda ocupado. Por razones de ortogonalidad, que ya discutimos anteriormente, Sección 5.7.4., la separación entre dos frecuencias adyacentes debe ser como mínimo igual a f_b , es decir, $f_i - f_{i-1} = f_b$. Por lo tanto, el ancho de banda de la señal FSK/FHSS es $B \approx (M-1) \cdot f_b$; pero como $M = 2^k$ y $N = 2^k - 1$, entonces el ancho de banda es

$$B \approx N \cdot f_b \quad \text{en FSK/FHSS} \quad (5.207)$$

que es el mismo ancho de banda de la señal PSK/DSSS. El ancho espectral ocupado por los espectros de la señal FSK/FHSS es ciertamente un espectro ensanchado y es N veces el ancho de banda de la señal mensaje $m(t)$.

Estrictamente hablando, el espectro transmitido de la señal no se ensancha, él siempre permanece fijo y su ancho de banda generalmente es f_b . Lo que pasa es que el mecanismo de

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

modulación hace que este espectro se desplace sobre M frecuencias de portadora ocupando un ancho de banda total $B \approx M \cdot f_b$, o lo que es lo mismo, el espectro de la señal $m(t)$ cambia aleatoriamente de frecuencia de portadora cada T_b segundos sobre un canal de ancho de banda $B = M \cdot f_b$.

La señal $x_t(t, i)$ se transmite y en el receptor pasa por el filtro pasabanda B , el cual tiene las mismas características que el filtro A , de modo que $x_r(t, i) = x_t(t, i)$. Esta señal se multiplica por una réplica idéntica y sincronizada de $s_h(t, i)$ resultando en

$$x_{rh}(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2A \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] \cdot \cos(2\pi f_i t) \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

$$x_{rh}(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \left\{ \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + 2f_i)t] + \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

El filtro pasabanda C deberá estar centrado en $[f_c + b_a f_d]$, de modo que su salida será

$$x_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right) = x_{FSK}(t) \quad (5.208)$$

Hemos recuperado la señal FSK, la cual al demodularse producirá la señal mensaje original $m(t)$. Nótese que la demodulación es no coherente para evitar los problemas de sincronización de los sintetizadores de frecuencia. Este mismo análisis se puede efectuar para una señal DPSK.

Consideremos ahora una señal interferente $v_j(t)$ cuya densidad espectral es constante y mucho mayor que la densidad espectral de ruido en el canal. Cuando esta señal pasa por el filtro pasabanda B del receptor, el ruido a la salida del filtro se puede expresar en la forma canónica

$$n_j(t, i) = n_{jc}(t) \cdot \cos[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t] - n_{js}(t) \cdot \sin[2\pi(f_c + b_a f_d + f_i)t]$$

Esta señal de ruido se multiplica por la señal dispersora $s_h(t, i)$ obteniéndose

$$n_{jh}(t, i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ n_{jc}(t) [\cos[2\pi(f_c + b_a f_d + 2f_i)t] + \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t]] - \right. \\ \left. - n_{js}(t) [\sin[2\pi(f_c + b_a f_d + 2f_i)t] + \sin[2\pi(f_c + b_a f_d)t]] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

A la salida del filtro pasabanda C , que está centrado en $[f_c + b_a f_d]$, la señal interferente será

$$n_{jf}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ n_{jc}(t) \cdot \cos[2\pi(f_c + b_a f_d)t] - n_{js}(t) \cdot \sin[2\pi(f_c + b_a f_d)t] \right\} \cdot \Pi\left(\frac{t - nT_b}{T_b}\right)$$

Esta es una señal pasabanda de banda angosta cuya densidad espectral de potencia es constante; podemos decir entonces que

$$n_{jf}(t) \Rightarrow S_{n_j}(f) = A_j^2 = \frac{\eta_j}{2} \text{ para } |f| \leq B_i \text{ con } A_j^2 \ll 1 \quad (5.209)$$

donde B_i es el ancho de banda de un canal individual en FSK, expresión (5.164b).

La probabilidad de error es, de (5.169),

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

pero, de (5.152),
$$\gamma = \frac{A^2 T_b}{2\eta_j} = \frac{(A^2/2)}{\eta_j f_b} = \frac{P_s}{P_j} \quad (5.210)$$

La probabilidad de error en el sistema FSK/FHSS será entonces

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{P_s}{P_j}\right) \quad (5.211)$$

donde P_s/P_j es la ganancia de potencia o relación entre la potencia útil y la potencia interferente. Nótese que esta ganancia no depende de N . En la Fig. 5.96 se muestra la variación de la probabilidad de error en función de la relación P_s/P_j .

La relación P_s/P_j es, en general, alta; en este caso en particular, para $P_s/P_j > 13,35$ dB, la probabilidad de error $P_e < 10^{-5}$.

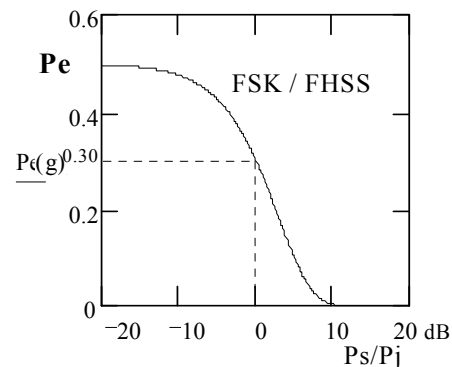


Fig. 5.96. Probabilidad de Error vs P_s/P_j

Este sistema se utiliza en telefonía celular GSM (Global System for Mobile Communications) de procedencia europea. Para más información sobre estos sistemas, ver [Pickholts y otros, 1982; Proakis, 1989].

5.9.4. Consideraciones Finales

En la discusión de los diferentes tipos de sistemas SS siempre hemos supuesto que la portadora y las secuencias PN son idénticas y sincronizadas tanto en el transmisor como en el receptor. Pero en la práctica la situación es muy diferente, siendo necesario disponer en el receptor de circuitos especiales para la generación de la portadora y de la secuencia PN en perfecta sincronización con el transmisor. En particular, la sincronización de las secuencias PN es mucho más complicada pues requiere circuitos especiales de adquisición y rastreo. La operación de sincronización generalmente se hace a altas velocidades y consta de dos etapas: en la primera etapa se efectúa una sincronización “gruesa” en la cual la secuencia PN del receptor difiere en uno o pocos “chips” de la secuencia PN en el transmisor. A continuación se realiza una sincronización “fina” que sincroniza las dos secuencias. Esto completa la primera etapa. Alcanzada la sincronización, en la segunda etapa el receptor intenta mantener alineada la secuencia PN local lo más cerca posible de la secuencia PN del transmisor; ésta es la denominada operación de “seguimiento o rastreo”, aunque en algunos sistemas el transmisor envía secuencias especiales para mantener la sincronización.

En general, en los sistemas SS la operación de sincronización de portadora y secuencias PN es muy complicada y para ello en la práctica se han desarrollado circuitos y técnicas especiales que permiten una sincronización más rápida y eficiente. Para más detalles sobre estos sistemas tanto en DSSS como en FHSS, el lector puede consultar [Ziemer y Peterson, 1985; Dixon, 1984; Cooper y McGillen, 1986] y en particular, la Recomendación SM.1055 del UIT-R.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.10. RESUMEN

Los sistemas modernos de comunicación se están digitalizando en forma acelerada y en este capítulo se dan los fundamentos de los mecanismos básicos teóricos que permiten conocer el funcionamiento, operación y comportamiento de los sistemas digitales comúnmente utilizados en la práctica. Como primer paso se desarrolla el concepto de muestreo de señales, se explica los diferentes teoremas, se discute las ventajas y problemas de la operación de muestreo y se ilustra su aplicación mediante ejemplos sencillos. La teoría del muestreo es fundamental en los sistemas digitales.

Se han desarrollado los principios básicos de las técnicas más comunes de la modulación analógica y digital de impulsos. Se ha visto, por lo menos teóricamente, que una señal analógica se puede modular y recuperar utilizando las técnicas de modulación analógica PAM, PDM y PPM, y las técnicas de modulación digital PCM, DPCM y DM. Todos estos esquemas de modulación se tratan con cierto detalle y en particular se estudian sus características de ancho de banda y relaciones S/N.

En la transmisión y recepción de impulsos en banda de base se tratan algunos aspectos tales como las técnicas de multiplicidad por división de tiempo (TDM), la interferencia intersímbolo, los códigos de línea y la teoría básica del filtro acoplado, conceptos que se ilustran mediante ejemplos tomados, en su mayoría, de la práctica.

Un aspecto de considerable importancia es la transmisión de señales digitales mediante portadora modulada. Se introduce los métodos de demodulación coherente y no coherente, se discute los problemas de la sincronización de portadora y de temporización, y se presentan algunos circuitos de sincronización ampliamente utilizados en la práctica diaria.

En este capítulo se desarrolla, asimismo, las técnicas básicas de la modulación binaria y m-aria. En particular, se estudia las características de los sistemas binarios ASK, FSK, PSK y DPSK, y los sistemas m-arios PSK M-ario, DPSK M-ario y FSK M-ario de Banda Ancha, con énfasis en sus características espectrales para el cálculo del ancho de banda, de las relaciones S/N y la probabilidad de error correspondientes. En cuanto a las aplicaciones, se hace continuamente referencia a las distintas normas y recomendaciones del UIT-T y la FCC de los Estados Unidos.

Entre los sistemas de modulación que están en proceso de desarrollo se destaca el sistema de modulación mediante dispersión del espectro (Spread Spectrum, SS) por sus características anti-interferentes y baja probabilidad de interceptación. Esto incluye un estudio de sus dos tipos principales: el sistema SS de secuencia directa (DSSS) y el sistema SS por conmutación de frecuencias (FHSS). Se analizan los correspondientes modelos de transmisor y receptor, y mediante el cálculo de sus propiedades espectrales se obtiene la probabilidad de error, con la cual se caracteriza su comportamiento. Una aplicación muy importante del concepto de espectro disperso es la forma de acceso múltiple CDMA. Este método de acceso permite la utilización de la misma banda de frecuencias para la transmisión de señales de múltiples usuarios que transmiten simultáneamente. Se calcula la probabilidad de error y se demuestra que el sistema CDMA puede atender a muchos usuarios pero a costas de una disminución en la calidad de la transmisión.

Dada la característica introductoria de este capítulo, todos los conceptos teóricos se han presentado sin profundizar demasiado en sus formas más complejas que requieren métodos de análisis mucho más avanzados desde el punto de vista matemático. No obstante, los conocimientos aquí impartidos son suficientes para el estudiante de pregrado y para el ingeniero no especialista que desee una introducción no estadística a la teoría de las comunicaciones.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

- 5.1. La señal $x(t) = 10 \cos(2\pi t) + 4 \cos(5\pi t) + 2 \cos(7\pi t)$ se muestrea en forma instantánea a una frecuencia de 4 Hz. La señal muestreada se pasa por un filtro ideal pasabajo de ganancia unitaria y ancho de banda de 4 Hz.

Demuestre que la salida del filtro es

$$y(t) = 4[2 \cos(\pi t) + 10 \cos(2\pi t) + 4 \cos(3\pi t) + 4 \cos(5\pi t) + 10 \cos(6\pi t) + 2 \cos(7\pi t)]$$

- 5.2. La señal $x(t) = 5 \cos(2\pi \times 10^3 t) \cos(600\pi t)$ se muestrea a una frecuencia de 2100 muestras por segundo. El muestreo se efectúa mediante una señal periódica rectangular de amplitud unitaria y ciclo de trabajo igual 0,5. La señal muestreada se pasa por un filtro ideal pasabajo, de ganancia igual a 2 y ancho de banda de 1600 Hz.

(a) Demuestre que la señal de salida del filtro es

$$y(t) = 5 \cos(600\pi t) \left[\cos(2000\pi t) + \frac{2}{\pi} \cos(2200\pi t) \right]$$

(b) Si la frecuencia de muestreo fuera de 1800 muestras por segundo, demuestre que

$$y(t) = 5 \cos(600\pi t) \left[\cos(200\pi t) + \frac{2}{\pi} \cos(1600\pi t) \right]$$

- 5.3. Sea el sistema de la Fig. 5.97, donde

$$x(t) = \text{sinc}(t); \quad h(t) = \text{sinc}(4t)$$

$$p(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} \cos(2\pi n t)$$

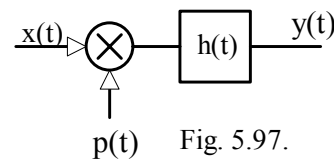


Fig. 5.97.

- (a) Demuestre que $y(t) = \frac{1}{2\pi} \text{sinc}(t) \cos(2\pi t)$. Dibuje su espectro $Y(f)$.
- (b) Determine el diagrama de bloques de un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.
- 5.4. La señal $x(t) = 50 \text{sinc}^2(10t)$ se muestrea mediante una señal periódica rectangular, de período igual al intervalo de Nyquist y relación de trabajo igual a 0,2. Grafique el espectro de la señal muestreada en el intervalo de frecuencias (-10 Hz, 150 Hz). Determine la amplitud máxima del espectro centrado en la frecuencia de 100 Hz.
- 5.5. En la Fig. 5.98 se muestra el espectro de una señal dada. Esta señal se muestrea en forma instantánea y se pasa por un filtro cuya función de transferencia es $H(f) = \Pi(f/2B)$.

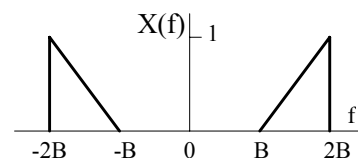


Fig. 5.98.

Demuestre que si el muestreo se ha efectuado a una frecuencia de B muestras por segundo, la salida es $y(t) = 2B^2 \text{sinc}(2Bt)$; pero si el muestreo se ha efectuado a $2B$ muestras por segundo, la salida es $y(t) = 2B^2 \text{sinc}^2(Bt)$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- 5.6. Demuestre que la frecuencia de muestreo mínima necesaria para muestrear la señal $x(t) = 20 \cos(10^4 \pi t) \cos(3,9 \times 10^5 \pi t)$ es de 20 kHz. Dibuje el espectro de la señal muestreada entre $n = -5$ y $n = 5$.
- 5.7. Se desea muestrear la señal $x(t) = 15 \exp(-10^3 |t|)$. Demuestre que el límite inferior de la frecuencia de muestreo es:
- (a) $f_s = 204,86$ Hz cuando el ancho de banda de la señal es el de 3 dB.
- (b) $f_s = 500$ Hz cuando el ancho de banda de la señal se calcula según la expresión (1.115).
- 5.8. Sea la señal periódica de la Fig. 5.99. Esta señal se va a emplear para muestrear la señal $x(t) = 2 \times 10^{-3} \text{sinc}^2(500t)$.

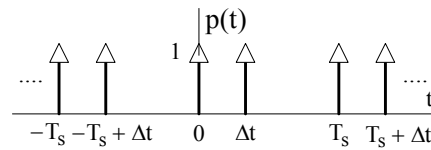


Fig. 5.99.

- (a) Demuestre que el espectro $P(f)$ de $p(t)$ viene dado por

$$P(f) = 2f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\pi f_s \Delta t) \exp(-jn\pi f_s \Delta t) \delta(f - nf_s)$$

donde $f_s = 1/T_s$. [Sugerencia: utilice la expresión (1.105)].

- 5.9. Se tiene una señal $x(t)$ pasabaja de banda limitada f_m . Esta señal se muestrea y se pasa por un filtro pasabaja RC de tal manera que haya una banda de guarda de ancho B_g entre el valor B del ancho de banda del filtro y la frecuencia inferior del espectro centrado en f_s . El valor B es el ancho de banda del filtro de acuerdo con la expresión (2.79). Suponga que $(1/RC) = 2\pi f_m$.

Demuestre que la frecuencia de muestreo necesaria es $f_s = 3f_m + B_g$. Demuestre también que si el ancho de banda del filtro es el de 3 dB, entonces la frecuencia de muestreo será $f_s = 2f_m + B_g$.

- 5.10. Consideremos la distorsión de solapamiento mostrada en la Fig. 5.15. Vamos a cuantificar la distorsión de solapamiento definiéndola como “la relación entre la energía de los espectros adyacentes reflejada sobre la gama de baja frecuencia y la energía de la señal dentro de esa gama”. De acuerdo con esta definición, demuestre que el Factor de Solapamiento debido a los espectros adyacentes se puede expresar en la forma

$$\text{Factor de Solapamiento, } F_s \% = \frac{\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df}{\int_0^{f_s/2} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.212)$$

Si la ganancia del filtro es constante en la gama $|f| \leq f_s/2$, entonces

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

$$F_s \% = \frac{\int_{f_s/2}^{3f_s/2} |X(f)|^2 df}{\int_0^{f_s/2} |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.213)$$

Si $x(t)$ está caracterizada mediante su densidad espectral de potencia $S_x(f)$, entonces $S_x(f)$ reemplaza a $|X(f)|^2$ en las expresiones anteriores.

Utilizando (5.213) demuestre que cuando se muestrea la señal $x(t) = 15 \exp(-10^3 |t|)$, con $f_s = 500$ Hz, el factor de solapamiento es del 7,403%.

- 5.11. En general, las señales de información prácticas no son estrictamente limitadas en banda, de modo que teóricamente cuando ellas se filtran para limitarlas en banda se produce distorsión.

Consideremos el espectro de la Fig. 5.100, donde $X(f)$ es el espectro de la señal de información $x(t)$. El área rayada representa entonces la pérdida de señal producida por la limitación de banda debida al filtro.

- (a) Demuestre que el “Factor de Distorsión por Limitación de Banda” viene dado por

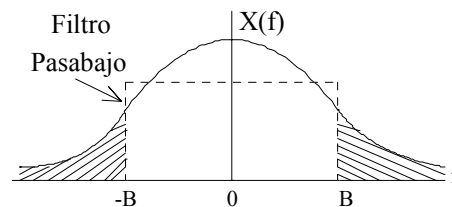


Fig. 5.100.

$$F_B \% = \frac{\int_{-B}^B |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.214)$$

- (b) Si $B = 5$ kHz, determine el factor $F_B \%$ para las siguientes señales:

$$1. \quad x(t) = 8 \operatorname{sinc}^2(8 \times 10^3 t); \quad 2. \quad x(t) = 10 \exp(-10^4 |t|)$$

- 5.12. Igualmente que en los dos problemas anteriores, se puede cuantificar la Distorsión de Interpolación. Si se considera solamente la energía de los espectros adyacentes que pasa a la salida, demuestre, a partir de la Fig. 5.16, que el “Factor de Distorsión de Interpolación” se puede expresar en la forma

$$F_I \% = \frac{\int_{f_s - f_m}^{f_s + f_m} |H(f)|^2 |X(f - f_s)|^2 df}{\int_0^{f_m} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df} 100 \quad (5.215)$$

Si $x(t) = 2f_m \sin c(2f_m t)$, donde $f_m = 1/2\pi RC$ y $f_s = 3f_m$, demuestre que el factor de distorsión de interpolación producido por un filtro pasabajas RC es del 27,842%.

- 5.13. Sea la señal $x(t) = 8 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{1,25 \times 10^{-4}}\right) \cos(1,94 \times 10^5 \pi t)$.

- (a) Demuestre que la frecuencia mínima de muestreo es de 35 kHz y diga las características del filtro necesario para recobrar la señal.

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

(b) Calcule el espectro de la señal muestreada y dibújelo en el intervalo (-140 kHz, 140 kHz)

5.14. Sea el sistema de la Fig. 5.101, donde $x(t)$ es una señal pasabajo de banda limitada f_m .

(a) Demuestre que la salida $y(t)$ es

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

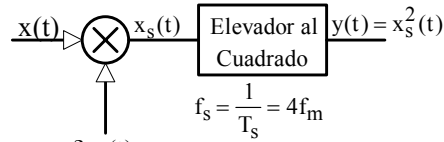


Fig. 5.101.

(b) Dibuje el espectro $Y(f)$ cuando $x(t) = 2f_m \text{sinc}(2f_m t)$

5.15. En el muestreo con retención se utiliza un filtro de orden cero dado por (5.25); sin embargo, $h(t)$ puede tener cualquier perfil, por ejemplo,

(a) Si $h(t) = \cos(\frac{\pi t}{T_s})$ para $|t| \leq \frac{T_s}{2}$, donde $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{4f_m}$ y $X(f) = \Pi(\frac{f}{2f_m})$, calcule y dibuje $X_s(f)$ en la forma mostrada en la Fig. 5.11.

(b) Repita cuando $h(t) = \Lambda(2f_m t)$, con $T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{3f_m}$

5.16. Sea el sistema mostrado en la Fig. 5.102, donde $x(t)$ es una señal pasabajo de banda limitada f_m . f_s es la frecuencia de Nyquist de $x(t)$.

(a) Demuestre que el espectro $X_i(f)$ de $x_i(t)$ es

$$X_i(f) = 2f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[f - (2n+1)f_m], \quad \text{donde}$$

$$f_s = 1/T_s = 2f_m$$

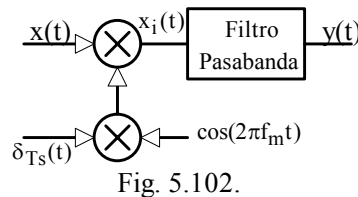


Fig. 5.102.

(b) Si $x(t) = \text{sinc}^2(f_m t)$, grafique el espectro de $x_i(t)$.

(c) Si la banda de paso del filtro está entre $3f_m$ y $5f_m$, y su ganancia es unitaria, demuestre que $y(t) = 4f_m [2\text{sinc}(2f_m t) - \text{sinc}^2(f_m t)] \cos(8\pi f_m t)$ cuando $x(t) = \text{sinc}^2(f_m t)$.

5.17. En un sistema PDM se observa que el ancho de los impulsos viene dado por la expresión

$$\tau(t) = 10^{-3} [1 + 0,5 \cos(\frac{10^3 \pi t}{3})].$$

Demuestre que el ancho de banda mínimo para transmitir la señal PDM es de 2 kHz, y que su período es $T_s = 3 \text{ ms}$.

5.18. La señal $m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t)$ se va a modular en PDM en la forma mostrada en la Fig. 5.23. Suponga que $|\min m(t)| = A/2$. Note también que $[\min \text{sinc}(t)] \approx -0,2172$ para $t = 1,425 \text{ seg}$

(a) Determine los valores apropiados de los parámetros T_s , A , V_p y V_u .

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- (b) Considerando la geometría de la señal $v_d(t)$, Fig. 5.23, demuestre que

$$B_{\text{MIN}} \approx \frac{2f_m V_p}{V_p + A - |\min m(t)| - V_u} = \beta_m f_m; \quad V_p = \frac{\beta_m}{\beta_m - 2} [V_u + |\min m(t)| - A]$$

donde $\beta_m > 2$, es el factor de expansión del ancho de banda.

- 5.19. La señal $m(t) = 10 \cos^2(5 \times 10^3 \pi t)$ se va a modular en PAM, PDM y PPM. La relación de trabajo del tren de impulsos sin modular es de 0,2. Determine las relaciones de expansión del ancho de banda y las ganancias de conversión correspondientes.
- 5.20. En la Sección 5.3.4 se calculó la ganancia de conversión en PPM suponiendo que los impulsos tenían forma trapezoidal, Fig. 5.29 y 5.30, y expresiones (5.69) y (5.70).

Utilizando el mismo procedimiento, demuestre que cuando los impulsos tienen la forma de

coseno elevado $\left\{ p(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \right] \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\}$, la ganancia de conversión es

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{B}{2f_m} - 1 \right)^3 \quad (5.216)$$

$$\text{Si } B \gg f_m, \text{ entonces } \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{B}{f_m} \right)^3 = \frac{\pi^2}{24} \beta_m^3 \quad (5.217)$$

Comparando este resultado con (5.70), podemos ver que el comportamiento del sistema PPM que utiliza impulsos en coseno elevado es superior en 8,18 dB al que utiliza impulsos trapezoidales.

- 5.21. (a) Demuestre, a partir de la expresión (5.60), que la amplitud de la componente a la frecuencia de portadora f_s en PPM viene dada por

$$A_s = 2A f_s [1 - m_t m'(t)] \cdot J_0(2\pi f_s m_t) \quad (5.218)$$

Obsérvese que la amplitud A_s varía en el tiempo en función de la derivada de la señal mensaje. Esto quiere decir que si $m'(t) \neq 0$, la información de temporización no puede extraerse de $x_{\text{PPM}}(t)$. Como consecuencia, en el sistema PPM hay que transmitir también la información de temporización.

- (b) Demuestre en la misma forma en PDM que la amplitud de la componente a la frecuencia de portadora f_s es, de (5.53),

$$A_s = \frac{2A}{\pi} J_0(\pi \tau_1 f_s) \text{sen}(\pi \tau_0 f_s) \quad (5.219)$$

Obsérvese que ahora A_s es constante; por lo tanto, la componente a la frecuencia f_s se puede extraer de $x_{\text{PDM}}(t)$. Esto se puede efectuar mediante un filtro pasabanda muy angosto centrado en f_s , o con el circuito de la Fig. 5.61.

- (c) Demuestre que en PAM se cumple que $A_s = \frac{2A}{\pi} \text{sen}(\pi \tau f_s)$ (5.220)

Se aplican las mismas observaciones que en la parte (b).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- 5.22. Una señal de audio tiene una frecuencia máxima de 3,2 kHz. Esta señal se muestrea a 8000 muestras por segundo y los impulsos resultantes se transmiten tanto en PAM como en PCM, ambos NRZ.
- Demuestre que el ancho de banda mínimo del sistema PAM es de 8 kHz.
 - En el sistema PCM los impulsos PAM se cuantifican con un cuantificador bipolar de 32 niveles. Demuestre que el ancho de banda del sistema PCM es de 40 kHz. Nótese que el ancho de banda en PCM es 5 veces mayor que el ancho de banda en PAM.
 - Repita la parte (b) cuando el cuantificador tiene 256 niveles. Si el voltaje máximo de salida del cuantificador es de $\pm 8V$, demuestre que la resolución del cuantificador es de 31,37 mV y que la relación de postdetección $S_o / N_o = 48,16$ dB.
- 5.23. Una señal analógica tiene una duración de 1 minuto. Su contenido espectral va desde CC hasta 500 Hz. La señal se va a muestrear, convertir en PCM binario y almacenar en la memoria de una computadora.
- Demuestre que el número mínimo de muestras que hay que tomar y almacenar para el caso de una eventual reconstrucción de la señal es de 60000 muestras.
 - Si cada muestra se ha codificado en 8 impulsos PCM binarios, demuestre que la capacidad de la memoria para almacenar la señal PCM debe ser, como mínimo, de 60 kbytes.
- 5.24. La señal $m(t) = 5 + 20 \cos^2(10^4 \pi t)$ se quiere modular en PAM (RZ) con una relación de trabajo de 0,2. El muestreo se efectúa al doble de la frecuencia de Nyquist.
- Demuestre que el factor de expansión del ancho de banda es igual a 20. Determine también la ganancia de conversión en el receptor.
 - Dibuje con cuidado la señal PAM entre $0 \leq t \leq 130 \mu\text{seg}$, y determine los valores de $x_{\text{PAM}}(t)$ para $t = T_s$ y $t = 2T_s$.
 - Si la señal PAM se codifica (forma unipolar) en PCM de 32 niveles y resolución 0,5 V, dibuje la señal PCM entre 0 y 75 μseg , y calcule su ancho de banda.
- 5.25. La señal $m(t) = 0,05 \cdot [1 - \cos(10\pi t)]$ se aplica a un modulador Delta cuya frecuencia de muestreo es de 100 Hz, con escalones de 10 mV de amplitud.
- Dibuje cuidadosamente las señales $m(t)$, $\bar{m}(t)$ y $x_\Delta(t)$ en la forma mostrada en la Fig. 5.42, entre $t = 0$ y $t = 100$ ms.
 - Demuestre que la relación S_o/N_o máxima es de 21,761 dB, la cual es producida por una frecuencia de muestreo de 314,16 Hz.
- 5.26. A un modulador Delta se le aplica la señal $m(t) = \sin(2\pi \times 10^3 t)$, siendo la frecuencia de muestreo igual a 64 kHz.
- Demuestre que el valor óptimo teórico de la amplitud del escalón Δ_r es de 0,09817 y que la correspondiente relación S_o/N_o es de 21,92 dB.
- 5.27. Se desea comparar los anchos de banda de transmisión requeridos en PCM y DM en el caso de modulación sinusoidal. Si la relación Señal / Ruido de Cuantificación es de 30,099 dB en ambos sistemas, demuestre que $B_{\text{PCM}} = 10f_m$ y $B_{\text{DM}} = 328,17f_m$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Por consiguiente, en las condiciones dadas, el ancho de banda en DM es 32,8 veces el ancho de banda en PCM.

- 5.28. Se quiere comparar los sistemas PCM y DM mediante el factor de expansión del ancho de banda $\beta_m = B / f_m$.

Grafique $\left[\frac{S_o}{N_q} \right]_{\text{PCM(dB)}}$ y $\left[\frac{S_o}{N_q} \right]_{\text{DM(dB)}}$ vs β_m

Discuta los resultados.

- 5.29. M señales pasabajo, todas de banda limitada f_m se muestrean instantáneamente y se multiplexan en TDM. La señal multiplexada compuesta se pasa por un filtro pasabajo ideal antes de la transmisión.
- Demuestre que el valor del ancho de banda mínimo del filtro a fin de que las señales individuales puedan recuperarse en el receptor es $B = 2Mf_m$.
 - Repita (a) si las M señales se multiplexan en la forma mostrada en la Fig. 5.47(b), siendo R_T el ciclo de trabajo de la señal PAM/TDM [Resp.: $B = 2Mf_m/R_T$]
 - Haga un diagrama de bloques del receptor para recuperar las M señales individuales.
 - La señal PAM/TDM compuesta se codifica en ASCII sin bit de paridad. Demuestre que en este caso la velocidad de modulación es $V_b = 20Mf_m$ baudios.
- 5.30. La señal $m(t) = 10[1 + \cos(10^4 \pi t)]$ se va a codificar en PCM NRZ mediante un convertidor analógico-digital de salida paralela, la cual se transforma en serie mediante un registro de desplazamiento, Fig. 5.37(a). El error máximo tolerable en la codificación es del 0,1957% del valor máximo de $m(t)$. Suponga que el muestreo de $m(t)$ se ha efectuado al doble de la frecuencia de Nyquist.
- Determine las características del convertidor analógico-digital: ΔQ , $V_{q\max}$, N y n .
Sugerencia: utilice los resultados del Ejemplo 5.9.
 - En el registro de desplazamiento se agrega un impulso de arranque (siempre a “CERO”) y uno de pare (siempre a “UNO”). El impulso de arranque tiene la misma duración que los impulsos PCM NRZ, mientras que en los impulsos de pare la duración es el doble. En este caso determine la frecuencia de reloj del registro de desplazamiento y el ancho de banda mínimo de la señal transmitida.
 - Grafique la forma de las secuencias PCM NRZ correspondientes a $t = 0$ y $t = T_s$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.31. En la Fig. 5.103 se muestra un sistema TDM básico para cuatro señales.

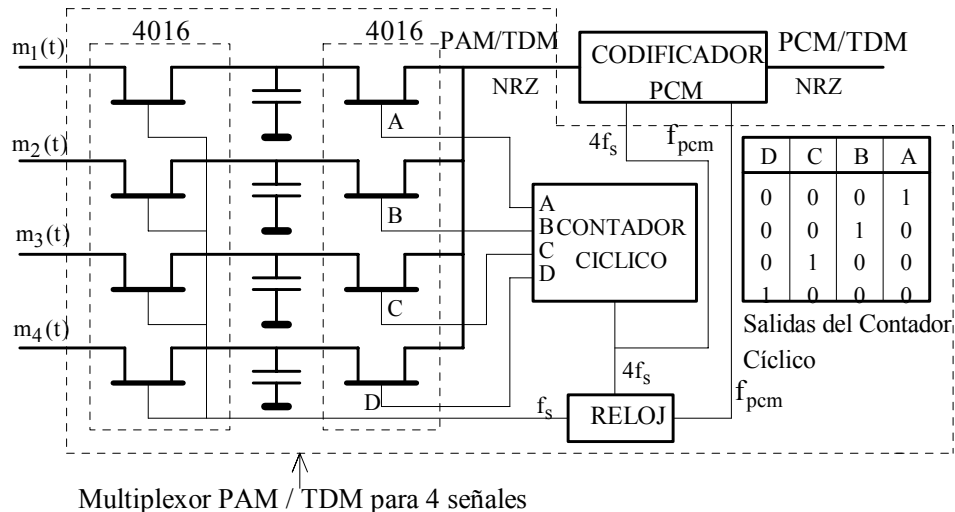


Fig. 5.103.

Este multiplexor se puede instrumentar en la práctica con circuitos integrados 4016. Las compuertas analógicas 4016 conducen cuando son activadas en secuencia mediante un contador cíclico, cuya salida ABCD se muestra en la Tabla inserta. Al multiplexor entran las siguientes señales:

$$m_1(t) = A\Lambda\left(\frac{t-\tau/2}{\tau/2}\right); \quad m_2(t) = A\Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right); \quad m_3(t) = A\left[\Lambda\left(\frac{t-\tau/4}{\tau/4}\right) + \Lambda\left(\frac{t-3\tau/4}{\tau/4}\right)\right];$$

$$m_4(t) = \frac{A}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right] \cdot \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right). \quad \text{Suponga que } \tau = 0,8 \text{ seg y que la frecuencia } f_s \text{ es de } 10 \text{ Hz.}$$

- Describa el funcionamiento del circuito completo.
 - Si $A = 1$, dibuje la forma de la señal PAM / TDM NRZ a la entrada del codificador PCM desde $t = 0$ hasta $t = 4 T_s$.
 - Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal para transmitir la señal PAM / TDM NRZ es $B = 10 \text{ Hz}$.
 - Si $A = 15 \text{ V}$ y los parámetros del codificador (unipolar) PCM son $\Delta Q = 1 \text{ V}$ y $N = 16$, dibuje la forma de la señal PCM / TDM NRZ a la salida del codificador PCM desde $t = 0$ hasta $t = 2 T_s$.
 - Calcule el ancho de banda mínimo del canal para transmitir la señal PCM / TDM NRZ.
 - ¿Cuál es el valor de la frecuencia f_{pcm} ?
- 5.32. Las señales $m_1(t) = 5 \cos(10^4 \pi t)$; $m_2(t) = 10 \text{sinc}(10^4 t)$; $m_3(t) = 10 \text{sinc}^2(10^4 t)$ y $m_4(t) = 20 \cos(10^4 \pi t) \cos(2 \times 10^3 \pi t)$, se multiplexan en TDM en la forma mostrada en la Fig. 5.100 del problema anterior, y a continuación la señal PAM / TDM se codifica en PCM, código ASCII sin bit de paridad (Fig.4.14(b)).

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- (a) Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal para transmitir la señal PCM es de 800 kHz.
- (b) Demuestre que la cantidad de información que el sistema puede transmitir en 1 minuto es de $3,36 \times 10^7$ bits.
- (c) Diseñe un sistema de recepción para la recuperación de las diferentes señales.
- 5.33. En un sistema de telemetría PAM / TDM se multiplexan cuatro señales pasabajo $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ y $m_4(t)$. Las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ tienen un ancho de banda de 80 Hz, mientras que las señales $m_3(t)$ y $m_4(t)$ tienen un ancho de banda de 1 kHz. La frecuencia de muestreo para $m_3(t)$ y $m_4(t)$ es de 2400 Hz. Suponga que las otras frecuencias de muestreo se pueden obtener mediante división por potencias de 2 a partir de 2400 Hz.

Diseñe un sistema PAM / TDM que efectúe un multiplexaje preliminar de $m_1(t)$ y $m_2(t)$ en una señal compuesta $m_{12}(t)$, y un multiplexaje final de $m_{12}(t)$, $m_3(t)$ y $m_4(t)$.

- (a) Demuestre que la frecuencia de muestreo para el proceso previo de $m_1(t)$ y $m_2(t)$ es de 300 Hz.
- (b) Demuestre que el sistema de dos etapas puede procesar hasta 8 señales de 80 Hz sin variar las frecuencias de muestreo.
- (c) Determine el ancho de banda de la señal resultante PAM / TDM NRZ cuando se transmite las 8 señales de 80 Hz y las dos de 1 kHz. ¿Es diferente del ancho de banda de cuando se transmite sólo 2 señales de 80 Hz más las dos señales de 1 kHz? Explique.
- 5.34. Se desea construir una red lineal que convierta impulsos rectangulares en impulsos coseno elevado, es decir, una red donde la entrada sea $x(t) = A\Pi(\frac{t}{\tau})$ y la salida tenga la forma

$y(t) = \frac{A}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi t}{\tau})] \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$. Demuestre que la función de transferencia de esta red es

$$H(f) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \tau^2 f^2} \quad \text{para } |f| < \frac{1}{\tau}$$

- 5.35. La señal de entrada a un filtro acoplado tiene la forma mostrada en la Fig. 5.104. El ruido de entrada tiene una densidad espectral de potencia $S_n(f)$.

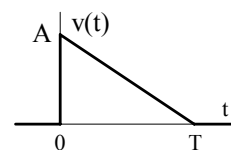


Fig. 5.104.

- (a) Demuestre que la función de transferencia del filtro acoplado es

$$H(f) = \frac{kA}{S_n(f)} \frac{1}{4T(\pi f)^2} [(1 + j2\pi T f) \exp(-j2\pi T f) - 1]$$

donde k es la constante de la expresión (5.134).

- (b) Si $A = 10$; $T = 1$ seg, el ruido es blanco con $\eta = 10^{-6}$ W/Hz y $k = \eta/2$, demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado es $z_{\max} = 78,239$ dB.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

5.36. El impulso coseno elevado de la Fig. 5.105 se aplica a un filtro acoplado. El ruido de entrada es blanco de densidad espectral $\eta/2$ y $k = \eta/2$.

- (a) Demuestre que la correspondiente función de transferencia del filtro acoplado es

$$H(f) = H_1(f) \cdot \exp(-j\pi T f)$$

$$\text{donde } H_1(f) = \frac{A}{2\pi f} \frac{\sin(\pi T f)}{(1 - T^2 f^2)}$$

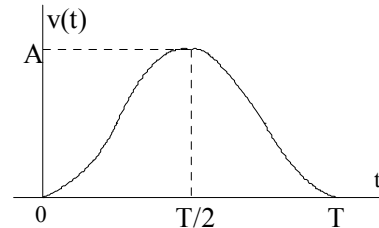


Fig. 5.105.

- (b) Si $A = 10$; $T = 1$ seg, $\eta = 10^{-6}$ W/Hz, demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado es $z_{\max} = 78,751$ dB.

5.37. Vamos a comparar el comportamiento entre un filtro pasabajo RC y un filtro acoplado. La señal de entrada es un impulso de la forma $v(t) = A\Pi(\frac{t-T/2}{T})$, el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$ y $k = \eta/2$.

Para el filtro RC

- (a) Demuestre que la señal a la salida del filtro RC es

$$v_o(t) = A \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right] \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + A \left[\exp\left(-\frac{t-T}{RC}\right) - 1 \right] u(t-T)$$

- (b) Demuestre que la potencia de ruido a la salida del filtro es $\langle n_o^2(t) \rangle = \frac{\eta}{4RC}$

- (c) Si $T = 1$ seg, $A = 10$, $RC = 10$ y $\eta = 10^{-6}$ W/Hz, demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro RC es

$$z_{\max} = \frac{|v_o(T)|^2}{\langle n_o^2(t) \rangle} = 75,59 \text{ dB}$$

Para el filtro acoplado:

- (d) Demuestre que la función de transferencia del filtro acoplado es

$$H(f) = AT \text{sinc}(Tf) \exp(-j\pi T f)$$

- (e) Demuestre que la relación S/N máxima a la salida del filtro acoplado, para los mismos valores de la parte (c), es $z_{\max} = 83,01$ dB.

Nótese la superioridad del filtro acoplado: en las mismas condiciones que el filtro RC, su relación S/N máxima de salida es superior en 7,42 dB.

5.38. Sobre un canal telefónico de 3 kHz de ancho de banda se transmite datos binarios. La relación S/N máxima en el canal es de 6,0206 dB. Se considera ASK Coherente.

- (a) Demuestre que la velocidad de información máxima en el canal es de 1500 bps y que la probabilidad de error es de $2,339 \times 10^{-3}$.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- (b) Demuestre que si la velocidad de información se reduce a 300 bps, la probabilidad de error será de $1,0306 \times 10^{-10}$.
- 5.39. Se transmite datos binarios por un canal de RF. El ancho de banda útil del canal es de 10 MHz. La velocidad de información es de 4,8 Mbps y se utiliza modulación ASK. La amplitud de la portadora en la antena del receptor es de 1 mV y la densidad espectral de potencia del ruido es de 10^{-15} W/Hz.
- (a) Demuestre que las probabilidades de error son:
- En ASK Coherente: $P_e = 1,672 \times 10^{-7}$
- En ASK no Coherente: $P_e = 1,1068 \times 10^{-6}$
- (b) Demuestre que el valor, en dB, de la relación S/N en la antena es de 10,969 dB.
- 5.40. En la expresión (5.147) y Fig. 5.62, se da la densidad espectral de potencia de una señal ASK para una secuencia binaria unipolar NRZ.
- (a) Demuestre que la potencia contenida dentro del ancho de banda $B = 2f_b$, centrado en f_c , es el 95% de la potencia total de la señal ASK.
- Sugerencia: utilice el mismo procedimiento del Ejemplo 1.19.
- (b) Demuestre que el 50% de la potencia total de la señal ASK se va en transmitir la componente continua o portadora.
- 5.41. Sobre un canal se transmite datos binarios en FSK. El ancho de banda útil del canal es de 3 kHz. Las frecuencias de transmisión son $f_1 = 1500$ Hz y $f_0 = 2100$ Hz. Se utiliza un modem que trabaja a una velocidad de modulación de 300 baudios. La relación S/N en el canal es de 6,0206 dB.
- Demuestre los siguientes resultados:
- frecuencia de portadora, $f_c = 1800$ Hz; desviación de frecuencia, $f_d = 300$ Hz
- Ancho de banda del filtro de entrada, $B = 1200$ Hz;
- Probabilidad de error en FSK Coherente: $P_e = 2,339 \times 10^{-3}$
- Probabilidad de error en FSK no Coherente: $P_e = 9,158 \times 10^{-3}$
- 5.42. El Módem Bell 102/113 transmite a 300 bps, igual que el Módem UIT-T V.21, pero sus frecuencias de operación son: en la banda inferior, $f_1 = 1070$ Hz y $f_0 = 1270$ Hz; y en la banda superior, $f_1 = 2025$ Hz y $f_0 = 2225$ Hz. La amplitud de la portadora es 0,5 mV y la densidad espectral de ruido en el sistema es de 10^{-11} W/Hz.
- Repita para este Módem Bell los cálculos efectuados en el Ejemplo 5.18, parte (b). Compare los resultados.
- 5.43. Sea los sistemas ASK, FSK y PSK, de amplitud de portadora A y frecuencia de señalización f_b . La potencia de ruido en los tres sistemas es la misma.
- (a) Demuestre que para una misma probabilidad de error P_e y en modulación coherente,

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{ASK}} = \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{FSK}} = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{\text{PSK}}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- (b) Si la relación S_i/N_i en el canal es de 10 dB, la velocidad de transmisión de 1200 bps y la densidad espectral de 10^{-10} W/Hz, determine la amplitud de la portadora y la probabilidad de error en ASK, FSK y PSK Coherentes.
- 5.44. Un canal ideal tiene un ancho de banda útil de 3 kHz. La potencia promedio máxima permitida de la señal es de -30 dBm y en el canal la densidad espectral es de 2×10^{-11} W/Hz.
- (a) Demuestre que la capacidad teórica máxima del canal es $C = 9667$ bps.
- (b) Se utiliza las técnicas FSK y PSK. Demuestre que la velocidad de información máxima que el canal puede soportar es de 1500 bps.
- (c) Para la velocidad de información calculada en (b), demuestre que las probabilidades de error son:

En FSK Coherente: $P_e = 2,229 \times 10^{-5}$

En PSK Coherente: $P_e = 3,882 \times 10^{-9}$

- 5.45. Se dispone de un canal cuya respuesta de frecuencia se muestra en la Fig. 5.106, y por el cual se va a transmitir información binaria a 300 baudios en FSK. La relación S/N en el canal es igual a 3,01 dB y la densidad espectral de potencia del ruido de 2×10^{-10} W/Hz.

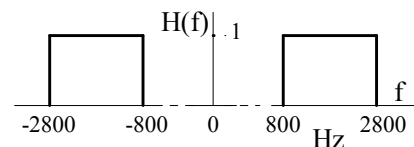


Fig. 5.106.

- (a) Demuestre que los valores apropiados de la frecuencia de portadora y de las frecuencias f_o y f_i son:
- $f_c = 1800$ Hz; $f_i = 1100$ Hz; $f_o = 2500$ Hz
- (b) Demuestre que la amplitud de la portadora es de 0,98 mV.
- (c) Demuestre que las probabilidades de error en FSK Coherente y no Coherente son:
- Coherente: $P_e = 2,275 \times 10^{-2}$; No Coherente: $P_e = 6,767 \times 10^{-2}$
- (d) Demuestre que la capacidad teórica máxima de este canal es $C = 3170$ bps.
- 5.46. Al codificador diferencial de la Fig. 5.73 se le aplica una secuencia binaria de la forma 1101000110.
- Determine la secuencia de salida (mensaje codificado) del codificador y las fases de la señal modulada DPSK. Suponga que el primer dígito es un "0" y que la fase correspondiente es 0° .

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- (c) Para la transmisión se utiliza modulación PSK binaria. Demuestre que el ancho de banda mínimo del canal es de 128 kHz.
- (e) Si la transmisión se hace en FSK binaria con una desviación de frecuencia de 40 kHz y una frecuencia de portadora de 1,5 GHz, Demuestre que las frecuencias de operación y el ancho de banda de transmisión son:

$$f_1 = 1,496 \times 10^9 \text{ Hz}; \quad f_0 = 1,504 \times 10^9 \text{ Hz}; \quad B_c = 208 \text{ kHz}$$

- (e) La densidad espectral de ruido en el canal es de 10^{-14} W/Hz . ¿Cuál será la potencia pico de la señal recibida FSK y la relación S/N correspondiente si la probabilidad de error es de $2,038 \times 10^{-8}$? El ancho de banda del canal es el calculado en (d) y la detección es no coherente [Resp.: $A^2 = 7,079 \times 10^{-8} \text{ W}$; $S_i/N_i = 12,309 \text{ dB}$]

- 5.51. En la Fig. 5.109 se muestra un receptor FSK. Un receptor de este tipo se denomina “receptor heterodino”. En el Capítulo VI estudiaremos este concepto con más detalle.

Los filtros FI 1 y FI 0 son pasabanda, centrados en las frecuencias f_{I1} y f_{I0} , respectivamente, donde $f_{I0} > f_{I1}$. La señal de entrada $v_c(t)$ se puede escribir en la forma $v_c(t) = A_c \cos[2\pi(f_c \pm f_d)t]$, y las frecuencias de transmisión son:

$f_1 = 1300 \text{ Hz}$, cuando se transmite un “1”

$f_0 = 1700 \text{ Hz}$, “ “ “ “ “0”

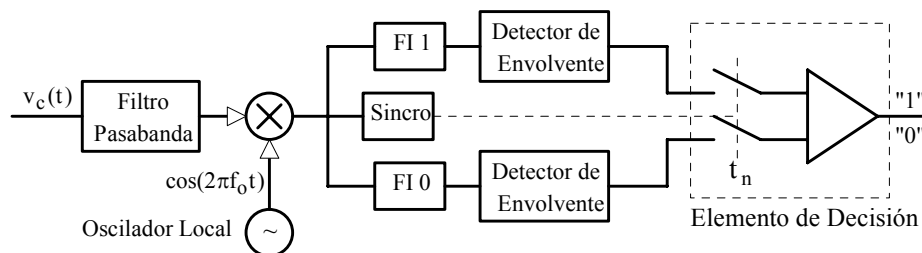


Fig. 5. 109.

Analice el sistema y determine los valores apropiados de las frecuencias f_{I1} , f_{I0} y f_0 , sujeto a las condiciones siguientes:

- Que $\frac{f_{I0} + f_{I1}}{2} = f_c$, donde f_c es la frecuencia de portadora
- Que $1 \text{ kHz} < (f_{I0} - f_{I1}) < 2 \text{ kHz}$

- 5.52. Relaciones entre PSK M-ario y PSK Binario.

- (a) Sea B_B el ancho de banda en binario y B_M el correspondiente en M-ario. Demuestre que $B_B = B_M \log_2 M$.
- (b) Sea P_B la potencia de señal en binario y P_M la correspondiente en M-ario.

$$\text{Demuestre que } P_M = \frac{1,094 \cdot P_B}{[\log_2 M] \sin^2(\frac{\pi}{M})} \quad \text{cuando } P_e = 10^{-4}$$

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

Nota: para $\text{erfc}(x_1) = 2 \times 10^{-4} \rightarrow x_1 \approx 2,6297$

para $\text{erfc}(x_2) = 10^{-4} \rightarrow x_2 \approx 2,751$

5.53. Relaciones entre PSK M-ario y DPSK M-ario.

Sea P_{MPSK} la potencia de señal en PSK M-ario y P_{MDPSK} la correspondiente en DPSK M-ario.

(a) Para una probabilidad de error P_e cualquiera, demuestre que

$$P_{\text{MDPSK}} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi/M)}{\sin^2(\pi/2M)} P_{\text{MPSK}}$$

(b) Verifique que si $M \gg 1$, entonces $P_{\text{MDPSK}} \rightarrow 2 \cdot P_{\text{MPSK}}$; es decir, el sistema DPSK M-ario requiere un aumento de 3 dB de potencia sobre el requerido para PSK M-ario.

5.54. La secuencia binaria de entrada a un modulador DPSK 4-ario tiene una velocidad de modulación de 1200 baudios. El modulador toma bloques de $L = \log_2 4 = 2$ dígitos binarios y le asigna a cada dupla de dígitos, ángulos de desfase en la forma siguiente:

$$00 \rightarrow \phi_1 = 0^\circ; 01 \rightarrow \phi_2 = 90^\circ; 11 \rightarrow \phi_3 = 180^\circ; 10 \rightarrow \phi_4 = 270^\circ$$

La frecuencia de portadora es de 1800 Hz, el ancho de banda del canal es de 3 kHz, la amplitud de la portadora de 1 mV y la densidad espectral de ruido de 10^{-11} W/Hz.

(a) Dibuje el Diagrama de Fresnel correspondiente.

(b) Demuestre que la relación S/N en el canal es de 9,208 dB y que la probabilidad de error es $P_e = 7,795 \times 10^{-7}$.

(c) Si la amplitud de la portadora aumenta al doble, demuestre que la nueva probabilidad de error es $P_e = 5,041 \times 10^{-23}$ y que la relación S/N ha aumentado en 6,021 dB.

(d) Dibuje la señal DPSK 4-aria de salida correspondiente a una secuencia de entrada de la forma **0 0 0 1 1 1 0**. Haga el dibujo con cuidado para poder distinguir los cambios de fase.

5.55. La velocidad de información de la secuencia binaria de entrada a un modulador PSK 8-ario es de 4800 bps. El modulador toma bloques de $L = \log_2 8 = 3$ dígitos y le asigna a cada tripleta ángulos de desfase en la forma siguiente:

$$000 \rightarrow \phi_1 = 45^\circ; 001 \rightarrow \phi_2 = 0^\circ; 010 \rightarrow \phi_3 = 90^\circ; 011 \rightarrow \phi_4 = 135^\circ$$

$$100 \rightarrow \phi_5 = -90^\circ; 101 \rightarrow \phi_6 = -45^\circ; 110 \rightarrow \phi_7 = -135^\circ; 111 \rightarrow \phi_8 = 180^\circ$$

La frecuencia de portadora es de 1600 Hz, el ancho de banda del canal de 3 kHz, la relación S/N de 13 dB y la densidad espectral de ruido de 10^{-10} W/Hz.

(a) Dibuje el Diagrama de Fresnel correspondiente.

(b) Demuestre que la amplitud de la portadora es de 4,893 mV y que la probabilidad de error es $P_e = 9,294 \times 10^{-4}$.

(b) Dibuje la señal PSK 8-aria de salida cuando la secuencia de entrada al modulador es de la forma 001010111100. Haga el dibujo con cuidado para distinguir los cambios de fase.

V. MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE IMPULSOS

- 5.56. Si se considera la señal FSK M-aria como si estuviera formada por M señales de frecuencia f_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, M$, separadas en Δf , demuestre que el ancho de banda de la señal FSK M-aria se puede expresar en la forma $B_c \approx (M - 1)\Delta f + 2f_s$, donde $f_s = f_b / \log_2 M$, siendo f_b la frecuencia de señalización a la entrada del modulador.
- 5.57. Por un canal de microondas se quiere transmitir datos binarios a una velocidad de 3 Mbps y se desea utilizar un modulador PSK 4-ario o uno FSK 4-ario. La probabilidad de error debe ser de 10^{-5} . Elija Ud. el sistema que mejor se adapte a la situación en la cual Ud. está trabajando.

Determine las relaciones $\left[\frac{S}{N}\right]_{\text{PSK}}$ y $\left[\frac{S}{N}\right]_{\text{FSK}}$ y los correspondientes anchos de banda. En PSK hacer $B_c = 2f_s$ y en FSK, $\Delta f = 1,5f_s$; utilice los valores aproximados de la Fig. 5.86.

- 5.58. En un sistema PSK/DSSS la ganancia de procesamiento es de 1000. Se desea que la probabilidad de error esté por debajo de $1,081 \times 10^{-6}$. Utilice la Tabla del Apéndice E.4.
- Demuestre que para ser efectiva, la potencia de la señal interferente debe estar, como mínimo, a 19,5 dB por arriba de la potencia de la señal útil. Nótese entonces que para que la interferencia pueda causar algún daño se necesitan grandes potencias de transmisión.
- 5.59. En un sistema CDMA se desea una probabilidad máxima de $1,081 \times 10^{-6}$. Haga una gráfica del número de usuarios M vs N, donde N es la ganancia de procesamiento. En particular, demuestre que con una ganancia de procesamiento de 2048 el sistema puede atender hasta 184 usuarios.

CAPÍTULO VI

MODULACIÓN Y TRANSMISIÓN DE SEÑALES CONTINUAS

6.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo V se hizo énfasis en los sistemas de comunicación digitales debido a su creciente importancia en la transmisión de información. En efecto, la transmisión digital de información ha aumentado a pasos agigantados y cada vez más y más señales analógicas están siendo digitalizadas para su procesamiento y transmisión. Sin embargo, sea que las señales sean digitales o analógicas, para su transmisión a distancia tienen que ser moduladas, y en el Capítulo V dedicamos una parte substancial a la transmisión de señales digitales mediante portadora modulada. El Capítulo VI estará dedicado a la modulación y transmisión de señales analógicas continuas tales como señales de voz, música, video, etc., y utilizaremos extensamente los principios teóricos de las señales y sistemas pasabanda desarrollados en los Capítulos I y II.

Las señales continuas que queremos transmitir, en contraste con las señales digitales estudiadas en el Capítulo V, pertenecen a un conjunto numerablemente infinito de posibles mensajes cuyas formas de onda no conocemos. Esta colección de mensajes o de formas de onda se puede modelar como un proceso continuo de señales aleatorias, donde cada miembro del proceso corresponde a una forma de onda o señal mensaje. Para efectos de análisis, vamos a definir la transmisión de señales analógicas como la transmisión, sobre un canal dado, de una señal mensaje $m(t)$ de banda de base. Supondremos también que el ancho de banda de la señal mensaje es mucho menor que la frecuencia de la portadora.

Si el canal fuera estrictamente pasabajo, las señales analógicas podrían ser transmitidas directamente en banda de base, pero resulta que la mayoría de los canales (incluyendo los dispositivos electrónicos) son de naturaleza pasabanda, lo que hace necesario el traslado del espectro pasabajo de la señal a la banda de paso del canal. Este proceso de traslación es esencial en los sistemas de comunicación.

Aunque el requerimiento primario del proceso de modulación es el de traslación o conversión de frecuencias, hay además algunos propósitos adicionales para modular. Estos son:

- (a) Desplazamiento de frecuencias a un punto o banda dado. La modulación permite, por ejemplo, que las estaciones de radio y televisión transmitan simultáneamente y puedan ser sintonizadas y separadas en el receptor. La modulación es la base de las técnicas de multiplicidad en frecuencia (FDM), que veremos más adelante.
- (b) Aumento de la frecuencia para facilidad de irradiación. Si el canal es el espacio libre, se necesita antenas para irradiar y recibir las ondas electromagnéticas de las señales mensaje. En la Teoría Electromagnética se demuestra que para que una antena pueda irradiar energía con alto rendimiento, es necesario que su tamaño físico sea por lo menos del orden de una longitud de onda. Muchas señales, incluyendo las señales de audio, contienen componentes de frecuencia inferiores a 1 kHz, y se necesitaría antenas de por lo menos 75 km ($\lambda/4$) para irradiar esas señales en forma eficaz. En radiodifusión en onda media, por ejemplo, la altura de las antenas está entre los 75 y los 150 m, y las frecuencias de portadora van de 535 hasta 1605 kHz. En altas frecuencias la relación es la misma: cuanto más alta la frecuencia, más pequeña es la antena. Es una relación inversa.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

- (c) Cambio del ancho de banda. El comportamiento de los dispositivos de procesamiento de señales, tales como los filtros y amplificadores, y la facilidad con la cual pueden instrumentarse, depende de la ubicación de la señal en el dominio de la frecuencia, es decir, de la relación entre las frecuencias altas y bajas de la señal mensaje. La modulación puede utilizarse entonces para trasladar la señal a una gama en el dominio de la frecuencia donde puedan cumplirse los requisitos de diseño de los dispositivos electrónicos. La modulación puede utilizarse también para convertir una señal de banda angosta en una señal de banda ancha y viceversa.
- (d) Reducción del ruido y la interferencia. El efecto del ruido y de las interferencias no puede ser eliminado completamente en un sistema de comunicación. Sin embargo, es posible minimizar sus efectos utilizando determinados esquemas de modulación, los cuales generalmente necesitan anchos de banda muy superiores al ancho de banda de la señal mensaje: hay entonces un intercambio o compromiso entre el ancho de banda y la relación señal/ruido, aspecto que ya hemos encontrado en los sistemas digitales vistos en el Capítulo V.

Como la modulación implica la generación de nuevas componentes de frecuencia no presentes en la señal mensaje, no se puede modular utilizando sistemas lineales invariantes en el tiempo. La modulación se efectúa ya sea mediante sistemas lineales variantes en el tiempo, o con sistemas que contengan elementos no lineales o mediante operaciones no lineales.

6.1.1. Esquemas de Modulación Analógica de Ondas Continuas

En este capítulo vamos a considerar la *modulación continua de una portadora de alta frecuencia como el proceso mediante el cual un parámetro (amplitud o ángulo) de la portadora se varía en forma instantánea proporcionalmente a una señal mensaje de baja frecuencia. Generalmente se supone que la portadora es una señal sinusoidal, pero ésta no es una condición necesaria.*

Si la portadora es sinusoidal, la señal modulada se puede expresar mediante la expresión general

$$x_c(t) = A(t) \cdot \cos[\theta(t)] = A(t) \cdot \cos[\omega_c t + \phi(t)] ; \quad \omega_c = 2\pi f_c t \quad (6.1)$$

donde $A(t)$ es la “**amplitud instantánea**” de la portadora, f_c la “**frecuencia de portadora**”, $\phi(t)$ la “**desviación de fase instantánea**” de la portadora, y $\theta(t)$ el “**ángulo o fase instantánea**” de la portadora. Estos son los parámetros de la señal modulada $x_c(t)$.

La expresión (6.1) tiene la misma forma que la expresión (2.109); por lo tanto, $A(t)$ es la envolvente natural de $x_c(t)$, mientras que $\phi(t)$ es su fase natural. La expresión (6.1) se puede escribir también en su forma canónica

$$x_c(t) = m_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - m_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (6.2)$$

donde las señales pasabajo $m_c(t)$ y $m_s(t)$ están relacionadas en alguna forma con la señal mensaje $m(t)$. Nótese que si la señal modulada $x_c(t)$ contiene ambas bandas laterales simétricas, la componente en cuadratura $m_s(t) = 0$.

De (2.110) y (2.111), la envolvente y fase son

$$A(t) = \sqrt{m_c^2(t) + m_s^2(t)} \quad \text{y} \quad \phi(t) = \arctan \frac{m_s(t)}{m_c(t)} \quad (6.3)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Las expresiones (6.1) y (6.2) permiten la descripción de los denominados “transmisores generalizados” tanto para modulación lineal como para modulación no lineal o exponencial. Estos transmisores tienen la forma mostrada en la Fig. 6.1 (a) y (b), que son representaciones término a término de las expresiones (6.1) y (6.2).

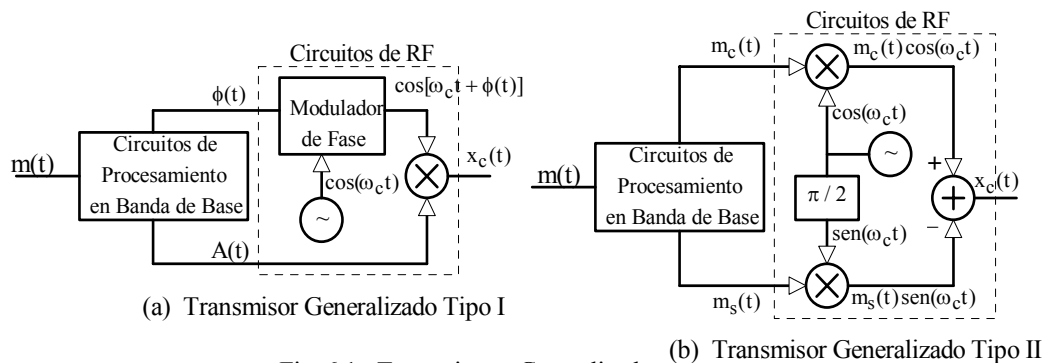


Fig. 6.1. Transmisores Generalizados.

Los circuitos de procesamiento en banda de base se pueden instrumentar mediante circuitos analógicos no lineales o mediante un programa si las operaciones se hacen en una computadora digital. Estos dos transmisores generalizados permiten generar cualquier tipo de modulación tanto analógica (Modulación Lineal y Modulación Exponencial) como digital (ASK, PSK, DPSK y FSK). La mayoría de los transmisores prácticos son variaciones particulares de estos transmisores generalizados.

Dependiendo de la relación entre la señal mensaje y los parámetros de la señal modulada, se tendrán los siguientes tipos de modulación analógica de ondas continuas:

1. **Modulación Lineal.** Cuando la amplitud instantánea $A(t)$ varía linealmente respecto a la señal mensaje $m(t)$.
2. **Modulación Angular o Exponencial.** Cuando la desviación de fase instantánea $\phi(t)$ o su derivada $\phi'(t)$ varían linealmente respecto a la señal mensaje $m(t)$.

En el estudio de estos sistemas vamos a utilizar los siguientes modelos de la señal mensaje de banda de base $m(t)$:

- (a) Un simple tono de frecuencia $f = f_m$.
- (b) Una combinación de tonos restringidos dentro de una banda pasabajo de frecuencias $|f| \leq f_m$.
- (c) Un espectro pasabajo continuo $M(f)$ de banda limitada f_m .
- (d) Una densidad espectral pasabajo $G_m(f)$ de energía de banda limitada f_m .

En cuanto al ruido pasabanda, él estará modelado en el dominio del tiempo por su formas canónica o polar (expresiones (2.149) y (2.150)) o por su función de autocorrelación, y en el dominio de la frecuencia por su densidad espectral de potencia.

En el estudio de los diferentes tipos de modulación de ondas continuas se le dará gran importancia a los tres parámetros fundamentales de los sistemas de comunicación: las relaciones

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Señal/Ruido, el ancho de banda de transmisión y la complejidad de los dispositivos de modulación y demodulación. Estos parámetros permitirán la comparación entre los diferentes tipos de modulación, no solamente de ondas continuas, sino también en relación con los sistemas de modulación de señales digitales. En todo momento se mostrará el paralelismo entre los sistemas teóricos y las soluciones consagradas por la práctica. En particular, estudiaremos las técnicas de traslación y multiplicidad de frecuencias y la manera de utilizarlas para la transmisión simultánea de muchas señales sobre un mismo canal, usando ejemplos de la radiodifusión estereo AM y FM, de los sistemas multicanal en la transmisión telefónica y de televisión, y algunas aplicaciones en los satélites de comunicación.

6.2. MODULACIÓN LINEAL DE SEÑALES CONTINUAS

6.2.1. Introducción

La modulación lineal es simplemente la traslación directa en frecuencia del espectro de la señal mensaje utilizando una portadora sinusoidal. La señal modulada tiene entonces la forma

$$x_c(t) = A(t) \cdot \cos[\omega_c t + \phi(t)] \quad (6.4)$$

Dependiendo de la naturaleza de la relación espectral entre $m(t)$ con $A(t)$ y $\phi(t)$, se tienen los siguientes esquemas de modulación lineal:

1. **Modulación de Amplitud en Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida** (Double Side-Band Suppressed Carrier, **DSB**).
2. **Modulación de Amplitud con Portadora de Gran Potencia** (Amplitude Modulation, **AM**).
3. **Modulación de Amplitud en Banda Lateral Unica** (Single Side-Band, **SSB**).
4. **Modulación de Amplitud en Banda Lateral Residual** (Vestigial Side-Band, **VSB**).

Cada uno de estos sistemas tiene sus propias ventajas, desventajas y aplicaciones prácticas, como veremos a continuación.

6.2.2. Modulación de Amplitud en Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida (DSB)

Cuando la amplitud instantánea $A(t)$ es directamente proporcional al mensaje $m(t)$ se tiene la “Modulación DSB”. En este caso, en relación con las expresiones (6.1) a (6.3):

$$m_s(t) = 0; \quad A(t) = m_c(t) = A_c m(t) \text{ y } \phi(t) = 0$$

La señal modulada DSB tendrá entonces la forma

$$x_{DSB}(t) = A_c m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad (6.5)$$

donde $m(t) \Leftrightarrow M(f)$, y puesto que $m(t)$ contiene la información, podemos suponer también que $\langle m(t) \rangle = 0$.

El espectro de $x_{DSB}(t)$ será, del teorema de la modulación,

$$X_{DSB}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f + f_c) + M(f - f_c)] \quad (6.6)$$

En la Fig. 6.2 se muestra el proceso de generación, transmisión y recepción de señales DSB.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

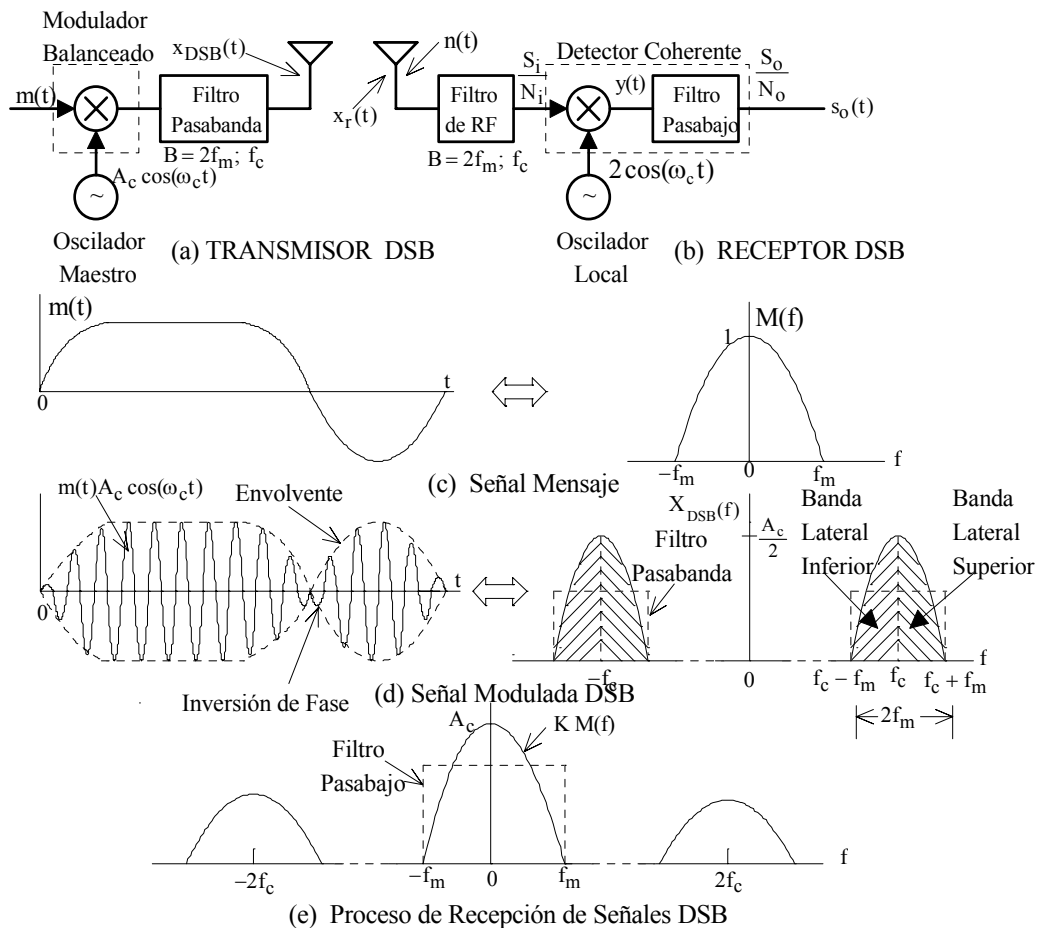


Fig. 6.2. Modulación de Amplitud de Doble Banda Lateral con Portadora Suprimida

En la Fig. 6.2(d) se muestra el espectro de la señal modulada con sus dos bandas laterales, la superior y la inferior. Nótese que el espectro $X_{DSB}(f)$ no muestra una portadora identificable como tal, de ahí la denominación de “portadora suprimida”; esto también es evidente de la expresión (6.6), especialmente si $\langle m(t) \rangle = 0$.

El dispositivo que produce la modulación con supresión de la portadora fundamentalmente es un simple multiplicador, pero su realización práctica no es tan directa como parece. Este tipo de modulador recibe el nombre de “modulador balanceado” y en la práctica hay circuitos que producen modulación con supresión de portadora, es decir, que suprimen las componentes continuas. Obsérvese que si el mensaje contiene una componente continua, esta componente no será cancelada en un simple multiplicador y aparecerá a la salida como una componente sinusoidal a la frecuencia de la portadora. Por definición, el modulador balanceado será entonces un dispositivo que eliminará siempre cualquier término de continua presente en la señal modulante (ver Problema de Aplicación 6.4).

La modulación DSB es muy utilizada para la transmisión de señales tanto continuas como digitales, y es muy importante pues ella provee una forma muy conveniente para preservar el espectro completo de una señal dada. En efecto, todo lo que hay que hacer es trasladar, mediante

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

modulación, el espectro de la señal a una frecuencia f_c que sea mayor que el ancho de banda de la señal. Este proceso de traslación de señales se denomina “conversión, mezclado o heterodinación” de frecuencias y es de gran utilización en el procesamiento y transmisión de señales en RF, como lo veremos más adelante. Nótese también que los esquemas de modulación ASK, PSK y DPSK vistos en el Capítulo V, básicamente son tipos de modulación DSB, en los cuales una señal mensaje PCM modula en DSB a una señal sinusoidal de frecuencia f_c .

El receptor DSB tiene la configuración general mostrada en la Fig. 6.2(b). La extracción de la señal mensaje $m(t)$ se efectúa mediante detección coherente, pues la envolvente de $x_{DSB}(t)$ no es la señal $m(t)$, como puede observarse en la Fig. 6.2(d).

Si la señal a la salida del filtro de RF es

$$x_r(t) = A_r m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

El lector puede verificar fácilmente que la salida del detector coherente será (ver Problema de Aplicación 2.28) $s_o(t) = K m(t)$, donde K es una constante que depende de A_r , de la ganancia del filtro pasabajo y de otros factores constantes dentro de la banda de paso. El proceso de extracción del mensaje se muestra en la Fig. 6.2(e).

La desventaja básica en DSB es la necesidad de sincronización perfecta en frecuencia y en fase de la portadora local, pero se pueden utilizar los métodos de sincronización de portadora vistos en el Capítulo V, Sección 5.6.1.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en la Modulación DSB

Por inspección de la Fig. 6.2(d), el ancho de banda de la señal modulada DSB es

$$B = 2f_m \quad (6.7)$$

donde f_m es la frecuencia máxima de la señal mensaje $m(t)$. También, $\beta_m = \frac{B}{f_m} = 2$. El filtro de salida del transmisor y el de RF en el receptor deberán tener, como mínimo, este ancho de banda. Puesto que $\beta_m = 2$, el sistema DSB es un sistema de banda angosta y no hay posibilidad de intercambio “Ancho de Banda-Relación S/N”.

Las relaciones S/N en DSB ya fueron calculadas en forma detallada en la Sección 2.9.5 del Capítulo II, cuyos resultados repetiremos aquí.

La ganancia de conversión en DSB es entonces

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2 \quad (6.8)$$

La detección sincrónica mejora las relaciones S/N en 3 dB; este mejoramiento resulta del hecho de que el detector sincrónico o coherente rechaza las componentes en cuadratura $n_s(t)$ del ruido de entrada disminuyendo a la mitad la potencia del ruido a la salida, como lo demostramos en la Sección 2.9.5.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.2.3. Modulación de Amplitud con Portadora de gran Potencia (AM)

La limitación básica de la modulación DSB es la sincronización de la portadora en el receptor. Un método muy común de modulación, conocido como “**Modulación de Amplitud, AM**”, se obtiene con una simple adición al sistema DSB ya visto. Esta adición consiste en transmitir también la portadora junto con la señal DSB, evitándose de esta manera la necesidad de generar localmente en el receptor una réplica exacta de la portadora de transmisión. En este caso, con referencia a la expresiones (6.1) a (6.3),

$$m_s(t) = 0; \quad A(t) = m_c(t) = [A_c + m(t)] \quad \text{y} \quad \phi(t) = 0.$$

La señal AM tendrá entonces la forma

$$x_{AM}(t) = [A_c + m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + A_c \cos(2\pi f_c t) \quad (6.9)$$

donde $A(t) = [A_c + m(t)]$ es la amplitud de la portadora modulada. Suponemos también que $\langle m(t) \rangle = 0$. El primer término de (6.9) es una señal DSB y el segundo la portadora agregada.

El espectro correspondiente será

$$X_{AM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{1}{2} [M(f + f_c) + M(f - f_c)] \quad (6.10)$$

En la Fig. 6.3 se muestra el proceso de generación, transmisión y recepción de señales AM.

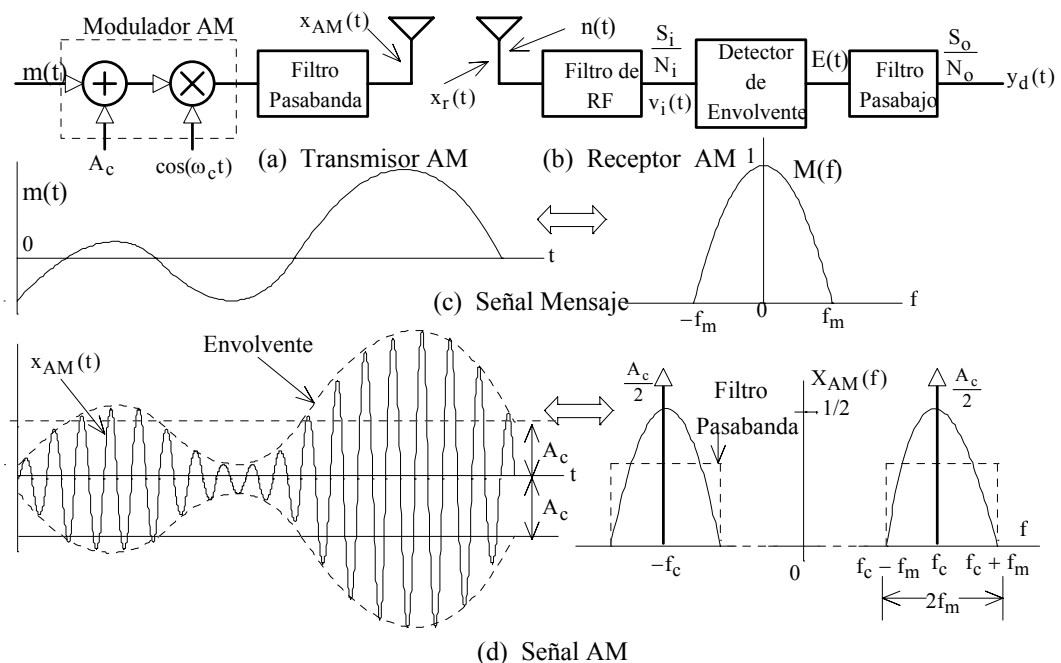


Fig. 6.3. Modulación de Amplitud AM

Nótese que la envolvente de la señal modulada, Fig. 6.3(d), es la señal mensaje desplazada en una constante A_c . Esta propiedad permite la extracción de la señal mediante detección de envolvente mientras la constante A_c sea lo suficientemente alta a fin de preservar la forma de la

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

envolvente. Si A_c no es lo suficientemente alta, la envolvente pierde su forma y la recuperación de $m(t)$ es imposible, o por lo menos estará muy distorsionada. Esta condición se conoce con el nombre de “**sobremodulación**”. Sin embargo, en condiciones de sobremodulación, el mensaje puede todavía recobrase mediante detección coherente, pero ésta no sería una buena solución desde el punto de vista práctico. Vamos a determinar las condiciones que debe cumplir la amplitud A_c de la portadora y definir algunos parámetros de interés.

Suponiendo que $\langle m(t) \rangle = 0$, el mensaje $m(t)$ se puede escribir en la forma siguiente:

$$m(t) = |\min m(t)| m_n(t) \quad (6.11)$$

donde $|\min m(t)|$ es la máxima excursión negativa de $m(t)$, y $m_n(t)$ es la señal $m(t)$ normalizada tal que $|\min m_n(t)| = 1$, como se muestra en la Fig. 6.4.

Reemplazando (6.11) en (6.9),

$$x_{AM}(t) = [A_c + |\min m(t)| m_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

$$x_{AM}(t) = A_c [1 + a \cdot m_n(t)] \cdot \cos(\omega_c t) \quad (6.12)$$

donde

$$a = \frac{|\min m(t)|}{A_c} \quad \text{o} \quad a\% = \frac{|\min m(t)|}{A_c} \cdot 100 \quad (6.13)$$

El término “**a**” se conoce con el nombre de “**índice de modulación AM**”.

Es evidente que la envolvente $A(t) = A_c [1 + a m_n(t)]$ debe ser siempre positiva y, por inspección de la Fig. 6.3(d), esto se verifica cuando

$$A_c \geq |\min m(t)| \quad (6.14)$$

$$\text{lo cual implica que} \quad a \leq 1 \quad \text{o} \quad a\% \leq 100\% \quad (6.15)$$

La detección de envolvente se podrá emplear siempre que el índice de modulación “**a**” sea igual o menor que la unidad; en estas condiciones la envolvente de la señal AM jamás cruzará el eje t y la porción positiva de la envolvente será una réplica desplazada del mensaje.

Para una mejor operación de detección, debe cumplirse que $f_c \gg f_m$ y que la constante RC del detector se ajuste de manera que la máxima pendiente negativa de la envolvente nunca exceda la pendiente de descarga exponencial. Si la constante de tiempo es muy grande, el detector no puede seguir a la envolvente; si RC es muy pequeña, aparecerá un rizado muy fuerte y la demodulación será muy deficiente. Una detección correcta se obtiene cuando se cumple que $f_c \gg \frac{1}{2\pi RC} \gg f_m$.

En la Fig. 6.5 se muestra las formas de onda de salida del detector para diferentes valores de RC.

En general, la salida del detector de envolvente, que es un dispositivo no lineal, tiene la forma $y_d(t) = K_1 + K_2 \cdot m(t) + \text{Rizado}$ (términos de alta frecuencia) donde K_1 es una componente continua debida a la portadora y K_2 es un factor de atenuación del circuito. La componente continua se puede eliminar con un transformador o un capacitor de acoplamiento; sin embargo, si el mensaje mismo contiene una componente continua, ésta será también eliminada, de ahí la suposición de que $\langle m(t) \rangle = 0$.

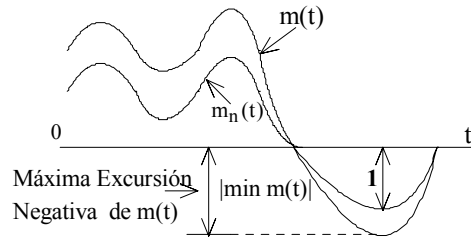


Fig. 6.4. Definición de $|\min m(t)|$ y $m_n(t)$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

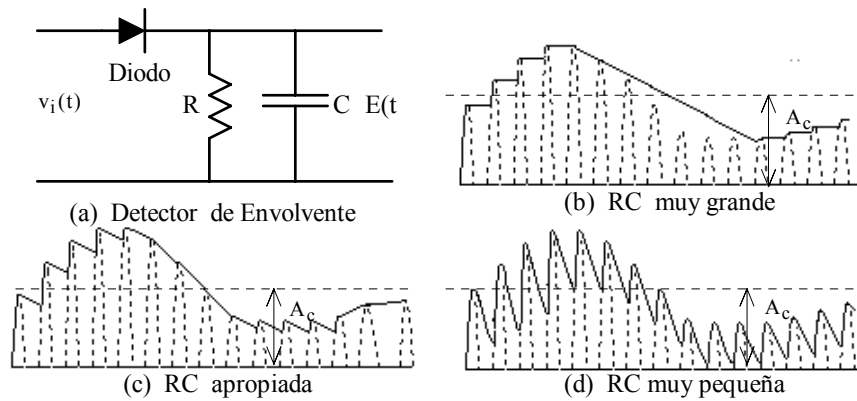


Fig. 6.5. Detección de Envolvente de Señales AM.

Como en general la salida del detector de envolvente se aplica a un filtro pasabajo, tanto el rizado como la componente continua son eliminados, pero también son eliminadas muchas componentes de baja frecuencia de la señal mensaje. Por consiguiente, el sistema de transmisión AM no es el más apropiado para la transmisión de señales con fuertes componentes de baja frecuencia.

Para fortalecer la comprensión de los conceptos anteriores, consideremos el caso de la modulación sinusoidal o modulación de tono, es decir, cuando la señal modulante $m(t)$ es una señal sinusoidal de la forma

$$m(t) = A_m \cdot \cos(2\pi f_m t) \quad (6.16)$$

La señal modulada AM será

$$x_{AM}(t) = [A_c + A_m \cos(2\pi f_m t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$x_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_m}{2} \cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \frac{A_m}{2} \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \quad (6.17)$$

En la Fig. 6.6 se muestra la forma de $x_{AM}(t)$ en el caso de modulación sinusoidal y el espectro y diagrama fasorial correspondientes.

En el diagrama fasorial se puede apreciar la relación entre las amplitudes de la portadora y de las bandas laterales. El fasor portadora gira a una velocidad f_c , mientras que los fasores bandas laterales giran a las velocidades $\pm f_m$ respecto a la portadora. Nótese que mientras la amplitud de las bandas laterales sean iguales y con la fase correcta, la resultante de los fasores bandas laterales será colineal con el fasor portadora, y la magnitud de la resultante total es la envolvente $E(t) = A(t)$. Si en el canal se generan perturbaciones que cambian en forma diferente la relación entre las amplitudes y fases de las bandas laterales, se producirá una fuerte distorsión en la señal. Esta distorsión se denomina en la práctica “**distorsión por desvanecimiento selectivo**”.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

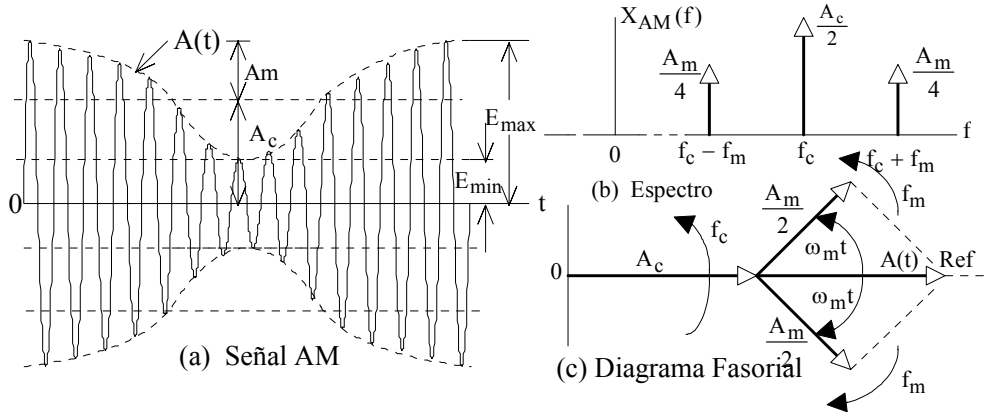


Fig. 6.6. Modulación Sinusoidal AM.

Cuando la modulación es sinusoidal, el índice de modulación se puede determinar directamente de la señal modulada. El lector puede demostrar fácilmente que el índice de modulación “a” viene dado entonces por la expresión

$$a = \frac{A_m}{A_c} = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} \quad (6.18)$$

donde, Fig. 6.6(a), $A_c = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2}$ y $A_m = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{2}$

Potencia y Rendimiento de Transmisión en AM

La potencia total P_T de la señal modulada AM es, de (6.9),

$$P_T = \langle x_{AM}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle [A_c + m(t)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle A_c^2 + 2A_c m(t) + m^2(t) \rangle$$

pero como $\langle m(t) \rangle = 0$, entonces $P_T = \langle x_{AM}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 + \frac{1}{2} \langle m^2(t) \rangle = P_c + P_B \quad (6.19)$

El primer término de (6.19) es la potencia de portadora P_c , mientras que el segundo es la potencia útil P_B que contiene la información y que está contenida en las bandas laterales. Podemos entonces definir el “**rendimiento de transmisión, E%**” en la forma

$$E\% = \frac{\text{Potencia Util}}{\text{Potencia Total}} 100 = \frac{P_B}{P_c + P_B} 100$$

$$\text{y de (6.19),} \quad E\% = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{A_c^2 + \langle m^2(t) \rangle} 100 \quad (6.20)$$

Puesto que $m(t) = a \cdot A_c m_n(t)$, el lector puede verificar fácilmente que el rendimiento de transmisión se puede expresar también en la forma

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$E\% = \frac{a^2 \langle m_n^2(t) \rangle}{1 + a^2 \langle m_n^2(t) \rangle} 100 \quad (6.21)$$

Un mejor conocimiento de las relaciones entre las magnitudes en juego lo podemos obtener si consideramos la modulación sinusoidal. En este caso,

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t); |\min m(t)| = A_m; m_n(t) = \cos(2\pi f_m t); a = \frac{A_m}{A_c} \text{ y } \langle m_n^2(t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Podemos demostrar entonces que

$$P_T = \langle x_{AM}^2(t) \rangle = \left(\frac{2+a^2}{2}\right) \cdot P_c; \quad P_B = \frac{a^2}{2} P_c = \frac{a^2}{2+a^2} P_T \text{ y } E\% = \frac{a^2}{2+a^2} 100$$

Cuando el índice de modulación es el máximo ($a = 1$), la potencia total P_T transmitida será $1,5 \cdot P_c$. Como la potencia de portadora P_c no cambia con la modulación, la potencia útil adicional P_B está en las bandas laterales y es la mitad de la potencia de portadora o un tercio de la potencia total. En cuanto al rendimiento de transmisión, éste será del 33,3%, lo cual significa que en condiciones de máximo rendimiento ($a = 1$), un 66,7% de la potencia total está contenida en la portadora y como tal representa un desperdicio. Si $a < 1$, el rendimiento disminuye considerablemente.

Puesto que la detección de envolvente sólo se puede utilizar si $a \leq 1$, y como $\langle m_n^2(t) \rangle \leq 1$, el lector puede verificar que el rendimiento máximo en AM es del 50% y se obtiene cuando $m(t)$ es una señal periódica bipolar de amplitud ± 1 . Obsérvese que en el caso de modulación DSB, como no contiene una portadora, toda la potencia transmitida es útil y su rendimiento será del 100%.

Conviene señalar aquí que el rendimiento de transmisión que hemos definido, expresiones (6.20) o (6.21), se aplica solamente cuando todo el contenido frecuencial de la señal $m(t)$ es transmitido, es decir, cuando el filtro pasabanda del transmisor es “transparente” para toda la señal. Si el filtro pasabanda no deja pasar todas las frecuencias de la señal, independientemente de la distorsión producida, el rendimiento de transmisión será menor. Este caso lo trataremos en el ejemplo siguiente.

♣ Ejemplo 6.1.

La señal periódica de la Fig. 6.7(a) se quiere transmitir en AM con una frecuencia de portadora de 10 kHz. En la práctica los valores de la frecuencia de portadora son generalmente altos.

- Si el índice de modulación es del 50%, calcular el valor de la amplitud de la portadora y el rendimiento de transmisión correspondiente.
- Repetir la parte (a) si el índice de modulación es del 100%.
- Si el filtro pasabanda de salida tiene un ancho de banda de 1 kHz y ganancia unitaria, dibujar el espectro de la señal transmitida y calcular el rendimiento de transmisión a la salida del filtro cuando el índice de modulación es del 100%.

Solución

Como $m(t)$ contiene una componente continua, ella puede escribirse en la forma

$$m(t) = b_0 + m_o(t), \text{ donde } \langle m(t) \rangle = b_0, \langle m_o(t) \rangle = 0 \text{ y } m_o(t) = |\min m_o(t)| m_{on}(t)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

La constante b_o es la componente continua de $m(t)$, y $m_o(t)$ es la señal $m(t)$ sin la componente continua pero referida al eje O' , Fig. 6.7(b). En la Fig. 6.7(c) se muestra $m_o(t)$ y $m_{on}(t)$.

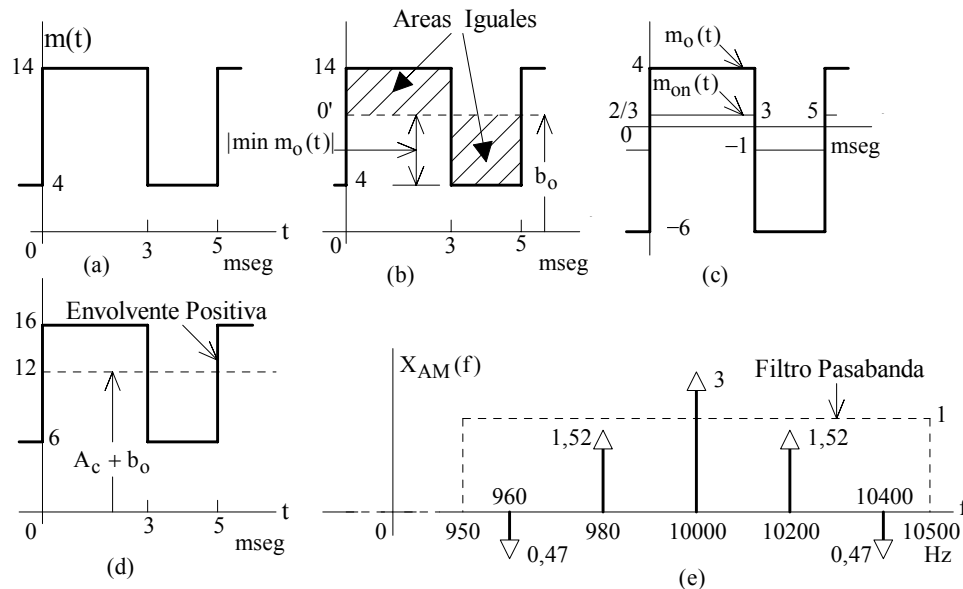


Fig. 6.7. Formas de Onda y Espectro del Ejemplo 6.1.

La señal modulada AM será

$$x_{AM}(t) = [(A_c + b_o) + m_o(t)] \cos(2\pi f_c t) = [(A_c + b_o) + |\min m_o(t)| \cdot m_{on}(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Por lo tanto,

$$x_{AM}(t) = (A_c + b_o) \cdot \left[1 + \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o} \cdot m_{on}(t) \right] \cos(2\pi f_c t)$$

donde $a = \frac{|\min m_o(t)|}{A_c + b_o}$ es el índice de modulación AM.

El rendimiento $E\%$ se puede expresar entonces en las siguientes formas:

$$E\% = \frac{\langle m_o^2(t) \rangle}{(A_c + b_o)^2 + \langle m_o^2(t) \rangle} 100$$

$$E\% = \frac{|\min m_o(t)|^2 \langle m_{on}^2(t) \rangle}{(A_c + b_o)^2 + |\min m_o(t)|^2 \langle m_{on}^2(t) \rangle} 100$$

$$E\% = \frac{a^2 \cdot \langle m_{on}^2(t) \rangle}{1 + a^2 \cdot \langle m_{on}^2(t) \rangle} 100$$

Nótese que la componente continua del mensaje disminuye el índice de modulación afectando, por lo tanto, al rendimiento de transmisión.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

(a) Índice de modulación del 50%

Los valores de $|\min m_o(t)|$ y b_o se obtienen de la Fig. 6.7(b). En efecto, como $\langle m_o(t) \rangle = 0$, debe verificarse que las áreas señaladas deben ser iguales, es decir, que

$$|\min m_o(t)| \times 2 \times 10^{-3} = [10 - |\min m_o(t)|] \times 3 \times 10^{-3}$$

de aquí, $|\min m_o(t)| = 6$. También, $b_o = 4 + |\min m_o(t)| = 10$.

Como el índice de modulación es del 50%, entonces

$$a = \frac{1}{2} = \frac{6}{A_c + 10}; \text{ de donde, } A_c = 2$$

En la Fig. 6.7(d) se muestra la envolvente positiva $x_{AM}(t)$. Entonces,

$$x_{AM}(t) = 12\left[1 + \frac{1}{2} m_{on}(t)\right] \cos(2\pi f_c t) = 12 \cdot \cos(2\pi f_c t) + 6 \cdot m_{on}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

cuya potencia total es $P_T = \langle x_{AM}^2(t) \rangle = 72 + 18 \langle m_{on}^2(t) \rangle$

y el rendimiento de transmisión, $E\% = \frac{18 \langle m_{on}^2(t) \rangle}{72 + 18 \langle m_{on}^2(t) \rangle} 100$

La potencia $\langle m_{on}^2(t) \rangle$ se puede calcular a partir de la Fig. 6.7(c). En efecto,

$$\langle m_{on}^2(t) \rangle = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \left\{ \int_0^{3 \times 10^{-3}} \frac{4}{9} dt + \int_{3 \times 10^{-3}}^{5 \times 10^{-3}} 1 dt \right\} = \frac{2}{3} W$$

Por lo tanto, $E\% = \frac{12}{72 + 12} 100 = 14,29\%$

Nótese que en el cálculo de este rendimiento hemos considerado que la potencia utilizada en transmitir la componente continua b_o es una potencia desperdiciada, pues dicha componente pudiera ser agregada, si fuese necesario, en el extremo receptor.

Supongamos que la componente continua b_o fue eliminada en el modulador. En este caso el lector puede demostrar, a partir de la Fig. 6.7(c), que con sólo un valor de $A_c = 6$, el índice de modulación sube al 100% y el rendimiento de transmisión al 40%.

(b) Índice de modulación del 100%

$$a = 1 = \frac{6}{A_c + 10}; \text{ de donde } A_c = -4$$

$$x_{AM}(t) = 6[1 + m_{on}(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) = 6 \cos(2\pi f_c t) + 6 \cdot m_{on}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$P_T = \langle x_{AM}^2(t) \rangle = 18 + 18 \langle m_{on}^2(t) \rangle; \quad E\% = \frac{18 \langle m_{on}^2(t) \rangle}{18 + 18 \langle m_{on}^2(t) \rangle} = \frac{12}{18 + 12} 100 = 40\%$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

(c) A la entrada del filtro pasabanda de transmisión, con $a = 1$, la señal AM es

$$x_{AM}(t) = 6 \cdot \cos(2\pi f_c t) + 6 \cdot m_{on}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Como $m_{on}(t)$ es una señal periódica, ella se puede desarrollar en serie de Fourier. De la Fig. 6.7(c), con un ajuste en el origen para convertirla en una función par (para facilidad de integración), tenemos que, de (1.45a),

$$m_{on}(t) = X_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_o t), \text{ donde } f_o = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 200 \text{ Hz}$$

$$X_n = \frac{2}{5 \times 10^{-3}} \left[\int_0^{\frac{3}{2} \times 10^{-3}} \frac{2}{3} \cos(2\pi n f_o t) \cdot dt - \int_{\frac{3}{2} \times 10^{-3}}^{\frac{5}{2} \times 10^{-3}} \cos(2\pi n f_o t) \cdot dt \right]$$

Efectuando las integraciones, se obtiene

$$X_n = \text{sinc}\left(\frac{3n}{5}\right) \text{ para } n \neq 0, \text{ y } X_o = 0. \text{ Entonces,}$$

$$x_{AM}(t) = 6 \cdot \cos(2\pi f_c t) + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{3n}{5}\right) \cdot \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$x_{AM}(t) = 6 \cdot \cos(2\pi f_c t) + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{3n}{5}\right) \{ \cos[2\pi(f_c + n f_o)t] + \cos[2\pi(f_c - n f_o)t] \}$$

Como el filtro es pasabanda, de ganancia unitaria, centrado en f_c y con un ancho de banda de 1 kHz, solamente pasarán dos componentes ($n = 1$ y $n = 2$) a cada lado de la portadora. La señal AM transmitida será entonces,

$$x_{AM}(t) = 6 \cdot \cos(2\pi f_c t) + 6 \cdot \text{sinc}\left(\frac{3}{5}\right) \{ \cos[2\pi(10200)t] + \cos[2\pi(9800)t] \} \\ + 6 \cdot \text{sinc}\left(\frac{6}{5}\right) \{ \cos[2\pi(10400)t] + \cos[2\pi(9600)t] \}$$

$$x_{AM}(t) = 6 \cdot \cos(2\pi \times 10^4 t) - 0,936 \cos[2\pi(9600)t] + 3,028 \cos[2\pi(9800)t] \\ + 3,028 \cdot \cos[2\pi(10200)t] - 0,936 \cdot \cos[2\pi(10400)t]$$

En la Fig. 6.7(e) se muestra el espectro de la señal transmitida.

La potencia transmitida será $\langle x_{AMT}^2(t) \rangle = 18 + 10,04 = 28,04 \text{ W}$ y el rendimiento de transmisión, $E\% = \frac{10,04}{28,04} 100 = 35,81\%$

Obsérvese que ahora el rendimiento de transmisión efectivo es menor que el rendimiento de transmisión teórico calculado en la parte (b), debido a que el filtro no deja pasar completamente la señal $m(t)$. De hecho, el filtro deja pasar toda la potencia de la portadora, pero solamente el 83,66% de la potencia de las bandas laterales.



VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Moduladores y Transmisores AM

Las señales AM pueden generarse fundamentalmente mediante los circuitos mostrados en la Fig 6.8.

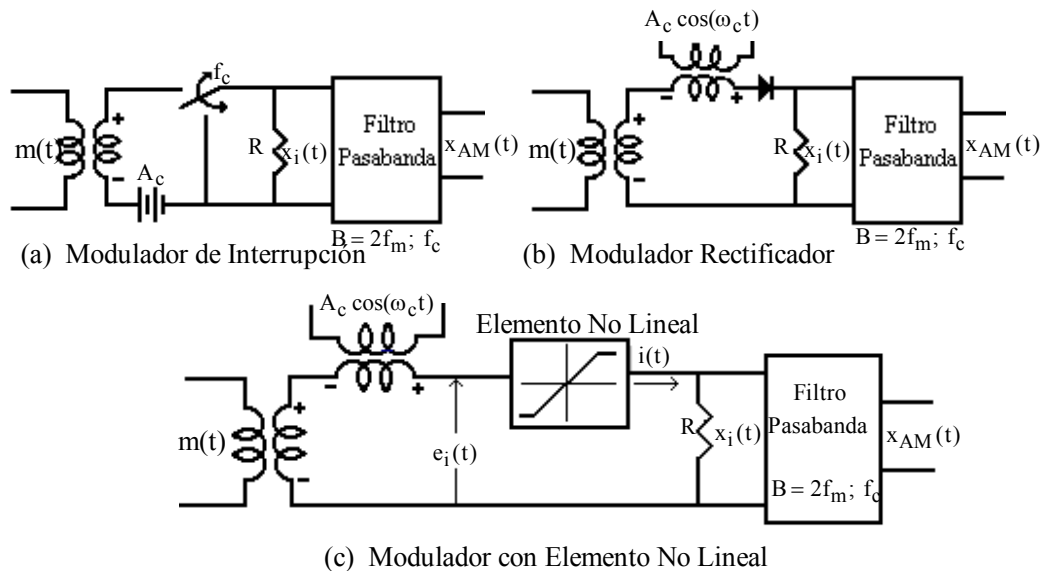


Fig. 6.8. Moduladores AM

En el modulador de interrupción, la acción de modulación se efectúa conmutando la señal $[A_c + m(t)]$ a una frecuencia f_c . Esto equivale a multiplicar dicha señal por una señal periódica rectangular $p(t)$ de frecuencia fundamental f_c , operación idéntica al muestreo natural visto en el Capítulo V. El espectro centrado en f_c se puede separar mediante el filtro pasabanda y constituye la señal modulada $x_{AM}(t)$. Esto nos demuestra que no es necesaria una señal sinusoidal para conseguir el efecto de modulación. Conceptualmente, el modulador de interrupción de la Fig. 6.8(a) es idéntico al muestreador real de la Fig. 5.10(a) del Capítulo V. De hecho, cualquiera señal periódica de período $1/f_c$ se puede utilizar para modular.

En el modulador de la Fig. 6.8(b) se emplea un diodo, el cual suponemos ideal. Si la amplitud de la portadora es mucho mayor que el valor pico de $m(t)$, el diodo actuará simplemente como un interruptor que conduce cuando la portadora es positiva y abre cuando la portadora es negativa. El proceso de traslación del espectro y extracción de la señal modulada AM es similar al del modulador de interrupción. Obsérvese que éste es un proceso no lineal de rectificación y filtrado, llamándose por ello “modulación por rectificación” y al dispositivo, “modulador rectificador”.

En el modulador con elemento no lineal, Fig. 6.8(c), vamos a suponer que las tensiones $e_i(t)$ y $x_i(t)$ están relacionadas mediante un polinomio de la forma $x_i(t) = a_1 e_i(t) + a_2 e_i^2(t)$. Este tipo de modulador se denomina “modulador cuadrático”.

Si $e_i(t) = m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t)$, entonces

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$x_1(t) = \frac{a_2 A_c^2}{2} + a_1 m^2(t) + a_1 A_c \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t) \right] \cdot \cos(2\pi f_c t) + \frac{a_2 A_c^2}{2} \cos(4\pi f_c t)$$

El término centrado en f_c es una señal AM que puede ser separada mediante un filtro pasabanda centrado en f_c .

La configuración de un transmisor AM en la práctica depende del punto en el cual se efectúa la operación de modulación. La modulación puede realizarse ya sea en la última etapa amplificadora de radiofrecuencia, o a un nivel de potencia más bajo. En el primer caso la modulación se denomina de “alto nivel” y en el segundo, de “bajo nivel”. En la Fig. 6.9 se muestran estas dos configuraciones.

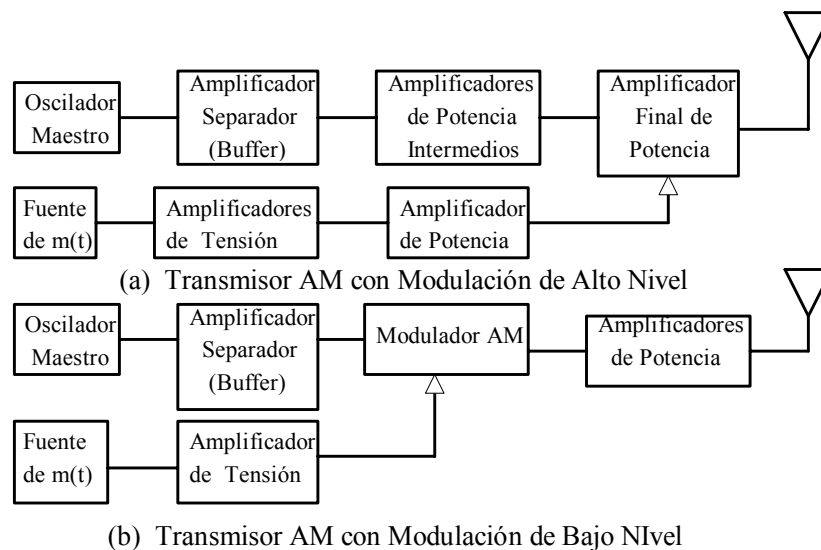


Fig. 6.9. Transmisores AM.

En la modulación de alto nivel, el oscilador maestro se aísla mediante un amplificador separador (“buffer”) a fin de evitar el efecto de carga de los amplificadores de potencia intermedios. Para máximo rendimiento, estos amplificadores pueden operar en Clase C puesto que se trata de amplificar a una sola frecuencia. El número de etapas intermedias depende de la potencia requerida para activar el amplificador de potencia final. Este amplificador final opera también en Clase C con modulación de placa o colector, y su salida se acopla a la línea de transmisión de la antena.

En la modulación de bajo nivel, la señal moduladora se aplica a uno de los amplificadores de potencia intermedios. Cuanto más temprana sea la etapa moduladora, más grandes serán los requerimientos de amplificación de potencia, lo cual puede introducir distorsión. Es necesario entonces que los amplificadores siguientes a la etapa moduladora operen en Clase B, aunque el rendimiento y la potencia sean menores. Para más información sobre estos aspectos prácticos, ver [Miller, 1993].

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Modulación AM

La modulación AM es también una modulación de doble banda lateral y por lo tanto su ancho de banda es $B = 2f_m$, donde f_m es la frecuencia máxima de la señal mensaje $m(t)$.

La relación de expansión del ancho de banda $\beta_m = B / f_m$ es igual a 2; esto quiere decir que el sistema de modulación AM es un sistema de banda angosta en el cual no hay posibilidad de intercambio “Ancho de Banda-Relación S/N”.

Veamos ahora el efecto del ruido en la modulación AM. Con referencia a la Fig. 6.3(b), la señal recibida se puede expresar en la forma

$$x_r(t) = [A_r + m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) = A_r \cos(2\pi f_c t) + m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Esta señal aparecerá a la entrada del detector de envolvente. La potencia de señal S_i a la entrada del detector será

$$S_i = \langle x_r^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_r^2 + \frac{1}{2} \langle m^2(t) \rangle \quad (6.22)$$

El ruido a la entrada del detector es ruido blanco pasabanda de densidad espectral $\eta/2$ y se puede representar mediante sus formas canónica o polar, expresiones (2.149) y (2.150):

$$n(t) = n_c(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) = R_n(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi_n(t)]$$

donde, $\langle n^2(t) \rangle = \langle n_c^2(t) \rangle = \langle n_s^2(t) \rangle = N_i = 2\eta f_m$

La relación S_i / N_i de predetección será

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A_r^2 + \langle m^2(t) \rangle}{2N_i} \quad (6.23)$$

La entrada del detector será entonces

$$\begin{aligned} v_i(t) &= x_r(t) + n(t) = [A_r + m(t) + n_c(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \\ v_i(t) &= E(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \psi(t)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde $E(t) = \sqrt{[A_r + m(t) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}$ (6.25)

y $\psi(t) = \arctg\left[\frac{n_s(t)}{A_r + m(t) + n_c(t)}\right]$ (6.26)

$E(t)$ es la envolvente de la señal $v_i(t)$ a la entrada del detector de envolvente.

La salida del detector de envolvente es, por supuesto, proporcional a $E(t)$. La expresión para $E(t)$ dada en (6.25) se puede simplificar si suponemos que la potencia de la señal es mucho mayor o mucho menor que la potencia de ruido, es decir, si consideramos altas o bajas relaciones S/N. El análisis es más fácil si consideramos diagramas fasoriales, como se muestra en la Fig. 6.10.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

(a) **Alta Relación Señal/Ruido**, Fig.6.10(a).

En este caso $[A_r + m(t)] \gg n_c(t)$ y la envolvente $E(t)$ y la fase $\psi(t)$ se pueden aproximar en la forma

$$E(t) \approx [A_r + m(t) + n_c(t)] \text{ y } \psi(t) \approx 0$$

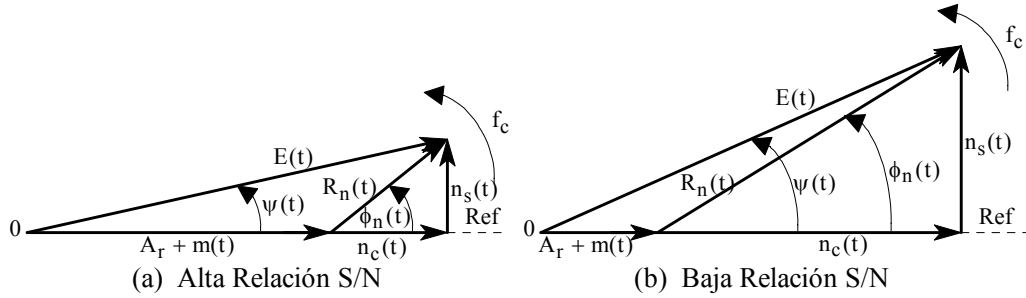


Fig. 6.10. Diagramas Fasoriales de una Señal AM más Ruido.

Como el filtro pasabajo rechaza la componente continua A_r , su salida será

$$y_d(t) = m(t) + n_c(t)$$

Por consiguiente, $S_o = \langle m^2(t) \rangle$ y $N_o = \langle n_c^2(t) \rangle = N_i$

La relación S/N de postdetección será

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{N_i} \quad (6.27)$$

Nótese que en el caso de baja potencia de ruido (alta relación S/N), en la detección de envolvente las potencias de ruido de predetección y de postdetección son iguales.

La ganancia de conversión en AM será entonces

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 2 \frac{\langle m^2(t) \rangle}{A_r^2 + \langle m^2(t) \rangle} \quad (6.28)$$

Pero como $\langle m^2(t) \rangle / [A_r^2 + \langle m^2(t) \rangle]$ es el rendimiento de transmisión, expresión (6.20), y por cuanto el rendimiento de transmisión máximo en AM es igual a 1/2, se tiene que

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \leq 1, \text{ o también } \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{\max} = 1 \quad (6.29)$$

Esto significa que la ganancia de conversión es, cuando más, 3 dB más baja que en DSB con demodulación coherente. Si la modulación es sinusoidal y el índice de modulación es del 100%, la ganancia de conversión es igual a 2/3, un valor relativamente bajo.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

(b) **Baja Relación Señal/Ruido**, Fig. 6.10(b).

En este caso, $[A_r + m(t)] \ll n_c(t)$, de donde

$$E(t) \approx \sqrt{R_n^2(t) + 2A_r n_c(t) + 2m(t) \cdot n_c(t)} \quad \text{y} \quad \psi(t) \approx \phi_n(t) = \arctg \frac{m_s(t)}{m_c(t)} \quad (6.30)$$

La componente principal de la salida es $R_n(t)$, un término de ruido, mientras que el único término de la envolvente que contiene a la señal mensaje $m(t)$ está multiplicado por un término de ruido $n_c(t)$; por lo tanto, la señal está “capturada” o inmersa en ruido multiplicativo y no tiene sentido hablar de relación S/N de salida. A la salida del receptor la inteligibilidad será nula.

Efecto Umbral en Sistemas AM

La pérdida de la señal mensaje, para relaciones S_i / N_i bajas, se denomina “**efecto umbral**”, fenómeno que ya encontramos en los sistemas digitales. Cuando el ruido aumenta por encima de un cierto valor, la recepción empeora rápidamente hasta alcanzar la ininteligibilidad. Este efecto es típico de los detectores de envolvente y no se observa en la detección coherente. En los detectores coherentes, al aumentar el ruido el deterioro de la señal es gradual y puede recuperarse parte de la información siempre que no haya errores de fase apreciables. Con la detección coherente, la señal y el ruido permanecen siempre aditivos y el mejoramiento de la relación S/N se cumple para todas las condiciones de ruido, aunque la inteligibilidad puede resentirse.

El valor umbral de la relación S_i / N_i se define generalmente como “*el valor de S_i / N_i para el cual $R_n(t) < A_r$ con una probabilidad del 99%*”. Se demuestra [Shanmugan, 1979] que el valor de S_i / N_i en el umbral es de aproximadamente de 10 dB. Esto quiere decir que si $S_i / N_i < 10\text{dB}$, puede esperarse que la señal de salida sea completamente ininteligible.

Para transmisión de voz o música, la relación S_o / N_o debe estar entre 30 a 60 dB, lo que requiere que la relación S_i / N_i esté muy por encima del valor umbral. A medida que S_i / N_i cae bajo los 30 dB, la señal será contaminada completamente por el ruido aditivo mucho antes de que el ruido multiplicativo capture la señal. Si la señal mensaje transmitida es de naturaleza digital, es necesario entonces utilizar detección coherente cuando la relación S_i / N_i es baja para evitar los efectos de umbral. Por supuesto, la modulación AM no se emplea en la transmisión de señales digitales.

♣ **Ejemplo 6.2**

En un receptor AM se recibe una señal modulada donde

$$A_r = 20, \quad m(t) = 16\cos^3(10^4 \pi t) \quad \text{y} \quad f_c = 100 \text{ kHz}.$$

La densidad espectral de ruido a la entrada del amplificador de RF es

$$S_n(f) = 2 \times 10^{-9} \exp[-6,932 \times 10^{-6} |f|] \quad \text{W/Hz}$$

Suponiendo que la ganancia de los filtros es unitaria, vamos a determinar:

- (a) El ancho de banda mínimo de los filtros de RF y de audio
- (b) Las relaciones S/N de pre y postdetección

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Solución

(a) El ancho de banda del filtro de RF dependerá del contenido frecuencial de la señal recibida. Sea entonces,

$$x_r(t) = [A_r + m(t)] \cdot \cos(\omega_c t) = [20 + 16 \cos^3(10^4 \pi t)] \cdot \cos(2\pi \times 10^5 t)$$

$$x_r(t) = 20 \cos(2\pi \times 10^5 t) + 16 \cos^3(10^4 \pi t) \cdot \cos(2\pi \times 10^5 t)$$

pero $m(t) = 16 \cos^3(10^4 \pi t) = 12 \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] + 4 \cos[2\pi(15 \times 10^3)t]$ (6.31a)

$$x_r(t) = 20 \cos[2\pi(100 \times 10^3)t] + 6 \cos[2\pi(105 \times 10^3)t] + 6 \cos[2\pi(95 \times 10^3)t] + \\ + 2 \cos[2\pi(115 \times 10^3)t] + 2 \cos[2\pi(85 \times 10^3)t] \quad (6.31b)$$

En la Fig. 6.11(A) se muestra el espectro de la señal recibida $x_r(t)$.

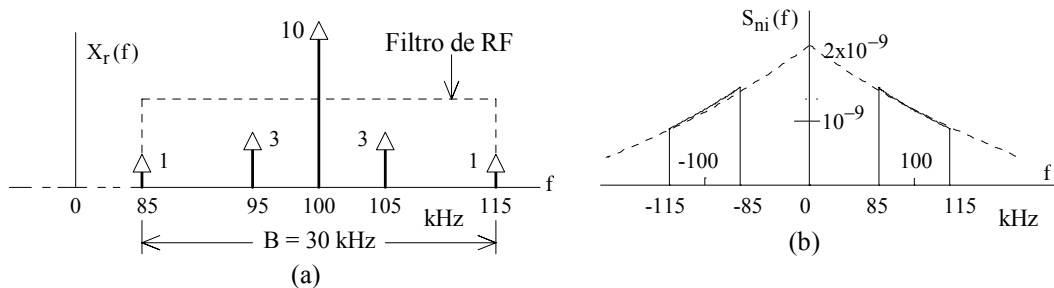


Fig. 6.11. Espectros de Señal y Ruido del Ejemplo 6.2.

Por inspección de la Fig. 6.11(a), el ancho de banda del filtro de RF es de 30 kHz, y el del filtro de audio de salida, de 15 kHz.

(b) En cuanto al ruido, la densidad espectral a la entrada del detector tiene la forma dada en la Fig. 6.11(b). La potencia N_i de ruido será

$$N_i = 2 \int_{85 \times 10^3}^{115 \times 10^3} 2 \times 10^{-9} \exp(-6,932 \times 10^{-6} f) \cdot df = 6,011 \times 10^{-5} \text{ W} = -12,211 \text{ dBm}$$

También, $N_o = N_i$. La potencia de entrada se puede obtener de (6.31b); en efecto,

$$S_i = 200 + 18 + 18 + 2 + 2 = 240 \text{ W} = 53,8 \text{ dBm}$$

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{240}{6,0108 \times 10^{-5}} = 3,993 \times 10^6 = 66,013 \text{ dB}$$

La relación S/N de predetección está muy por encima del valor umbral.

De (6.25) y (6.31a), la relación S/N de postdetección será

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{80}{6,0108 \times 10^{-5}} = 1,331 \times 10^6 = 61,242 \text{ dB}, \quad \text{de donde} \quad \frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1}{3}$$

♣

6.2.4. Modulación en Banda Lateral Única (SSB)

El ancho de banda y la potencia de transmisión son los dos parámetros de diseño más importantes en un sistema de comunicación, y cuanto más bajos sean mejor será el rendimiento del sistema. Por ejemplo, en el sistema AM hay un gran desperdicio tanto en potencia como en ancho de banda, situación que se mejora en el sistema DSB que requiere menos potencia pero que utiliza el mismo ancho de banda. Tanto en AM como en DSB se transmiten las dos bandas laterales que contienen la misma información y por lo tanto se estará transmitiendo información redundante. La transmisión de ambas bandas laterales no es entonces imprescindible para transmitir la información. Para señales reales, que es el caso que ocurre en la práctica, el espectro de la señal tiene simetría hermitica, por lo que transmitiendo únicamente una de las bandas laterales se transmite toda la información.

La eliminación de una de las bandas laterales antes de la transmisión constituye el “**Sistema de Modulación de Amplitud en Banda Lateral Única (SSB)**”, en el cual el ancho de banda a la salida del modulador se reduce de $2f_m$ a f_m pero a costas de un considerable aumento en la complejidad de los circuitos.

En el Capítulo II, Sección 2.7.4, demostramos que si $m(t)$, que contiene información, es una señal real pasabaja de banda limitada f_m , su espectro $M(f)$ tenía simetría hermitica. Asimismo, si $z_m(t)$ es la función analítica de $m(t)$, podíamos construir la señal $z_s(t) = z_m(t) \exp(j2\pi f_c t) \Leftrightarrow Z_s(f) = Z_m(f - f_c)$, donde $z_s(t)$ se puede considerar como la señal analítica de una señal real pasabanda de banda lateral única dada por la expresión

$$x_{SSB}(t) = A_c m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \pm A_c \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) = A(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (6.32a)$$

donde, con referencia a las expresiones (6.1) a (6.3),

$$m_c(t) = A_c m(t); \quad m_s(t) = A_c \hat{m}(t); \quad A(t) = A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)}; \quad \phi(t) = \mp \arctg \frac{\hat{m}(t)}{m(t)}$$

$$\text{Por lo tanto, } x_{SSB}(t) = A_c \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \cdot \cos[2\pi f_c t \pm \arctg \frac{\hat{m}(t)}{m(t)}] \quad (6.32b)$$

El término $\hat{m}(t)$ es la transformada de Hilbert de $m(t)$; el signo “+” es para la banda lateral inferior, mientras que el signo “-” lo es para la superior. Como demostramos en el Capítulo II, la componente en cuadratura depende de la señal mensaje misma, y es la causante de las asimetrías del espectro alrededor de $\pm f_c$. En el caso de la expresión (6.32), es la eliminación completa de una banda lateral.

En la Fig. 6.12 se muestra el proceso de generación, transmisión y recepción de señales SSB.

Una señal SSB se representa en el dominio del tiempo mediante la expresión (6.32a) y en el dominio de la frecuencia como se muestra en la Fig. 6.12(c).

Las señales SSB, de acuerdo con la expresión (6.32a), son por definición señales moduladas con portadora suprimida y su rendimiento de transmisión es, por lo tanto, del 100%.

Generación de Señales SSB

Conceptualmente, la forma más directa de generar señales SSB es mediante filtración de una banda lateral a partir de una señal DSB, como se muestra en la Fig. 6.12(d). Pero en la práctica esta operación no es tan fácil de efectuar pues se requiere un filtro con una característica de corte abrupto imposible de realizar, como lo hemos observado en el Capítulo II. Hay que adoptar entonces alguna solución de compromiso: en primer lugar, si la señal mensaje $m(t)$ no contiene componentes significativas de baja frecuencia, se puede utilizar un filtro con una pendiente de corte alta pero finita. En segundo lugar, como generalmente es más fácil diseñar un filtro alrededor de cierta frecuencia propia, la eliminación de la banda lateral se puede efectuar a esa frecuencia y mediante una nueva operación de mezclado o heterodinación, que estudiaremos más adelante, el espectro resultante se lleva a la frecuencia de transmisión. Aún con estas prácticas, el diseño de filtros de banda lateral no es fácil. En la práctica se utiliza filtros resonantes electromecánicos en la gama de 50 a 500 kHz, y filtros de cristal en la gama de 1 a 10 MHz. En general, la modulación SSB se presta para la transmisión de señales con un contenido frecuencial nulo alrededor de $f = 0$, como es el caso de señales de voz. La modulación SSB no es apropiada para señales de muy baja frecuencia.

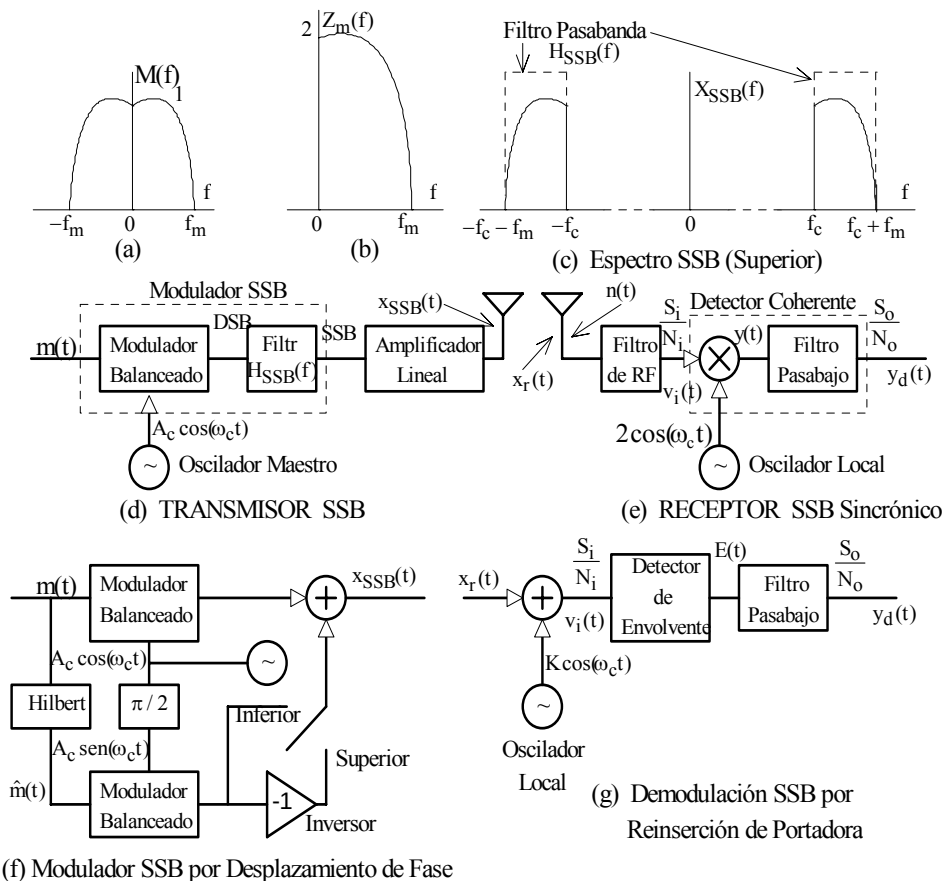


Fig. 6.12. Modulación en Banda Lateral Unica (SSB)

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Es posible también generar señales SSB mediante un desfaseamiento apropiado de las señales. Este método alternativo se conoce con el nombre de “**Modulación SSB por Desplazamiento de Fase**” y es una realización término a término de la expresión (6.32), como se puede apreciar en la Fig. 6.12(f). Este método se utiliza para la generación de señales SSB de baja frecuencia, pero su mayor desventaja es la dificultad de diseño de los filtros de Hilbert y la restricción a gamas de bajas frecuencias. Como en el caso AM, el sistema SSB no es apropiado para la transmisión de señales con un fuerte contenido de bajas frecuencias y tampoco se utiliza para la transmisión de señales digitales.

Demodulación de Señales SSB

Para su demodulación, el espectro de la señal SSB debe ser trasladado a la frecuencia $f = 0$, y esta operación se puede efectuar mediante detección coherente, como se muestra en la Fig. 6.12(e). En efecto, la señal a la entrada del detector coherente es

$$x_r(t) = A_r m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \pm A_c \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (6.33)$$

$$\text{También, } y(t) = x_r(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = A_r m(t) + A_r m(t) \cdot \cos(4\pi f_c t) \pm A_r \hat{m}(t) \cdot \sin(4\pi f_c t)$$

El filtro pasabajo elimina las componentes de alta frecuencia, quedando,

$$y_d(t) = A_r m(t) \quad (6.34)$$

y la señal mensaje $m(t)$ se ha recuperado.

En el caso anterior hemos supuesto que hay perfecto sincronismo entre la portadora local y la portadora de transmisión. Sin embargo, si la portadora local está desplazada en fase y en frecuencia, los términos de error afectarán severamente la salida demodulada $y_d(t)$. El lector puede demostrar fácilmente que si la portadora local en el receptor es igual a $2 \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \Delta\phi]$, donde Δf y $\Delta\phi$ son los términos de error, la salida demodulada será

$$y_d(t) = A_r m(t) \cos[2\pi(\Delta f)t + \Delta\phi] \pm A_r \hat{m}(t) \sin[2\pi(\Delta f)t + \Delta\phi] \quad (6.35a)$$

$$y_d(t) = A_r \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)} \cdot \cos\left[2\pi(\Delta f)t + \Delta\phi \mp \arctg \frac{\hat{m}(t)}{m(t)}\right] \quad (6.35b)$$

Nótese lo severamente distorsionada que resulta la salida demodulada cuando la comparamos con la salida correcta (6.34). Los términos de error no solamente afectan la fase de salida, sino que en la amplitud hacen aparecer el término $\hat{m}(t)$ que se comporta como un término adicional de distorsión. Es evidente que si Δf y $\Delta\phi$ son nulos, habrá perfecto sincronismo y la salida vendrá dada por (6.34). La portadora local se puede extraer de la señal recibida mediante los métodos vistos en el Capítulo V, Sección 5.7.2.

Igualmente que en AM, existe la posibilidad de demodular señales SSB mediante detección de envolvente, y esto es posible si a la señal recibida $x_r(t)$ se le agrega una portadora de gran potencia. Este método, denominado “**demodulación por reinserción de portadora**”, se muestra en la Fig. 6.12(g). La entrada al detector de envolvente será entonces,

$$v_i(t) = x_r(t) + K \cos(2\pi f_c t) = [A_r m(t) + K] \cdot \cos(2\pi f_c t) \pm A_r \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

$$v_i(t) = E(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

donde $E(t) = \sqrt{[A_r m(t) + K]^2 + A_r^2 \hat{m}^2(t)}$ y $\psi(t) = \mp \arctg \frac{A_r \hat{m}(t)}{A_r m(t) + K}$

En la Fig. 6.13 se muestra el diagrama fasorial de $v_i(t)$.

Si la portadora agregada es mucho mayor que la envolvente $R(t)$ de la señal recibida SSB, Fig. 6.13, es decir, si

$$K \gg R(t) = A_r \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)},$$

entonces,

$$E(t) \approx [K + A_r m(t)] \quad \text{y} \quad \psi(t) \approx 0$$

El filtro pasabajo elimina la componente continua K , quedando

$$y_d(t) = A_r m(t)$$

y la señal mensaje $m(t)$ se ha recuperado.

Obsérvese que si se hubiera tratado de demodular mediante detección de envolvente sin haberse agregado previamente la portadora de gran potencia, la salida demodulada habría sido

de la forma $y_d(t) = A_r \sqrt{m^2(t) + \hat{m}^2(t)}$, la cual posee un cierto contenido de distorsión representado por el término $\hat{m}(t)$. Esta es la dificultad básica que impide la compatibilidad entre receptores AM y SSB.

El desarrollo anterior requiere que la portadora generada localmente esté sincronizada en fase y en frecuencia con la portadora de transmisión con los consiguientes problemas de sincronización. En transmisión de voz y música, la sincronización se puede lograr en forma relativamente fácil, pues la frecuencia y la fase de la portadora local se pueden ajustar manualmente hasta alcanzar la inteligibilidad. Esto es posible porque el oído humano es relativamente insensible a cambios de fase en las señales y no puede distinguir entre $\hat{m}(t)$ y $m(t)$. Sin embargo, para otro tipo de señales que no van a ser escuchadas, por ejemplo, señales digitales y televisión, el término de distorsión $\hat{m}(t)$ limita la operación en SSB y los receptores tendrían que estar bien sincronizados. Esto explica por qué no se utiliza SSB para la transmisión de señales digitales o televisión.

Para evitar los problemas de sincronización de la portadora local, en algunos sistemas se transmite una portadora piloto de bajo nivel que, separada y amplificada en el receptor (por ejemplo, mediante un PLL), puede sumarse a la señal recibida para que la demodulación se pueda efectuar mediante detección de envolvente. De esta manera se asegura la sincronización perfecta sin desperdiciar demasiada potencia en la transmisión de la portadora. A este método se le denomina “**Detección Homodina**” y es muy utilizado en la práctica. Nótese que en este caso el rendimiento de transmisión es un poco menor del 100%, pues hay que tomar en cuenta la potencia consumida en la transmisión de la portadora piloto.

Ancho de Banda y Relaciones S/N en Modulación SSB

El sistema SSB tiene un ancho de banda igual a f_m , como se puede observar en la Fig. 6.12(c), es decir,

$$B = f_m, \text{ o también } \beta_m = 1 \quad (6.36)$$

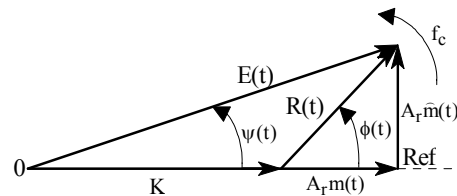


Fig. 6.13. Diagrama Fasorial en Modulación SSB con Reinserción de Portadora.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

La relación de expansión del ancho de banda es igual a la unidad en SSB, por lo tanto no hay posibilidad de un intercambio relación S/N vs ancho de banda.

El cálculo de las relaciones S/N lo haremos considerando los dos métodos de demodulación de señales SSB: por detección coherente y por reinserción de portadora. Veamos el primer caso.

A la entrada del detector coherente, Fig. 6.12(e), la señal recibida es

$$x_r(t) = A_r m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \pm A_r \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

$$\text{de donde, } S_i = \langle x_r^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_r^2 \langle m^2(t) \rangle + \frac{1}{2} A_r^2 \langle \hat{m}^2(t) \rangle$$

$$\text{pero como } \langle m^2(t) \rangle = \langle \hat{m}^2(t) \rangle, \text{ entonces } S_i = A_r^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (6.37a)$$

$$\text{y de (6.34), la potencia de salida será } S_o = A_r^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (6.37b)$$

$$\text{de donde } S_i = S_o \quad (6.38)$$

Vemos que en SSB con detección coherente las potencias de señal de pre y postdetección son iguales.

El ruido a la entrada del detector es pasabanda con una frecuencia central $f_o = f_c \pm f_m / 2$ (el signo depende de si se toma la banda lateral superior (+) o la banda lateral inferior (-)). Si consideramos la banda lateral superior, la densidad espectral de ruido blanco tendrá la forma mostrada en la Fig. 6.14(a).

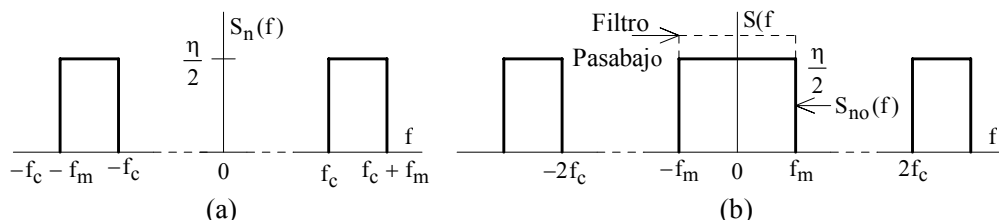


Fig. 6.14. Densidades Espectrales de Ruido en SSB.

$$\text{De la Fig. 6.14(a), } N_i = \eta f_m \quad (6.39a)$$

Aplicando el teorema de la modulación para señales de potencia, de la Fig. 6.14(b) vemos que

$$N_o = \eta f_m \quad (6.39b)$$

$$\text{Por lo tanto, } N_i = N_o \quad (6.40)$$

Vemos que en SSB las potencias de ruido de pre y postdetección son iguales. Por consiguiente, de (6.38) y (6.40), la ganancia de conversión en SSB con detección coherente es

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 1 \quad (6.41)$$

Esta expresión nos dice que no hay un mejoramiento en las relaciones S/N entrada-salida. Aparentemente, esto pudiera inducirnos a pensar que el sistema SSB es inferior al DSB puesto que la ganancia de conversión es 3 dB más baja. Pero esta conclusión no es correcta, pues la señal SSB

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

requiere solamente la mitad del ancho de banda de una señal DSB. La potencia de ruido N_i será entonces la mitad de la correspondiente en DSB; por lo tanto, aunque en DSB el mejoramiento de la ganancia de conversión es igual a 2, también es cierto que la potencia de ruido es el doble, lo cual hace que el mejoramiento producido por la modulación sea más aparente que real. En la Sección 6.2.6 haremos una comparación más general.

Consideremos ahora el caso de demodulación por reinserción de portadora. A la entrada del detector de envolvente se tiene, Fig. 6.12(g) y para la banda lateral superior,

$$v_i(t) = x_r(t) + K \cos(2\pi f_c t) = [K + A_r m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) - A_r \hat{m}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$$

y cuya potencia es
$$S_i = \langle v_i^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle [K + m(t)]^2 \rangle + \frac{1}{2} A_r^2 \langle \hat{m}^2(t) \rangle$$

Desarrollando, sabiendo que $\langle m^2(t) \rangle = \langle \hat{m}^2(t) \rangle$ y con $\langle m(t) \rangle = 0$,

$$S_i = \frac{1}{2} K^2 + A_r^2 \langle m^2(t) \rangle = \frac{K^2 + 2A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{2} \quad (6.42)$$

Sabemos también que en detección de envolvente

$$N_i = N_o = \eta f_m \quad (6.43)$$

En cuanto a la señal de salida, ya demostramos que ella es $y_d(t) = A_r m(t)$, de donde

$$S_o = A_r^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (6.44)$$

De (6.42) a (6.44),
$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{K^2 + 2A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{2\eta f_m} \quad (6.45)$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{\eta f_m} \quad (6.46)$$

La ganancia de conversión en SSB con detección de envolvente y reinserción de portadora vendrá dada por la expresión

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{2A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{K^2 + 2A_r^2 \langle m^2(t) \rangle} < 1 \quad (6.47)$$

La ganancia de conversión en SSB con reinserción de portadora y detección de envolvente es menor que la correspondiente con detección coherente debido a la presencia del factor K . Si hacemos abstracción de la constante K , las ganancias de conversión serían entonces iguales, pero no sería conceptualmente correcto pues K^2 es una potencia que hay que suministrar. Nótese, sin embargo, que en SSB coherente no existe el efecto umbral, aunque para valores de $S_i / N_i < 6$ dB las señales de voz, por ejemplo, se tornan ininteligibles. En general, en presencia de ruido, los sistemas coherentes son superiores a los sistemas no coherentes.

Hemos visto que los sistemas SSB combinan las ventajas de baja potencia transmitida y menor ancho de banda; sin embargo, su utilización se ve restringida por lo complejos que son los circuitos de transmisión y recepción, y por la incompatibilidad con los equipos existentes de DSB y AM. Asimismo, como la generación de señales SSB se efectúa necesariamente a bajo nivel, el transmisor SSB requiere a la salida amplificadores de potencia lineales (de muy bajo rendimiento)

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

para prevenir la distorsión. Por el contrario, las señales DSB y AM se pueden generar directamente en alto nivel, pudiéndose emplear amplificadores de potencia no lineales de Clase C que son mucho más eficientes. Los sistemas SSB se utilizan ampliamente en los sistemas multicanal telefónicos, en el campo aficionado y en la Banda Ciudadana. En la transmisión de datos la modulación SSB se utiliza solamente en los canales de servicio (voz) en transmisión en banda ancha (Recomendación V.35 del UIT-T).

♣ Ejemplo 6.3

La señal periódica de la Fig. 6.15(a) se transmite en SSB superior con una frecuencia de portadora de 100 kHz y amplitud unitaria. La detección es coherente y suponemos que la señal SSB a la entrada del detector es igual a la señal transmitida. Los filtros son de ganancia unitaria y el filtro de RF tiene un ancho de banda de 6 kHz. Asimismo, el ruido a la entrada del filtro de RF tiene una función de autocorrelación de la forma $R_n(\tau) = 4 \times 10^{-4} \text{sinc}^2(2 \times 10^5 \tau)$.

Vamos a determinar las relaciones S/N de pre y postdetección.

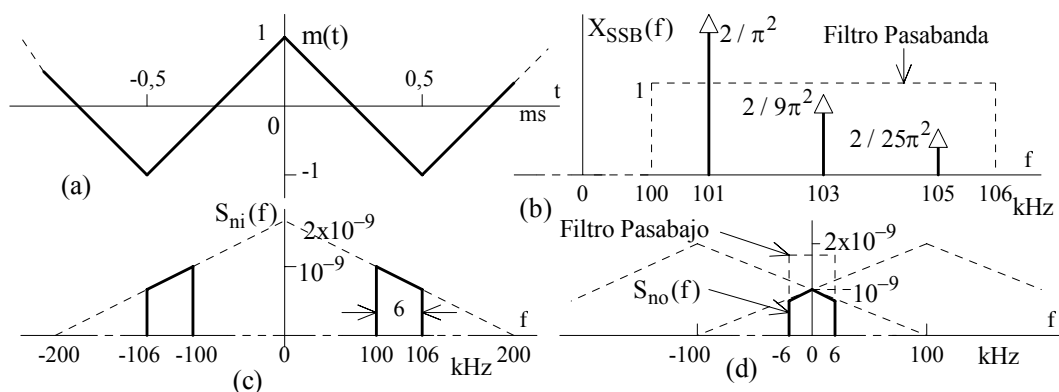


Fig. 6.15. Señales y Espectros del Ejemplo 6.3.

Solución

Como $m(t)$ es una señal periódica, ella se puede representar por su desarrollo en serie de Fourier

$$m(t) = X_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_0 t); \quad f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-3}} = 1 \text{ kHz}$$

$$\text{De la Fig. 6.15(a),} \quad X_n = \frac{2}{10^{-3}} \int_0^{10^{-3}/2} -\frac{4}{10^{-3}} \left(t - \frac{10^{-3}}{4}\right) \cos(2\pi n \times 10^3 t) dt$$

$$\text{Resolviendo la integral,} \quad X_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ cero o par} \end{cases}$$

Por consiguiente,

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$m(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n \times 10^3 t) = \frac{8}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(3 \times 10^3)t] + \right. \\ \left. \frac{1}{25} \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(7 \times 10^3)t] + \dots \right\}$$

Si la portadora es $\cos(2\pi f_c t)$, entonces al modular en DSB se tiene

$$x_{\text{DSB}}(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(101 \times 10^3)t] + \cos[2\pi(99 \times 10^3)t] + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \cos[2\pi(103 \times 10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(97 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(105 \times 10^3)t] + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \cos[2\pi(95 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(107 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(93 \times 10^3)t] + \dots \right\}$$

Como se transmite la banda lateral superior y el filtro tiene un ancho de banda de 6 kHz, solamente pasarán las componentes a las frecuencias 101 kHz, 103 kHz y 105 kHz. La señal SSB transmitida será

$$x_{\text{SSB}}(t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(101 \times 10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(103 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(105 \times 10^3)t] \right\}$$

cuyo espectro se muestra en la Fig. 6.15(b).

Si la señal de entrada al detector es igual a la señal transmitida, entonces su potencia será

$$S_i = \langle x_{\text{SSB}}^2(t) \rangle = \frac{8}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} \right) = 83,27 \text{ mW} = 19,21 \text{ dBm}$$

La demodulación se efectúa multiplicando $x_{\text{SSB}}(t)$ por $2\cos(2\pi f_c t)$. Entonces,

$$y(t) = x_{\text{SSB}}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(201 \times 10^3)t] + \cos[2\pi(10^3)t] + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \cos[2\pi(203 \times 10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(3 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(205 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] \right\}$$

El filtro pasabajo elimina los términos de alta frecuencia quedando,

$$y_d(t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(3 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] \right\}$$

cuya potencia es $S_o = \langle y_d^2(t) \rangle = \frac{8}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} \right) = 83,27 \text{ mW} = 19,21 \text{ dBm}$

Nótese que $S_o = S_i$ como ya lo habíamos demostrado.

Veamos ahora el efecto del ruido. De acuerdo con el Teorema de Wiener-Kintchine, se tiene que $R_n(\tau) \Leftrightarrow S_n(f)$; por consiguiente

$$R_n(\tau) = 4 \times 10^{-4} \sin^2(2 \times 10^5 \tau) \Leftrightarrow S_n(f) = 2 \times 10^{-9} \Lambda\left(\frac{f}{200 \times 10^3}\right)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$S_n(f)$ es la densidad espectral de ruido a la entrada del filtro de RF, cuya salida tiene la forma mostrada en la Fig. 6.15(c). Asimismo, en la Fig. 6.15(d) se muestra la densidad espectral de ruido $S_{no}(f)$ a la salida del filtro pasabajo. Entonces, de las Fig. 6.15(c) y (d),

$$N_i = 12 \times 10^3 \times 0,94 \times 10^{-9} + 6 \times 10^3 \times 0,06 \times 10^{-9} = 1,164 \times 10^{-5} = -19,34 \text{ dBm} = N_o$$

de donde,
$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{83,27 \times 10^{-3}}{1,164 \times 10^{-5}} = 7153,78 = 38,55 \text{ dB} = \frac{S_o}{N_o}$$

La ganancia de conversión es la unidad.



6.2.5. Modulación en Banda Lateral Residual (VSB)

Vimos en la sección anterior que las señales SSB son relativamente difíciles de generar. Si se utiliza filtros para eliminar una banda lateral, dichos filtros deberán poseer una característica de corte abrupta y esto es prácticamente imposible de realizar en la práctica. Para evitar este problema, se ha ideado un sistema de modulación de amplitud que ofrece un buen compromiso en la conservación del ancho de banda, que mejora la respuesta en baja frecuencia hasta $f = 0$ y cuyo rendimiento es comparable al del sistema SSB. Ese esquema de modulación se conoce con el nombre de “**Modulación en Banda Lateral Residual, VSB**”.

En el sistema VSB, en vez de eliminar completamente una banda lateral, se acepta un corte gradual de ella; la característica de corte es tal, que la supresión parcial de, por ejemplo, la banda lateral superior (que se transmite) es exactamente compensada por la transmisión parcial de la parte complementaria de la banda lateral inferior (que se elimina), como se puede apreciar en la Fig. 6.16(b).

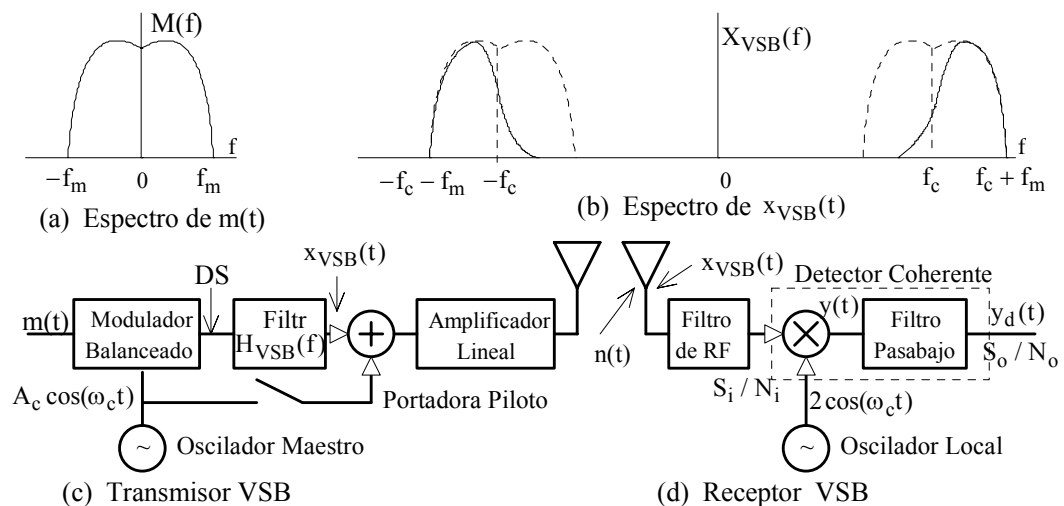


Fig. 6.16. Modulación en Banda Lateral Residual (VSB).

La señal mensaje $m(t)$ se puede recuperar exactamente en el receptor mediante un detector apropiado. Si se transmite una portadora piloto junto con la señal VSB, la señal mensaje puede recobrase sea mediante detección coherente o mediante reinserción de portadora y detección de envolvente. Esta segunda forma es la más utilizada en la práctica.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Veamos ahora las características de la señal VSB y las del filtro $H_{\text{VSB}}(f)$ utilizado para generarla a partir de una señal DSB.

La salida del filtro VSB, Fig. 6.16(c), viene dada por el producto de convolución

$$x_{\text{VSB}}(t) = x_{\text{DSB}}(t) * h_{\text{VSB}}(t) \Leftrightarrow X_{\text{DSB}}(f) \cdot H_{\text{VSB}}(f) \quad (6.48)$$

donde $h_{\text{VSB}}(t) \Leftrightarrow H_{\text{VSB}}(f)$ y $x_{\text{DSB}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$

$$x_{\text{VSB}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) * h_{\text{VSB}}(t) = A_c \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\tau) \cos[2\pi f_c (t-\tau)] \cdot h_{\text{VSB}}(\tau) d\tau$$

Desarrollando el coseno y recolectando términos,

$$\begin{aligned} x_{\text{VSB}}(t) = A_c & \left[\int_{-\infty}^{\infty} m(t-\tau) h_{\text{VSB}}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \cdot d\tau \right] \cdot \cos(2\pi f_c t) + \\ & + A_c \left[\int_{-\infty}^{\infty} m(t-\tau) h_{\text{VSB}}(\tau) \sin(2\pi f_c \tau) \cdot d\tau \right] \cdot \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{\text{VSB}}(t) = A_c & [m(t) * h_{\text{VSB}}(t) \cos(2\pi f_c t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) + \\ & + A_c [m(t) * h_{\text{VSB}}(t) \sin(2\pi f_c t)] \cdot \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } h_{\text{VSB}}(t) \cos(2\pi f_c t) = h_c(t); \quad h_{\text{VSB}}(t) \sin(2\pi f_c t) = h_s(t)$$

$$m_c(t) = m(t) * h_c(t) \quad \text{y} \quad m_s(t) = m(t) * h_s(t)$$

$$\text{Entonces, } x_{\text{VSB}}(t) = A_c m_c(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c m_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (6.49)$$

Obsérvese que la señal VSB tiene una estructura canónica propia de una señal pasabanda con bandas laterales asimétricas. La señal mensaje $m(t)$ está distorsionada por la acción de $h_c(t)$ y $h_s(t)$, pero no es una señal SSB. En efecto, si $h_s(t)$ fuera un filtro de Hilbert (caso SSB), entonces $m_s(t) = m(t) * h_s(t) = \bar{m}(t)$; $h_c(t) = \delta(t)$; $m_c(t) = m(t) * \delta(t) = m(t)$ y la expresión (6.49) se reduciría entonces a la expresión (6.31). Las señales SSB y VSB tienen características similares pero ellas mismas son muy diferentes entre sí.

Las características del filtro $H_{\text{VSB}}(f)$ se pueden deducir a partir del siguiente desarrollo. En el receptor, Fig.6.16(d), la señal $y(t)$ es

$$y(t) = x_{\text{VSB}}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow Y(f) = X_{\text{VSB}}(f + f_c) + X_{\text{VSB}}(f - f_c)$$

pero, de (6.48), $X_{\text{VSB}}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f + f_c) + M(f - f_c)] \cdot H_{\text{VSB}}(f)$, entonces

$$Y(f) = \frac{A_c}{2} \{ [M(f + 2f_c) + M(f)] \cdot H_{\text{VSB}}(f + f_c) + [M(f) + M(f - 2f_c)] \cdot H_{\text{VSB}}(f - f_c) \}$$

El filtro pasabajo rechaza las componentes de alta frecuencia y su salida será

$$Y_d(f) = \frac{A_c}{2} [H_{\text{VSB}}(f + f_c) + H_{\text{VSB}}(f - f_c)] \cdot M(f) \quad (6.50)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Para recepción sin distorsión, es necesario que $Y_d(f) = KM(f)$; por consiguiente, la función de transferencia del filtro debe satisfacer la condición

$$[H_{\text{VSB}}(f + f_c) + H_{\text{VSB}}(f - f_c)] = H_o, \text{ donde } H_o \text{ es una constante.}$$

Como $M(f)$ es un espectro de banda limitada f_m , es decir, que él existe en el intervalo $(-f_m, f_m)$, entonces la expresión (6.50) será válida únicamente en ese intervalo, y debe verificarse entonces que

$$[H_{\text{VSB}}(f + f_c) + H_{\text{VSB}}(f - f_c)] = H_o \quad \text{para } |f| \leq f_m \quad (6.51)$$

Esto se expresa diciendo que el filtro debe tener simetría complementaria, como se muestra en la Fig. 6.17(a). En (b) se muestra la formación de $[H_{\text{VSB}}(f + f_c) + H_{\text{VSB}}(f - f_c)]$; nótese que para $|f| \leq f_m$ la característica es constante e igual a H_o .

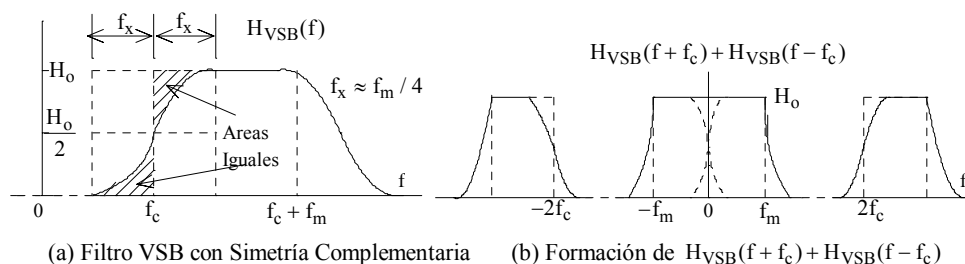


Fig. 6.17. Función de Transferencia del Filtro VSB

Las ecuaciones (6.49) y (6.51) nos permiten comprender mejor el proceso de generación VSB. En efecto, como $m_c(t) = m(t) * h_{\text{VSB}}(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$, entonces

$$M_c(f) = \frac{1}{2} M(f) \cdot [H_{\text{VSB}}(f + f_c) + H_{\text{VSB}}(f - f_c)] \quad (6.52)$$

pero la expresión dentro de los corchetes es, de (6.51), igual a una constante que podemos hacer igual a 2; por consiguiente,

$$M_c(f) = M(f) \Leftrightarrow m_c(t) = m(t), \text{ de donde,}$$

$$x_{\text{VSB}}(t) = A_c m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + A_c m_s(t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad (6.53)$$

Una aplicación práctica de este resultado es que las señales VSB se pueden generar mediante un modulador cuyo diagrama de bloques se muestra en la Fig. 6.18(a), que es una representación término a término de la expresión (6.53).

Puesto que $h_s(t) = h_{\text{VSB}}(t) \cdot \sin(2\pi f_c t)$, su función de transferencia $H_s(f)$ será

$$H_s(f) = j \frac{1}{2} [H_{\text{VSB}}(f + f_c) - H_{\text{VSB}}(f - f_c)] \quad \text{para } |f| \leq f_m \quad (6.54)$$

de donde

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$\left. \begin{aligned} |H_s(f)| &= \frac{1}{2} |H_{\text{VSB}}(f + f_c) - H_{\text{VSB}}(f - f_c)| \\ \beta(f) &= \frac{\pi}{2} \text{sgn}(f) \end{aligned} \right\} \text{ para } |f| \leq f_m$$

Estas características se muestran en la Fig. 6.18(b).

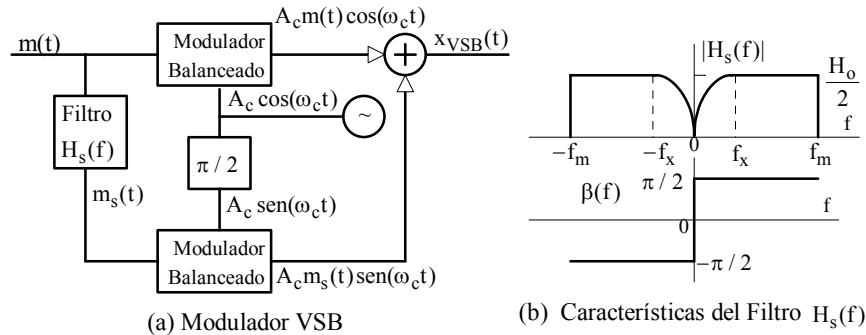


Fig. 6.18. Modulación de Señales VSB

Como sucede en la modulación SSB, la componente en cuadratura en VSB no es independiente de la componente en fase o señal mensaje $m(t)$, y su objeto es el de interferir con la componente en fase a fin de producir la modulación residual. Nótese que, cualquiera que sea la naturaleza de la componente en cuadratura, la señal mensaje $m(t)$ siempre podrá ser recuperada a partir de $x_{\text{VSB}}(t)$ mediante detección coherente o por reinserción de portadora y detección de envolvente. En general, estos sistemas incorporan en la señal transmitida una portadora piloto para la sincronización del oscilador local del receptor.

La transmisión en VSB combina las ventajas de los sistemas DSB y SSB sin ninguna de sus desventajas. Requiere un poco más del ancho de banda que en SSB y se puede generar fácilmente a partir de señales DSB mediante filtros relativamente sencillos con características de corte graduales. El sistema VSB es relativamente inmune al desvanecimiento selectivo y su ganancia de conversión es superior a la de SSB. El cálculo de las potencias de señal de pre y postdetección se efectúa para cada caso en particular, pues ellas dependen de los filtros $H_{\text{VSB}}(f)$ o $H_s(f)$.

La modulación VSB se utiliza para transmitir las señales de video en Televisión Analógica Comercial (el sonido se transmite en Frecuencia Modulada, que veremos más adelante). La señal de video de TV es una señal VSB superior a la cual se le ha incorporado una portadora piloto de video para efectos de sincronización. El ancho de banda permisible es de 6 MHz, ó 125% de los 4,5 MHz de la banda de base requerida en SSB. En la Fig. 6.19 se muestra el espectro de una señal de TV comercial según las normas NTSC (National Television Systems Committee) de los Estados Unidos, sistema utilizado también en Venezuela.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

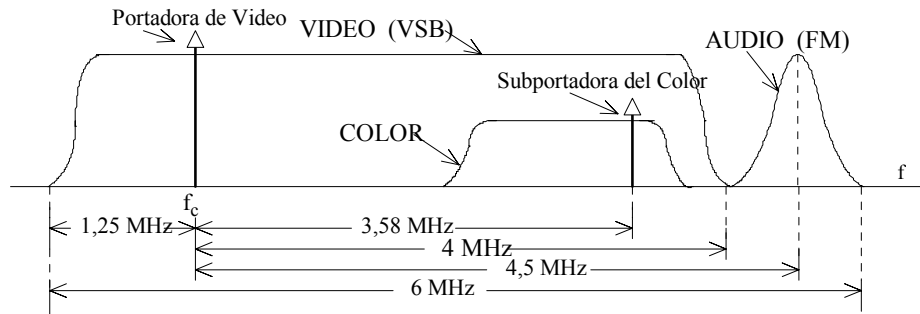


Fig. 6.19. Espectro de la Señal de TV Comercial, Sistema NTSC.

La modulación VSB se utiliza también en la Norma de Estados Unidos ATSC (Advanced Television Systems Committee) para la transmisión de televisión digital terrestre. Ver Apéndice B.

♣ Ejemplo 6.4

Se quiere transmitir en VSB la señal $m(t)$ del Ejemplo 6.3. La función de transferencia del filtro VSB tiene la forma mostrada en la Fig. 6.20(a). El ruido a la entrada del receptor es blanco, de densidad espectral $2 \times 10^{-9} \text{ W/Hz}$. No se transmite portadora piloto y la detección es coherente. Vamos a determinar la señal VSB transmitida y las relaciones de pre y postdetección. Se supone que todos los filtros son de ganancia unitaria.

$$\text{Del Ejemplo 6.3, } m(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2\pi n f_o t); \quad f_o = 1 \text{ kHz}; n \text{ impar}$$

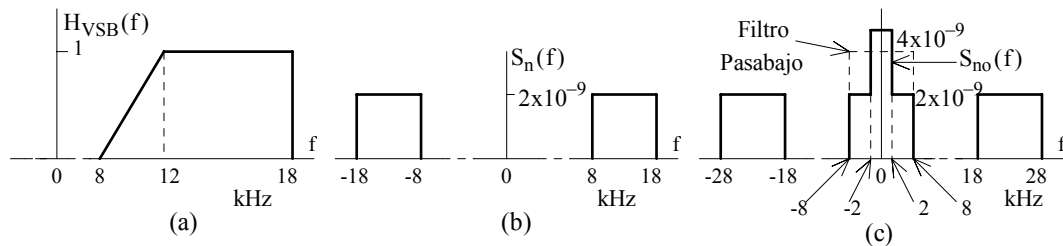


Fig. 6.20. Espectros del Ejemplo 6.4

De la forma del filtro VSB, Fig. 6.20(a), la frecuencia de portadora apropiada es de 10 kHz; entonces,

$$\begin{aligned} x_{\text{DSB}}(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t) = & \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(11 \times 10^3)t] + \cos[2\pi(9 \times 10^3)t] + \right. \\ & + \frac{1}{9} \cos[2\pi(13 \times 10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(7 \times 10^3)t] + \\ & + \frac{1}{25} \cos[2\pi(15 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] + \\ & \left. + \frac{1}{49} \cos[2\pi(17 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(3 \times 10^3)t] + \dots \right\} \end{aligned}$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

De acuerdo con la geometría del filtro VSB vemos que pasan solamente las componentes de 9, 11, 13, 15 y 17 kHz, de las cuales están atenuadas en la forma siguiente: la de 9 kHz en un factor 0,25 y la de 11 kHz en un factor 0,75. La señal VSB será:

$$x_{\text{VSB}}(t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} \cos[2\pi(9 \times 10^3)t] + \frac{3}{4} \cos[2\pi(11 \times 10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(13 \times 10^3)t] + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \cos[2\pi(15 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(17 \times 10^3)t] \right\}$$

En el receptor, esta señal se multiplica por $2 \cos(2\pi f_c t)$, de donde

$$y(t) = x_{\text{VSB}}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} \cos[2\pi(19 \times 10^3)t] + \frac{1}{4} \cos[2\pi(10^3)t] + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} \cos[2\pi(21 \times 10^3)t] + \frac{3}{4} \cos[2\pi(10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(23 \times 10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(3 \times 10^3)t] + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \cos[2\pi(25 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(27 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(7 \times 10^3)t] \right\}$$

El filtro pasabajo tendrá un ancho de banda de 8 kHz; este filtro elimina todas las componentes fuera de esa banda. Queda entonces

$$y_d(t) = \frac{4}{\pi^2} \left\{ \cos[2\pi(10^3)t] + \frac{1}{9} \cos[2\pi(3 \times 10^3)t] + \frac{1}{25} \cos[2\pi(5 \times 10^3)t] + \frac{1}{49} \cos[2\pi(7 \times 10^3)t] \right\}$$

que es la señal original salvo los términos eliminados por el filtro.

Veamos ahora las relaciones S/N. La potencia de señal a la entrada del detector es

$$S_i = \langle x_{\text{VSB}}^2(t) \rangle = \frac{8}{\pi^4} \left[\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \frac{1}{2401} \right] = 52,5 \text{ mW} = 17,21 \text{ dBm}$$

y a la salida del filtro pasabajo,

$$S_o = \langle y_d^2(t) \rangle = \frac{8}{\pi^4} \left[1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \frac{1}{2401} \right] = 83,31 \text{ mW} = 19,21 \text{ dBm}$$

El filtro de RF del receptor tiene un ancho de banda mínimo de 10 kHz y está centrado en la frecuencia de 13 kHz. Las densidades espectrales de ruido de pre y postdetección se muestran en la Fig. 6.20(b) y (c), respectivamente.

Las potencias de ruido serán

$$N_i = 2 \times 10 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9} = 40 \text{ } \mu\text{W} = -13,98 \text{ dBm}$$

$$N_o = 16 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9} + 4 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9} = 40 \text{ } \mu\text{W} = -13,98 \text{ dBm}$$

Finalmente,

$$\frac{S_i}{N_i} = 1313 = 31,18 \text{ dB}; \quad \frac{S_o}{N_o} = 2083 = 33,19 \text{ dB}; \quad \frac{S_o/N_o}{S_i/N_i} = 2,01$$

En este ejemplo se puede observar que la ganancia de conversión en modulación VSB es superior a la de la modulación SSB. En este caso particular es 2 dB superior. Nótese que las

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

potencias de ruido de pre y postdetección son iguales en VSB; en consecuencia, el mejoramiento en la ganancia de conversión se produce en las potencias de señal, cosa que no ocurre ni en AM ni en SSB.



6.2.6. Comparación entre los Sistemas de Modulación Lineal

En las secciones anteriores se han determinado las relaciones S/N en DSB, AM y SSB tanto en detección coherente como en detección de envolvente. Para poder comparar estos sistemas es necesario establecer algunas características comunes de referencia; en nuestro caso será la misma potencia transmitida y el ancho de banda de la señal mensaje. Consideraremos también modulación sinusoidal, es decir, que la señal mensaje es una señal sinusoidal de la forma $A_m \cos(2\pi f_m t)$. El ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$.

Para la modulación AM, la potencia total transmitida es

$$P_T = P_c + P_{B(AM)}, \quad \text{donde} \quad P_{B(AM)} = \frac{a^2}{2} P_c = \frac{a^2}{2+a^2} P_T = S_{iAM} \quad (6.55)$$

En DSB, toda la potencia transmitida está en las bandas laterales; por lo tanto,

$$P_T = P_{B(DSB)} = S_{iDSB} \quad (6.56)$$

$$\text{De (6.55) y (6.56),} \quad S_{iDSB} = \frac{2+a^2}{a^2} S_{iAM} \quad (6.57)$$

La potencia de ruido es la misma en DSB y AM, es decir,

$$N_{iDSB} = N_{iAM} = 2\eta f_m \quad \text{y} \quad N_{oDSB} = N_{oAM} \quad (6.58)$$

$$\text{por consiguiente,} \quad \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{DSB} = \frac{2+a^2}{a^2} \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{AM} \quad (6.59)$$

En cuanto a la salida,

$$\text{En AM:} \quad S_{oAM} = P_{B(AM)} = \frac{a^2}{2+a^2} P_T \quad (6.60)$$

$$\text{En DSB:} \quad S_{oDSB} = P_{B(DSB)} = P_T \quad (6.61)$$

$$\text{de donde} \quad \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{DSB} = \frac{2+a^2}{a^2} \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{AM} \quad (6.62)$$

En términos de la misma potencia transmitida (o recibida), el sistema DSB es superior al sistema AM. En particular, para 100% de modulación en AM, el sistema DSB es superior en 4,77 dB.

En cuanto a SSB, la potencia total está contenida toda en una de las bandas laterales. Entonces, para una misma potencia transmitida (o recibida),

$$P_T = P_{B(SSB)} = P_{B(DSB)} = P_c + P_{B(AM)} \quad (6.63)$$

Esto simplemente significa que en una banda lateral en SSB hay el doble de potencia que en una banda lateral en DSB; sin embargo, la potencia transmitida es igual. Se verifica entonces que

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$S_{iSSB} = S_{iDSB} = \frac{2 + a^2}{a^2} S_{iAM} \quad (6.64)$$

La situación respecto al ruido cambia un poco, pues el ancho de banda en SSB es la mitad que en DSB o AM. En este caso,

$$N_{iSSB} = \frac{1}{2} N_{iDSB} = \frac{1}{2} N_{iAM} = \eta f_m \quad (6.65)$$

Las relaciones S/N de predetección serán entonces

$$\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{SSB} = 2 \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{DSB} = \frac{4 + 2a^2}{a^2} \left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{AM} \quad (6.66)$$

La relación S/N de predetección en SSB es 3 dB superior a DSB y (para 100% de modulación) 7,78 dB superior a AM. Sin embargo, en DSB y AM se produce una ganancia de 3 dB causada por la suma coherente de las dos bandas laterales, lo que no ocurre en SSB pues solamente existe una sola banda lateral. Las correspondientes relaciones S/N de postdetección serán

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{SSB} = \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{DSB} = \frac{2 + a^2}{a^2} \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{AM} \quad (6.67)$$

Cuando la potencia transmitida, la densidad espectral de ruido y el ancho de banda de la señal mensaje son los mismos, las relaciones S/N de postdetección vienen dadas por (6.67). En términos de potencia, el sistema SSB es igualmente eficiente que el DSB, pero su capacidad de transmisión de información es el doble pues se transmite la misma información por la mitad del ancho de banda. El menos eficiente de todos los sistemas es el AM, pero tiene a su favor la gran simplicidad de los circuitos de recepción. Este hecho es de capital importancia para la radiodifusión masiva, pues permite que un solo transmisor de gran potencia pueda ser recibido por grandes cantidades de receptores muy baratos y al alcance de todos. En general, los sistemas DSB, AM, SSB y VSB son sistemas de banda angosta en los cuales no hay posibilidad de intercambio entre el ancho de banda y las relaciones S/N.

El efecto del “desvanecimiento”, al cual nos hemos referido anteriormente, es mucho más desastroso en sistemas AM que en SSB o DSB. El desvanecimiento se produce porque las señales llegan al receptor a través de múltiples trayectorias de propagación, cada una de diferente longitud; esto hace que las fases de las señales que llegan al receptor difieran de tal manera que la señal recibida varía en forma aleatoria y puede incluso desaparecer. El desvanecimiento también es sensible a la frecuencia, siendo por esto más serios sus efectos pues la portadora y cada una de las bandas laterales experimentan diferentes grados de desvanecimiento; por esta razón, este fenómeno se denomina también “desvanecimiento selectivo”. El desvanecimiento selectivo perturba la relación entre las magnitudes de la portadora y las bandas laterales hasta tal punto en AM que la condición (6.14) ya no es válida. En altas frecuencias el desvanecimiento se torna peor, por lo cual a estas frecuencias se utiliza sistemas de portadora suprimida para evitar o por lo menos disminuir la distorsión producida por el desvanecimiento selectivo. Por este motivo la transmisión masiva en AM cada vez es menor y la preferencia del público se centra en la transmisión en frecuencia modulada (FM). Probablemente esta situación cambie cuando comience la transmisión de radio digital, cuyos principios mostramos en el Apéndice B.4. En el Cuadro Comparativo de la página siguiente se tabulan las características principales de los sistemas de modulación lineal.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

TABLA 6-1. CUADRO COMPARATIVO DE LOS SISTEMAS DE MODULACION LINEAL

Descripción	Ancho de Banda	Ganancia de Conversión	Rendimiento %	Relaciones S/N de Predetección	Relaciones S/N de Postdetección
DSB Doble Banda Lateral	$2f_m$	2	100%	$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{DSB} = \frac{1}{2} \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{SSB} = \frac{2+a^2}{a^2} \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{AM}$	$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{DSB} = \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{SSB} = \frac{2+a^2}{a^2} \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{AM}$
AM Amplitud Modulada	$2f_m$	≤ 1	$\leq 50\%$	$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{AM} = \frac{a^2}{2+a^2} \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{DSB} = \frac{a^2}{4+2a^2} \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{SSB}$	$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{AM} = \frac{a^2}{2+a^2} \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{DSB} = \frac{a^2}{2+a^2} \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{SSB}$
SSB Banda Lateral Unica	f_m	1	100%	$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{SSB} = 2 \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{DSB} = \frac{4+2a^2}{a^2} \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{AM}$	$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{SSB} = \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{DSB} = \frac{2+a^2}{a^2} \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{AM}$
VSB Banda Lateral Residual(*)	$\approx 1,25f_m$	$1 < G < 2$	$< 50\%$	$\left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{DSB} > \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{VSB} > \left[\frac{S_i}{N_i}\right]_{SSB}$	$\left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{DSB} > \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{VSB} > \left[\frac{S_o}{N_o}\right]_{SSB}$

(*) Con Portadora. Si no se transmite una portadora, la detección es coherente, el rendimiento es del 100% y tiene una respuesta en CC.

TABLA 6-1. CONTINUACION

Descripción	Respuesta en CC	Grado de Complejidad	Aplicaciones Típicas
DSB Doble Banda Lateral	Si	Moderado. Se requiere detección coherente	Sistemas de Comunicación de Banda Angosta. Mezclado de Frecuencias.
AM Amplitud Modulada	No	Bajo. Detección de Envolvente	Radiodifusión Comercial
SSB Banda Lateral Unica	No	Alto. Modulador por Desplazamiento de Fase y Detección Coherente	Transmisión de Voz (Telefonía) Radioaficionados
VSB Banda Lateral Residual(*)	No, pero permite bajas frecuencias	Moderado. Filtros Simétricos y Detección de Envolvente	Televisión Comercial

(*) Con Portadora.

6.3. TÉCNICAS DE TRASLACIÓN DE FRECUENCIAS

6.3.1. Conversión de Frecuencias

La conversión de frecuencias, llamada también “mezclado o heterodinación” es una de las operaciones más importantes de la traslación de frecuencias en los sistemas de transmisión y procesamiento de señales. En particular, la modulación lineal es una aplicación de las técnicas de traslación de frecuencias. En general, la conversión de frecuencias es una operación que permite desplazar el espectro de una señal pasabanda hacia arriba o hacia abajo a una nueva banda de frecuencias; el perfil del espectro no experimenta ningún cambio. El dispositivo que efectúa la conversión se denomina comúnmente “**conversor**”, “**convertidor**” o “**mezclador**”, y está constituido fundamentalmente por un modulador balanceado seguido de un filtro pasabanda centrado en la gama de frecuencias a la cual se desea trasladar el espectro. En la Fig. 6.21(a) se muestra un mezclador y en (b) la traslación de los espectros hacia arriba o hacia abajo.

Sea el mezclador de la Fig. 6.21(a). Se desea determinar la frecuencia f_{OL} del oscilador local a fin de trasladar el espectro de $x(t)$ desde la frecuencia de origen f_1 a la frecuencia de destino f_2 , donde f_2 puede ser mayor o menor que f_1 . En general, el espectro de $x(t)$ es de banda angosta.

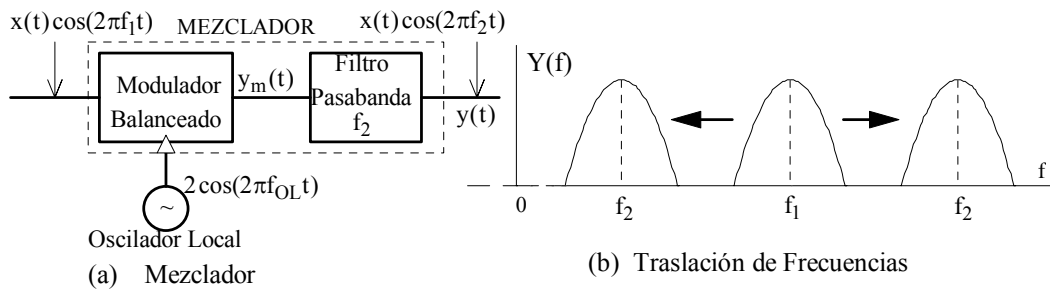


Fig. 6.21. Mezclado o Conversión de Frecuencias.

De la Fig. 6.21(a),

$$\begin{aligned} y_m(t) &= x(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi f_{OL} t) \\ &= x(t) \cos[2\pi(f_{OL} + f_1)t] + x(t) \cos[2\pi(f_{OL} - f_1)t] \end{aligned} \quad (6.68)$$

La frecuencia f_2 se puede hacer igual a cualquiera de las dos frecuencias de (6.68), es decir,

$$f_2 = \begin{cases} f_{OL} + f_1 & \text{cuando } f_2 > f_1 \\ f_{OL} - f_1 & \text{cuando } f_2 < f_1 \end{cases} \quad (6.69)$$

La expresión (6.69) nos permite definir f_{OL} en la forma

$$f_{OL} = \begin{cases} f_2 - f_1 & \text{cuando } f_2 > f_1 \\ f_2 + f_1 & \text{cuando } f_2 < f_1 \end{cases} ; \quad \text{con } f_{OL} > 0 \quad (6.70)$$

El oscilador local del mezclador deberá diseñarse para una frecuencia que sea igual a cualquiera de las frecuencias dadas por (6.70), y el filtro pasabanda de salida del mezclador se centrará en la frecuencia de destino f_2 .

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

El lector puede demostrar fácilmente que

$$(a) \quad \text{Si } f_{OL} = f_2 - f_1; \quad y_m(t) = x(t) \cos(2\pi f_2 t) + x(t) \cos[2\pi(f_2 - 2f_1)t]$$

$$(b) \quad \text{Si } f_{OL} = f_2 + f_1; \quad y_m(t) = x(t) \cos(2\pi f_2 t) + x(t) \cos[2\pi(f_2 + 2f_1)t]$$

El filtro pasabanda centrado en f_2 rechaza las frecuencias $|f_2 - 2f_1|$ ó $|f_2 + 2f_1|$, quedando en la salida

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_2 t)$$

que es la señal $x(t)$ desplazada a la nueva frecuencia f_2 .

Frecuencias Imagen

Un problema que se manifiesta comúnmente en las operaciones de mezclado, es que señales cuyos espectros están centrados en las frecuencias $|f_1 - 2f_2|$ o $|f_1 + 2f_2|$ son trasladadas también a la frecuencia f_2 . En efecto, sea una señal de entrada de la forma $x_i(t) \cos[2\pi(f_1 - 2f_2)t]$; a la salida del modulador balanceado se tendrá, con $f_{OL} = f_2 - f_1$,

$$y_m(t) = x_i(t) \cos[2\pi(f_1 - 2f_2)t] \cdot 2 \cos[2\pi(f_2 - f_1)t]$$

$$y_m(t) = x_i(t) \cos(2\pi f_2 t) + x_i(t) \cos[2\pi(2f_1 - 3f_2)t]$$

El filtro pasabanda centrado en f_2 rechaza las frecuencias centradas en $|2f_1 - 3f_2|$ y a su salida se tendrá la señal $y_m(t) = x_i(t) \cos(2\pi f_2 t)$, la cual constituye una interferencia. Si la potencia de $x_i(t)$ es lo suficientemente alta, la señal deseada $x(t)$ puede tornarse ininteligible debido a la severa interferencia producida. El lector puede verificar que la señal $x_i(t) \cos[2\pi(f_1 + 2f_2)t]$ produce también el mismo tipo de interferencia cuando $f_{OL} = f_2 + f_1$.

A las frecuencias de entrada no deseadas que producen interferencias en la frecuencia f_2 , se las conoce con el nombre de “**frecuencias imagen**” y pueden constituir una interferencia muy molesta si no son adecuadamente filtradas antes del mezclador. Las frecuencias imagen vienen dadas entonces por la expresión

$$f_{im} = \begin{cases} f_1 - 2f_2 & \text{cuando } f_2 > f_1 \text{ y } f_{OL} = f_2 - f_1 \\ f_1 + 2f_2 & \text{cuando } f_2 < f_1 \text{ y } f_{OL} = f_2 + f_1 \end{cases} \quad (6.71)$$

A continuación veremos una aplicación muy importante de estos conceptos.

El Receptor Superheterodino

En los receptores que hemos visto hasta ahora hemos supuesto que se recibía siempre una señal centrada a una frecuencia fija f_c y que tanto el amplificador de RF como el oscilador local estaban sintonizados a esa misma frecuencia. Este tipo de receptor se denomina “**receptor de radiofrecuencia sintonizada**”. Pero en la práctica es necesario transmitir a diferentes frecuencias o bandas y las ventajas de un sistema a una sola frecuencia ya no pueden aplicarse, pues sería necesario sintonizar cada vez todos los amplificadores de RF presentes.

El problema de la sintonización sobre una amplia gama de frecuencias es la dificultad en el establecimiento de la banda de atenuación apropiada mientras al mismo tiempo se mantiene una amplitud constante sobre las diferentes bandas de paso. Además, es difícil conseguir altas ganancias en radiofrecuencia y al mismo tiempo impedir el acoplamiento parásito entre la entrada y salida del amplificador de RF que puede hacer que el amplificador entre en un lazo de oscilación. Ahora bien,

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

si una señal de RF, no importa cual sea su frecuencia central, pudiera ser trasladada a una frecuencia o banda predeterminadas, las ventajas de la operación a una frecuencia fija se pueden instrumentar fácilmente en un receptor. Este es el principio del “receptor superheterodino”, cuyo diagrama de bloques y principio de operación se muestra en la Fig. 6.22.

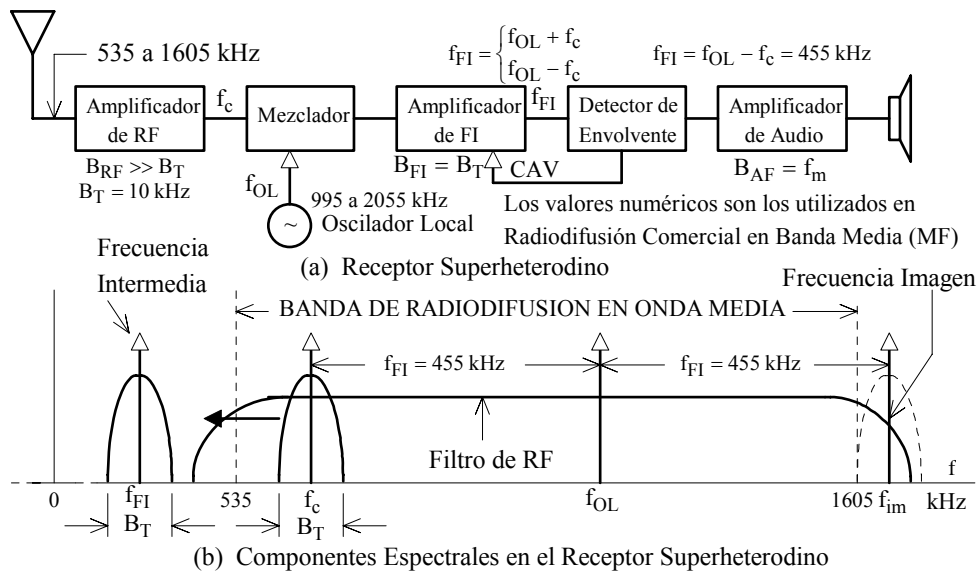


Fig. 6.22. El Receptor Superheterodino y sus Componentes Espectrales Asociadas.

La señal entrante, centrada a una frecuencia f_c , es primero amplificada en el amplificador de RF. Los amplificadores de RF típicos son amplificadores pasabanda sintonizables dentro de diferentes gamas de frecuencias. Por ejemplo, en Radiodifusión Comercial en Banda Media (MF), esta gama se extiende desde 535 a 1605 kHz, según lo establece la UIT-R. En la etapa mezcladora, la señal de RF centrada en f_c se mezcla con una señal sinusoidal de frecuencia f_{OL} generada localmente. El circuito de sintonización del oscilador local está acoplado (mecánica o electrónicamente) con el circuito de sintonización del amplificador de RF, de tal manera que la diferencia entre f_{OL} y f_c sea constante; esta frecuencia constante se denomina “**frecuencia intermedia**, f_{FI} ”. El acoplamiento de la sintonización generalmente se realiza con un capacitor variable de varias secciones cuyos valores cambian cuando se actúa el control de sintonización. En los receptores modernos se utiliza diodos varactores, que no están sujetos a acumulación de polvo o humedad y que se prestan para ser utilizados con los sintetizadores de frecuencia. La frecuencia f_{OL} puede ser más alta o más baja que la frecuencia de entrada f_c , pero la diferencia $|f_{OL} - f_c|$ debe ser siempre constante e igual f_{FI} .

El mezclador puede ser cualquier tipo de modulador balanceado que se puede instrumentar de diferentes formas [Miller, 1993]. A la salida del mezclador aparecen las señales $f_{OL} + f_c$ y $f_{OL} - f_c$. La componente centrada en $f_{OL} + f_c$ es rechazada por el amplificador de frecuencia intermedia (FI), el cual está sintonizado a la frecuencia fija $f_{FI} = f_{OL} - f_c$. La salida del amplificador de FI pasa al detector de envolvente, se demodula, se amplifica y filtra en el amplificador de audio y se presenta a la salida, en este caso un altavoz.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

La estrategia del principio superheterodino puede deducirse ahora. En vez de intentar la sintonización en toda la gama de RF de un filtro altamente selectivo, lo que se hace es utilizar un filtro sintonizable también pero dentro de una parte de la gama de RF, por ejemplo, entre 535 y 1605 kHz, a fin de rechazar la mayor parte de las frecuencias imagen; los receptores de comunicación comerciales pueden tener hasta nueve bandas de RF. Todas las señales que pasan por el filtro de RF son desplazadas entonces por el mezclador, pero solamente serán aceptadas aquellas señales que caigan dentro de la banda de paso del amplificador de FI. La selectividad, sensibilidad y ganancia del receptor están entonces determinadas por las características pasabanda del amplificador de FI, el cual puede ser diseñado y optimizado pues trabaja siempre dentro de una banda fija.

Veamos ahora qué sucede en relación con la frecuencia imagen. En este caso, puesto que $f_{OL} = f_c + f_{FI}$, la frecuencia imagen es, de (6.71),

$$f_{im} = f_c + 2f_{FI} = f_{OL} + f_{FI} \quad (6.72)$$

La frecuencia imagen $f_{OL} + f_{FI}$ se muestra en el extremo superior de la banda de RF, Fig. 6.22(b).

Si f_1 y f_2 son los bordes inferior y superior, respectivamente, de la banda de RF, entonces debe verificarse que

$$f_{im} \geq f_1 + \frac{B_T}{2} + 2f_{FI} \quad \text{y} \quad f_{im} \leq f_2 - \frac{B_T}{2} - 2f_{FI} \quad (6.73)$$

Una manera de evitar los efectos interferentes de la frecuencia imagen, es asegurándose que la gama de frecuencias imagen no caiga dentro de la banda de paso de RF. Específicamente, la banda de frecuencias entre $[f_{im} - B_T / 2]$ a $[f_{im} + B_T / 2]$ representa la gama de frecuencias que al mezclarse con f_{OL} caen dentro de la banda de paso en FI. En consecuencia, hay que asegurarse que la gama interferente esté fuera de la banda de paso de RF, lo cual depende del valor de la frecuencia intermedia f_{FI} . La selección de una frecuencia intermedia apropiada es un compromiso entre varios factores, tales como la ganancia, la selectividad, el ancho de banda de RF, etc. Por ejemplo, para las bandas de radiodifusión comercial se ha seleccionado el valor de 455 kHz. La frecuencia imagen estará separada de la señal deseada en 910 kHz, de modo que no es necesario que el filtro de RF sea muy selectivo; aún más, el filtro de RF puede hasta eliminarse como es el caso de los receptores AM de bajo precio y una sola banda. Aunque difieren en el tipo de modulación empleado, los receptores de TV y de frecuencia modulada (FM) también emplean el concepto superheterodino con frecuencias intermedias de 43,75 MHz y 10,7 MHz, respectivamente. Algunos receptores de comunicaciones emplean doble conversión, es decir, dos frecuencias intermedias: una en alta frecuencia, por ejemplo, de 10 MHz, y la otra de 1 MHz. Este esquema de doble conversión elimina muchos de los problemas de frecuencia imagen que no son resueltos en conversión sencilla.

El receptor superheterodino tiene muchas ventajas y algunas desventajas. La ventaja principal es su alta ganancia sin peligro de oscilaciones. Las capacitancias parásitas dentro del receptor no inducen oscilaciones porque la ganancia se obtiene en bandas diferentes: RF, IF y banda de base. El receptor se puede sintonizar muy fácilmente a cualquiera frecuencia de entrada simplemente variando la frecuencia del oscilador local (que puede ser un sintetizador de frecuencia) y sintonizando las diferentes bandas (ondas largas, medias y cortas) del amplificador de RF. Además, los amplificadores de FI se pueden diseñar en forma óptima para conseguir características de alto Q, pues siempre trabajan en la misma gama de frecuencias. La principal desventaja del

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

receptor superheterodino es que si no se diseña cuidadosamente, será muy sensible a señales espurias y a las frecuencias imagen.

Una característica importante de los receptores superheterodinos es el Control Automático de Volumen (CAV). A la entrada del receptor, la señal de RF experimenta variaciones de nivel producidas por el desvanecimiento; como resultado, en la salida del receptor se produce molestas variaciones en el nivel del volumen. El CAV corrige estas variaciones usando la componente continua de la salida del detector de envoltura como señal de control de la ganancia del amplificador de FI o de RF, según el diseño. Un estudio práctico más completo del receptor superheterodino se puede encontrar en [Miller, 1993]. Los catálogos de los fabricantes son también muy útiles e instructivos.

6.3.2. Multiplicidad por División de Frecuencia (FDM)

En el Capítulo V, Sección 5.5.2, desarrollamos el concepto de la Multiplicidad por División de Tiempo (TDM) como la repartición del tiempo de utilización de un canal, en el cual las diferentes señales están representadas mediante impulsos.

La “**Multiplicidad por División de Frecuencia (FDM)**”, Fig. 6.23, es una operación mediante la cual una cantidad de señales diferentes son transmitidas conjunta y simultáneamente por un mismo canal mediante el empleo de subportadoras y traslación de frecuencias.

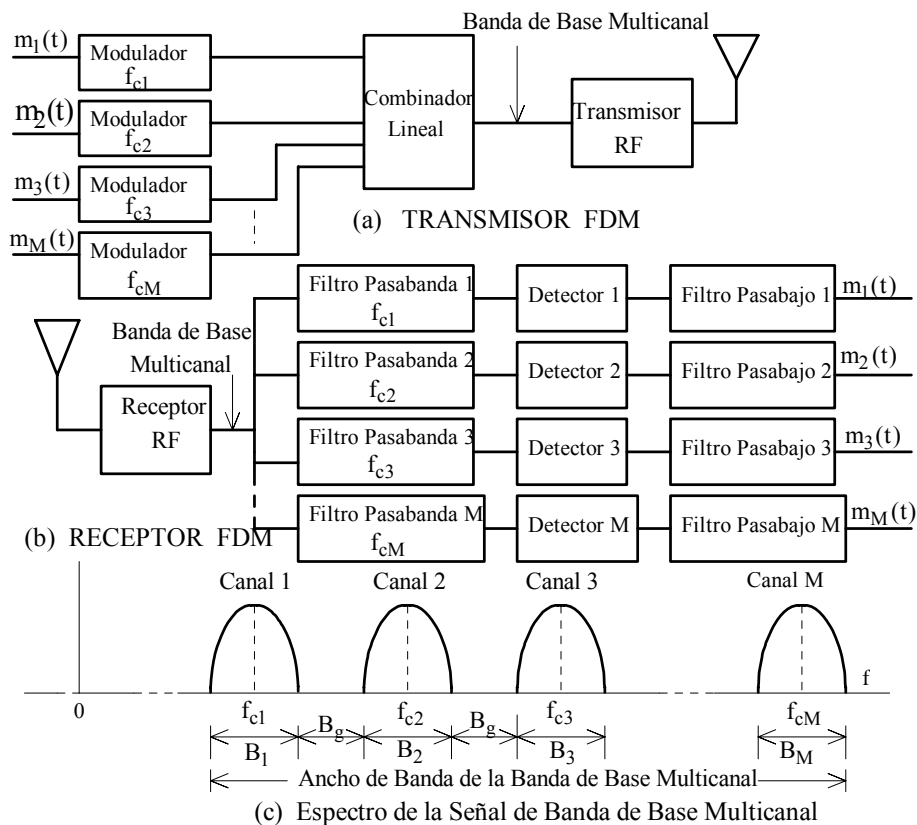


Fig. 6.23. Multiplicidad por División de Frecuencia (FDM).

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

El espectro de cada señal es trasladado a una banda diferente y el espectro compuesto o señal FDM forma una banda de base que se puede transmitir utilizando cualquiera de los esquemas de modulación ya vistos. Nótese que en TDM todas las señales utilizan la misma banda de frecuencias pero operan en tiempos diferentes, mientras que en FDM todas las señales operan al mismo tiempo pero utilizan bandas de frecuencia diferentes. En la Fig. 6.23 se muestra la configuración básica de un sistema FDM.

En la Fig. 6.23(a) se muestra un sistema de transmisión FDM. En el transmisor, cada señal individual se aplica a un modulador con una subportadora diferente. Estas subportadoras generalmente son de frecuencias bajas y no son normalmente apropiadas para la transmisión directa en RF. Las señales moduladas se combinan en un circuito sumador, algunas veces denominado “combinador”, cuya salida compuesta, la señal de banda de base, modula un transmisor de RF.

En la Fig. 6.23(b) se muestra el diagrama de bloques del sistema de recepción FDM. La parte de entrada es el receptor de RF cuyo ancho de banda debe ser suficiente para acomodar la señal de banda de base multicanal. En el receptor de RF la señal compuesta es recibida, demodulada y aplicada a una batería de filtros pasabanda centrados en las frecuencias de las subportadoras. El ancho de banda de cada filtro debe ser diseñado cuidadosamente para que deje pasar solamente el espectro de la señal correspondiente. Finalmente, cada mensaje individual es detectado y recuperado según el tipo de modulación empleado en el transmisor.

La terminología empleada en los sistemas FDM tiene la forma X/Y FDM, donde **X** se refiere al tipo de modulación de las subportadoras y **Y** se refiere al tipo de modulación empleado para la transmisión de la banda de base en RF. Por ejemplo, un sistema SSB/SSB FDM es un sistema multiplex que utiliza modulación SSB en las subportadoras y cuya transmisión se efectúa en SSB. En telemetría espacial se utiliza bastante el sistema FM/FM FDM.

Una forma de FDM es la OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiplex) utilizada en los sistemas de transmisión de Radiodifusión y Televisión Digitales. Ver Apéndice B.

Ancho de Banda de la Banda de Base Multicanal

En la Fig. 6.23(c) hemos supuesto que todas las señales están moduladas en DSB y que sus anchos de banda son diferentes. Sin embargo, la modulación de cada señal puede ser diferente: en PSK o FSK, en AM, en SSB, en VSB con o sin portadora, y en FM, como veremos en su oportunidad. Obsérvese que para que no haya solapamiento entre los diferentes espectros, hay que agregar una “banda de guarda” de anchura B_g que los separe. Esta banda de guarda permite también recuperar fácilmente, en el receptor, las diferentes señales mediante filtros prácticos.

El ancho de banda de la banda de base dependerá del ancho de banda, del tipo de modulación de las señales individuales y del ancho de banda de las bandas de guarda. En general, el ancho de banda de la señal de banda de base de M señales multiplexadas viene dada por, Fig. 6.23(c),

$$B_T = (M - 1)B_g + \sum_{m=1}^M B_m \quad (6.73)$$

donde $B_1, B_2, \dots, B_M$ son los anchos de banda de los canales o señales individuales y B_g la banda de guarda. En particular, los anchos de banda individuales dependerán del tipo de modulación utilizado. Por ejemplo, en AM o DSB: $B = 2f_m$, y en SSB: $B = f_m$.

Multicanalización en Sistemas Telefónicos

En el diseño de sistemas de comunicación y en particular en los sistemas telefónicos, se desea mantener en la medida de lo posible los mismos equipos básicos para simplificar la fabricación, el mantenimiento y el almacenamiento de componentes. En el caso de la telefonía, la UIT-T ha dictado normas para la cantidad de canales y gamas de frecuencia que han de emplearse. En la Fig. 6.24 se muestra el proceso de formación multicanal, denominado “Planes de Modulación”, para los conjuntos de 12, 60, 300 y 900 canales telefónicos en la banda de base, así como un plan para la transmisión mixta de 1200 canales telefónicos y un canal de TV.

La composición del GRUPO de 12 canales se efectúa en dos etapas: primero para tres canales y después para el GRUPO propiamente. Con este procedimiento se necesita solamente 7 frecuencias de subportadora en lugar de las 12 que hubiera exigido la modulación directa. Un canal de voz (de 300 a 3400 Hz) se modula a la frecuencia de 12 kHz suprimiéndose la portadora y la banda lateral inferior formando el canal N° 1 dentro de la banda de 12 a 16 kHz. Los canales 2 y 3 siguientes se modulan a 16 y 20 kHz, respectivamente, formando los tres canales un SUBGRUPO de canales que cubre la gama de frecuencias de 12 a 24 kHz. De la misma manera se tratan los canales 4-6, 7-9 y 10-12, de modo que formen otros tres SUBGRUPOS. A continuación los cuatro SUBGRUPOS se modulan a 84, 96, 108 y 120 kHz, formando el GRUPO de 12 canales. Este proceso se muestra en la Fig. 6.24(a) y (b). De manera semejante se obtiene los planes de modulación para 60, 300 y 900 canales. Nótese que para multicanalizar 900 canales se necesita solamente 20 subportadoras. Las portadoras piloto se utilizan para control y supervisión; por ejemplo, en los canales individuales la portadora piloto está fuera de la banda útil (3200 Hz) a una frecuencia de 3825 Hz.

En la Fig. 6.24 se muestran los Planes de Modulación establecidos por el UIT-T en su Recomendación G.233 para la transmisión de telefonía.

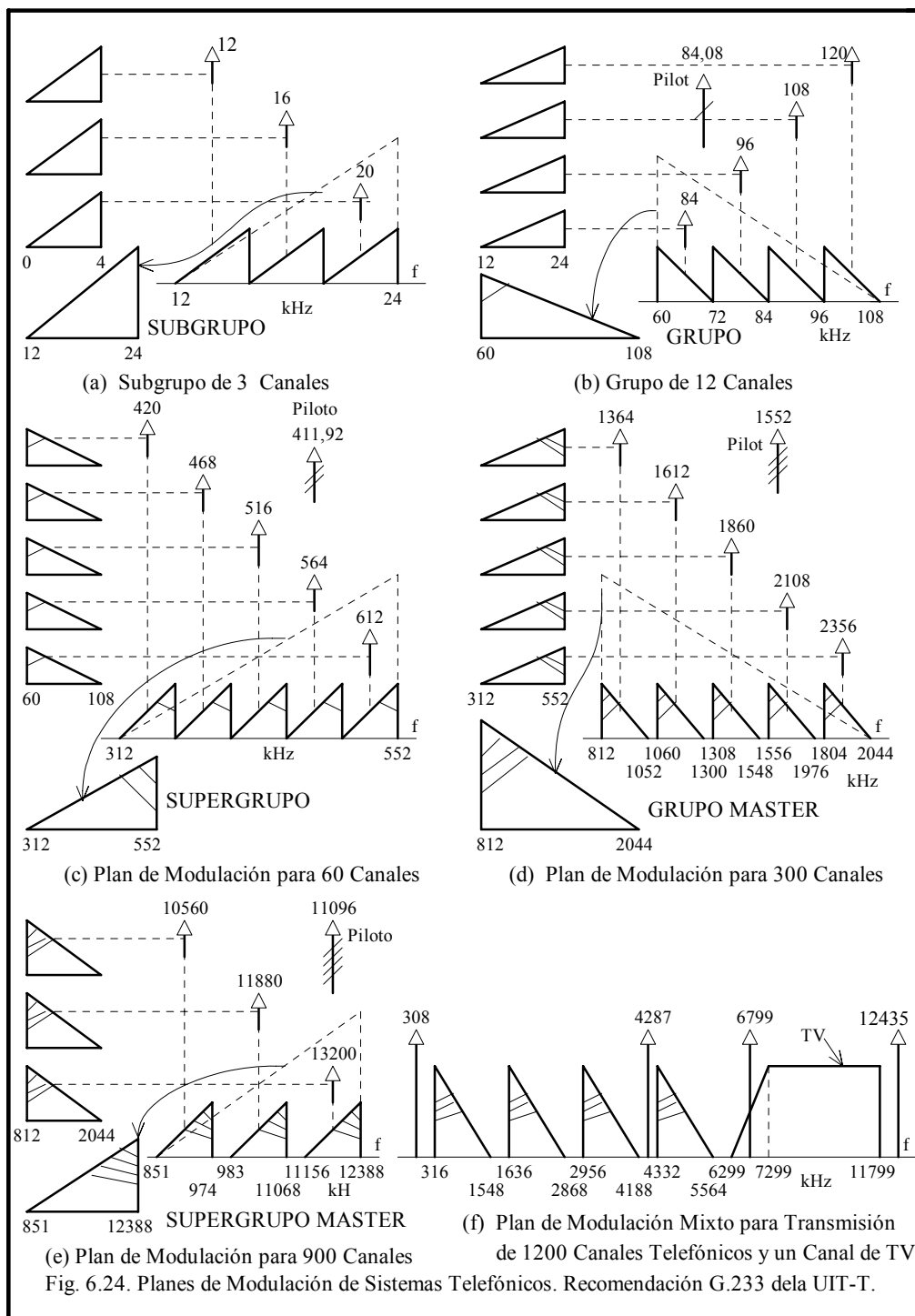
Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA)

Los satélites de comunicaciones son hoy uno de los principales medios de transmisión de información y su empleo es cada día más importante. Como ya lo señalamos en el Capítulo V, Sección 5.8.5, el satélite es un repetidor para señales de voz, datos y video, al cual muchas estaciones terrenas desean acceder para establecer una comunicación. Sin embargo, hay que arbitrar el acceso al satélite y en el Capítulo V vimos los métodos TDMA y CDMA. Aquí trataremos el “**Método de Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA)**” que es una aplicación de las técnicas FDM ya discutidas.

En el sistema FDMA, a cada estación terrena se le asigna una determinada banda de frecuencias. Como ejemplo de la aplicación de las técnicas FDMA, consideremos los satélites INTELSAT IV y V, a los cuales se les asigna bandas de 500 MHz centradas en las frecuencias de 6 GHz (frecuencias de subida) y en 4 GHz (frecuencias de bajada). Cada banda de 500 MHz se divide en 12 bandas de 36 MHz, cada una con sus respectivos “**transpondedores**” o repetidores satelitales. A su vez, la banda de cada transpondedor se subdivide en un cierto número de canales, cuyo ancho de banda depende de la aplicación o tipo de señal transmitida. Estas bandas se asignan a las estaciones terrenas para la transmisión y recepción de información. En el caso de los satélites INTELSAT IV y V, en RF la señal transmitida está modulada en frecuencia (FM) y la señal de banda de base consiste generalmente de canales de 4 kHz multicanalizados en SSB. Todas las estaciones que acceden a un transpondedor particular tienen sus portadoras de FM separadas de manera que las señales FM para cada estación ocupen bandas adyacentes.

La señal compuesta FDMA ocupa la banda completa de 36 MHz del transpondedor. El proceso completo se describe en la forma SSB/FM FDMA.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS



VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

En la Fig. 6.25 se muestra el caso de un sistema FDMA donde siete estaciones terrenas A, B, C, D, E, F y G comparten un transpondedor de 36 MHz. En la 6.25(a) se muestra la capacidad, en canales telefónicos de 4 kHz de ancho de banda, de cada una de las estaciones; todas las estaciones están transmitiendo simultáneamente.

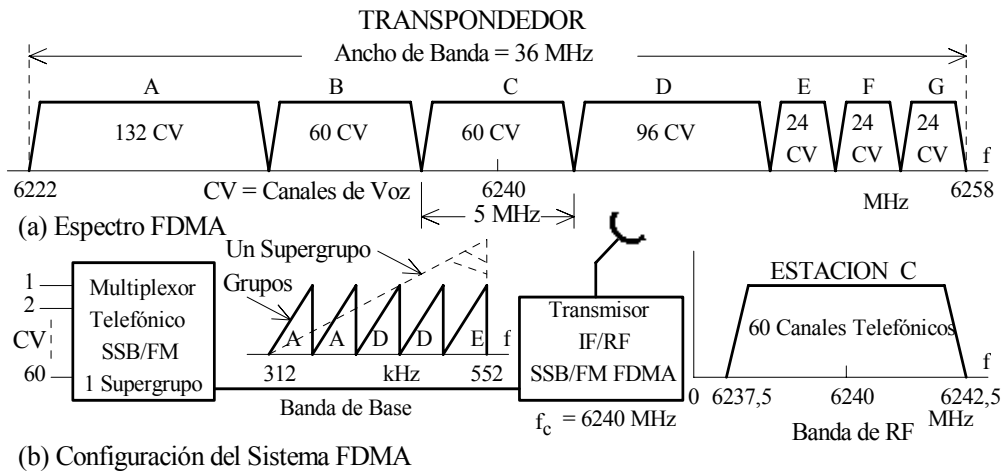


Fig. 6.25. Sistema Satelital SSB/FM FDMA.

La estación C, por ejemplo, tiene asignada una banda de 5 MHz que se extiende desde 6237,5 a 6242,5 MHz centrada en la frecuencia 6240 MHz. Por esta banda se puede transmitir 60 canales de voz en SSB/FM FDM, que es la capacidad de un supergrupo. Supongamos que la estación transmite 24 canales para la estación A, 24 canales para la estación D y 12 canales para la estación E, es decir, el supergrupo de la estación C contiene dos grupos para la estación A, dos grupos para la estación D y un grupo para la estación E. El ancho de banda del supergrupo se extiende desde 312 hasta 552 kHz. Esta banda de base se modula en FM a una frecuencia intermedia de 70 MHz y a continuación se traslada a la frecuencia de RF de 6240 MHz ocupando una banda de 5 MHz centrada en $f_c = 6240$ MHz. Para completar el proceso, las señales de entrada al satélite se retransmiten utilizando la frecuencia de bajada de 4 GHz, y en la estación terrena receptora se efectúan las correspondientes operaciones de demodulación y desmultiplexaje para entregar los canales individuales de 4 kHz a los usuarios finales.

6.4. MODULACIÓN ANGULAR O EXPONENCIAL DE SEÑALES CONTINUAS

6.4.1. Introducción

Los sistemas de modulación lineal vistos en las secciones anteriores tienen algunas características comunes que se pueden resumir en los siguientes puntos:

1. El espectro de la señal modulada básicamente es el espectro desplazado de la señal mensaje.
2. Todas las operaciones efectuadas sobre la señal son operaciones lineales, de manera que puede aplicarse el principio de la superposición.
3. El ancho de banda de transmisión jamás excede el doble del ancho de banda de la señal mensaje.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

4. Las relaciones S/N de postdetección se pueden incrementar sólo si se aumenta la potencia de la señal transmitida. No hay posibilidad de intercambiar ancho de banda por relación S/N.

En los sistemas de modulación lineal observamos que la amplitud de la señal modulada variaba en alguna forma en función de la señal mensaje. En contraste, en la modulación angular o exponencial veremos que las señales moduladas son de amplitud constante, pero el ángulo o argumento de la portadora varía de acuerdo con la señal mensaje. La modulación angular es entonces un proceso no lineal y las componentes espectrales de la señal modulada no están relacionadas en una forma simple con la señal mensaje. Aún más, puesto que el proceso no es lineal, el principio de la superposición no se aplica y el ancho de banda de la señal modulada generalmente es mucho mayor que el de la señal mensaje. El aumento en el ancho de banda y en la complejidad del sistema son, sin embargo, compensados por el mejoramiento de la ganancia de conversión. Como veremos más adelante, se puede intercambiar ancho de banda por relación S/N sin tener que aumentar la potencia de la señal transmitida. Los sistemas de modulación angular son entonces sistemas de modulación de banda ancha en los cuales la relación de expansión del ancho de banda β_m es alta.

Esquemas de Modulación Angular de Señales Continuas

Modulación de Fase. Modulación de Frecuencia

Las señales moduladas en ángulo son señales de envolvente constante y la información está contenida en la fase instantánea de la portadora. En relación con la expresión (6.1), $A(t) = A_c$, una constante, y la señal modulada en ángulo se puede representar en la forma

$$x_c(t) = A_c \cos[\theta(t)] = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (6.74)$$

donde $\theta(t) = [2\pi f_c t + \phi(t)]$ es el “**ángulo o fase instantánea**” de la portadora, y $\phi(t)$ la “**desviación instantánea de fase**”.

De (2.113), la “**frecuencia instantánea**, $f_i(t)$ ” de la señal modulada $x_c(t)$, es

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta(t)] = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (6.75)$$

Podemos definir también

$$\Delta\phi = |\phi(t)|_{\max} = \text{desviación máxima de fase} \quad (6.76)$$

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) = \text{desviación instantánea de frecuencia} \quad (6.77)$$

$$\Delta f = |\Delta f(t)|_{\max} = \text{desviación máxima de frecuencia} \quad (6.78)$$

La desviación instantánea de fase $\phi(t)$ está relacionada con la señal mensaje y dependiendo de la naturaleza de esa relación, se tienen los siguientes tipos de modulación angular:

1. **Modulación de Fase (Phase Modulation, PM)**, en la cual la desviación de fase instantánea es proporcional a la señal mensaje $m(t)$, es decir,

$$\phi(t) = k_p m(t) \quad (6.79)$$

donde k_p es la “**constante de desviación de fase**” del modulador; la constante k_p se expresa en radianes por unidad de $m(t)$, por ejemplo, en rad/Volt.

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

2. **Modulación de Frecuencia (Frequency Modulation, FM)**, en la cual la desviación instantánea de frecuencia es proporcional a la señal mensaje $m(t)$, es decir,

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) = f_d m(t) \quad (6.80)$$

o también, mediante integración de (6.80),

$$\phi(t) = 2\pi f_d \int_{t_0}^t m(\tau) d\tau + \phi_0(t_0) \quad (6.81)$$

En este caso la desviación instantánea de fase es proporcional a la integral de la señal mensaje; la constante f_d es la “**constante de desviación de frecuencia**” del modulador y se expresa en Hz por unidad de $m(t)$, por ejemplo, en Hz/Volt.

Algunas veces se define también $k_f = 2\pi f_d$, donde k_f es también una constante de desviación de frecuencia pero expresada en radianes por segundo por unidad de $m(t)$. El valor constante $\phi_0(t_0)$ es la desviación de fase para $t = t_0$ que, sin perder generalidad, podemos hacerla igual a cero.

Combinando las expresiones (6.79) y (6.81) con (6.74), se obtiene:

Para modulación de fase PM,

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)] \quad (6.82)$$

y para modulación de frecuencia FM,

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_{t_0}^t m(\tau) \cdot d\tau] \quad (6.83)$$

Generalmente no se especifica el límite inferior de la integral.

Obsérvese que las señales PM y FM son similares en su forma funcional y la diferencia está en la integración del mensaje en la señal FM. En efecto, la forma de las expresiones (6.82) y (6.83) nos permite generar señales FM con un modulador de fase, o señales PM con un modulador de frecuencia, como se muestra en la Fig. 6.26.

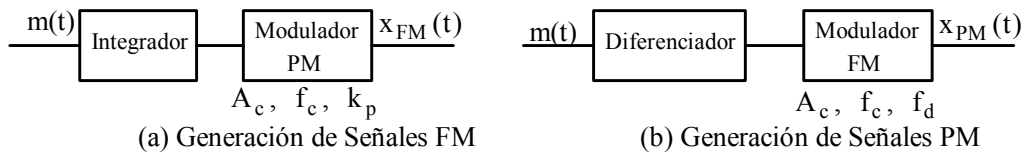


Fig. 6.26. Esquemas para la Generación de Señales FM y PM.

En la Fig. 6.27 se muestran las señales moduladas AM, FM y PM para dos formas diferentes de la señal mensaje $m(t)$: una forma continua y una forma discreta.

Puede observarse que la amplitud de las señales FM y PM siempre es constante, en cuyo caso se dice que son señales de envolvente constante. Debido a esta propiedad, podemos decir que cuando la frecuencia de portadora es alta, el mensaje reside en los cruces por cero de la señal

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

modulada, característica que se suele utilizar para la extracción del mensaje $m(t)$. Nótese también en la Fig. 6.27(a) que cuando el mensaje es continuo, es casi imposible distinguir a simple vista entre una señal FM y una PM. Sin embargo, si el mensaje es discreto, por ejemplo, un tren de impulsos PCM, las señales FM y PM se pueden distinguir una de la otra; de hecho, serían las señales FSK y PSK que estudiamos en el Capítulo V. En la señal FM (FSK) se observan los cambios de frecuencia y no hay cambios de fase, mientras que en la señal PM (PSK) hay cambios de fase pero la frecuencia se mantiene constante.

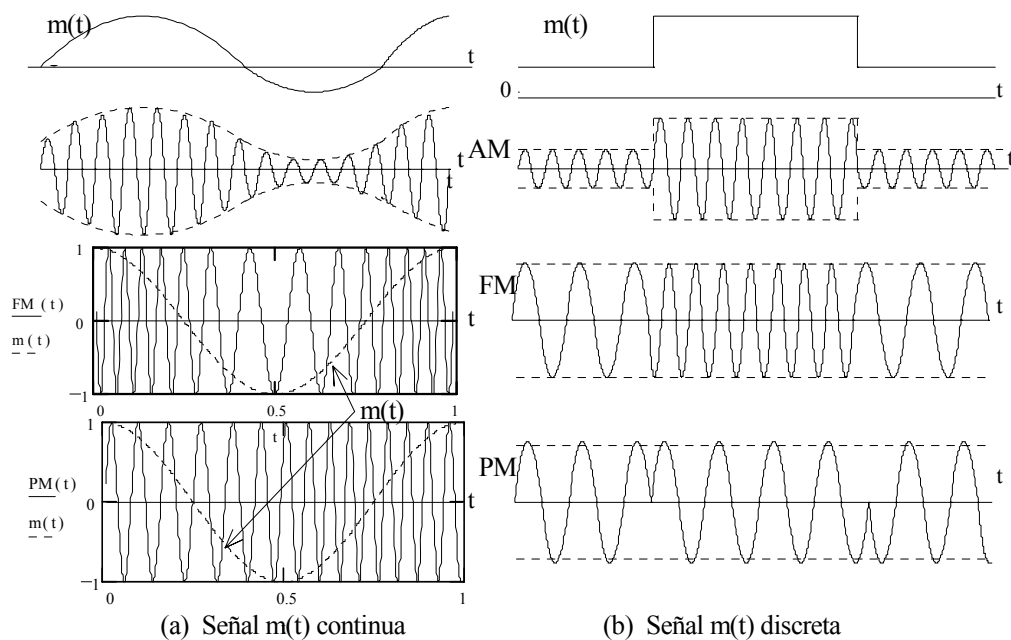


Fig. 6.27. Comparación entre las Formas de Onda de Señales Moduladas AM, FM y PM.

Los resultados anteriores se pueden particularizar cuando la modulación es sinusoidal. En efecto, sea

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

de donde $x_{PM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p A_m \cos(2\pi f_m t)]$ (6.84)

y $x_{FM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \frac{f_d A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t)]$ (6.85)

El lector puede demostrar fácilmente que en FM,

$$\phi(t) = \frac{f_d A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t); \quad \Delta\phi = \frac{f_d A_m}{f_m}$$

$$f_i(t) = f_c + f_d A_m \cos(2\pi f_m t); \quad \Delta f(t) = f_d A_m \cos(2\pi f_m t)$$

$$|f_i(t)|_{\max} = f_{\max} = f_c + f_d A_m; \quad |f_i(t)|_{\min} = f_{\min} = f_c - f_d A_m$$

$$\Delta f = |\Delta f(t)|_{\max} = f_d |m(t)|_{\max} = f_d A_m$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

y el valor pico a pico de la desviación de frecuencia,

$$|\Delta f(t)|_{PP} = f_{MAX} - f_{MIN} = 2\Delta f = 2f_d A_m \quad (6.86)$$

El valor pico a pico de la desviación de frecuencia es una medida o estimación del ancho de banda de la señal modulada FM, como veremos posteriormente.

Por analogía con la modulación AM, en FM se define el “**índice de modulación angular** β ” en la forma

$$\beta = \frac{f_d A_m}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m} = \Delta\phi \quad (6.87)$$

Obsérvese que el índice de modulación β es la desviación máxima de fase en modulación sinusoidal. Como veremos más adelante, el índice de modulación β es un parámetro muy importante en la determinación de la potencia y del ancho de banda de una señal modulada FM. Nótese, de (6.87), que el índice de modulación es la relación entre la desviación máxima de frecuencia y la frecuencia modulante, y por lo tanto no tiene dimensiones.

En términos de β , la señal modulada FM en modulación sinusoidal tiene la forma

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (6.88)$$

El lector puede deducir los parámetros anteriores para la modulación PM, en cuyo caso (Ver Problema de Aplicación 6.46),

$$x_{PM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)] \quad (6.89)$$

donde $\beta_p = k_p A_m$ es el correspondiente índice de modulación PM.

♣ Ejemplo 6.6

La señal mensaje $m(t) = 10 \cos(10^4 \pi t)$ se aplica a un modulador de frecuencia cuya constante de desviación de frecuencia es igual a 10^3 . La frecuencia de portadora es de 1 MHz, y su amplitud es de 10 V. Vamos a calcular todos los parámetros asociados.

Solución

$$x_{FM}(t) = 10 \cos \left[2\pi \times 10^6 t + 2\pi \times 10^3 \int_0^t 10 \cos(10^4 \pi \tau) \cdot d\tau \right]$$

pero $\int_0^t \cos(10^4 \pi \tau) d\tau = \frac{1}{10^4 \pi} \sin(10^4 \pi t)$

$$x_{FM}(t) = 10 \cos \left[2\pi \times 10^6 t + \frac{2\pi \times 10^4}{10^4 \pi} \sin(10^4 \pi t) \right] = 10 \cos[2\pi \times 10^6 t + 2 \sin(10^4 \pi t)]$$

Podemos calcular ahora los parámetros siguientes:

$$A_c = 10 \text{ V}; \quad f_m = 5 \text{ kHz}; \quad f_c = 1 \text{ MHz}; \quad f_d = 1000; \quad \beta = \Delta\phi = 2$$

$$\phi(t) = 2 \sin(10^4 \pi t); \quad \Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) = 10^4 \cos(10^4 \pi t)$$

$$\Delta f = 10^4 = 10 \text{ KHz}; \quad f_{MAX} = 1000 + 10 = 1010 \text{ KHz}; \quad f_{MIN} = 1000 - 10 = 990 \text{ KHz}$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$\text{Ancho de Banda} \quad B \approx |\Delta f(t)|_{PP} = f_{MAX} - f_{MIN} = 1010 - 990 = 20 \text{ kHz}$$



Efecto de una Componente Continua en Modulación Angular

En la modulación AM vimos que cuando la señal mensaje $m(t)$ contenía una componente continua, el efecto de esta componente continua afectaba al índice de modulación AM y producía una disminución en el rendimiento de transmisión (Ejemplo 6.1). Vamos a ver ahora qué sucede en la modulación angular cuando el mensaje $m(t)$ contiene una componente continua.

Sea una señal $m(t)$, la cual posee una componente continua, y que se emplea para modular exponencialmente una portadora. Como en el Ejemplo 6.1, $m(t)$ se puede escribir en la forma

$$m(t) = b_o + m_o(t), \quad \text{donde} \quad b_o = \langle m(t) \rangle \quad \text{y} \quad \langle m_o(t) \rangle = 0$$

Consideremos la modulación FM:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_0^t [b_o + m_o(\tau)] d\tau \right]$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi(f_c + f_d b_o)t + 2\pi f_d \int_0^t m_o(\tau) d\tau \right]$$

Nótese que la frecuencia de portadora ha pasado del valor f_c al valor $f'_c = f_c + f_d b_o$. Aunque todavía no sabemos nada del espectro de la señal FM, sí sabemos o por lo menos intuimos que este espectro está centrado en la frecuencia de portadora, y si el valor de esta portadora varía, el espectro puede salirse de la banda de paso del filtro de salida de RF. En el caso AM, la componente continua afecta al índice de modulación “a”, lo cual incide sobre el rendimiento de transmisión pero que no produce distorsión. En FM, el efecto de la componente continua es mucho más grave y produce una distorsión muy severa pues el espectro de la señal transmitida se ha desplazado desde la frecuencia f_c hasta la frecuencia f'_c y puede hasta desaparecer si los valores de b_o y f_d son lo suficientemente altos. La banda de transmisión de la señal modulada debe estar centrada en f'_c , y para ello es necesario remover previamente cualquiera componente continua presente en la señal mensaje $m(t)$.

El lector puede demostrar que en PM la componente continua del mensaje produce un desfase constante que no afecta ni a la frecuencia de portadora ni a la información en sí, pues suponemos que la información está contenida en $m_o(t)$. De todas maneras, es necesario eliminar cualquiera componente continua presente en el mensaje $m(t)$.

6.4.2. Modulación Angular de Banda Angosta

Consideremos la señal modulada en ángulo, expresión (6.74). Desarrollando el coseno,

$$x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] = A_c \cos[\phi(t)] \cos(2\pi f_c t) - A_c \sin[\phi(t)] \sin(2\pi f_c t)$$

Si $\phi(t)$ es muy pequeño o si $\beta < \pi/2$, entonces $\cos[\phi(t)] \approx 1$ y $\sin[\phi(t)] \approx \phi(t)$.

En consecuencia, la señal $x_c(t)$ puede aproximarse en la forma siguiente:

$$x_c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (6.90)$$

y en el dominio de la frecuencia, si $\phi(t) \Leftrightarrow \Phi(f)$,

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$X_c(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] - j \frac{A_c}{2} [\Phi(f + f_c) - \Phi(f - f_c)] \quad (6.91)$$

Las expresiones (6.90) y (6.91) son parecidas a las correspondientes en AM, con la diferencia de que hay un desfase de 90° en la resultante de las dos bandas laterales respecto a la portadora, como se puede apreciar en la Fig. 6.28(b). Si $\phi(t)$ tiene un ancho de banda B, el ancho de banda de la señal modulada será de $2B$, de aquí el nombre de “**modulación angular de banda angosta**”.

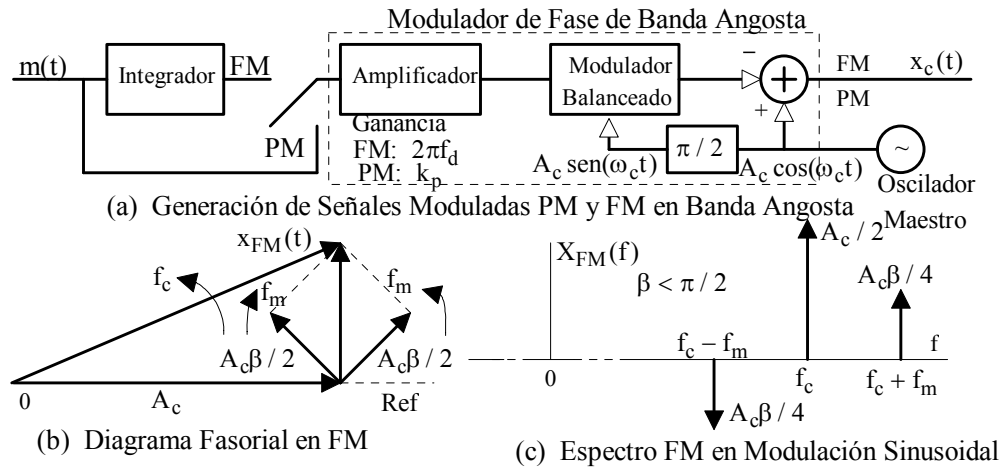


Fig.6.28. Modulación Angular en Banda Angosta

En general, puesto que en FM, $\phi(t) = 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \Leftrightarrow \Phi(f) = -j \frac{f_d}{f} M(f)$,

$$\text{entonces } X_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] - \frac{A_c f_d}{2} \left[\frac{M(f + f_c)}{f + f_c} - \frac{M(f - f_c)}{f - f_c} \right] \quad (6.92)$$

En PM, $\phi(t) = k_p m(t) \Leftrightarrow \Phi(f) = k_p M(f)$, entonces

$$X_{PM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] - j \frac{A_c k_p}{2} [M(f + f_c) - M(f - f_c)] \quad (6.93)$$

Estas señales se pueden generar mediante el esquema mostrado en la Fig. 6.28(a).

Un concepto más firme del significado de “banda angosta” lo obtendremos si consideramos la modulación sinusoidal.

Si $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, entonces, en FM,

$$\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t) \Leftrightarrow \Phi(f) = j \frac{\beta}{2} [\delta(f + f_c) - \delta(f - f_c)]$$

Reemplazando este $\phi(t)$ en (6.90),

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \beta \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \beta}{2} \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \frac{A_c \beta}{2} \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \quad (6.94)$$

$$y \quad X_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A_c \beta}{4} \{ \delta[f + (f_c + f_m)] + \delta[f - (f_c + f_m)] - \delta[f + (f_c - f_m)] - \delta[f - (f_c - f_m)] \} \quad (6.95)$$

En la Fig. 6.28(b) y (c) se muestra el diagrama fasorial y el espectro de (6.94). Obsérvese en (c) la semejanza con la señal modulada AM de la Fig. 6.6(b); la única diferencia es que en FM la componente de frecuencia lateral inferior es de signo contrario. La señal FM de banda angosta requiere esencialmente el mismo ancho de banda de transmisión (es decir, $2f_m$) que la señal AM.

♣ Ejemplo 6.7. Modulación Binaria FSK y PSK

En el Capítulo V estudiamos las técnicas de modulación binaria FSK y PSK, las cuales fueron definidas mediante las expresiones (5.161) y (5.167), que son casos particulares de la modulación angular de banda angosta.

La palabra PCM 1 1 0 0 1 0, representada en la Fig. 6.29(a), se va a transmitir en PM y FM (PSK y FSK). También, $A_c = 10V$, $f_c = 1 \text{ kHz}$, $k_p = \pi$, $f_d = 10^3$.

Vamos a graficar las formas de onda de las señales modulada PM y FM. Nótese que T_b es el intervalo de señalización de la secuencia PCM, $V_b = 1/T_b$ la correspondiente velocidad de modulación, y como el sistema es binario, entonces la velocidad de información, en bps, es $V_i = V_b = 1/T_b$.

Solución:

(a) Modulación PM

$$x_{PM}(t) = 10 \cos[2\pi f_c t + \pi \cdot m(t)]$$

$$\text{donde } m(t) = \begin{cases} 1 & \text{para el estado UNO} \\ 0 & \text{para el estado CERO} \end{cases}$$

$$\text{Para } m(t) = 1: \quad x_{PM}(t) = 10 \cos(2\pi f_c t + \pi) = -10 \cos(2\pi f_c t) \rightarrow \text{para los UNOS}$$

$$\text{Para } m(t) = 0: \quad x_{PM}(t) = 10 \cos(2\pi f_c t + 0) = 10 \cos(2\pi f_c t) \rightarrow \text{para los CEROS}$$

La señal PM se muestra en la Fig. 6.29(b).

(b) Modulación FM

$$x_{FM}(t) = 10 \cos \left[2\pi f_c t + 2000\pi \int_0^t m(\tau) d\tau \right]; \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta(t)] = 1000 + 1000 \cdot m(t)$$

$$\text{Para } m(t) = 1: \quad f_i(t) = 2000 \text{ Hz} \rightarrow \text{para los UNOS}$$

$$\text{Para } m(t) = 0: \quad f_i(t) = 1000 \text{ Hz} \rightarrow \text{para los CEROS}$$

La señal FM se muestra en la Fig. 6.29(c).

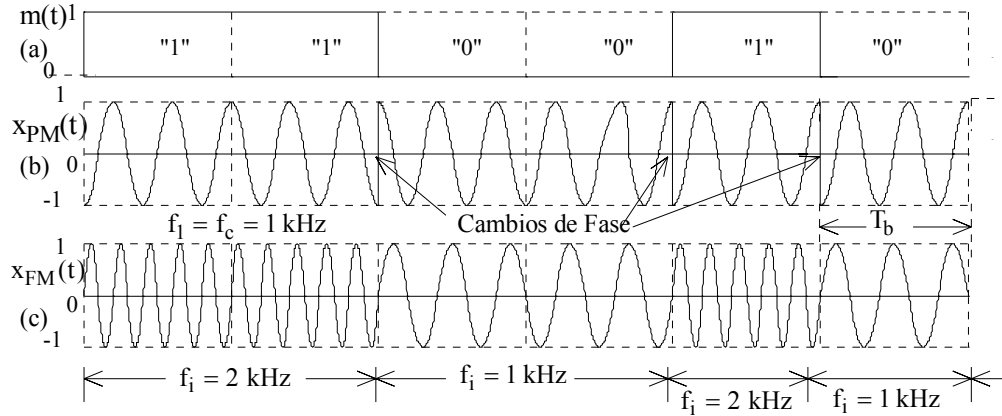


Fig. 6.29. Formas de Onda del Ejemplo 6.7

6.4.3. Modulación Angular de Banda Ancha

La modulación angular de banda angosta representa un modo de transmisión muy importante en las comunicaciones digitales. En efecto, los esquemas de modulación digital FSK y PSK son casos particulares de la modulación angular de banda angosta, en las cuales la señal $m(t)$ es discreta y está representada por impulsos, generalmente binarios. En esta aplicación, la relación S/N de predetección solamente necesita ser lo suficientemente alta para evitar errores de decisión en el receptor. Sin embargo, en la transmisión de señales continuas, tales como la voz y música, en donde se necesita una alta fidelidad, es necesario un alto valor del ancho de banda. Esto implica un ancho espectral mucho más alto, lo cual se verifica si k_p o β son relativamente grandes. Por esta causa, las condiciones establecidas para el caso de banda angosta ($\beta < \pi/2$) ya no son válidas y el análisis de la señal modulada angular se complica bastante. Nótese, sin embargo, que aunque k_p o β aumenten, no se afecta la amplitud de la señal modulada y, por supuesto, la potencia promedio transmitida.

En general, el análisis de una señal modulada en ángulo para cualquiera señal mensaje $m(t)$ es bastante complicado y, como en el caso de las señales PDM y PPM, para simplificar los cálculos consideraremos la modulación sinusoidal. Cuando la señal mensaje es sinusoidal, las desviaciones instantáneas de fase y de frecuencia son también sinusoidales tanto en FM como en PM, y el espectro puede determinarse con relativa facilidad.

Sea entonces $\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t)$, donde β es el índice de modulación correspondiente a la desviación máxima de fase tanto en FM como en PM.

La señal modulada $x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$ puede expresarse en la forma

$$x_c(t) = \operatorname{Re}\{A_c \exp\{j[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]\}\} = \operatorname{Re}\{\tilde{x}_c(t) \exp(j2\pi f_c t)\} \quad (6.96)$$

donde $\tilde{x}_c(t)$ es la envolvente compleja de $x_c(t)$, definida por

$$\tilde{x}_c(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)] \quad (6.97)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

La función $\exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)]$ es periódica con una frecuencia fundamental igual a la frecuencia de modulación f_m ; por consiguiente, la envolvente compleja $\tilde{x}_c(t)$ se puede desarrollar en una serie de Fourier de la forma

$$\tilde{x}_c(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_m t) \quad (6.98)$$

Pero la expresión (6.98) es igual a la expresión (5.50a) y se puede representar en términos de los coeficientes de Bessel. En efecto, como en (5.52),

$$\tilde{x}_c(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)] = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t) \quad (6.99)$$

Reemplazando (6.99) en (6.96),

$$x_c(t) = A_c \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp[j2\pi(f_c + n f_m)t] \right\}$$

Evaluando la parte real, obtenemos

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t] \quad (6.100a)$$

En la Fig. 6.30 se muestra la forma de $J_n(\beta)$ y en la TABLA 6-2 se dan los valores de $J_n(\beta)$ para algunos valores particulares de n y β que utilizaremos en los ejemplos y problemas. El correspondiente espectro de $x_c(t)$ es

$$X_c(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \delta[f - (f_c + n f_m)] \quad (6.100b)$$

La expresión (6.100b) sugiere que aún con la modulación sinusoidal la señal modulada en ángulo contiene un número infinito de bandas laterales, centradas en f_c y separadas de la frecuencia de la portadora por múltiplos enteros de la frecuencia f_m . Teóricamente, una señal modulada en ángulo tiene un ancho de banda infinito.

La forma de $X_c(f)$ se presta para ser representada mediante el espectro unilateral, tal como lo adelantamos en el Capítulo I.

La amplitud de cada componente se puede obtener de una tabla de funciones de Bessel. En la TABLA 6-2 se tiene los valores de $J_n(\beta)$ para n positivo, pero de la definición de $J_n(\beta)$ se puede notar que

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) = \begin{cases} J_{-n}(\beta) = J_n(\beta) & \text{para } n \text{ par} \\ J_{-n}(\beta) = -J_n(\beta) & \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \quad (6.101)$$

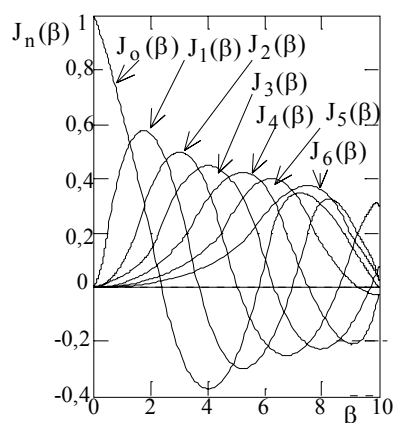


Fig. 6.30. Curvas de Bessel

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

TABLA 6-2. Coeficientes de Bessel, $J_n(\beta)$, en función de n y β

$n \setminus \beta$	0,1	0,2	0,5	1	2	4	5	6	8	10
0	0,997	0,990	0,938	0,765	0,224	0,397	-0,178	0,151	0,172	-0,246
1	0,050	0,100	0,242	<u>0,440</u>	<u>0,577</u>	-0,066	-0,328	-0,277	0,235	0,043
2	0,001	0,005	0,031	<u>0,115</u>	0,353	0,364	0,047	-0,243	-0,113	0,255
3				0,020	<u>0,129</u>	<u>0,430</u>	0,365	0,115	-0,291	0,058
4				0,002	0,034	0,281	<u>0,391</u>	<u>0,358</u>	-0,105	-0,220
5					0,007	<u>0,132</u>	0,261	0,362	0,186	-0,234
6						0,054	<u>0,131</u>	0,246	0,338	-0,014
7						0,018	0,053	<u>0,130</u>	<u>0,321</u>	0,217
8						0,006	0,018	0,057	0,223	<u>0,318</u>
9							0,006	0,021	<u>0,126</u>	0,292
10							0,001	0,007	0,061	0,207
11								0,002	0,026	<u>0,123</u>
12									0,010	0,063
13									0,003	0,029

En la Fig. 6.31 se muestra el espectro típico de una señal modulada en ángulo utilizando la representación espectral unilateral; por ello, la amplitud de las componentes es el doble de las correspondientes al espectro bilateral. El signo de las componentes se basa en las condiciones (6.101).

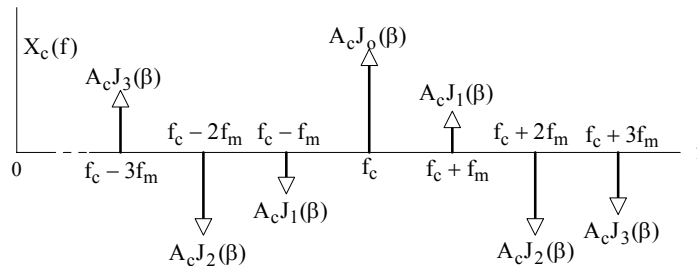


Fig. 6.31. Espectro Unilateral Típico de una Señal Modulada en Angulo con Modulación Sinusoidal

Desde un punto de vista teórico, la señal modulada en ángulo contiene un número infinito de componentes de frecuencia. Sin embargo, en la práctica las amplitudes de las componentes para n grande se pueden despreciar. En general, el coeficiente de Bessel $J_n(\beta)$ es despreciable cuando $n > \beta$, especialmente cuando $\beta \gg 1$. Más adelante volveremos sobre estos aspectos al definir el ancho de banda de transmisión en modulación angular en banda ancha.

Obsérvese que para obtener el espectro no especificamos el tipo particular de modulación angular (PM o FM), pues el punto de partida fue la definición $\phi(t) = \beta \sin(2\pi f_m t)$.

Para el caso de modulación de fase, este $\phi(t)$ puede obtenerse haciendo $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$, en cuyo caso $\beta = k_p A_m$. Asimismo, para el caso FM, ya calculado, $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ y $\beta = \frac{f_d A_m}{f_m}$.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

El índice de modulación en FM es, pues, una función de la frecuencia de modulación f_m , mientras que en PM no lo es. En la Fig. 6.32 se muestra el módulo del espectro unilateral de una señal FM cuando f_m disminuye manteniéndose constante la desviación máxima de frecuencia $f_d A_m$, y viceversa. Por ejemplo, para f_m grande (β pequeño) la señal es de banda angosta puesto que solamente dos componentes laterales son significativas. Para f_m pequeña (β grande) aparecen muchas componentes laterales significativas.

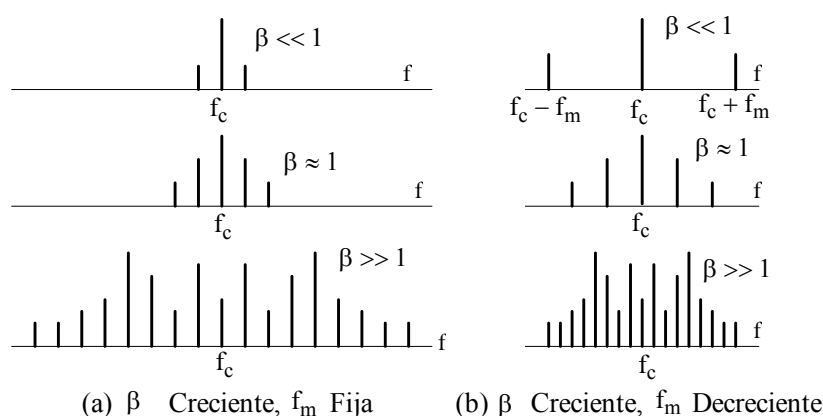


Fig. 6.32. Espectros de Señales FM con Modulación Sinusoidal.

Observando las curvas de Bessel de la Fig. 6.30 se ve que, a diferencia de la modulación de amplitud, la amplitud de la componente a la frecuencia de portadora en modulación angular depende del índice de modulación. En efecto, para ciertos valores del índice de modulación la amplitud a la frecuencia f_c es cero, y toda la señal modulada en ángulo consiste solamente de componentes laterales, es decir, $J_0(\beta) = 0$ para $\beta = 2,4048; 5,5201; 8,6537; 11,7915; 14,9309$, etc. Nótese que los ceros de $J_0(\beta)$, e igual para los otros coeficientes, no están uniformemente espaciados. Cuando β aumenta, los coeficientes de Bessel se comportan como sinusoides amortiguadas. Cuando n aumenta, $J_n(\beta)$ alcanza un valor máximo a una distancia cada vez mayor desde el origen. Sin embargo, la observación más importante es que $J_n(\beta)$ decae rápidamente para $n \gg \beta$; en realidad, n no necesita ser mucho mayor que β , lo cual es de extrema importancia en la definición del ancho de banda, como veremos más adelante.

Cuando la frecuencia instantánea de una señal modulada en forma angular varía en una forma más compleja que la correspondiente a modulación sinusoidal, su espectro resulta muy complicado. Las frecuencias presentes en las bandas laterales incluyen no solamente las que se obtendrían con cada frecuencia moduladora actuando separadamente, sino que también existe diversas combinaciones de frecuencias. Sin embargo, aunque la modulación compleja aumenta notablemente el número de componentes de frecuencia presentes en la señal modulada, esto no ensancha la banda de frecuencias ocupada por la energía de la señal. Esto a primera vista parece paradójico o contradictorio, pues si consideramos la modulación sinusoidal, está el hecho de que el espectro de la señal modulada consta de un número infinito de componentes a frecuencias fijas, lo cual parece estar en contradicción con el hecho de que la frecuencia instantánea de la señal varía solamente en el intervalo $(f_{\text{MIN}}, f_{\text{MAX}})$. Esta paradoja se resuelve si reconocemos que estamos en

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

presencia de dos conceptos distintos del dominio de la frecuencia. Uno es el concepto de “frecuencia instantánea”, que es un parámetro dinámico que relaciona la variación de la función angular respecto a una señal modulante, por lo cual la señal compuesta ya no será de una sola frecuencia. Por otro lado, el concepto de “contenido espectral” nos permite determinar las componentes de frecuencia en el sentido de Fourier, cada una de ellas con una frecuencia fija. Si todas estas componentes se suman en la forma descrita por su desarrollo de Fourier, el resultado será indudablemente la señal modulada angular en la cual la frecuencia instantánea varía en el tiempo dentro de un intervalo de frecuencias dado.

♣ Ejemplo 6.8

La señal $m(t) = 10 \cos^2(10^4 \pi t)$ se va a transmitir en FM. Las características del modulador son: $f_c = 100 \text{ kHz}$; $f_d = 4 \times 10^3$; $A_c = 10 \text{ V}$. La salida del modulador se aplica a un filtro pasabanda ideal de ganancia unitaria, ancho de banda de 50 kHz y centrado en la frecuencia de portadora f_c .

Vamos a determinar y dibujar el espectro a la salida del filtro y determinar algunos parámetros de la señal modulada.

Solución

La señal modulada FM es

$$x_{FM}(t) = 10 \cos \left[2\pi \times 10^5 t + 2\pi \times 4 \times 10^3 \int_0^t 10 \cos^2(10^4 \pi \tau) \cdot d\tau \right]$$

pero $\int_0^t \cos^2(10^4 \pi \tau) \cdot d\tau = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2\pi \times 10^4 t)}{4\pi \times 10^4}$

Por lo tanto, $x_{FM}(t) = 10 \cos[2\pi(10^5 + 20 \times 10^3)t + 2 \sin(2\pi \times 10^4 t)]$

de donde $f'_c = 120 \text{ kHz}$; $\beta = 2$; $f'_m = 10 \text{ kHz}$

El espectro de la señal modulada está centrado ahora en la frecuencia de 120 kHz, y las componentes de frecuencia están separadas en 10 kHz. Nótese entonces el efecto de la componente continua de $m(t)$: el espectro quedó desplazado en 20 kHz respecto a la frecuencia $f_c = 100 \text{ kHz}$. Si el desplazamiento fuera mayor, podría suceder que el filtro de salida (centrado en f_c) tenga una salida fuertemente distorsionada y de potencia muy baja. Es necesario entonces eliminar cualquiera componente continua presente en la señal mensaje.

Como el filtro pasabanda de salida tiene un ancho de banda de 50 kHz y está centrado en 100 kHz, solamente dejará pasar las componentes a las frecuencias 80, 90, 100, 110 y 120 kHz. En la Fig. 6.33 se muestra el espectro FM de salida.

Podemos determinar también los siguientes parámetros:

Frecuencia instantánea:

$$f_i(t) = 120 \times 10^3 + 20 \times 10^3 \cos(2\pi \times 10^4 t)$$

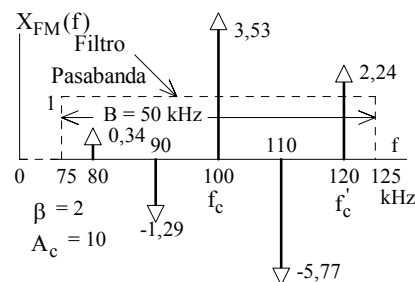


Fig. 6.33. Espectro FM del Ejemplo 6.8

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$f_{\text{MAX}} = 140 \text{ kHz}; f_{\text{MIN}} = 100 \text{ kHz}$$

$$\Delta f = 20 \text{ kHz}; \text{ Ancho de Banda aproximado, } B \approx 2\Delta f = 40 \text{ kHz}$$

$$\text{Potencia de la señal modulada FM, } \langle x_{\text{FM}}^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} = 50 \text{ W}$$

Potencia de la señal transmitida, del espectro unilateral de la Fig. 6.33,

$$\langle x_{\text{FMT}}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} [(0,34)^2 + (-1,29)^2 + (3,53)^2 + (-5,77)^2 + (2,24)^2] = 26,28 \text{ W}$$

Nótese que en el filtro se pierden 24,72 W, es decir, el 47,4% de la potencia de la señal modulada.

♣

Modulación Sinusoidal Compuesta

Las técnicas utilizadas en la deducción de la expresión (6.100a) se pueden utilizar en el caso de modulación sinusoidal compuesta o modulación multitono. Por ejemplo, supongamos el caso en que la señal moduladora es la suma de dos señales sinusoidales cuyas frecuencias no están armónicamente relacionadas. En este caso, para FM,

$$m(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

$$x_{\text{FM}}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi f_d \int_0^t m(\tau) d\tau \right] = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_1 \sin(2\pi f_1 t) + \beta_2 \sin(2\pi f_2 t)]$$

$$\text{donde } \beta_1 = \frac{f_d A_1}{f_1} \text{ y } \beta_2 = \frac{f_d A_2}{f_2}$$

Siguiendo la misma técnica que en el caso anterior, se puede demostrar que la señal modulada FM en modulación con dos tonos es

$$x_{\text{FM}}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos[2\pi(f_c + nf_1 + mf_2)t] \quad (6.102)$$

Cuando se interpreta este resultado en el dominio de la frecuencia, se observan los siguientes tipos de componentes: (a) una componente a la frecuencia de la portadora, de amplitud $A_c J_0(\beta_1) \cdot J_0(\beta_2)$; (b) componentes a las frecuencias correspondientes a $[f_c + nf_1]$ y $[f_c + mf_2]$ que eran de esperar; y (c) componentes a las frecuencias $[f_c + nf_1 + mf_2]$ que no están presentes en los espectros de las señales modulada por f_1 o f_2 solas. Esto demuestra que la modulación angular, a diferencia de la modulación de amplitud, es un proceso no lineal pues no se cumple la superposición de los espectros. Este procedimiento se puede extender a señales con más de dos tonos no armónicos, pero el álgebra se torna muy complicada. Nótese que la expresión (6.102) se puede aplicar también en PM en cuyo caso los respectivos índices de modulación son $\beta_1 = k_p A_1$ y $\beta_2 = k_p A_2$. En la Fig. 6.34 se muestra parte del espectro de (6.102).

En la Fig. 6.34(a) se observa que las componentes debidas al tono 1 se concentran alrededor de f_c . En (b) se muestra algunas de las componentes debidas al tono 2. Todas las otras componentes son frecuencias de batido generadas por la interacción de los tonos 1 y 2 en el proceso de modulación FM.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Cuando las frecuencias de modulación están relacionadas armónicamente, por ejemplo, si $m(t)$ es una señal periódica de período T , entonces $\phi(t)$ será periódica e igualmente $\exp[j\phi(t)]$.

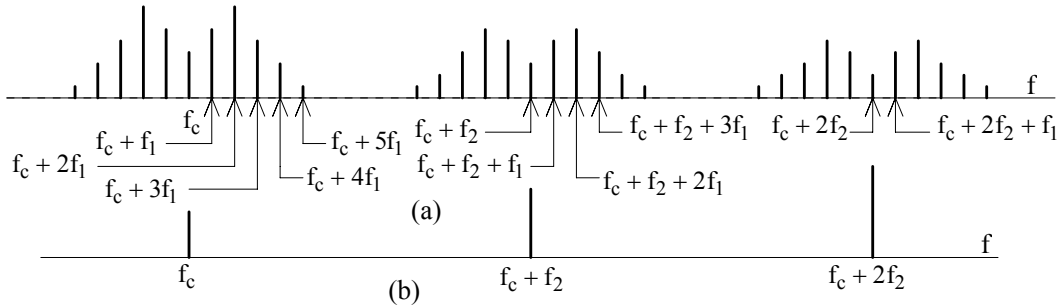


Fig. 6.34. Espectro de una Señal FM con dos Tonos Modulantes.

Sea entonces $x_c(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] = A_c \operatorname{Re}\{\tilde{x}_c(t) \exp(j2\pi f_c t)\}$

donde $\tilde{x}_c(t) = \exp[j\phi(t)]$ es la envolvente compleja de $x_c(t)$.

Puesto que $\phi(t)$ es periódica de período T , la envolvente compleja $\tilde{x}_c(t)$ se puede desarrollar en serie de Fourier de la forma

$$\tilde{x}_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_o t) \quad \text{con} \quad f_o = \frac{1}{T}, \text{ donde}$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp[j\phi(t)] \cdot \exp(-j2\pi n f_o t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp\{j[\phi(t) - 2\pi n f_o t]\} dt \quad (6.103)$$

Por lo tanto,

$$x_c(t) = A_c \operatorname{Re}\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n f_o t)\right] \exp(j2\pi f_c t)\right\} = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \operatorname{Re}\{\exp[j2\pi(f_c + n f_o)t]\}$$

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cos[2\pi(f_c + n f_o)t] \quad (6.104)$$

$x_c(t)$ contiene componentes de frecuencia centradas en f_c , separadas en f_o y de amplitud X_n . En el caso general, la resolución de la integral (6.103) es muy complicada.

6.4.4. Potencia y Ancho de Banda en Modulación Angular en Banda Ancha

Potencia en Modulación Angular

La potencia promedio de una señal modulada angular se puede determinar directamente a partir de (6.74), esto es,

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} \quad (6.105)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

La potencia de la señal modulada es constante e independiente de la modulación. En el aspecto práctico esto es de gran importancia pues la potencia no varía y el diseño de los circuitos electrónicos se simplifica bastante.

En modulación sinusoidal, de (6.100a), la potencia de la señal modulada es

$$\langle x_c^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{A_c^2}{2} \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) \right] = \frac{A_c^2 J_0^2(\beta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_c^2 J_n^2(\beta) \quad (6.106)$$

Comparando (6.105) con (6.106), verificamos la conocida relación

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1 \quad (6.107)$$

Ancho de Banda en Modulación Angular

En cuanto al ancho de banda de la señal modulada, estrictamente hablando él es infinito, ya que la modulación angular de una portadora da como resultado la generación de un número infinito de componentes laterales, aún en el caso de modulación sinusoidal. El ancho de banda está determinado entonces por la dispersión de las componentes significativas del espectro a ambos lados de la portadora. La estimación de esta dispersión define un ancho de banda, el cual dependerá de las aplicaciones del sistema. Por otro lado, hay que tener en cuenta que después del modulador hay que colocar un filtro pasabanda de RF centrado en la frecuencia de portadora, y lo mismo en el receptor. La cuestión ahora es la de decidir cuál será el ancho de banda óptimo de los filtros, de modo que deje pasar el máximo de la señal con el mínimo efecto interferente en el transmisor y de reducción de ruido en el receptor. Estimaciones acerca del ancho de banda de banda requerido pueden obtenerse a partir de las siguientes consideraciones, aplicadas sobre todo en FM.

Sea la Fig. 6.35, en modulación sinusoidal, donde se muestran las componentes y la banda de paso del filtro, para la definición del ancho de banda de transmisión B_T . El filtro debe estar centrado en f_c , la frecuencia de portadora, y suponemos que la componente continua del mensaje ha sido removida.

El ancho de banda vendrá dado por

$$B_T = 2kf_m \quad \text{para } k \geq 1 \quad (6.108)$$

donde k es el número de componentes a cada lado de la portadora. Nótese que

$\frac{B_T}{f_m} = \beta_m = 2k$ es la relación de

expansión del ancho de banda; como $k \geq 1$, esto nos indica que el sistema de modulación angular es un sistema de modulación de banda ancha en el cual se puede intercambiar ancho de banda por relación S/N, como veremos más adelante.

La estimación del valor de k depende del criterio empleado para definir las componentes significativas del espectro. Se tiene entonces los siguientes criterios:

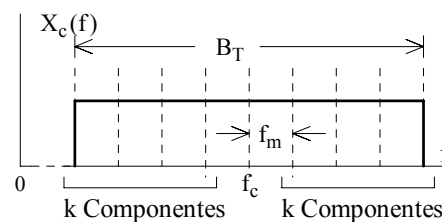


Fig. 6.35. Definición del Ancho de Banda en Modulación Angular.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

- (a) Una primera forma de estimación del ancho de banda de la señal modulada angular, es despreciar aquellas componentes de frecuencia cuya amplitud sea menor del 1% de la amplitud unitaria, es decir, se desprecian aquellas componentes para las cuales se cumple que

$$|J_n(\beta)| \leq 0,01 \quad (6.109)$$

Por ejemplo, en la TABLA 6-2 de Coeficientes de Bessel la condición (6.109) se cumple para $\beta = 5$ y $k = 8$; para $\beta = 6$ y $k = 9$, etc.. En consecuencia, el valor de k varía junto con el valor de β . El ancho de banda que se calcula utilizando este procedimiento puede expresarse en la forma que veremos a continuación.

Sea k_n el valor mínimo de n que satisface la condición (6.109). De (6.108), el ancho de banda será $B_T = 2k_n f_m$; pero como $\beta = \Delta f / f_m$, entonces podemos definir un “ancho de banda normalizado B_n ” dado por

$$B_n = \frac{B_T}{\Delta f} = \frac{2k_n}{\beta} \quad (6.110)$$

Los valores de k_n y β se obtienen de una Tabla de Coeficientes de Bessel. Las curvas de la Fig. 6.36 permiten estimar el ancho de banda B_T cuando β y Δf son conocidos. En la curva A de la Fig. 6.36 se grafica (6.110).

Nótese que a medida que aumenta el índice de modulación β , el ancho de banda normalizado B_n tiende a 2, ó, lo que es lo mismo, $B_T \rightarrow 2\Delta f$.

- (b) Un segundo criterio se basa en la observación que hicimos anteriormente de que n no necesita ser mucho mayor que β . En efecto, si suponemos que se considera como significativas todas aquellas componentes para las cuales se cumple que $\beta \approx k$, siendo $k \gg 1$, entonces el ancho de banda, de (6.108), será $B_T \approx 2\beta f_m$, de donde

$$B_T \approx 2\Delta f \quad (6.111)$$

El ancho de banda se puede aproximar entonces como “el valor pico a pico de la desviación máxima de frecuencia”, concepto que ya habíamos adelantado y utilizado más atrás. Este criterio se utiliza frecuentemente para estimar, en primera aproximación, el ancho de banda de una señal FM, sobre todo en banda ancha. Nótese que en este caso el ancho de banda normalizado, de la forma (6.110), es constante (independiente de β). En la curva D de la Fig. 6.36 se muestra la variación de este ancho de banda.

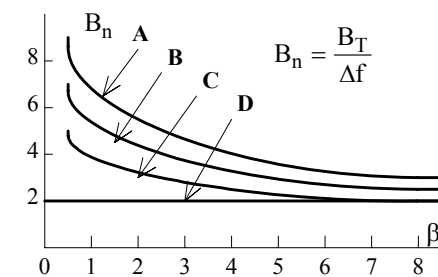


Fig. 6.36. Ancho de Banda Normalizado en Modulación de Frecuencia.

- (c) El criterio más empleado en la práctica es el de la “potencia significativa”. En efecto, de (6.106) y la Fig. 6.35, la potencia contenida dentro del ancho de banda B_T será

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$\langle x_{cT}^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^k J_n^2(\beta) \right] = P_r \cdot \langle x_c^2(t) \rangle \quad (6.112)$$

$$\text{donde } P_r = \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^k J_n^2(\beta) \right] < 1 \quad (6.113)$$

P_r es la fracción de la potencia total $A_c^2 / 2$ que es transmitida.

El ancho de banda para alguna aplicación particular se puede estimar definiendo un valor aceptable para P_r , resolviendo (6.113) para k mediante una tabla de valores de los coeficientes de Bessel y reemplazando ese valor de k en (6.108). Así, por ejemplo, en la TABLA 6-2 de Coeficientes de Bessel se ha subrayado con un trazo los valores de $n = k$ correspondientes a $P_r \geq 0,5$ y con dos trazos y en negrita los correspondientes a $P_r \geq 0,98$. Nótese que para $P_r \geq 0,98$, el valor de k es aproximadamente igual a la parte entera de $(\beta + 1)$, de tal manera que, de (6.108),

$$B_T \approx 2(\beta + 1) \cdot f_m \quad (6.114)$$

En este ancho de banda está contenido aproximadamente el 98% de la señal modulada $x_c(t)$. Nótese que en banda ancha ($\beta \gg 1$) las expresiones (6.114) y (6.111) son equivalentes, mientras que en banda angosta ($\beta \ll 1$), $B_T \approx 2f_m$.

La expresión (6.114) se puede expresar también como un ancho de banda normalizado. En efecto, siguiendo el mismo procedimiento de la expresión (6.110), el ancho de banda normalizado es

$$B_n = \frac{B_T}{\Delta f} = 2 + \frac{2}{\beta} \quad (6.115)$$

Esta expresión se grafica en la curva C de la Fig. 6.36.

Como el índice de modulación β se ha definido solamente para modulación sinusoidal, para el caso de una señal mensaje $m(t)$ arbitraria se puede obtener una expresión aproximada para el ancho de banda mediante la definición de la “**relación de desviación, Δ** ” en la forma siguiente.

Si B_m es el ancho de banda de $m(t)$, entonces la relación de desviación es

$$\Delta = \frac{\Delta f}{B_m} = \frac{f_d}{B_m} |m(t)|_{\max} \quad (6.117)$$

La relación de desviación Δ viene a ser para la modulación no sinusoidal lo que el índice de modulación β es para la modulación sinusoidal. El ancho de banda de transmisión será entonces

$$B_T = 2(\Delta + 1) \cdot B_m \quad (6.118)$$

Esta relación se conoce con el nombre de “**Regla de Carson**”. Nótese que si $\Delta \ll 1$, el ancho de banda corresponde a una señal de banda angosta. Si $\Delta \gg 1$, el ancho de banda tiende al valor pico a pico de la desviación de frecuencia, resultado ya obtenido por otros medios.

En resumen, desde un punto de vista práctico, la Regla de Carson subestima en parte el requerimiento de ancho de banda en FM, mientras que la utilización del criterio (6.109) requiere más componentes de frecuencia, pero el aumento en la potencia es muy pequeño. Por ejemplo, para

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$\beta = 10$, se transmiten 28 componentes de frecuencia contra 22 transmitidas según la Regla de Carson, pero la potencia transmitida prácticamente es la misma en ambos casos. En la práctica se toma el valor más pequeño de B_T pues así en el receptor el ancho de banda del filtro de entrada es menor y la potencia de ruido de entrada será menor también.

Una expresión intermedia entre la Regla de Carson y la condición (6.109) es la siguiente [Stark y Tuteur, 1979],

$$B_T = 2(\Delta f + 2B_m) = 2(\Delta + 2) \cdot B_m \quad \text{para } \Delta > 2 \quad (6.119)$$

Este ancho de banda es un poco mayor que el dado por la Regla de Carson, pero menor que el dado por la condición $|J_n(\beta)| \leq 0,01$. El ancho de banda normalizado correspondiente se grafica en la curva B de la Fig. 6.36.

En general, se puede usar cualquiera de estos criterios para la estimación del ancho de banda de transmisión; sin embargo, el criterio de la “potencia significativa” (Regla de Carson) es el más utilizado en las aplicaciones prácticas.

Consideremos, por ejemplo, la Radiodifusión FM. La UIT-R ha establecido las siguientes recomendaciones para la Radiodifusión FM:

1. Desviación Máxima de Frecuencia, $\Delta f = 75 \text{ kHz}$
2. Ancho de Banda máximo permitido, $B_T = 200 \text{ kHz}$
3. Estabilidad de frecuencia de la portadora, $\pm 2 \times 10^{-3} \%$
4. Gama del Espectro, desde 88 hasta 108 MHz

Si el ancho de banda de la señal es $B_m = 15 \text{ kHz}$, entonces $\Delta = 5$ (o $\beta = 5$). Los anchos de banda pueden ser:

Según el criterio (6.109): $B_T = 240 \text{ kHz}$

Según la expresión (6.119): $B_T = 210 \text{ kHz}$

Según la Regla de Carson: $B_T = 180 \text{ kHz}$

Según la expresión (6.111): $B_T = 150 \text{ kHz}$

El valor $B_T = 210 \text{ kHz}$, dado por la expresión (6.119), es el más aproximado al valor nominal asignado de 200 kHz.

En la práctica hay cinco grandes aplicaciones en las cuales se utiliza la Modulación FM:

1. Radiodifusión No Comercial, desde 88 a 90 MHz
2. Radiodifusión Comercial, con ancho de banda de 200 kHz, desde 90 a 108 MHz
3. Canales de Audio en Televisión, con ancho de banda 50 kHz, desde 54 a 88 MHz, 174 a 216 MHz y 470 a 806 MHz
4. Canales de Banda Angosta para Servicio Público, desde 108 a 174 MHz, y sobre 806 MHz
5. Canales de Banda Angosta para el Servicio de Radioaficionados, en 29,6 MHz, desde 52 a 53 MHz, 144 a 147,99 MHz, 440 a 450 MHz, y sobre 902 MHz.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Las potencias de transmisión van desde unos pocos mW para el Servicio de Radioficionados hasta 100 kW para Radiodifusión Comercial. Nótese que la modulación FM no se emplea para frecuencias menores de 30 MHz; esto se debe a la gran distorsión de fase en las señales FM producidas por la ionosfera a frecuencias inferiores a los 30 MHz. Sobre los 30 MHz, la trayectoria de transmisión es en línea recta sin reflexiones y no es afectada por la ionosfera. Esta situación explica el poco alcance (máximo 130 km) que impone a las señales FM la curvatura de la tierra.

♣ Ejemplo 6.9

La señal de audio en televisión analógica comercial está modulada en FM. El ancho de banda disponible para acomodar la señal de audio es de 50 kHz. Si la señal moduladora de audio contiene frecuencias entre 30 Hz y 15 kHz, vamos a determinar su amplitud máxima para hacer uso óptimo del ancho de banda disponible. La constante de desviación de frecuencia del modulador FM es de 10^4 Hz/V. Utilizaremos la Regla de Carson.

Solución

$$B_T = 2(\Delta + 1)B_m \quad \therefore \quad \Delta = \frac{f_d}{B_m} |m(t)|_{\max} = \frac{B_T}{2B_m} - 1$$

$$\text{de donde,} \quad |m(t)|_{\max} = \frac{B_m}{f_d} \left[\frac{B_T}{2B_m} - 1 \right] = \frac{15 \times 10^3}{10^4} \left[\frac{50 \times 10^3}{30 \times 10^3} - 1 \right] = 1 \text{ V}$$

Entonces, $|m(t)| \leq 1 \text{ V}$ para aprovechar al máximo el ancho de banda disponible.

♣

♣ Ejemplo 6.10

Una portadora de 20 MHz se modula sinusoidalmente en FM de manera que la desviación máxima de frecuencia es de 100 kHz. Vamos a determinar el índice de modulación y el ancho de banda de la señal FM para los siguientes valores de la frecuencia f_m de la señal moduladora:

(a) 1 kHz; (b) 50 kHz; (c) 500 kHz.

Solución

Tenemos que: $\Delta f = 100 \text{ kHz}$; $f_c = 20 \text{ MHz}$. En modulación sinusoidal, $\beta = \Delta f / f_m$.
Entonces,

(a) $f_m = 1 \text{ kHz}$; $\beta = 10^5 / 10^3 = 100$. Este es un caso de FM de banda ancha, de donde,

$$B_T = 2(\beta + 1)f_m = 202 \text{ kHz} \approx 2\Delta f$$

(b) $f_m = 50 \text{ kHz}$; $\beta = 2$ y $B_T = 2(\beta + 1)f_m = 300 \text{ kHz}$

(c) $f_m = 500 \text{ kHz}$; $\beta = 0,2$. Este es un caso de FM de banda angosta, de donde

$$B_T \approx 2f_m = 1 \text{ MHz}$$

♣

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

♣ Ejemplo 6. 11

La señal mensaje $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ se utiliza en tres sistemas distintos A, B y C de modulación angular, y los anchos de banda respectivos se dan en la Tabla siguiente:

SISTEMA	1 $A_m = 5$ $f_m = 5 \text{ kHz}$	2 $A_m = 10$ $f_m = 5 \text{ kHz}$	3 $A_m = 5$ $f_m = 10 \text{ kHz}$
A	10 kHz	10 kHz	20 kHz
B	800 kHz	1,6 MHz	1,6 MHz
C	1 MHz	2 MHz	1 MHz

Vamos a determinar a qué tipo de modulación angular corresponde cada sistema (A, B o C).

Solución

Por inspección, el sistema A es FM de banda angosta. En este caso, $B_A = 2f_m$, lo cual se verifica en las tres columnas de la Tabla.

Los sistemas B y C son, evidentemente, de banda ancha, en cuyo caso:

$$\text{En FM: } B_{FM} = 2(\beta_{FM} + 1)f_m \approx 2\beta_{FM} f_m = 2f_d A_m; \text{ de donde } f_d = \frac{B_{FM}}{2A_m}.$$

Tomemos, por ejemplo, el ancho de banda del sistema B, columna 1; entonces,

$$f_d = 800 \times 10^3 / 10^4 = 8 \times 10^3 \text{ Hz/V}$$

pero vemos que este valor de f_d no verifica los anchos de banda del sistema B, columnas 2 y 3. Por lo tanto, el sistema B no es FM. Comprobemos si es PM.

$$\text{En PM: } B_{PM} = 2(\beta_{PM} + 1)f_m \approx 2\beta_{PM} f_m = 2k_p A_m f_m, \text{ de donde } k_p = \frac{B_{PM}}{2A_m f_m}$$

Para el sistema B, columna 1, $k_p = 16$. Este valor de k_p verifica los anchos de banda del sistema B, columnas 2 y 3. Por lo tanto, el sistema B es un sistema de Modulación de Fase.

El sistema C probablemente es un sistema de FM. Vamos a verificarlo. De los valores de la columna 1, $f_d = 10^5 \text{ Hz/V}$. Vemos que este valor de f_d verifica los anchos de banda del sistema C, columnas 2 y 3. Por lo tanto, el sistema C es un sistema de Modulación de Frecuencia.

♣

6.4.5. Generación y Detección de Señales Moduladas en Ángulo

Como las señales moduladas en ángulo son de envolvente constante o amplitud constante, el diseño de los dispositivos generadores o detectores se facilita pues no hay que preocuparse por los posibles picos de la señal que pudieran introducir excesiva disipación de potencia en algún dispositivo electrónico. Aún más, el ruido aditivo no produce prácticamente ningún efecto en la información puesto que ella está contenida en los cruces por cero de la señal modulada. Sin embargo, variaciones espurias de la frecuencia son sumamente dañinas, pues ellas son interpretadas en el detector como variaciones de amplitud con la consiguiente distorsión. Por ejemplo, los sistemas de radioenlaces de microondas emplean modulación FM en las etapas de FI debido a que

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

los amplificadores lineales de banda ancha requeridos para la modulación de amplitud son prácticamente imposibles de construir a esas altas frecuencias.

La generación de señales FM se puede agrupar esencialmente en dos tipos: la generación FM directa y la generación FM indirecta.

Generación Directa de Señales Moduladas en Frecuencia

En FM directa la frecuencia de portadora se modula directamente de acuerdo con la señal modulante. Conceptualmente, el proceso es muy sencillo. Todo lo que se requiere es un oscilador controlado por voltaje (VCO) cuya frecuencia de oscilación depende del voltaje aplicado a su entrada. En la región de microondas ($f_c > 1 \text{ GHz}$) hay dispositivos como el Klystron cuya frecuencia varía linealmente en gamas de variación de varios MHz. En bajas frecuencias, la frecuencia de portadora se genera mediante un oscilador en el cual se pueden variar los valores de inductancia o capacitancia de su circuito tanque resonante LC; este tipo de modulador recibe el nombre de “**modulador de reactancia**”. Por ejemplo, si la capacitancia del circuito resonante es proporcional a la señal mensaje, entonces

$$C(t) = C_o - k \cdot m(t) \quad (6.120)$$

C_o es la capacitancia para $m(t) = 0$ y k una constante de proporcionalidad.

Supongamos que $km(t)$ es pequeño en comparación con C_o . Si la salida del oscilador es $A_c \cos[\theta(t)]$, se puede demostrar que la frecuencia instantánea $f_i(t)$ de resonancia del circuito sintonizado viene dada por

$$f_i(t) = \frac{d}{dt} \theta(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C(t)}} \quad (6.121)$$

Reemplazando (6.120) en (6.121) y reorganizando

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_o}} \left[1 - \frac{k}{C_o} m(t) \right]^{-1/2}$$

Definiendo $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_o}}$, y puesto que $|\frac{k}{C_o} m(t)| \ll 1$, entonces tomando los dos primeros términos del desarrollo en serie binomial de la raíz cuadrada, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = \omega_c \left[1 + \frac{k}{2C_o} m(t) \right]$$

Integrando, la fase instantánea de la portadora es

$$\theta(t) = \omega_c t + 2\pi \frac{k f_c}{2C_o} \int^t m(\tau) d\tau \quad (6.122)$$

Esta es la fase de una señal modulada FM en la cual

$$f_d = \frac{k f_c}{2C_o} \quad \text{y} \quad \Delta f = \frac{k f_c}{2C_o} |m(t)|_{\max}$$

Si $|m(t)|_{\max} \leq 1$, la aproximación tiene una precisión del 1% cuando $(k / C_o) < 0,013$, en cuyo caso la desviación máxima de frecuencia es

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$\Delta f \leq 0,006 \cdot f_c \quad (6.123)$$

Aunque el cambio en la capacitancia es por necesidad pequeño, la desviación máxima de frecuencia puede ser bastante grande si la frecuencia de portadora es grande también. Por ejemplo, si tenemos que $k|m(t)|_{\max}/2C_o = 0,005$ y $f_c = 15$ MHz, entonces $\Delta f = 75$ kHz. Esta Δf es igual a la desviación máxima de frecuencia especificada para FM comercial.

Otros tipos de generador directo de FM es el “diodo varactor” y el “modulador Crosby”, cuyos circuitos y forma de operación se encuentran en cualquier texto de electrónica. Ver, por ejemplo, [Miller, 1993].

La desventaja del sistema FM directo es que la frecuencia de la portadora tiende a ser inestable requiriendo técnicas de estabilización mediante retroalimentación (control automático de frecuencia). Una alternativa de generación directa es la de utilizar un VCO con multiplicadores de frecuencia y un mezclador en la configuración mostrada en la Fig. 6.37.

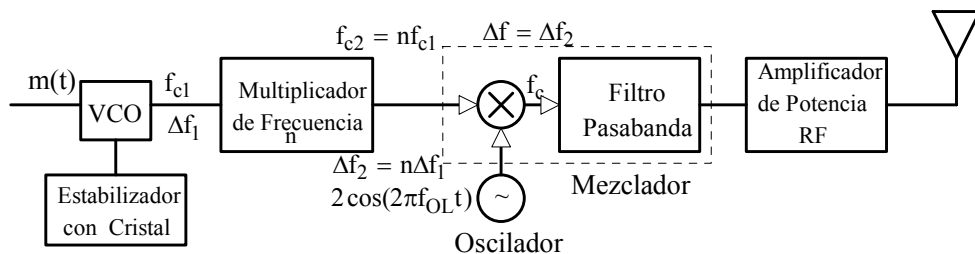


Fig. 6.37. Transmisor FM con VCO y Multiplicación de Frecuencia.

Con el transmisor de la Fig. 6.37 se puede generar una señal FM de banda ancha a partir de la señal FM producida por el VCO. Esto es posible mediante los “multiplicadores de frecuencia” (o más propiamente, multiplicadores de fase). El multiplicador de frecuencia es un dispositivo en el cual, si la entrada es $x(t) = A_c \cos[\theta(t)]$, la salida será $y(t) = A_c \cos[n\theta(t)]$, donde n es el factor de multiplicación. Sea $x(t)$ una señal FM de la forma

$$x(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \right]$$

Si el factor de multiplicación es n , a la salida del multiplicador de frecuencia se tiene

$$y(t) = A_c \cos \left[2\pi (nf_c) t + 2\pi (nf_d) \int^t m(\tau) d\tau \right]$$

En consecuencia, si la entrada al multiplicador tiene una frecuencia de portadora f_c y una constante de desviación de frecuencia f_d (o Δf), entonces la salida tendrá la portadora a la frecuencia nf_c con una constante de desviación de frecuencia nf_d (o $n\Delta f$).

Nótese entonces la diferencia entre un conversor de frecuencia y un multiplicador de frecuencia: en el conversor de frecuencia hay traslación de espectro pero su ancho de banda no varía, mientras que en el multiplicador de frecuencia hay también traslación del espectro (de f_c a nf_c) pero su ancho de banda aumenta linealmente con n . La multiplicación de frecuencia de una señal FM modulada sinusoidalmente aumenta la frecuencia de la portadora y el índice de modulación, pero no la frecuencia de modulación: el espectro se desplaza a nf_c , cambian las

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

amplitudes relativas de las componentes de frecuencia, pero su espaciamento sigue siendo el mismo.

Sea el transmisor mostrado en la Fig. 6. 37. Si la salida del VCO es

$$x_{c1}(t) = \cos\left[2\pi f_{c1}t + 2\pi f_{d1} \int^t m(\tau) d\tau\right]$$

a la salida del multiplicador de frecuencia la señal será

$$x_{cn}(t) = \cos\left[2\pi n f_{c1}t + 2\pi n f_{d1} \int^t m(\tau) d\tau\right]$$

y a la salida del multiplicador del mezclador,

$$x_M(t) = x_{cn}(t) 2A_c \cos(2\pi f_{OL}t) = A_c \cos\left[2\pi(f_{OL} + n f_{c1})t + 2\pi n f_{d1} \int^t m(\tau) d\tau\right] \\ + A_c \cos\left[2\pi(f_{OL} - n f_{c1})t - 2\pi n f_{d1} \int^t m(\tau) d\tau\right]$$

y las frecuencias presentes serán, ver Fig. 6.37,

$$f_{OL} \pm f_{c2} = f_{OL} \pm n f_{c1} \quad \text{y} \quad \Delta f = n \Delta f_1 = \Delta f_2$$

Podemos hacer entonces $f_c = f_{OL} \pm n f_{c1}$, de donde

$$f_{OL} = f_c \pm n f_{c1}; \quad f_d = n f_{d1} \quad \text{y} \quad \Delta f = n \Delta f_1 = \Delta f_2 \quad (6.124)$$

donde f_c y f_d son la frecuencia de portadora de transmisión y la constante de desviación de frecuencia de la señal FM transmitida, respectivamente. La señal FM transmitida será entonces

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau\right]$$

Por ejemplo, si $f_{c1} = 10$ MHz; $|m(t)|_{\max} = 10$; $f_{d1} = 1250$ Hz/V, y se desea transmitir en FM comercial con $f_c = 100$ MHz y $\Delta f = 75$ kHz, entonces

$$n = \frac{\Delta f}{\Delta f_1} = \frac{75 \times 10^3}{10 \times 1250} = 6 \quad \text{y} \quad f_d = n f_{d1} = 6 \times 1250 = 7500 \text{ Hz/V}$$

Se puede usar un doblador y un triplicador de frecuencia ($2 \times 3 = 6$). De (6.124), la frecuencia del oscilador local del transmisor será

$$f_{OL} = 100 + 6 \times 10 = 160 \text{ MHz} \quad \text{o} \quad f_{OL} = 100 - 6 \times 10 = 40 \text{ MHz}$$

El filtro pasabanda del mezclador deberá estar centrado en una de estas dos frecuencias, preferiblemente la menor.

Generación Indirecta de Señales Moduladas en Frecuencia

El elemento esencial en la generación FM indirecta es la presencia de un modulador de fase de banda angosta cuya frecuencia de portadora proviene de un oscilador a cristal, de muy alta estabilidad. Uno de los generadores de FM indirecta más conocidos es el sistema Armstrong, en el cual se utiliza un modulador PM de banda angosta, como se muestra en la Fig. 6.38. La señal FM básica es producida mediante integración de $m(t)$.

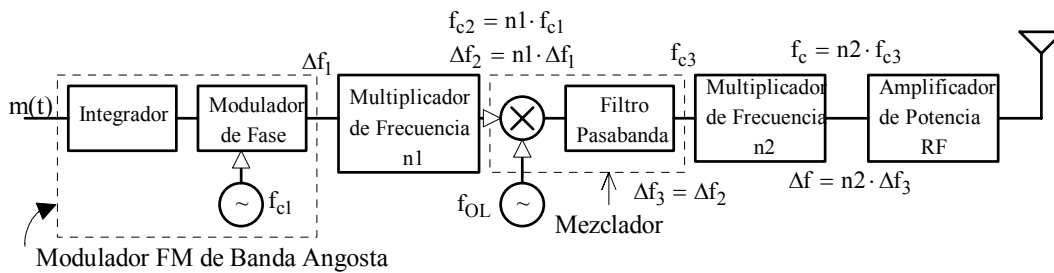


Fig. 6.38. Transmisor Armstrong de FM Indirecta.

En el transmisor de la Fig. 6.38, el valor de los factores de multiplicación vendrá determinado por la desviación máxima de frecuencia que se desea alcanzar. Pero la multiplicación de las frecuencias puede resultar diferente a la frecuencia f_c de transmisión, por lo cual es necesario un paso de conversión de frecuencia para trasladar el espectro a la frecuencia de transmisión f_c . Generalmente, el mezclador se coloca en el medio de la cadena de multiplicadores de frecuencia a fin de evitar que las frecuencias intermedias sean demasiado altas. Estos pasos se efectúan a un nivel bajo para poder utilizar amplificadores RF de salida con un ancho de banda suficiente pero cuya linealidad no sea crucial. En efecto, una ventaja del sistema de modulación FM sobre los sistemas SSB y AM es que se puede modular en bajo nivel y utilizar en las etapas siguientes amplificadores Clase C que son más eficientes que los amplificadores Clase B. Como la señal FM es de envolvente constante, no se produce distorsión como en los casos de la amplificación de potencia en bajo nivel en SSB y AM, y se pueden utilizar amplificadores Clase C cuyo rendimiento es aproximadamente del 90%, comparado con el rendimiento de 70% de los amplificadores Clase B.

En la Fig. 6.38 se tiene:

$$f_{c2} = n1 \cdot f_{c1}; \Delta f_2 = n1 \cdot \Delta f_1; f_{c3} = f_{OL} \pm f_{c2}; \Delta f_3 = \Delta f_2; f_c = n2 \cdot f_{c3}; \Delta f = n2 \cdot \Delta f_3$$

Si tomamos la banda inferior del mezclador, $f_{c3} = f_{OL} - f_{c2}$. Entonces,

$$f_c = n2 \cdot f_{c3} = n2 \cdot (f_{OL} - f_{c2}) = n2 \cdot (f_{OL} - n1 \cdot f_{c1}) \quad \text{y} \quad \Delta f = n2 \cdot \Delta f_3 = n1 \cdot n2 \cdot \Delta f_1 \quad (6.125)$$

El filtro pasabanda del mezclador deberá estar centrado en f_c , la frecuencia de transmisión.

♣ Ejemplo 6.12

Sea el transmisor Armstrong de la Fig. 6.38, donde $f_{c1} = 400$ kHz; $n1 = 81$ y $n2 = 64$. Este transmisor se va a utilizar para transmitir en la Banda de Radiodifusión FM entre 88 y 108 MHz, con una desviación máxima de frecuencia de 75 kHz. Deseamos determinar la gama de valores de frecuencia del oscilador del mezclador y la desviación máxima Δf_1 del modulador de banda angosta.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Solución

Tomemos primero $f_c = 88 \text{ MHz}$. De (6.125), $88 \times 10^6 = 64f_{OLi} - 81 \times 64 \times 400 \times 10^3$.

$$f_{OLi} = \frac{88 \times 10^6 + 81 \times 64 \times 400 \times 10^3}{64} = 33,78 \text{ MHz}$$

La frecuencia f_{OLi} es la frecuencia inferior del oscilador del mezclador para $f_c = 88 \text{ MHz}$.

Para $f_c = 108 \text{ MHz}$, la frecuencia superior del oscilador del mezclador será

$$f_{OLs} = \frac{108 \times 10^6 + 81 \times 64 \times 400 \times 10^3}{64} = 34,09 \text{ MHz}$$

El oscilador del mezclador deberá diseñarse para trabajar entre 33,78 MHz y 34,09 MHz.

La desviación máxima de frecuencia del modulador de banda angosta es

$$\Delta f_1 = \frac{\Delta f}{n_1 \cdot n_2} = \frac{75 \times 10^3}{81 \times 64} = 14,47$$

Si se está recibiendo, por ejemplo, una estación de FM de 90,1 MHz, el oscilador del mezclador deberá estar sintonizado a la frecuencia

$$f_{OL} = \frac{90,1 \times 10^6 + 81 \times 64 \times 400 \times 10^3}{64} = 33,81 \text{ MHz}$$

♣

Demodulación de Señales Moduladas en Ángulo

La demodulación de una señal modulada FM requiere un dispositivo cuya salida sea proporcional a la frecuencia de entrada. Estos dispositivos se denominan comúnmente “**discriminadores**”. En la Fig. 6.39 se muestran las características de los discriminadores.

Si la entrada al discriminador es una señal modulada en ángulo de la forma $x_r(t) = A_r \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$, la salida del discriminador ideal, Fig. 6.39(a), será

$$y_D(t) = \frac{k_D}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (6.126)$$

pero en FM, $\phi(t) = 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau$ y $\frac{d}{dt} \phi(t) = 2\pi f_d m(t)$; entonces,

$$y_D(t) = k_D f_d m(t) = k_D \Delta f(t) \quad (6.127)$$

La salida del discriminador es proporcional a la desviación instantánea de frecuencia de la señal FM; k_D es la constante de proporcionalidad del discriminador o “sensibilidad del discriminador”. La característica de un discriminador ideal se muestra en la Fig. 6.39(b). Este sistema puede utilizarse también para demodular en PM integrando la salida del discriminador. En efecto, de la expresión (6.126), la integración de $y_D(t)$ produce una señal proporcional a $\phi(t)$, puesto que $\phi(t) = k_p m(t)$; por consiguiente, en PM

$$y_D(t) = k_D \phi(t) = k_D k_p m(t) \quad (6.128)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

El discriminador se puede instrumentar en la práctica mediante un diferenciador seguido de un detector de envolvente, como se muestra en la Fig. 6.39(c). En efecto, si $x_r(t)$ es la entrada al diferenciador, su salida será

$$z_c(t) = -A_r \left[2\pi f_c + \frac{d}{dt} \phi(t) \right] \cdot \sin[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

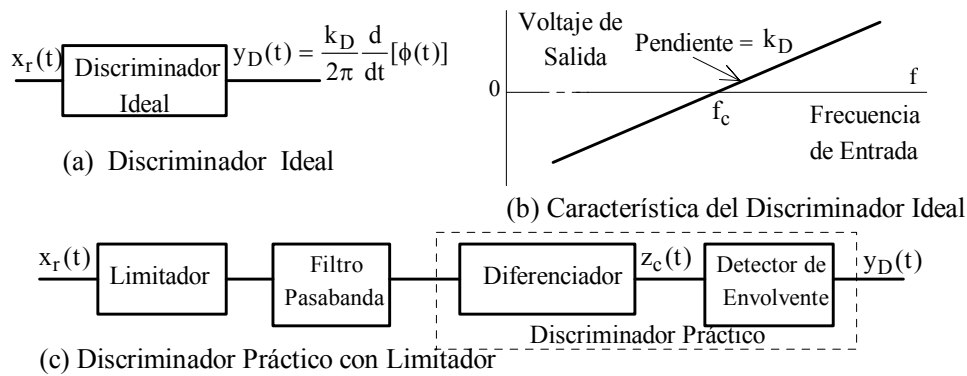


Fig. 6.39. Discriminador de Señales Moduladas en Frecuencia.

que en FM tiene la forma

$$z_c(t) = -A_r \left[2\pi f_c + 2\pi f_d m(t) \right] \cdot \sin \left[2\pi f_c t + 2\pi f_d \int^t m(\tau) d\tau \right] \quad (6.129)$$

Vemos que la salida tiene la forma de una señal AM, con la diferencia de que la fase varía también en función de $m(t)$. Como la señal $m(t)$ está también en la envolvente, podemos extraerla sin dificultad mediante un detector de envolvente si $f_c \geq \Delta f$, condición que se cumple en la mayoría de los sistemas prácticos.

La envolvente de $z_c(t)$ será entonces

$$E(t) = A_r [2\pi f_c + 2\pi f_d m(t)] = 2\pi A_r [f_c + f_d m(t)] \quad (6.130)$$

La señal mensaje se puede extraer sin distorsión si se cumple que

$$f_c \geq f_d |m(t)|_{\max} = \Delta f \quad (6.131)$$

Una vez eliminada la componente continua $2\pi f_c A_r$, la salida demodulada será

$$y_D(t) = 2\pi f_d A_r m(t) \quad (6.132)$$

en cuyo caso, $k_D = 2\pi A_r$

Si la señal $x_r(t)$ de entrada es una señal PM, la recuperación de $m(t)$ se efectúa mediante integración de la salida del detector de envolvente, una vez removida la componente continua.

Esta forma de demodulación de señales FM se denomina “**demodulación por detección de pendiente**”. Uno de los principales problemas con este método es que el detector es muy sensible a variaciones espurias en la amplitud de la señal FM debidas al ruido aditivo. A fin de asegurarse que

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

la amplitud de la entrada al diferenciador sea constante, se coloca a su entrada un limitador. Este limitador recorta la señal de entrada y la convierte en una señal cuasi-rectangular que lleva la información en los cruces por cero. Esta señal se filtra en un filtro pasabanda centrado en f_c para convertirla en la forma cuasi-sinusoidal requerida por el detector de envolvente. Normalmente el limitador y el filtro pasabanda están integrados en la misma unidad, conocida como “limitador pasabanda”. En la Fig. 6.40 se muestra la característica entrada-salida de un limitador y su realización práctica. Un limitador con una característica como la mostrada en la Fig. 6.40(a) en la práctica se denomina “**limitador estricto (hard limiter)**”.

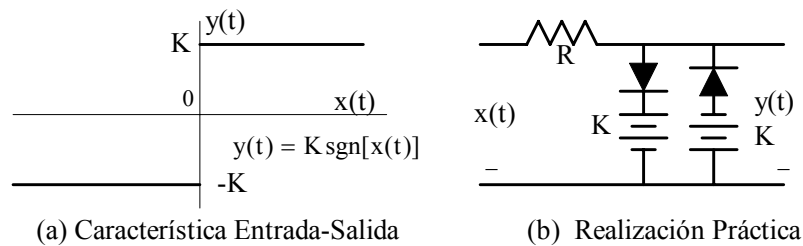


Fig. 6.40. Limitador Estricto (Hard Limiter).

Otro problema con la detección de pendiente es que el rango lineal de la característica Voltaje vs Frecuencia a menudo es muy pequeño. Para extender el rango de linealidad se utiliza un “**discriminador balanceado**”, una de cuyas formas se muestra en la Fig. 6.41(a).

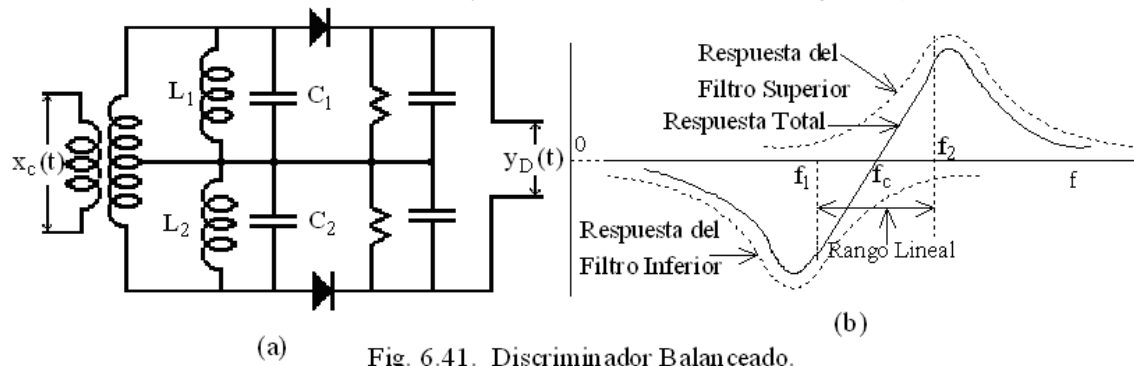


Fig. 6.41. Discriminador Balanceado.

El discriminador balanceado contiene dos circuitos resonantes: uno sintonizado a una frecuencia f_1 bajo f_c , y el otro a una frecuencia f_2 sobre f_c . La característica completa se muestra en la Fig. 6.41(b). La componente continua es automáticamente bloqueada y la respuesta a frecuencias de modulación bajas es muy buena. Otros tipos de discriminador balanceado son el “discriminador de Foster-Seeley” y el “detector de relación”, cuyos circuitos se encuentran en cualquier texto de circuitos de electrónica y comunicaciones, por ejemplo [Miller, 1993].

Un concepto diferente en la demodulación de señales FM y PM es la “demodulación mediante retroalimentación”. Los demoduladores retroalimentados tienen un mejor comportamiento en presencia de ruido que los detectores de pendiente, aunque su análisis e instrumentación son más complicados. Entre los demoduladores retroalimentados más conocidos se tiene el “demodulador con enganche de fase (PLL)” y el “demodulador FM con retroalimentación (FMFB)”. Los demoduladores con PLL se utilizan bastante debido a su comportamiento superior y facilidad de

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

alineación e instrumentación. Una excelente descripción de estos demoduladores se puede hallar en [Haykin, 1985], [Shanmugan, 1979] y [Miller, 1993].

En la Fig. 6.42 se muestra el diagrama de bloques de un receptor FM típico de 88 a 108 MHz.

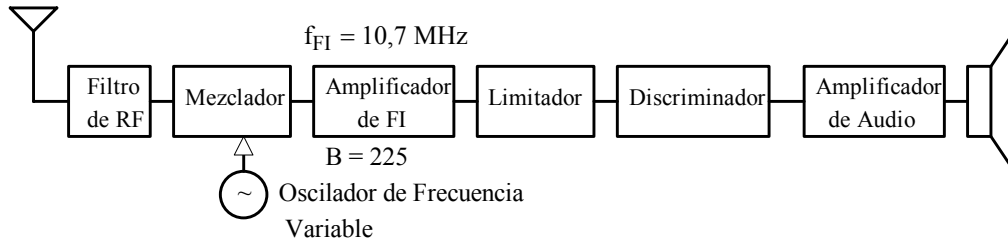


Fig. 6.42. Diagrama de Bloques de un Receptor FM típico.

Obsérvese, en la Fig. 6.42, que con excepción del limitador y del discriminador, la estructura del receptor es similar a la de un receptor AM convencional. Todos los circuitos de alta frecuencia previos al discriminador son diseñados para un ancho de banda de 225 kHz, y los amplificadores de FI están sintonizados a la frecuencia intermedia de 10,7 MHz. El amplificador de audio tiene un ancho de banda de 15 kHz e incluye un circuito de “deénfasis”. Este circuito, junto con un circuito de “preénfasis” en el transmisor, proporciona una discriminación adicional contra las interferencias y el ruido, como veremos más adelante.

♣ Ejemplo 6.13. Discriminador Práctico

Consideremos el discriminador práctico mostrado en la Fig. 6.43(c).

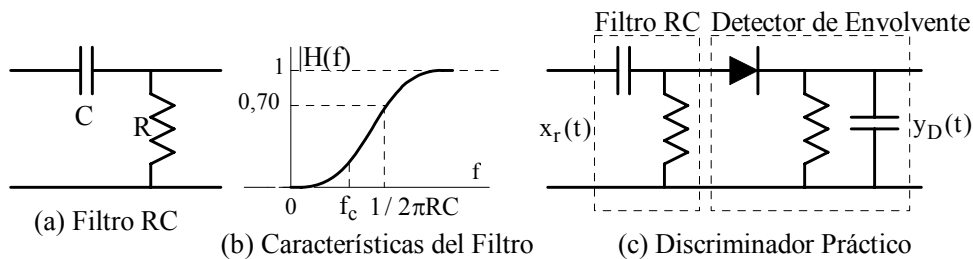


Fig. 6.43. Discriminador Práctico.

El filtro RC, Fig. 6.43(a), tiene una función de transferencia de la forma

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{\left(\frac{1}{RC}\right) + j2\pi f}; \quad |H(f)| = \frac{f}{\sqrt{\left[\frac{1}{2\pi RC}\right]^2 + f^2}}$$

La respuesta de amplitud $|H(f)|$ se muestra en la Fig. 6.43(b).

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Si las frecuencias presentes en la entrada del filtro son tales que $f_c \ll (1/2\pi RC)$, la función de transferencia se puede aproximar en la forma

$$H(f) = j2\pi fRC \Leftrightarrow h(t) = RC \frac{d}{dt} \delta(t)$$

que representa un diferenciador.

Un discriminador práctico se puede instrumentar, para frecuencias bajas, con un filtro RC y un detector de envolvente, como se muestra en la Fig. 6.43(c).

♣

♣ Ejemplo 6. 14. Detección por Retardo de Señales FM

La detección por retardo es otra forma de instrumentación de un diferenciador a partir de la definición de derivada. En efecto, por definición,

$$\frac{d}{dt} x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \right]$$

Haciendo la aproximación

$$\Delta t \approx \tau \text{ cuando } x(t) = x_r(t),$$

Podemos escribir también

$$\frac{d}{dt} x_r(t) \approx \frac{1}{\tau} [x_r(t) - x_r(t - \tau)] \quad (6.133)$$

En la Fig. 6.44 se indica la instrumentación de (6.133).

El retardo debe ser pequeño comparado con las variaciones de $x_r(t)$, es decir,

$$\tau \ll (1/f_c)$$

Por su simplicidad este tipo de discriminador se utiliza mucho para la demodulación de señales FSK en transmisión de datos por canales telefónicos (Rec. UIT-T V.21 y V.23).

♣

♣ Ejemplo 6.15. Transmisión de FM Mono y Estereofónica

La aparición en los años 50 de los discos y cintas magnéticas en estéreo, trajo aparejado el desarrollo de la transmisión FM estereofónica a principios de los años 60. Los sistemas estereofónicos necesitan la producción de dos señales separadas como si se generaran en los dos lados opuestos de una sala de conciertos. Al escuchar estas señales en dos altavoces diferentes, quien escucha tiene la sensación de profundidad y directividad, muy diferente a la producida por señales monofónicas convencionales.

Este sistema permite la compatibilidad de recepción tanto para receptores FM monofónicos como estereofónicos dentro de la banda FM Comercial. En la Fig. 6.45 se muestra el sistema de transmisión y recepción FM mono y estereofónica.

En el transmisor, Fig. 6.45(a), las señales procedentes de los micrófonos se combinan en una matriz para producir las combinaciones $(L+R)$ y $(L-R)$. La señal $(L+R)$ será recibida directamente por un receptor FM monofónico convencional, en el cual se puede escuchar las señales L o R o $(L+R)$. La combinación $(L-R)$ se traslada mediante un modulador balanceado a la frecuencia de 38 kHz. Se transmite también una subportadora piloto de bajo nivel para utilizarla en

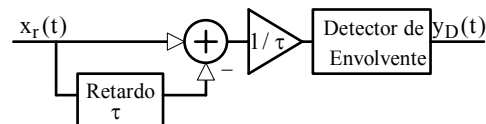


Fig. 6.44. Detección por Retardo de Señales FM.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

la demodulación de la combinación $(L - R)$, en este caso mediante reinserción de portadora y detección de envoltente. Algunas veces se transmiten señales adicionales denominadas “señales subsidiarias” para la transmisión de publicidad comercial o música para ambiente musical; estas señales van en la gama de 60 a 74 kHz. El sistema FM estereofónico es una aplicación de las técnicas FDM.

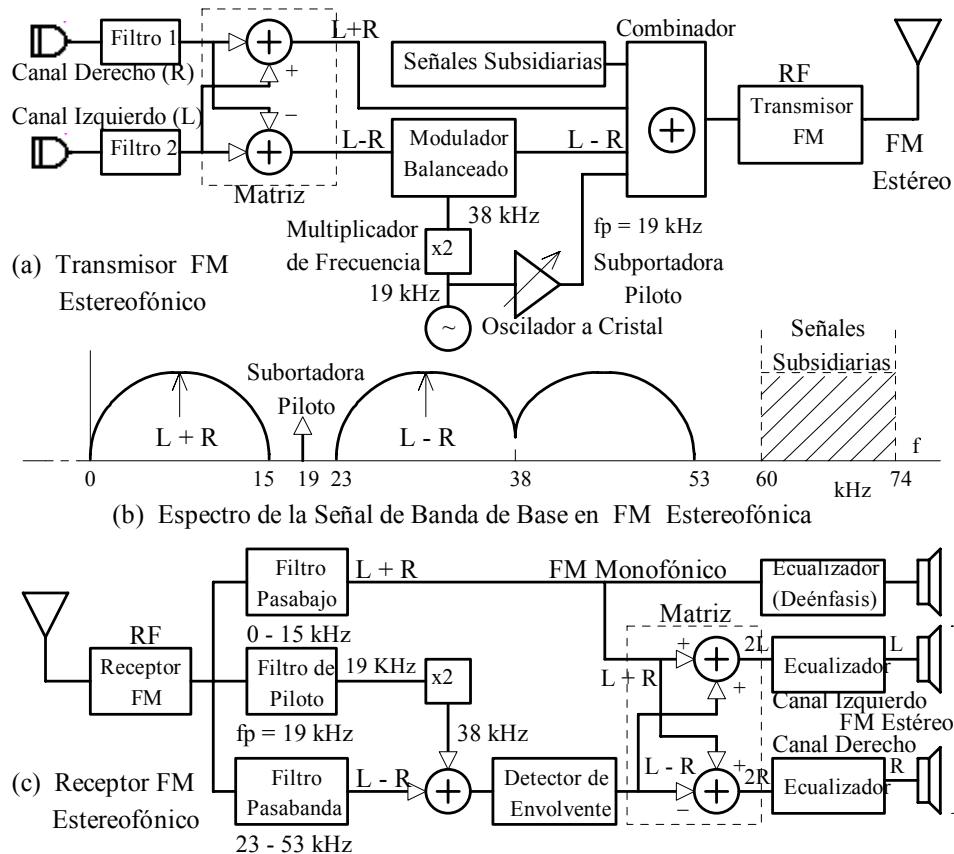


Fig. 6.45. Sistema de Transmisión FM Estereofónica.

En la Fig. 6.45(b) se muestra la forma del espectro de banda de base del sistema. El funcionamiento del receptor, Fig. 6.45(c), se entiende por simple inspección.

♣

6.4.6. Interferencia y Relaciones S/N en Modulación Angular

Interferencia

Antes de entrar de lleno en el cálculo de los efectos del ruido en modulación angular, vamos a investigar el efecto de una señal interferente de tono único dentro de la banda de frecuencias de la señal FM o PM. Supongamos que la señal recibida es la portadora más una componente interferente de la forma $A_i \cos[2\pi(f_c + f_i)t]$, donde $(f_c + f_i)$ es la frecuencia de interferencia. El valor f_i es el valor en frecuencia de la separación entre la frecuencia interferente y la frecuencia de la portadora.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Entonces,

$$\begin{aligned} x_r(t) &= A_r \cos(2\pi f_c t) + A_i \cos[2\pi(f_c + f_i)t] \\ &= [A_r + A_i \cos(2\pi f_i t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) - A_i \sin(2\pi f_i t) \cdot \sin(2\pi f_c t) \\ &= R(t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \psi(t)] \end{aligned} \quad (6.134)$$

donde $R(t) = \sqrt{[A_r + A_i \cos(2\pi f_i t)]^2 + A_i^2 \sin^2(2\pi f_i t)}$ (6.135)

y $\psi(t) = \arctg \frac{A_i \sin(2\pi f_i t)}{A_r + A_i \cos(2\pi f_i t)}$ (6.136)

En la Fig. 6.46(a) se muestra el diagrama fasorial correspondiente de la expresión (6.134).

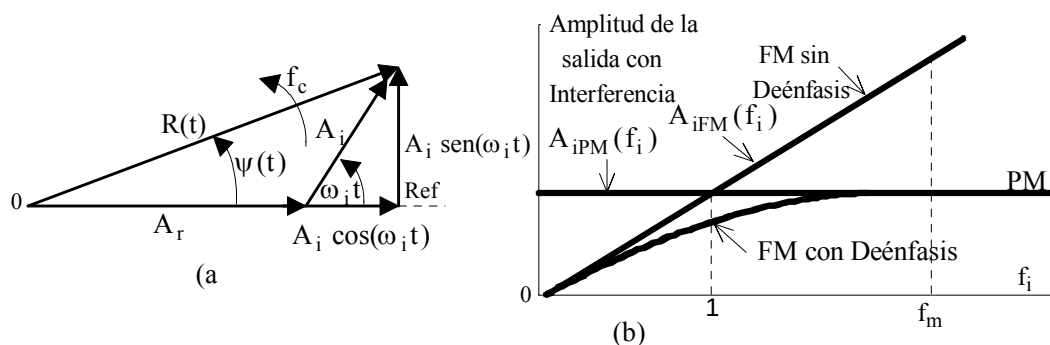


Fig. 6.46. Efecto de la Interferencia en Modulación Angular.

En el diagrama fasorial de la Fig. 6.46(a) vemos que si $A_r \gg A_i$, entonces

$$R(t) \approx A_r + A_i \cos(2\pi f_i t) = A_r \left[1 + \frac{A_i}{A_r} \cos(2\pi f_i t) \right] \quad (6.137a)$$

El ángulo $\psi(t)$ será muy pequeño, de modo que

$$\psi(t) = \arctg \frac{A_i \sin(2\pi f_i t)}{A_r + A_i \cos(2\pi f_i t)} \approx \frac{A_i}{A_r} \sin(2\pi f_i t) \quad (6.137b)$$

Por consiguiente, la amplitud de la señal FM recibida será

$$x_r(t) = A_r \left[1 + \frac{A_i}{A_r} \cos(2\pi f_i t) \right] \cdot \cos \left[2\pi f_c t + \frac{A_i}{A_r} \sin(2\pi f_i t) \right] \quad (6.138)$$

A la salida del discriminador ideal se tendrá, en FM,

$$y_D(t) = \frac{k_D}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = \frac{k_D A_i}{A_r} f_i \cos(2\pi f_i t); \quad A_{iFM}(f_i) = \frac{k_D A_i}{A_r} f_i \quad (6.139)$$

y en PM, $y_D(t) = k_D \psi(t) = \frac{k_D A_i}{A_r} \sin(2\pi f_i t); \quad A_{iPM}(f_i) = \frac{k_D A_i}{A_r}$ (6.140)

Tanto en FM como en PM, la salida del discriminador es una senoide a la frecuencia f_i . Sin embargo, en FM la amplitud de la salida del discriminador es proporcional a f_i ; mientras que en PM esta amplitud es constante, como se muestra en la Fig. 6.46(b).

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Puede verse que para valores pequeños de f_i , el tono interferente tiene menor efecto en FM que en PM, mientras que ocurre lo contrario para valores grandes de f_i . El efecto de la interferencia en FM se puede reducir colocando un filtro, llamado “**filtro de Deénfasis**”, en la salida del discriminador de FM. Generalmente se trata de un simple filtro pasabajo RC con una frecuencia de 3 dB menor que la frecuencia máxima f_m de la señal modulante, como se muestra en la Fig. 6.47(b).

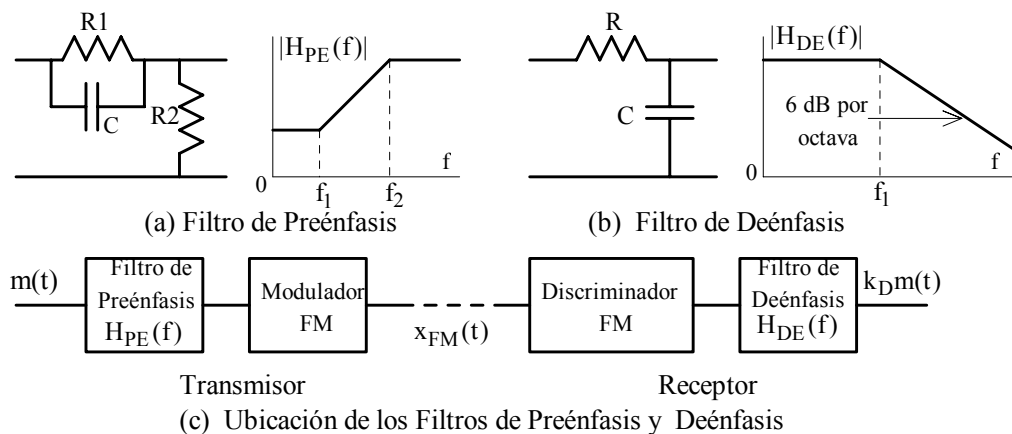


Fig. 6.47. Filtros de Preénfasis y Deénfasis.

El filtro de deénfasis es efectivo para reducir la interferencia para valores altos de f_i , pues atenúa las frecuencias altas, como se muestra en la Fig. 6.47(b). Puesto que $f_i \ll f_m$, el filtro de deénfasis introduce distorsión en la señal propiamente además de combatir la interferencia. La distorsión en la señal se puede eliminar si en el transmisor se pasa la señal por un “**filtro de Preénfasis**” que tenga una función de transferencia igual al recíproco de la función de transferencia del filtro de deénfasis, de tal manera que la distorsión introducida en el transmisor sea compensada en el receptor. En la Fig. 6.47(a) se muestra el filtro de preénfasis. El sistema completo se muestra en la Fig. 6.47(c).

Si $H_{PE}(f)$ es la función de transferencia del filtro de preénfasis y $H_{DE}(f)$ la correspondiente del filtro de deénfasis, entonces debe cumplirse que $H_{DE}(f) = H_o / H_{PE}(f)$, donde H_o es una constante.

Es importante observar que el preénfasis no produce ningún aumento en la potencia transmitida. Esto es debido a que en FM la potencia de la señal modulada es la misma que la potencia de la portadora no modulada ($A_c^2 / 2$); sin embargo, se ha demostrado [Lathi, 1968] que la inclusión de preénfasis y deénfasis produce un aumento en la relación S/N a la salida, pero a costas de un aumento en la desviación de frecuencia, lo que a su vez se traduce en un aumento del ancho de banda de la señal modulada.

Relaciones S/N en Modulación de Frecuencia

Sea el sistema de modulación de frecuencia mostrado en la Fig. 6.48.

La señal de entrada al demodulador está compuesta por la señal modulada FM y ruido pasabanda, esto es,

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$v_i(t) = A_r \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + n_c(t) \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (6.141)$$

Desarrollando el coseno del primer término y agrupando,

$$\begin{aligned} v_i(t) &= \{A_r \cos[\phi(t)] + n_c(t)\} \cos(2\pi f_c t) - \{A_r \sin[\phi(t)] + n_s(t)\} \sin(2\pi f_c t) \\ v_i(t) &= R(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)] \end{aligned} \quad (6.142)$$

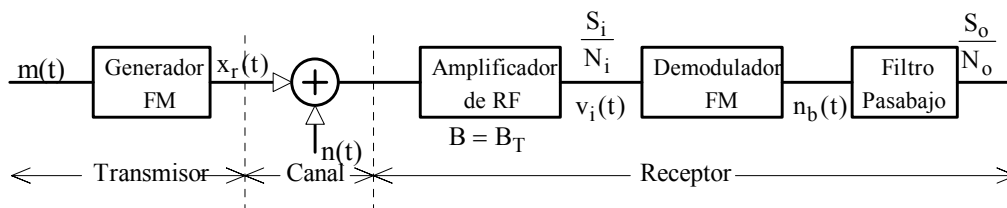


Fig. 6.48. Sistema de Modulación de Frecuencia

El limitador, incluido dentro del demodulador FM, elimina las variaciones de amplitud de $v_i(t)$; por consiguiente, $R(t) = A_r$, una constante. La salida del limitador será entonces

$$\begin{aligned} v_r(t) &= A_r \cos[2\pi f_c t + \psi(t)], \text{ donde} \\ \psi(t) &= \arctg \frac{A_r \sin[\phi(t)] + n_s(t)}{A_r \cos[\phi(t)] + n_c(t)} \end{aligned} \quad (6.143)$$

La expresión (6.143) no permite la separación explícita de los términos de señal y de ruido, a menos que se hagan ciertas consideraciones.

Para calcular las potencias de señal y de ruido a la salida del sistema, vamos a suponer que cada una se puede determinar independientemente de la otra. En consecuencia, para calcular la potencia de señal se supone que el ruido sobre el canal es cero, y para calcular la potencia de ruido supondremos que la señal mensaje $m(t)$ es cero. La justificación de este procedimiento se puede encontrar en [Lathi, 1968].

Consideremos primero la señal sin ruido. La señal recibida es $v_i(t) = A_r \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$ cuya potencia es

$$S_i = \frac{A_r^2}{2} \quad (6.144)$$

La potencia de salida del discriminador ideal, de (6.127), es

$$S_o = k_D^2 f_d^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (6.145)$$

Para calcular las potencias de ruido N_i y N_o , podemos observar que si el ancho de banda a la entrada del discriminador es B_T y la densidad espectral de potencia del ruido es $S_n(f)$, la potencia de ruido a la entrada del discriminador será

$$N_i = 2 \int_{f_c - B_T/2}^{f_c + B_T/2} S_n(f) df \quad (6.146)$$

y si el ruido es blanco de densidad espectral $\eta/2$, entonces

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$N_i = 2 \int_{f_c - B_T/2}^{f_c + B_T/2} \frac{\eta}{2} df = \eta B_T \quad (6.147)$$

En cuanto al ruido de salida, si suponemos que $m(t) = 0$, entonces $\phi(t) = 0$ y la señal de entrada al limitador será

$$v_i(t) = [A_r + n_c(t)] \cos(2\pi f_c t) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$v_i(t) = \sqrt{[A_r + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \cdot \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

y a la salida del limitador,

$$v_r(t) = A_R \cos[2\pi f_c t + \psi(t)], \quad (6.148)$$

donde $\psi(t) = \arctg \frac{n_s(t)}{A_r + n_c(t)} \quad (6.149)$

Si consideramos altas relaciones S/N, en donde se cumple que $A_r \gg n_c(t)$ o $n_s(t)$ la mayor parte del tiempo, entonces se puede aproximar

$$\psi(t) \approx \arctg \frac{n_s(t)}{A_r} \approx \frac{n_s(t)}{A_r} \quad (6.150)$$

El ruido a la salida del discriminador será

$$n_b(t) = \frac{k_D}{2\pi A_r} \frac{d}{dt} n_s(t) = \frac{k_D}{2\pi A_r} n'_s(t) \quad (6.151)$$

Si $n_s(t) \Rightarrow S_{ns}(f)$, entonces la densidad espectral de su derivada $n'_s(t)$ será $S_{n's}(f) = (2\pi f)^2 S_{ns}(f)$. En efecto, de la Fig. 6.49(a) y de la expresión (2.35), se tendrá

$$S_{n's}(f) = |H(f)|^2 S_{ns}(f) = (2\pi f)^2 S_{ns}(f) \quad (6.152)$$

pero, de la expresión (2.153), la densidad espectral a la salida del discriminador es

$$S_{nb}(f) = \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 f^2 [S_n(f + f_c) + S_n(f - f_c)] \quad \text{para } |f| \leq B_T \quad (6.153)$$

Esta densidad espectral se muestra en la Fig. 6.49(b).

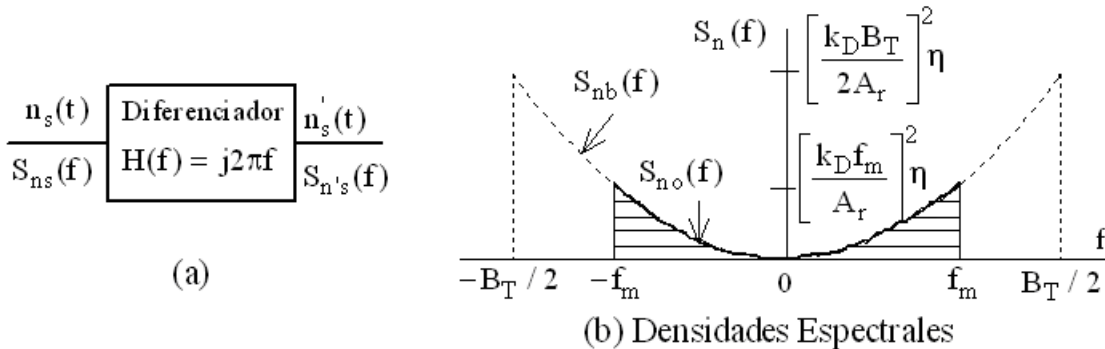


Fig. 6.49. Formación de las Densidades Espectrales $S_{nb}(f)$ y $S_{no}(f)$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Como la salida del discriminador pasa por un filtro pasabajo de ancho de banda f_m , la densidad espectral de ruido a la salida del sistema será

$$S_{no}(f) = \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 f^2 [S_n(f + f_c) + S_n(f - f_c)] \quad \text{para } |f| \leq f_m \quad (6.154)$$

En la Fig. 6.49(b) se muestra esta densidad espectral.

En general, la potencia de ruido a la salida del sistema será

$$N_o = 2 \int_0^{f_m} S_{no}(f) df, \quad \text{pero si el ruido es blanco,}$$

$$N_o = 2 \int_0^{f_m} \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 \eta f^2 df = \frac{2}{3} \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 \eta f_m^3 \quad (6.155)$$

En FM las relaciones S/N de pre y postdetección serán

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A_r^2}{2\eta B_T} \quad (6.156)$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3}{2} \frac{(A_r f_d)^2}{\eta f_m^3} < m^2(t) > \quad (6.157)$$

y la ganancia de conversión,

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 3 \frac{f_d^2}{f_m^3} < m^2(t) > \quad (6.158)$$

La expresión (6.158) se puede expresar en una forma ligeramente diferente. Si consideramos que $m(t)$ está normalizada de tal manera que $|m(t)|_{\max} = 1$ y que el sistema es de banda ancha, entonces,

$$|m(t)|_{\max} = 1; \quad B_T = 2\Delta f = 2f_d; \quad f_d = B_T / 2 \quad \text{y} \quad \beta_m = B_T / f_m$$

Reemplazando f_d en (6.158), queda

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{3}{4} \left(\frac{B_T}{f_m}\right)^3 < m^2(t) > \quad (6.159)$$

Por ejemplo, en modulación sinusoidal con $A_m = 1$, $(B_T / f_m) = 2\beta$ y $< m^2(t) > = \frac{1}{2}$, la ganancia de conversión en FM será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{3}{8} \left(\frac{B_T}{f_m}\right)^3 = \frac{3}{8} \beta_m^3 = 3\beta^3 \quad (6.160)$$

La ganancia de conversión en FM es proporcional al cubo del índice de modulación β o del factor de expansión del ancho de banda β_m . Sin embargo, ella no puede aumentarse indefinidamente aumentando β o β_m porque a medida que el ancho de banda aumenta, se incrementa la potencia de ruido y eventualmente se alcanza un punto donde la potencia de ruido es del mismo orden que la potencia de la señal y aparece el fenómeno del “umbral” en FM. En la

región umbral la señal desaparece prácticamente dentro del ruido y la recepción ya no es posible. El fenómeno del umbral en FM lo veremos a continuación.

Efecto Umbral en Modulación de Frecuencia

El efecto umbral en modulación de frecuencia es mucho más pronunciado que el producido en AM o PCM. En condiciones de umbral, la potencia de ruido es alta y las aproximaciones hechas en la sección anterior ya no son válidas. Para estudiar el efecto de umbral en FM consideremos la expresión (6.141) con el ruido expresado en forma polar

$$v_i(t) = A_r \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + R_n(t) \cos[2\pi f_c t + \phi_n(t)] \quad (6.161)$$

Esta expresión se puede interpretar mejor con la ayuda de su diagrama fasorial en el cual $R_n(t) \gg A_r$, como se muestra en la Fig. 6.50.

Del diagrama fasorial vemos que

$$v_i(t) = E(t) \cos[2\pi f_c t + \phi_n(t) + \beta(t)] \quad (6.162)$$

donde

$$\beta(t) = \arctg \frac{A_r \sin[\phi(t) - \phi_n(t)]}{R_n(t) + A_r \cos[\phi(t) - \phi_n(t)]} \quad (6.163)$$

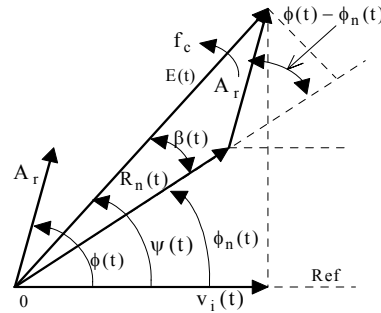


Fig.6.50. Diagrama Fasorial para Si/Ni Baja.

Cuando el ruido es alto, $R_n(t) \gg A_r$ y la expresión (6.163) se puede escribir en la forma siguiente

$$\beta(t) \approx \arctg \left\{ \frac{A_r}{R_n(t)} \sin[\phi(t) - \phi_n(t)] \right\} \approx \frac{A_r}{R_n(t)} \sin[\phi(t) - \phi_n(t)] \quad (6.164)$$

La salida del discriminador será entonces

$$y_D(t) = \frac{k_D}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \phi_n(t) + \beta(t)] = \frac{k_D}{2\pi} [2\pi f_c + \phi_n'(t) + \beta'(t)] \quad (6.165)$$

El término $(k_D f_c)$ es una componente continua que es eliminada en el filtro de salida o en el mismo discriminador. El término $(k_D / 2\pi) \phi_n'(t)$ es un término de ruido solamente. La información acerca de $m(t)$ está contenida en $\beta(t)$, pero como podemos ver en (6.164), $\beta(t)$ contiene un término multiplicador $[1/R_n(t)]$ que es también un término de ruido. Por lo tanto, $\beta'(t)$ no contiene una señal proporcional a $m(t)$ que pueda ser recuperada y, como en el caso AM, la señal $m(t)$ estará capturada por el ruido y fuertemente distorsionada. El efecto umbral es la causa de las súbitas pérdidas de la señal en la recepción FM, sobre todo cuando los transmisores están muy alejados o en los receptores móviles.

La forma de la expresión (6.165) no permite la separación explícita de la señal y del ruido; sin embargo, utilizando métodos estadísticos se ha demostrado [Ziemer y Tranter, 1981] que para modulación sinusoidal las relaciones S/N de pre y postdetección están relacionadas mediante la expresión (6.166) que graficamos para diferentes valores de β en la Fig. 6.51.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{1,5\beta^2 (S_i / N_i)}{1 + \frac{12}{\pi} \beta (S_i / N_i) \exp\left[-\frac{S_i / N_i}{2(\beta + 1)}\right]} \quad (6.166)$$

Nótese, en la Fig. 6.51, que si queremos hacer S_o / N_o arbitrariamente alta aumentando β o el ancho de banda mientras se mantiene S_i / N_i fija, llega un momento en que se cae en la zona umbral y la señal estará fuertemente distorsionada. Por lo tanto, no se puede intercambiar indefinidamente ancho de banda por relación S/N debido al efecto umbral. Asimismo, aumentar el ancho de banda para reducir la potencia recibida (o transmitida) manteniendo S_o / N_o fija, está

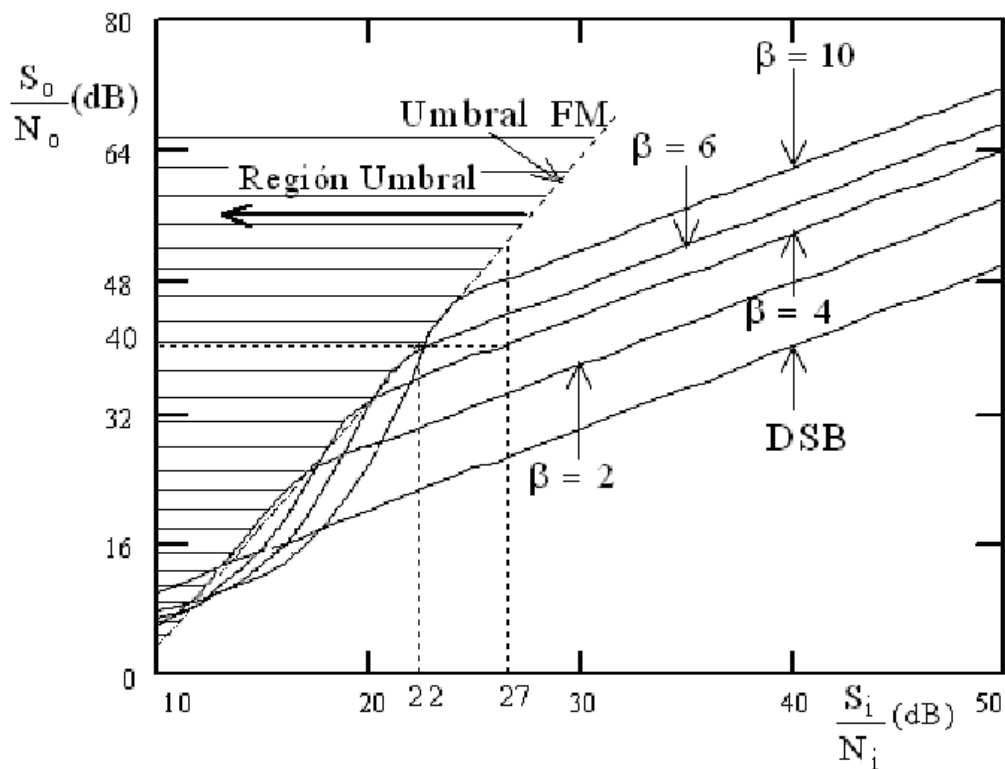


Fig. 6.51. Efecto del Umbral en Modulación FM.

igualmente restringido, pues la región umbral impide grandes aumentos en el ancho de banda. Por ejemplo, en un sistema dado $\beta = 4$ y $(S_i / N_i) = 27$ dB, lo que corresponde a una $(S_o / N_o) \approx 40$ dB, y según la Regla de Carson, a un ancho de banda $B_T = 10f_m$. De acuerdo con la Fig. 6.51, manteniendo S_o / N_o fija, el índice de modulación se puede aumentar hasta $\beta = 6$, con lo cual el ancho de banda aumenta a $14f_m$ y la relación (S_i / N_i) disminuye a 22 dB; pero aumentos superiores de β o del ancho de banda caen dentro de la región umbral. En general, el diseño del sistema estará dictado por el umbral y la reducción teórica de la potencia transmitida (o recibida) no se alcanza completamente.

En la práctica se han desarrollado diversas técnicas para la extensión del umbral, es decir, para rebajar el valor de la relación S_i / N_i a la cual ocurre el umbral. Para más información sobre el efecto umbral, ver por ejemplo [Taub y Schilling, 1986].

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

Relaciones S/N en Modulación de Fase

La modulación de fase puede ser tratada como un caso especial de FM. Como vimos anteriormente, Fig. 6.27(b), la modulación PM puede llevarse a cabo diferenciando $m(t)$ y modulando en FM una portadora. Si utilizamos un demodulador FM en el receptor, la señal de salida será la derivada de $m(t)$. La señal deseada puede recuperarse colocando un integrador a la salida del modulador FM.

La señal PM recibida puede expresarse en la forma

$$x_r(t) = A_r \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)] = A_r \cos\left[2\pi f_c t + k_p \int^t \frac{d}{d\tau} m(\tau) d\tau\right] \quad (6.167)$$

Las potencias de señal y de ruido serán, para ruido blanco,

$$S_i = \frac{A_r^2}{2} \quad \text{y} \quad N_i = \eta B_T$$

La salida del demodulador FM es $(k_D k_p / 2\pi) \frac{d}{dt} m(t)$, y al pasar por el integrador (de ganancia 2π), la señal de salida será $k_D k_p m(t)$, de modo que

$$S_o = (k_D k_p)^2 \langle m^2(t) \rangle \quad (6.168)$$

El ruido a la salida del demodulador FM viene dado por la expresión (4.150), la cual, al ser integrada (con ganancia 2π), produce la señal de salida

$$n_o(t) = \frac{k_D}{A_r} n_s(t) \Rightarrow S_{no}(f) = \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 S_{ns}(f) \quad (6.169)$$

y de la expresión (2.123),

$$S_{no}(f) = \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 [S_n(f + f_c) + S_n(f - f_c)] \quad \text{para} \quad |f| \leq f_m \quad (6.170)$$

$$\text{y si el ruido es blanco,} \quad S_{no}(f) = \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 \eta \quad \text{para} \quad |f| \leq f_m \quad (6.171)$$

Por consiguiente, en modulación PM la densidad espectral de ruido a la salida del sistema es constante, en cuyo caso no hay necesidad de circuitos de preénfasis y deénfasis.

La potencia de ruido a la salida será

$$N_o = 2 \int_0^{f_m} \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 \eta df = 2 \left(\frac{k_D}{A_r}\right)^2 \eta f_m \quad (6.172)$$

Las relaciones S/N de pre y postdetección en modulación PM serán

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A_r^2}{2\eta B_T} \quad (6.173)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{1}{2} \frac{(k_p A_r)^2}{\eta f_m} \langle m^2(t) \rangle \quad (6.174)$$

y la ganancia de conversión,

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = k_p^2 \left(\frac{B_T}{f_m} \right) \langle m^2(t) \rangle \quad (6.175)$$

En modulación sinusoidal, y para señales PM de banda ancha,

$$|m(t)|_{\max} = A_m = 1; \quad \beta_p = k_p A_m; \quad B_T = 2\beta_p f_m; \quad \frac{B_T}{f_m} = \beta_m = 2\beta_p \text{ y } \langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2}.$$

En modulación PM la ganancia de conversión será

$$\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = \frac{1}{8} \beta_m^3 = \beta_p^3 \quad (6.176)$$

La ganancia de conversión en PM es también proporcional al cubo del índice de modulación o del factor de expansión del ancho de banda; pero cuando la comparamos con su correspondiente en FM, ella está a 4,77 dB por debajo de ésta. Hay que tener cuidado en la aplicación de la expresión (6.176), pues como $k_p \leq \pi$, el valor de β_m no puede ser mayor que 2π en modulación sinusoidal con $A_m = 1$. En la práctica se toma como límite $\beta_m \leq 10$.

6.4.7. Comparación entre los Sistemas de Modulación Angular

De la expresión (6.160),

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{FM} = \frac{3}{8} \beta_m^3 = 3\beta_p^3 \quad (6.177)$$

$$\text{y de (6.176),} \quad \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{PM} = \beta_p^3 = \frac{1}{8} \beta_m^3 \quad (6.178)$$

Si $\beta = \beta_p$, es decir, si se verifica que $k_p = \frac{f_d}{f_m} \leq \pi$, entonces,

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{FM} = 3 \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{PM} \quad (6.179)$$

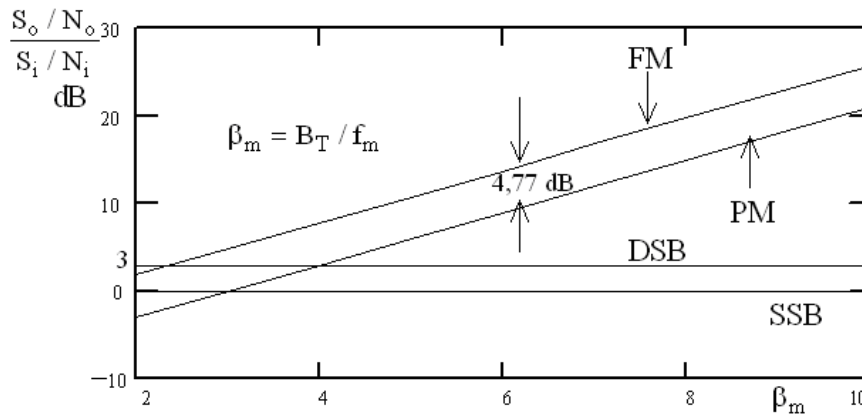
y en dB,

$$\left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{FM(dB)} = 4,77 \text{ dB} + \left[\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} \right]_{PM(dB)} \quad (6.180)$$

El sistema FM es superior al sistema PM en, por lo menos, 4,77 dB, como ya lo habíamos establecido previamente.

En la Fig. 6.52 se grafica las ganancias de conversión en FM y PM en función del factor de expansión del ancho de banda. A efectos de comparación, se muestra también las ganancias de conversión en DSB y SSB.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Fig. 6.52. Ganancias de Conversión FM y PM vs β_m

6.5. COMPARACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE MODULACIÓN DE SEÑALES CONTINUAS

6.5.1. Criterios de Comparación

La comparación entre sistemas diferentes debe efectuarse tomando como referencia algunos parámetros o criterios que deben ser comunes para todos. En la comparación entre los sistemas de modulación de ondas continuas tomaremos como referencia los siguientes criterios o parámetros:

1. Modulación sinusoidal con amplitud unitaria. Esto quiere decir que

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t); \quad A_m = |m(t)|_{\max} = 1 \quad \text{y} \quad \langle m^2(t) \rangle = 1/2$$

2. En el caso AM, se tomará el 100% de modulación ($a = 1$), lo que implica que $A_r = A_m = 1$
3. En el caso de modulación angular, la amplitud de la portadora recibida será la unidad, esto es, $A_r = 1$. También, $\beta = f_d / f_m$ y $\beta_p = k_p$.
4. La frecuencia máxima de la señal mensaje $m(t)$ será f_m ; $\beta_m = B_T / f_m$ el factor de expansión del ancho de banda, donde B_T es el ancho de banda de transmisión de la señal modulada transmitida.
5. La potencia transmitida (o recibida) es la misma para todos los sistemas.
6. El ruido a la entrada del sistema de recepción es blanco de densidad espectral $\eta/2$.

6.5.2. Comparación entre los Sistemas de Modulación Angular vs Modulación Lineal

En la TABLA 6-1 mostramos que para igual potencia transmitida (o recibida) el comportamiento a la salida en SSB coherente y DSB es equivalente, siendo ambos superiores a AM en 4,77 dB. A fin de extender la comparación para incluir PM y FM, las relaciones de postdetección $[S_o/N_o]_{FM}$ y $[S_o/N_o]_{PM}$ deberán ser expresadas en términos de las correspondientes SSB, DSB y AM.

De (2.162), la relación de postdetección en DSB es

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{DSB} = \frac{A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{2\eta f_m} \quad (6.181)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Para FM y PM, de (6.157) y (6.174),

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{FM} = 3\beta^2 \frac{A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{2\eta f_m} \quad (6.182)$$

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{PM} = \beta^2 \frac{A_r^2 \langle m^2(t) \rangle}{2\eta f_m} \quad (6.183)$$

Igualmente, de (6.67), para DSB, SSB y AM,

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{DSB} = \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{SSB} = 3 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{AM} \quad (6.184)$$

Comparando (6.181) a (6.184) resulta que

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{FM} = 3\beta^2 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{DSB} = 3\beta^2 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{SSB} = 9\beta^2 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{AM} \quad (6.185)$$

$$\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{PM} = \beta^3 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{DSB} = \beta^3 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{SSB} = 3\beta^3 \left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{AM} \quad (6.186)$$

Puede observarse en (6.185) que el sistema FM es superior al sistema DSB para $\beta \geq 1/\sqrt{3} = 0,58$, y superior al sistema AM para $\beta \geq 1/3 = 0,33$. Puede decirse entonces que estos son los valores de transición entre FM de banda angosta y FM de banda ancha, en relación con los sistemas DSB y AM. Para valores de β superiores a 0,58 ó 0,33, la relación S/N de postdetección en FM aumentará a una tasa más rápida, cuando la relación S/N de predetección aumenta, que las relaciones de postdetección en DSB y AM.

6.5.3. Intercambio “Ancho de Banda-Relación S/N” en Sistemas de Banda Ancha

Tanto en el Capítulo V como en el presente capítulo, hemos discutido un número de sistemas de banda ancha los cuales permiten intercambiar ancho de banda por potencia. Estos sistemas de banda ancha se pueden clasificar en codificados y no codificados. Por ejemplo, los sistemas FM, PM y PPM son sistemas de banda ancha no codificados, mientras que el sistema PCM, en todas sus variaciones, es un sistema de banda ancha codificado. Vimos en los sistemas no codificados PPM y FM que el mejoramiento en las ganancias de conversión, expresiones (5.80) y (6.160), era proporcional al cubo de β_m , es decir, al cubo del ancho de banda. En PCM, por el contrario, el mejoramiento en la ganancia de conversión varía exponencialmente con el ancho de banda, expresión (5.107). Por consiguiente, el intercambio entre el ancho de banda y la potencia es más eficiente en los sistemas codificados que en los no codificados, y su rendimiento de transmisión es mucho mayor; pero, por otro lado, ambos tipos de sistema tienen la desventaja de ser afectados severamente por el efecto umbral.

En el Capítulo IV demostramos que el intercambio óptimo del ancho de banda por potencia en un sistema ideal era exponencial, tal como lo establece la expresión (4.49), que repetiremos aquí haciendo $B_m = f_m$.

$$\frac{S_o}{N_o} = \left[1 + \frac{S_i}{N_i} \right]^{B_T/f_m} - 1 \quad (6.187)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Pero hemos visto asimismo que si el ancho de banda aumenta, la potencia de ruido aumenta también y la relación S/N de predetección disminuye. La expresión (6.187) puede entonces escribirse en una forma que toma en cuenta este efecto.

En general, la relación de predetección S_i / N_i , para cualquier sistema, se puede escribir en la forma

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{S_r}{\eta B_T} = \frac{S_r}{\eta f_m \left(\frac{B_T}{f_m} \right)} = \frac{\gamma}{\beta_m} \quad (6.188)$$

donde $\gamma = \frac{S_r}{\eta f_m}$ (6.189)

El término S_r es la potencia recibida (o transmitida), γ es la “relación S/N normalizada” respecto al ancho de banda de la señal mensaje, y β_m la relación de expansión del ancho de banda.

Evidentemente, γ es proporcional a la potencia transmitida y es similar a la relación S/N normalizada que utilizamos en el Capítulo V, expresión (5.152), como referencia común para la comparación entre los sistemas de modulación binaria. El γ que hemos definido en la expresión (6.189) es más general y se aplica a cualquier sistema. Esta será nuestra referencia común, junto con el parámetro β_m , en la comparación de los sistemas de banda ancha.

La relación de postdetección en el sistema ideal será entonces

$$\frac{S_o}{N_o} = \left[1 + \frac{\gamma}{\beta_m} \right]^{\beta_m} - 1 \quad (6.190)$$

Si $\frac{\gamma}{\beta_m} \gg 1$, entonces $\frac{S_o}{N_o} \approx \left[\frac{\gamma}{\beta_m} \right]^{\beta_m}$ (6.191a)

y si $B_T \rightarrow \infty$ (Problema de Aplicación 4.27), entonces $\frac{S_o}{N_o} \approx \exp[\gamma]$ (6.191b)

Por consiguiente, aunque el intercambio no es estrictamente exponencial, él lo es para altas relaciones S_i / N_i . Esto significa que si se dobla el ancho de banda de transmisión de un sistema ideal, la relación S_o / N_o se eleva al cuadrado (aproximadamente). Igualmente, si la potencia transmitida se reduce a su raíz cuadrada sin reducir la relación de salida S_o / N_o , hay que aumentar al doble el ancho de banda.

La expresión (6.191a) nos permite estudiar los efectos de una “**compresión del ancho de banda**”, esto es, la transmisión de una señal de ancho de banda f_m sobre un canal cuyo ancho de banda B_T podemos disminuir arbitrariamente. En efecto, de (6.191a),

$$\gamma = \beta_m \left[\frac{S_o}{N_o} \right]^{1/\beta_m} \quad (6.192)$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Por ejemplo, si $\beta_m = 8$ y $[S_o / N_o] = 40$ dB, entonces $\gamma \approx 25$; pero si disminuimos el ancho de banda a la cuarta parte manteniendo la misma relación S_o / N_o , el valor de γ es de 200. Para una disminución del ancho de banda en un factor 4, se necesita aumentar la potencia transmitida en un factor 8. Para valores de β_m menores, las potencias requeridas son extremadamente altas, como puede verificar el lector mediante un pequeño cálculo. Como conclusión, podemos decir que *el intercambio “ancho de banda-relación S/N” es viable en una sola dirección: aumento del ancho de banda y disminución de la potencia*. Esto es válido también para sistemas digitales, como ya lo hemos verificado en el Capítulo V.

6.5.4. Comparación entre los Sistemas de Banda Ancha

La relación S/N normalizada γ y el factor de expansión del ancho de banda β_m , nos permiten comparar los sistemas de banda ancha en términos de la potencia recibida (o transmitida) y de los ancho de banda del canal y de la señal mensaje en las mismas condiciones de ruido. Las expresiones que hemos desarrollado anteriormente las podemos expresar en términos de γ y de β_m en la forma siguiente, que el lector puede deducir fácilmente:

$$\text{Para el sistema ideal,} \quad \frac{S_o}{N_o} = \left[1 + \frac{\gamma}{\beta_m} \right]^{\beta_m} - 1 \quad (6.193)$$

$$\text{Para el sistema PPM,} \quad \frac{S_o}{N_o} = \frac{(\beta_m - 2)^2}{16} \gamma \quad (6.194)$$

$$\text{Para el sistema PCM (DPSK),} \quad \frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{\beta_m}}{1 + 2^{(\beta_m+1)} \exp \left[-2 \frac{\gamma}{\beta_m} \right]} \quad (6.195)$$

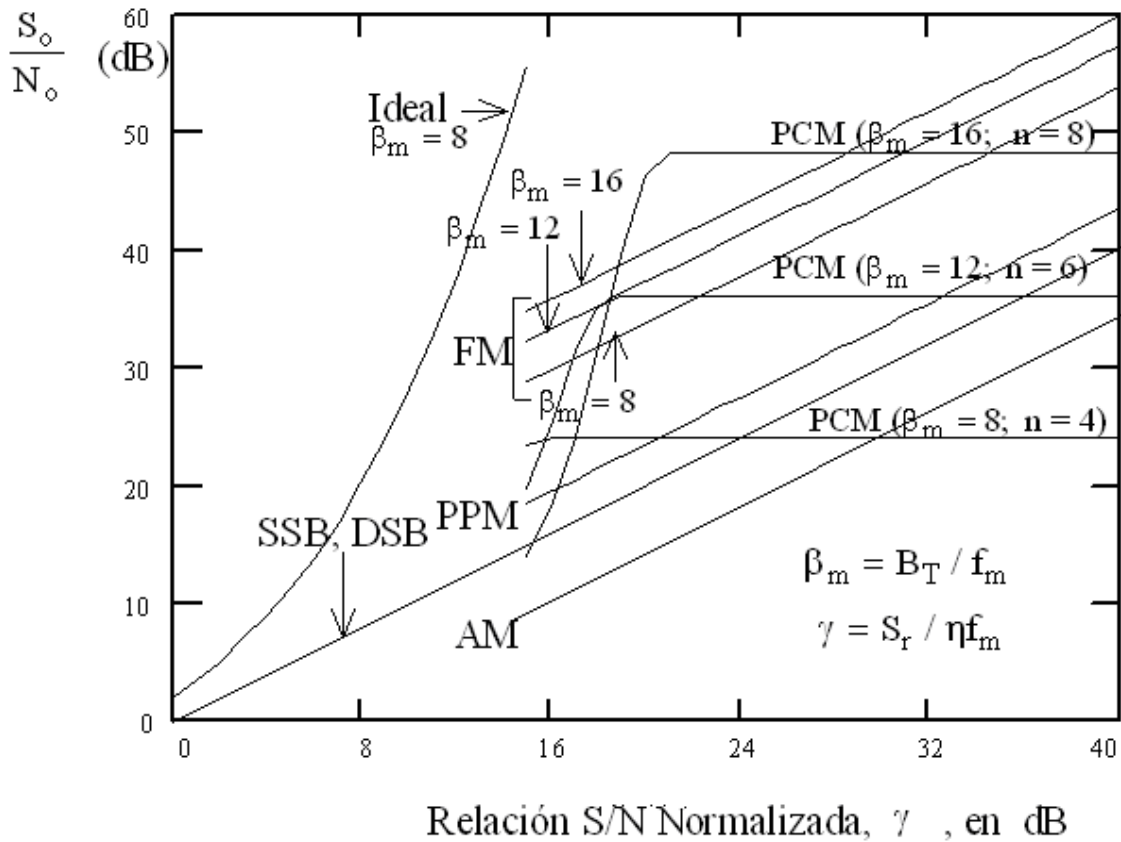
$$\text{Para el sistema FM,} \quad \frac{S_o}{N_o} = \frac{\frac{3}{8} \beta_m \gamma}{1 + \frac{6}{\pi} \gamma \exp \left[-\frac{\gamma}{\beta_m (\beta_m + 2)} \right]} \quad (6.196)$$

y para efectos de comparación,

$$\text{Sistemas SSB y DSB,} \quad \frac{S_o}{N_o} = \gamma \quad (6.197)$$

$$\text{Sistema AM,} \quad \frac{S_o}{N_o} = \frac{\gamma}{3} \quad (6.198)$$

En la Fig. 6.53 se grafican las expresiones anteriores para diferentes valores de β_m . El sistema FM no incluye deénfasis.

Fig. 6.53. Relaciones de Postdetección vs γ .

Puede observarse en la Fig. 6.53 que los sistemas de banda ancha prácticos (FM, PPM y PCM) no pueden alcanzar el comportamiento del sistema ideal debido al efecto umbral. Por ejemplo, FM y PCM para $\beta_m = 8$ tienen los puntos del umbral a una distancia de aproximadamente 8 dB del sistema ideal. El umbral en PPM puede llegar mucho más cerca, pero ocurre a un valor demasiado bajo de la relación S_o / N_o para ser de utilidad en la transmisión de señales analógicas.

Nótese que los sistemas prácticos, con excepción de los sistemas PCM, no tienen un intercambio “ancho de banda-potencia” que varíe en forma exponencial como lo tiene el sistema ideal. Aunque el sistema PCM tiene una relación ancho de banda-potencia que es exponencial, incrementos en la potencia transmitida (o recibida) más allá del umbral, no mejoran la relación S_o / N_o por cuanto el valor límite de S_o / N_o está determinado por la cuantificación, expresión (5. 105).

El sistema SSB ofrece un buen comportamiento para $\beta_m = 1$; sin embargo, puesto que β_m es fija e igual a la unidad, no hay posibilidad de intercambiar ancho de banda por relación S/N. Lo mismo se aplica a los sistemas DSB y AM para los cuales $\beta_m = 2$.

En resumen, para altas relaciones S/N de predetección, los sistemas FM y PCM presentan el mejor comportamiento, siendo el sistema PCM un poco mejor. Desde el punto de vista del intercambio “ancho de banda-relación S/N”, todos los sistemas prácticos de banda ancha están en

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

un orden de magnitud por debajo del sistema ideal. Para bajas relaciones S/N, solamente son de utilidad los sistemas SSB y DSB pues no son afectados por el efecto umbral.

6.5.5. Características Generales de los Sistemas de Modulación de Ondas Continuas

Entre los varios tipos de modulación lineal, aquellos con portadora suprimida (SSB, DSB y VSB) son mejores que el AM convencional, puesto que las relaciones S/N son más altas y no se produce el efecto umbral. Cuando el ancho de banda es el factor limitativo, SSB y VSB son los más apropiados; sin embargo, se requiere equipos de modulación y demodulación más complejos, pues la detección coherente sin duda es más complicada que la detección de envolvente. En sistemas de comunicación punto-a-punto (un transmisor, un receptor) esto pudiera valer la pena, pero en sistemas de comunicación masiva (un transmisor, muchos receptores), consideraciones de tipo económico favorecen la utilización de AM en radiodifusión y VSB con portadora piloto en televisión, pues en ambos sistemas se utiliza la detección de envolvente.

Desde el punto de vista de la instrumentación, el sistema AM es el menos complicado de los sistemas de modulación lineal, mientras que el sistema VSB con portadora suprimida es el más complicado debido a los requerimientos de sincronización de portadora y al uso de filtros residuales de difícil realización. Entre DSB y SSB, este último es el menos difícil de instrumentar porque la sincronización no es tan crítica, sobre todo si se utiliza detección homodina, y con las nuevas tecnologías el diseño de filtros de banda lateral única es más fácil. El sistema VSB con portadora se puede clasificar como de complejidad moderada, no obstante la necesidad de los filtros residuales, pues utiliza detección de envolvente.

Para la transmisión de señales con fuertes componentes de baja frecuencia y alto ancho de banda, el sistema VSB es el mejor compromiso en términos del ancho de banda de transmisión y complejidad en la instrumentación; de aquí su aplicación en televisión. Aunque en FM se puede requerir un ancho de banda mucho mayor, su respuesta en baja frecuencia es muy buena; por ello, la modulación FM es ampliamente utilizada en los grabadores de cinta magnética de alta calidad para el registro de señales de baja frecuencia, inclusive componentes continuas.

Cuando se considera la transmisión de señales con un alto contenido de bajas frecuencias dentro de un ancho de banda restringido, hemos visto que los mejores sistemas son el DSB y el VSB. Esto justifica su utilización en la transmisión de datos; por ejemplo, en su Recomendación V.35, la UIT-T propone la transmisión de datos con modulación VSB a una velocidad de 40,8 kbps.

Para la transmisión de imágenes fijas (facsimil) y el video de TV, las técnicas de reinserción de portadora hacen posible y deseable la utilización de VSB con detección de envolvente. Asimismo, como el sistema FM tiene también un buen comportamiento en frecuencias bajas, se suele utilizar en algunos sistemas multiplex de telemetría espacial.

Los sistemas de modulación angular tienen valores altos en las relaciones de postdetección, la calidad de la señal es mejor pero a expensas de un aumento del ancho de banda requerido, y su instrumentación es moderadamente compleja. La expresión (6.185) muestra la superioridad del sistema FM respecto a los otros sistemas de modulación de ondas continuas. Evidentemente, para valores iguales de β_m , FM es superior a PM, como se puede ver en la Fig. 6.52. Mientras el sistema se mantenga sobre la región umbral, el mejoramiento puede hacerse arbitrariamente alto aumentando el ancho de banda B_T ; sin embargo, en PM este mejoramiento está limitado a $\beta_m \leq 10$, puesto que $k_p \leq \pi$.

El precio que hay que pagar en el mejoramiento de las relaciones S/N en modulación angular es el excesivamente alto ancho de banda requerido; por eso la modulación angular de banda ancha se emplea para la transmisión de señales que demandan una alta fidelidad y cuando el ancho

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

de banda es un factor secundario, no limitante. Por ejemplo, en FM comercial y en el audio de televisión los anchos de banda son altos: 200 kHz en FM comercial y 50 kHz en TV. En microondas, donde se dispone de grandes anchos de banda, la modulación angular también es muy utilizada debido a sus propiedades reductoras de ruido y a su amplitud constante.

En cuanto a la conservación de la potencia, con valores moderados de β_m el sistema FM demanda menor potencia que los sistemas de modulación lineal a pesar de las limitaciones impuestas por el umbral. Las aplicaciones en este sentido son en la transmisión punto-a-punto, especialmente en sistemas móviles en donde la detección coherente sería más bien una molestia. Cuando se aplican técnicas de extensión de umbral, el sistema FM de banda ancha se emplea en algunas sondas espaciales y en satélites, en donde las limitaciones de la potencia son muy severas.

Tratar de considerar todas las facetas de las aplicaciones es virtualmente imposible, pues no existe una solución universal para todos los problemas de las telecomunicaciones. Además, en muchas aplicaciones puede utilizarse igualmente bien más de un tipo de sistema. En estos casos, el costo del equipo y la compatibilidad con el equipo ya en uso pueden dictar la decisión en la selección de un tipo particular de sistema.

6.6. RESUMEN

En este capítulo se estudia la modulación y transmisión de señales continuas tales como la voz, música o video. Se definen los dos tipos de modulación de ondas continuas: lineal y exponencial, y se describen tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

Entre los sistemas de modulación lineal se estudian los sistemas convencionales DSB, AM, SSB y VSB, y sus características de ancho de banda y relaciones S/N. Se desarrolla, asimismo, el concepto de multicanalización y se da algunos ejemplos de su aplicación en transmisión por satélites y en los sistemas telefónicos.

Los sistemas de modulación angular, tanto de frecuencia FM como de fase PM, se estudian con cierto detalle; en particular se estudia sus características de ancho de banda y relaciones S/N, con una breve introducción sobre el efecto de umbral.

El capítulo concluye con un breve estudio de los sistemas de banda ancha y una comparación de todos los sistemas estudiados en el texto señalándose algunas de sus aplicaciones más importantes.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

6.1. Sea el sistema de la Fig. 6.54, donde

$$M(f) = 4\Lambda(f/2)$$

$$H_1(f) = \Pi\left(\frac{f+4}{2}\right) + \Pi\left(\frac{f-4}{2}\right)$$

$$H_2(f) = 4\Pi(f/4)$$

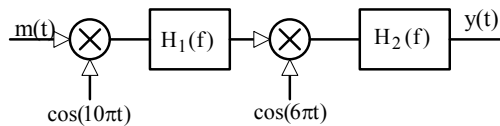


Fig. 6.54

Demuestre que $y(t) = 16\text{sinc}(4t) - 8\text{sinc}^2(2t)$. Grafique $Y(f)$.

6.2. Vamos a investigar el efecto de la no sincronización de la portadora local en un detector coherente. Supóngase que la salida del oscilador local sea $2A_c \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \Delta\phi]$, donde Δf y $\Delta\phi$ son los errores de frecuencia y de fase, respectivamente. La entrada al detector es de la forma $A_r m(t) \cos(2\pi f_c t)$. La ganancia del filtro de salida es la unidad.

(a) Determine la salida del filtro para Δf y $\Delta\phi$ distintos de cero.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

(b) Repita cuando $\Delta f = 0$ y $\Delta \phi = \pi/2$

(c) Si $m(t) = 10\text{sinc}(10^4 t)$, $\Delta \phi = 0$ y $\Delta f = 1 \text{ kHz}$ y con $A_r A_c = 2 \times 10^3$, grafique el espectro de salida.

- 6.3. Hemos dicho que la modulación se puede efectuar mediante el empleo de sistemas no lineales, es decir, sistemas que contienen elementos no lineales. En la Fig. 6.55 se muestra un modulador de este tipo.

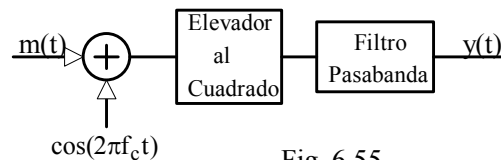


Fig. 6.55

Si $m(t)$ es de banda limitada f_m , determine los parámetros del filtro pasabanda a fin

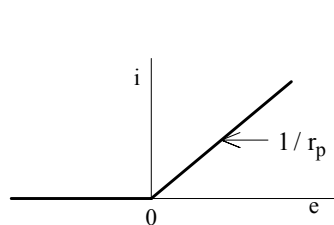
de que $y(t)$ sea una señal modulada DSB. Especifique las restricciones, si las hay, entre f_c y f_m .

- 6.4. El modulador balanceado es el elemento principal de los detectores sincrónicos. En la Fig. 6.56 se muestra el circuito equivalente de un modulador balanceado.

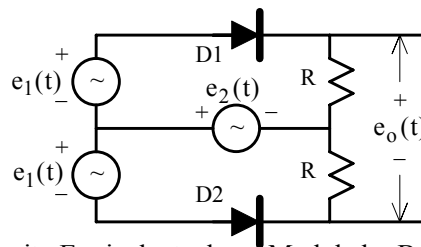
(a) Utilizando el modelo lineal por tramos del diodo, Fig. 6.56(a), determine el voltaje de salida del circuito equivalente del modulador balanceado, Fig. 6.56(b), cuando

$$e_1(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t); \quad e_2(t) = A_c \cos(2\pi f_c t). \quad \text{Suponga que } A_c \gg |m(t)| \text{ para todo } t.$$

(b) ¿Cómo se puede recuperar $m(t)$ a partir de $e_o(t)$?



(a) Modelo del Diodo



(b) Circuito Equivalente de un Modulador Balanceado

Fig. 6.56.

(c) El circuito mostrado en la Fig. 6.56(b) se puede utilizar como detector o discriminador de fase, es decir, que puede determinar el desfase entre dos señales. Demuestre que si $e_1(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta)$ y $e_2(t) = \cos(2\pi f_c t)$, el voltaje de salida $e_o(t)$ contendrá una componente continua proporcional a $\cos(\theta)$.

- 6.5. En la Fig. 6.57(a) se muestra un sistema de modulación DSB; la señal $s(t)$ se muestra en (b). Se tiene también que $f_c = f_s = 4f_m$; $f_1 = 2f_m$; $f_2 = 6f_m$. Las frecuencias f_1 y f_2 son las frecuencias inferior y superior, respectivamente, del filtro pasabanda. La ganancia del filtro es la unidad.

(a) Demuestre que el tren de impulsos se puede representar mediante la expresión

$$s(t) = 4f_m \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[2\pi n f_s (t - \Delta t)] \right] \quad \text{cuando } f_s = 4f_m$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

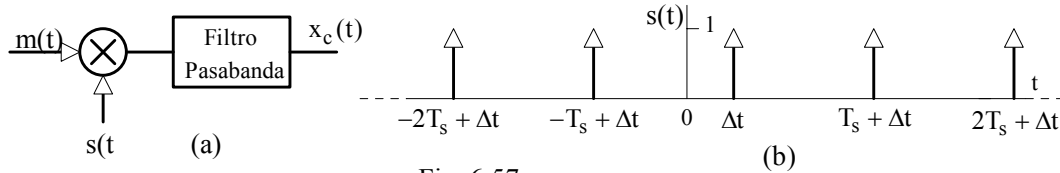


Fig. 6.57.

(b) Demuestre también que $x_c(t) = 8f_m m(t) \cos[8\pi f_m(t - \Delta t)]$

- 6.6. La detección de una señal DSB se puede efectuar multiplicando la señal recibida por una señal periódica cualquiera $p(t)$ de período $1/f_c$. El resultado de la multiplicación es una señal de la forma $y(t) = x_{\text{DSB}}(t)p(t)$, donde $x_{\text{DSB}}(t)$ viene dada por (6.5).

Deduzca una expresión analítica para el espectro de $y(t)$ y demuestre que el mensaje $m(t)$ se puede recuperar de $y(t)$ mediante un filtro pasabajo. La señal de salida del filtro tendrá la forma $s_o(t) = A_c |P_1| \cos(\phi_1) \cdot m(t)$, donde P_1 y ϕ_1 son los coeficientes y fase de Fourier de la componente fundamental de la señal periódica $p(t)$.

- 6.7. En la detección sincrónica de señales DSB es necesaria la sincronización tanto de fase como de frecuencia (Problema de Aplicación 6.2). Sin embargo, utilizando el sistema mostrado en la Fig. 6.58, solamente se requiere sincronización de frecuencia pero no de fase.

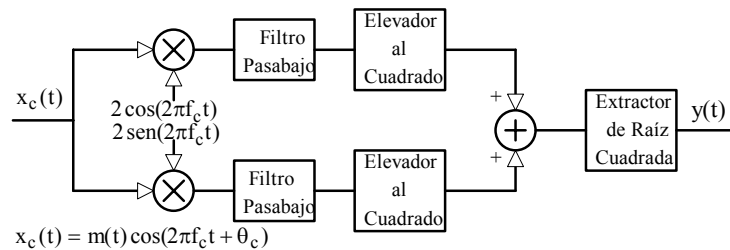


Fig. 6.58.

Demuestre que este sistema permite recuperar $|m(t)|$ de $x_c(t)$ sin necesidad de conocer el ángulo de desfase θ_c . Nótese que en este sistema se pierde la información de fase.

- 6.8. Demuestre que el sistema de la Fig. 6.59 se comporta como un filtro pasabanda centrado en f_c , de ancho de banda $2B$ y de ganancia 2.

Sugerencia: exprese $x(t)$ mediante su forma canónica, expresión (2.108)

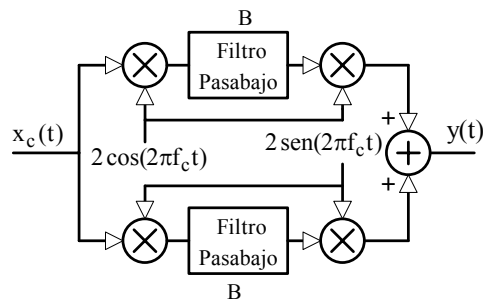
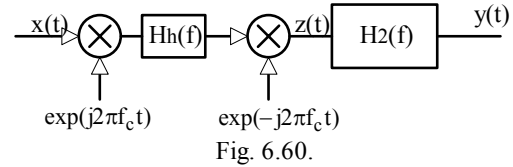


Fig. 6.59.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

- 6.9. Demuestre que el esquema mostrado en la Fig. 6.60 se comporta como un filtro pasabajo. $H_h(f)$ es un filtro de Hilbert y $x(t)$ es una señal pasabajo real. El filtro $H_2(f)$ extrae la parte imaginaria de $z(t)$.



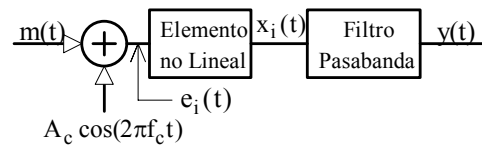
- 6.10. El procedimiento seguido en el Problema 6.6 se puede aplicar también para la generación de señales DSB. En efecto, sea f_m la frecuencia máxima de $m(t)$; se multiplica $m(t)$ por la señal periódica $p(t)$ y luego se pasa el producto por un filtro pasabanda centrado en f_c y de ancho de banda $2f_m$; la salida del filtro será una señal DSB.

Si, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t - 10^{-6}n}{2,5 \times 10^{-7}}\right)$, demuestre que la salida del filtro pasabanda es una señal DSB de la forma $y(t) = \frac{4}{\pi^2} m(t) \cos(2\pi f_c t)$, donde $f_c = 1 \text{ MHz}$.

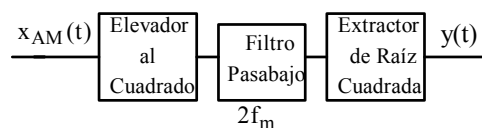
- 6.11. Se dispone de una señal $p(t) = A_c \cos^3(2\pi f_c t)$ que vamos a utilizar para generar una señal DSB. Si se forma el producto $z(t) = m(t) \cdot p(t)$, ¿Cómo podríamos, a partir de $z(t)$, producir una señal DSB? Si $m(t) = B \text{sinc}^2(Bt)$, donde $f_c \gg B$, dibuje el espectro de $z(t)$.

- 6.12. El modulador AM con elemento no lineal mostrado en la Fig. 6.8(c) se puede representar en la forma dada en la Fig. 6.61, donde

$x_i(t) = a_1 e_i(t) + a_2 e_i^2(t)$. $m(t)$ es de banda limitada f_m y de valor promedio cero.



- (a) Determine $x_i(t)$
- (b) Especifique las características del filtro pasabanda para que $y(t)$ sea una señal AM. En este caso determine $y(t)$.
- (c) Si $a_1 = 10$, $a_2 = 0,5$ y $A_c = 2$, determine la cota máxima de $|\min m(t)|$ para que $y(t)$ sea una señal AM. Demuestre también que si el índice de modulación AM es del 50%, entonces $|\min m(t)| = 5$.
- (d) Para los valores dados en la parte (c) y con $m(t) = 10 \cos(2\pi f_m t)$, demuestre que el rendimiento de transmisión es del 33,3%. Demuestre también que éste es el máximo rendimiento.
- 6.13. Demuestre que el sistema mostrado en la Fig. 6.62 puede utilizarse para demodular señales AM si el filtro pasabajo tiene un ancho de banda $2f_m$, donde f_m es la frecuencia máxima del mensaje $m(t)$.



En general, demuestre que este sistema opera como un detector de envolvente y no podrá demodular señales DSB.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.14. El circuito de la Fig. 6.63 se puede utilizar para demodular señales AM. La rectificación de onda completa de una señal AM es equivalente a multiplicarla por una señal periódica cuadrada bipolar de período $1/f_c$ y amplitud ± 1 .

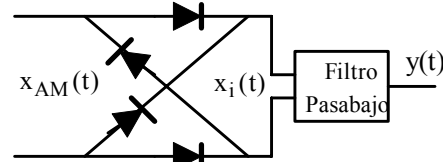


Fig. 6.63.

- Desarrolle una expresión analítica para el espectro de la señal rectificada $x_i(t)$.
- Demuestre que a la salida del filtro pasabaja (de ganancia unitaria), una vez removida la componente continua, la señal es $y(t) = \frac{2}{\pi} m(t)$.
- Este circuito se puede utilizar también para generar señales DSB cuando la señal de entrada al rectificador es de la forma $x(t) = m(t) + K \cos(2\pi f_c t)$ y se utiliza un filtro pasabanda centrado en f_c .

Demuestre que si la ganancia del filtro es unitaria, a su salida la señal tendrá la forma

$$y(t) = \frac{4}{\pi} m(t) \cos(2\pi f_c t).$$

6.15. Se desea transmitir en AM la señal periódica de la Fig. 6.64; la frecuencia de portadora es de 100 kHz.

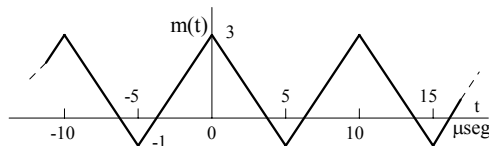


Fig. 6.64.

- Si el índice de modulación es del 75%, demuestre que la amplitud de la portadora es $A_c = 5/3$ y que el rendimiento de transmisión es del 15,8%.
- Si el filtro pasabanda de salida del transmisor tiene un ancho de banda de 70 kHz y ganancia unitaria, dibuje el espectro de la señal transmitida. Si el índice de modulación es del 100%, demuestre que en este caso el rendimiento de transmisión es del 24,96%.
- La señal recibida en el receptor AM es la misma señal transmitida en el caso (b). La densidad espectral de ruido a la entrada del amplificador de RF es

$$S_n(f) = 10^{-9} \exp[-1,5 \times 10^{-5} |f|]$$

Si la ganancia de los filtros es unitaria, demuestre que las relaciones de pre y postdetección son:

$$\frac{S_i}{N_i} = 8,317 \times 10^4 = 49,2 \text{ dB}; \quad \frac{S_o}{N_o} = 4,069 \times 10^4 = 46,095 \text{ dB}$$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

- 6.16. Se desea demodular señales AM con un detector coherente, como se muestra en la Fig. 6.65. La señal recibida es

$$x_{AM}(t) = 10^{-3} \left[1 + \frac{3}{4} \cos(10^4 \pi t) \right] \cos(2\pi f_c t)$$

donde $f_c = 1,5 \text{ MHz}$

El ruido en antena lo podemos representar mediante su función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = 3 \times 10^{-6} \text{sinc}^2(3 \times 10^6 \tau)$$

La ganancia de tensión del amplificador de RF es de 1000 y la ganancia de potencia del amplificador de audio es de 10.

Demuestre que la relación S_o/N_o de postdetección es de 18,066 dB.

- 6.17. En un sistema AM el mensaje es $m(t) = K[2 \cos(2\pi f_m t) + \cos(4\pi f_m t) + 3 \cos(10\pi f_m t)]$.

Si A_c es la amplitud de la portadora sin modular,

- Demuestre que si el índice de modulación es del 100%, entonces $K = A_c/4$
- Demuestre que el rendimiento de transmisión correspondiente es del 30,43%
- Dibuje el espectro de la señal modulada AM

- 6.18. En la Fig. 6.66 se muestra la envolvente positiva de una señal AM. Se sabe que $m(t)$ posee una componente continua y que la portadora no modulada tiene una potencia de 10,125 W.

- Demuestre que el índice de modulación es del 69,2% y que el rendimiento de transmisión teórico de la señal modulada es del 13,8%.
- Si el filtro de salida tiene un ancho de banda de 800 Hz, ganancia unitaria y centrado en la portadora, que suponemos es de 100 kHz, demuestre que el rendimiento de transmisión de la señal AM transmitida es del 12,2%. Dibuje también el espectro de la señal transmitida.

- Repita las partes (a) y (b) en el caso de que $m(t)$ no contenga una componente continua.

- 6.19. Consideremos un sistema AM con modulación sinusoidal e índice de modulación del 100%.

- Demuestre que si la banda lateral superior está atenuada en un factor de 1/2, la señal AM se puede escribir en la forma

$$x_{AM}(t) = E(t) \cos[2\pi f_c t - \psi(t)], \text{ donde } E(t) = A_c \sqrt{\frac{17}{16} + \frac{3}{2} \cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{2} \cos^2(2\pi f_m t)}$$

$$\text{y } \psi(t) = \arctg \left[\frac{\sin(2\pi f_m t)}{4 + 3 \cos(2\pi f_m t)} \right]. \text{ Sugerencia: Utilice el diagrama fasorial.}$$

- Demuestre también que si la banda lateral superior está desfasada en 180° , entonces

$$x_{AM}(t) = A_c \sqrt{1 + \sin^2(2\pi f_m t)} \cos \{ 2\pi f_c t - \arctg[\sin(2\pi f_m t)] \}$$

J. Briceño M., Dr. Ing. – Profesor Titular, ULA – Mérida, Venezuela

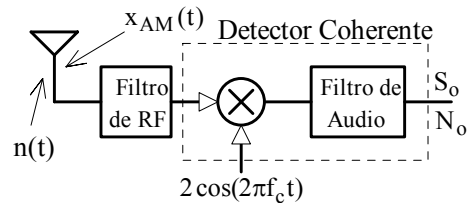


Fig. 6.65.

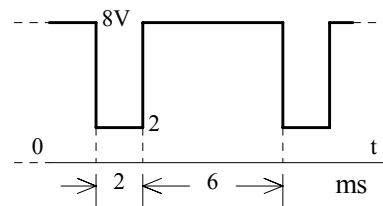


Fig. 6.66.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.20. Sea la señal AM con modulación sinusoidal de la Fig. 6.67.

- (a) Determine su índice de modulación
- (b) Dibuje su espectro para $f_c = 1600$ Hz y $f_m = 100$ Hz.

Demuestre que su rendimiento de transmisión es del 5,26%

- (c) ¿En cuánto hay que aumentar (o disminuir) la amplitud de la portadora para que su índice de modulación sea del 10%?

[Respuesta: Hay que aumentar A_c en 175 V].

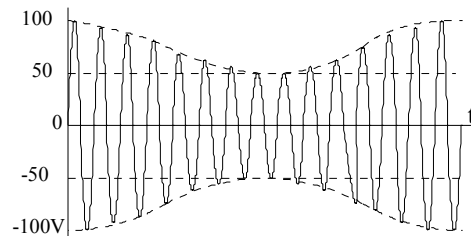


Fig. 6.67.

6.21. En un sistema AM la potencia de la portadora sin modular, referida a una resistencia de 50 Ohm, es de 100 W. Cuando se modula con una señal sinusoidal de amplitud A_m , se encuentra que la potencia promedio de la salida aumenta en un 50%. En estas condiciones,

- (a) Determine la potencia promedio de cada banda lateral y el valor de A_m
- (b) Demuestre que el índice de modulación es del 100%
- (c) Demuestre que el valor máximo de la señal modulada es de 200 V
- (d) Determine la potencia total de salida si la amplitud de la señal moduladora se reduce a la mitad

6.22. La señal de la Fig. 6.68 se aplica a la entrada de un detector de envolvente, Fig. 6.5(a), donde $R = 10^4$ Ohm y $C = 10$ μ F.

- (a) Si el diodo es ideal, dibuje la forma de la señal de salida, calculando las correspondientes constantes de tiempo.
- (b) Repita (a) si el diodo tiene una resistencia inversa de 30 kOhm y la directa de 1200 Ohm.

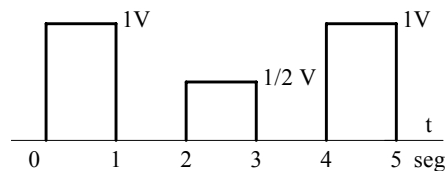


Fig. 6.68.

6.23. Un tono de prueba de 1 kHz modula en AM una portadora de 1 MHz con un índice de modulación del 50%. En el receptor la señal AM llega contaminada por interferencia aditiva representada por una señal sinusoidal de 1002 kHz cuya amplitud es el 1% de la amplitud de la portadora sin modular.

Demuestre que a la salida del detector de envolvente la señal interferente estará a 33,98 dB por debajo del tono de prueba.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.24. En la Fig. 6.69 se muestra el modulador de Weaver. Si $m(t)$ es de banda limitada f_m ,

- (a) Demuestre que la señal de salida es una señal modulada SSB: de banda lateral superior cuando se toma el signo “+” en el sumador, y de banda lateral inferior cuando se toma el signo “-”. El ancho de banda de los filtros es B .

- (b) Sea $m(t) = B \text{sinc}^2(Bt)$, con $f_c = 4B$ y con el signo “+”. Dibuje el espectro en los puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

- (c) ¿Por qué este modulador es más sencillo de instrumentar que el modulador por desplazamiento de fase, Fig. 6.12(f)?

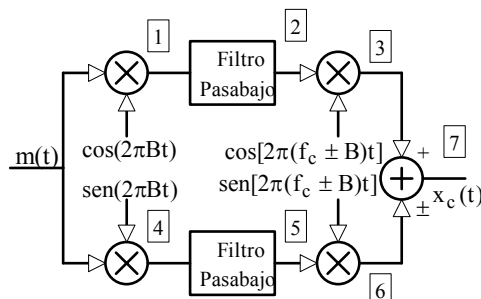


Fig. 6.69. Modulador SSB de Weaver

6.25. En el modulador SSB por desplazamiento de fase, Fig. 6.12(f), el transformador de Hilbert produce un desfase de $\pi/2$ a todas las componentes de frecuencia de $m(t)$. Sin embargo, en la práctica esta transformación es de difícil realización física. Supongamos entonces que la transformación no es perfecta y que el desfase producido es de $(\pi/2 + \alpha)$, donde $\alpha < \pi/2$. Sea también $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ y consideremos la banda lateral inferior.

- (a) Demuestre que a la salida del demodulador habrá una componente de distorsión dada por

$$y_d(t) = A_c \{ [\cos(\alpha) - 1] \sin(2\pi f_m t) - \sin(\alpha) \cos(2\pi f_m t) \} \sin(2\pi f_c t)$$

- (b) A la salida del circuito se coloca un filtro pasabajo. Demuestre que si la entrada del circuito es una señal SSB con modulación sinusoidal de la forma $x_r(t) = A_r \cos[2\pi(f_c - f_m)t]$, la salida del filtro pasabajo será

$$y(t) = A_r A_c \cos(\alpha/2) \cos(2\pi f_m t + \frac{\alpha}{2}).$$

6.26. Sea el sistema de la Fig. 6.70, donde

$$x_i(t) = x_r(t) + n(t), \text{ siendo}$$

$$x_r(t) = [A + m_1(t) + m_2(t)] \cos(2\pi f_c t) + [A + m_1(t) - m_2(t)] \sin(2\pi f_c t)$$

$$n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-8} \text{ W / Hz}$$

- (a) Demuestre que $y_1(t) = A + m_1(t)$ y $y_2(t) = m_2(t)$, es decir, el sistema permite recuperar $m_1(t)$ y $m_2(t)$ a partir de $x_i(t)$.

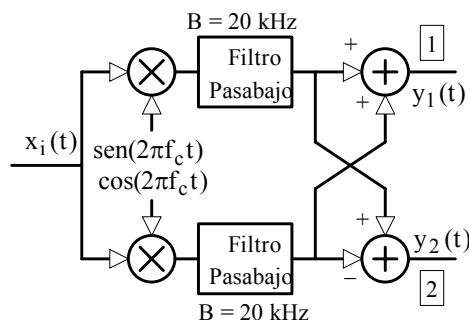


Fig. 6.70.

- (b) Suponga que el ruido $n(t)$ es pasabanda de ancho de banda $2B$ y centrado en f_c . Demuestre que la potencia de ruido en el punto 1 es $N_1 = -3,98 \text{ dBm}$.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.27. Para la transmisión de dos señales se propone el circuito de la Fig. 6.71, que utiliza una sola portadora de frecuencia f_c . Las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son de banda limitada f_{m1} y f_{m2} , respectivamente.

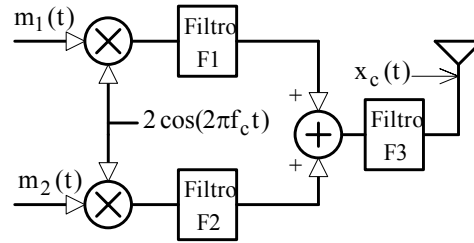


Fig. 6.71

(a) ¿Qué características deben tener los filtros F1, F2 y F3 para poder transmitir y recobrar las señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$? (Con estas características se harán las partes (b) y (c) siguientes).

(b) Si $m_1(t)$ y $m_2(t)$ son sinusoidales de

frecuencias f_{m1} y f_{m2} , respectivamente, y amplitud unitaria, calcule la señal $x_c(t)$.

(c) Si $m_1(t) = f_{m1} \text{sinc}^2(f_{m1}t)$ y $m_2(t) = f_{m2} \text{sinc}(f_{m2}t)$, donde $f_{m2} = 2f_{m1}$ y $f_c \gg f_{m2}$, dibuje el espectro de la señal transmitida $x_c(t)$.

(d) Diseñe un sistema para demodular $x_c(t)$ y recobrar $m_1(t)$ y $m_2(t)$.

6.28. Demuestre que la ganancia de potencia del filtro $H_{SSB}(f)$, Fig. 6.12(d), para que la potencia promedio de la señal SSB sea la misma que la del sistema de la Fig. 6.12(f), debe ser igual a 4.

6.29. La señal periódica de la Fig. 6.72 se transmite en SSB Inferior con una portadora de frecuencia de 100 kHz y amplitud 10. La detección es coherente y suponemos que la señal SSB a la entrada del detector es igual a la señal transmitida. Los filtros de RF (transmisión y recepción) tienen un ancho de banda de 4,5 kHz y todos son de ganancia unitaria. La densidad de ruido a la entrada del filtro de RF es

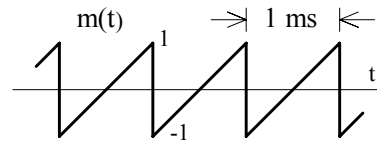


Fig. 6.72.

filtro de RF es $S_n(f) = 2 \times 10^{-6} \exp[-10^{-5} \ln 2 |f|] \text{ W/Hz}$

Demuestre que la relación de postdetección es $\frac{S_o}{N_o} = 48,97 \text{ dB}$

6.30. En la Fig. 6.73 se muestra un cierto sistema que permite demodular señales SSB.

Si el ruido es pasabanda de densidad espectral 10^{-2} W/Hz , y la señal mensaje es

$m(t) = 40 \text{sinc}(20t)$ y $A_r = 1$,

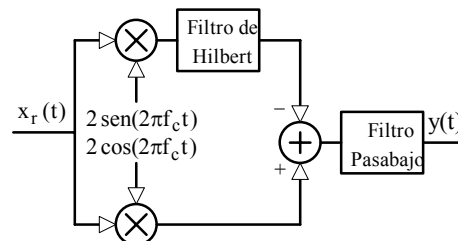


Fig. 6.73.

(a) Demuestre que este sistema es en efecto un demodulador SSB Inferior.

(b) Demuestre que la potencia de ruido a la salida es de 26,0206 dBm y que la energía de la señal a la salida es de 320 joules.

(c) Si por equivocación se pretendiera demodular una señal SSB Superior, determine lo que se obtendría a la salida.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

- (d) Demuestre que este modulador se puede modificar para demodular señales SSB Superior cambiando el sumador de salida de tal manera que se sumen las dos señales de entrada. Demuestre que en este caso el filtro de salida no es necesario.

6.31. Sea las tres señales $x_{DSB}(t) = A_1 \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_c t)$, $x_{SSB}(t) = A_3 \cos[2\pi(f_c + f_m)t]$ y $x_{AM}(t) = A_2 [1 + \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t)$. Si la potencia promedio útil es la misma para las tres señales, determine las relaciones A_1/A_3 , A_2/A_3 y A_1/A_2 .

6.32. Una señal VSB se puede generar pasando una señal DSB a través de un filtro VSB apropiado, como el mostrado en la Fig. 6.74.

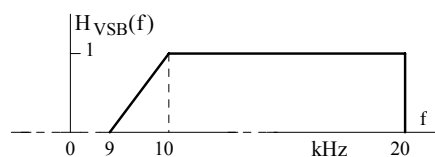


Fig. 6.74.

- (a) Determine la frecuencia de portadora apropiada. Suponga que su amplitud es 10.
(b) Determine la señal VSB a la salida del filtro

cuando (1) $m(t) = 5\cos(10^3\pi t)$; (2) $m(t) = 10\cos(1600\pi t) + 5\cos(800\pi t)$

(3) $m(t) = 10\cos(1500\pi t) \cos(300\pi t)$

- (c) Calcule las potencias de la señal VSB en el caso (b)
(d) Dibuje el espectro de la señal VSB cuando

(1) $m(t) = 2 \times 10^3 \text{sinc}(2 \times 10^3 t)$; (2) $m(t) = 10^3 \text{sinc}^2(10^3 t)$

6.33. Se desea transmitir en VSB la señal del Problema de Aplicación 6.29 pero con un período de 8 ms y amplitud $\pm 5V$. La función de transferencia del filtro VSB tiene la forma

$$H_{VSB}(f) = \begin{cases} 1 + \text{sen}[2 \times 10^{-3} \pi (f - 10^4)] & \text{para } 9750 < f \leq 10250 \\ 2 & \text{para } 10250 < f \leq 10600 \\ 1 - \text{sen}[2 \times 10^{-3} \pi (f + 10^4)] & \text{para } -10250 < f \leq -9750 \\ 2 & \text{para } -10600 < f \leq -10250 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El ruido a la entrada del receptor es blanco de densidad espectral 10^{-9} W/Hz. No se transmite portadora piloto y la detección es sincrónica; también $A_c = 1$.

- (a) Dibuje la forma de $H_{VSB}(f)$ (frecuencias positivas solamente)
(b) Determine la frecuencia apropiada de la portadora y las características de los filtros del receptor.
(c) Determine la señal $x_{VSB}(t)$ transmitida y dibuje su espectro.
(d) Demuestre que la ganancia de conversión $\frac{S_o / N_o}{S_i / N_i} = 1,213$.

6.34. Demuestre que las señales VSB pueden también demodularse mediante reinserción de portadora y detección de envolvente. Sugerencia: utilice la expresión (6.53).

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

- 6.35. Dos señales $m_1(t)$ y $m_2(t)$, ambas de banda limitada f_m , se modulan en FDM con subportadoras $f_{c1} \gg f_m$ y $f_{c2} = f_{c1} + 2f_m$, respectivamente, y se transmiten por un canal no lineal caracterizado mediante la expresión $y(t) = a_1x(t) + a_2x^2(t) + a_3x^3(t)$.
- Si la modulación de subportadora es en DSB, demuestre que toda la diafonía (interferencia entre canales) a la salida es ininteligible y desaparece luego del filtrado pasabanda si $a_3 = 0$.
 - Repetir para el caso de modulación AM y demuestre que en este caso aparecerá también diafonía inteligible de la forma $m_1(t)\cos(2\pi f_{c2}t)$.
- 6.36. Dibuje el espectro típico de una señal AM/AM FDM tanto en banda de base como en portadora principal. Diga una ventaja y una desventaja de este sistema.
- 6.37. Doce canales telefónicos, de 4 kHz cada uno, se multicanalizan en FDM dejando una banda de guarda de 1 kHz entre canales. La frecuencia más baja de subportadora es de 20 kHz y la frecuencia de la portadora de transmisión es de 150 kHz. Si la multicanalización se hace en DSB/DSB y en SSB/SSB, determine, en cada caso,
- Las frecuencias del resto de las subportadoras
 - Representando los canales telefónicos como en la Fig. 6.25, dibuje los espectros transmitidos indicando todas las frecuencias en juego. En SSB tome la banda lateral superior.
- 6.38. Un receptor superheterodino opera a una frecuencia de 1 MHz con el oscilador local a una frecuencia de 1,2 MHz. Un segundo receptor opera a la frecuencia imagen del primer receptor produciendo en éste interferencias por efecto de imagen.
- Determine la frecuencia intermedia del primer receptor
 - ¿Cuánto es el valor de la frecuencia de portadora del segundo receptor?
 - Demuestre que en la banda de radiodifusión comercial de 535 a 1605 kHz, para que no haya problemas de frecuencias imagen, el valor de la frecuencia intermedia deberá ser menor o igual que 535 kHz. En la práctica el valor de la frecuencia intermedia se ha establecido en 455 kHz.
 - Demuestre también que para la banda de 535 a 1605 kHz, la frecuencia del oscilador local debe ser $995 \text{ kHz} \leq f_{OL} \leq 2055 \text{ kHz}$
 - Demuestre que cuando se utiliza la frecuencia intermedia de 455 kHz, en la banda comprendida entre 690 kHz y 1450 kHz jamás se producirá interferencias debido a las frecuencias imagen. Esto quiere decir que una señal de, por ejemplo, 1500 kHz, tendrá una imagen. ¿Cuánto es el valor de la frecuencia de esta imagen?
- 6.39. Un receptor superheterodino puede recibir 100 señales, de 5 kHz de ancho de banda cada una, moduladas en AM/AM FDM. El borde de la frecuencia inferior de la banda de radiofrecuencia (RF) está en 600 kHz.
- Demuestre que la frecuencia intermedia máxima apropiada es de 500 kHz, y que la gama de sintonización del oscilador local es $1105 \text{ kHz} \leq f_{OL} \leq 2095 \text{ kHz}$.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.40. En la Fig. 6.75 se muestra un receptor superheterodino de doble conversión, cuyas frecuencias intermedias son f_{I1} y f_{I2} .

Si $f_c > f_o > f_{I1} > f_{I2}$ y $f_{I1} > f_d$,

- (a) Demuestre que el segundo oscilador local está sintonizado a la frecuencia fija $f_d = f_{I1} - f_{I2}$

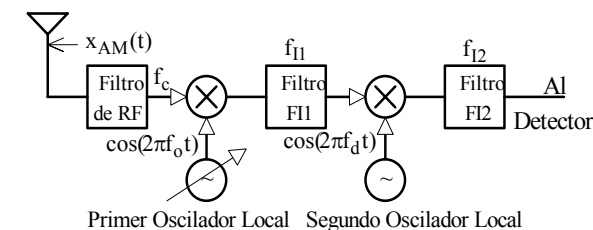


Fig. 6.75. Receptor Superheterodino de Doble Conversión.

(b) ¿Cuáles son los valores de las frecuencias imagen del segundo mezclador?

6.41. El Canal 6 de Televisión Comercial tiene una portadora de video de 83,25 MHz, y la banda de audio está a 4,5 MHz por encima de ella. Un receptor superheterodino de TV tiene una frecuencia intermedia de 45,75 MHz y para el audio, de 41,25 MHz.

- (a) Demuestre que la frecuencia del oscilador local de video para recibir el Canal 6 es de 129 MHz
- (b) Demuestre que las frecuencias imagen y del oscilador local en el canal de audio son de 170,25 MHz y de 129 MHz, respectivamente.
- (c) Demuestre que el Canal 7 puede producir perturbaciones en el Canal 6 por efecto imagen. (En el Apéndice C.3 se dan las frecuencias utilizadas en TV).

6.42. En la Fig. 6.76 se muestra el diagrama de bloques de un “Oscilador de Batido (BFO)”.

- (a) Analice su operación, ¿Cuál es la ventaja del BFO sobre otros tipos de oscilador?
- (c) Compare el cambio porcentual en la frecuencia de $y(t)$ respecto a un cambio porcentual de f_1 cuando f_o es constante.
- (c) Para $f_1 = 100$ kHz, $f_o = 99,99$ kHz, encuentre el cambio porcentual en f_c debido a un cambio de 0,1% en la frecuencia f_1 .

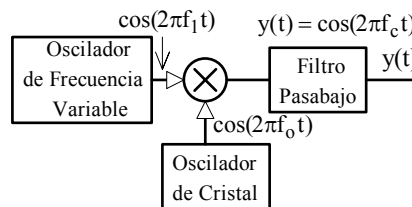


Fig. 6.76.

6.43. Una señal sinusoidal de frecuencia f_m y amplitud unitaria modula una portadora en AM y FM. La potencia de la portadora no modulada es la misma en ambos sistemas. Cuando se modula, la desviación máxima de frecuencia en FM es cuatro veces el ancho de banda en AM. La amplitud de las componentes separadas en $\pm f_m$ de la portadora es la misma en ambos sistemas.

Demuestre que el índice de modulación en FM es 8 y en AM es del 47%.

6.44. La señal $m(t) = 5\text{sinc}^2(5 \times 10^3 t)$ se aplica a un modulador FM de banda angosta. La potencia de la portadora sin modular es de 50 W, la constante de desviación de frecuencia es 10^3 y la frecuencia de portadora es de 10 kHz.

Calcule y dibuje el espectro de la señal FM modulada en banda angosta.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.45. Sea el sistema FM de la Fig. 6.77, donde

$$m(t) = 20 \sin^2(10^4 \pi t) .$$

La señal modulada $x_c(t)$ tiene una potencia de 50 W y un índice de modulación de 10. El filtro de salida tiene ganancia unitaria, ancho de banda de 70 kHz y está centrado en el espectro transmitido.

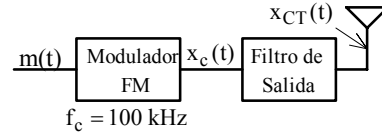


Fig. 6.77.

(a) Demuestre que: $A_c = 10$; $f_d = 10^4$ Hz/V y $\langle x_{CT}^2(t) \rangle = 10,05$ W .

(b) Dibuje el espectro de la señal transmitida indicando los valores de amplitud y frecuencia.

6.46. Demuestre que en modulación PM: $\Delta\phi = k_p |m(t)|_{\max}$ y $\Delta f = \frac{k_p}{2\pi} \left| \frac{d}{dt} m(t) \right|_{\max}$, y si la modulación es sinusoidal con $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$, entonces,

$$\beta_p = k_p A_m = \Delta\phi \quad \text{y} \quad \Delta f = k_p f_m A_m$$

6.47. La señal $m(t) = 10 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - 2n)$ se aplica a un modulador FM, donde $A_c = 10$, $f_c = 10$ kHz, y $f_d = 10^3$ Hz/V.

(a) Dibuje la forma de la señal modulada FM, indicando los valores exactos de las amplitudes y frecuencias.

(b) Demuestre que el ancho de banda aproximado de la señal FM, de acuerdo con la expresión (6.111), es de 10 kHz.

6.48. Consideremos el modulador del problema anterior como la etapa de banda angosta de un modulador Armstrong para Radiodifusión Comercial, Fig. 6.38. La portadora de transmisión es de 100 MHz y el ancho de banda máximo es de 200 kHz. Si la frecuencia máxima de $m(t)$ es de 10 kHz, y su amplitud máxima de 10, demuestre, utilizando la Regla de Carson,

(a) Que el factor de multiplicación del multiplicador de frecuencia es $n = 9$.

(b) Que la frecuencia del mezclador $f_{OL} = 99,91$ MHz y la relación de desviación de la señal transmitida es $\Delta = 9$.

6.49. A un modulador PM se le aplica la señal $m(t)$ de la Fig. 6.78. La constante de desviación de fase es 6π y la frecuencia de portadora de 10 kHz.

(a) Dibujar la frecuencia instantánea en función del tiempo.

(b) Demuestre que el ancho de banda aproximado de la señal PM es $B = f_{\max} - f_{\min} = 2$ kHz

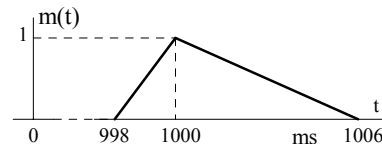


Fig. 6.78

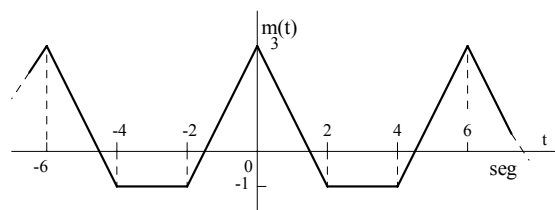
6.50. En un sistema FM demuestre que si la señal moduladora se integra antes de aplicarla al modulador, la desviación de fase instantánea sale multiplicada por t . Demuestre también que en este caso la señal moduladora $m(t)$ no podrá recuperarse de la señal modulada FM

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.51. En un transmisor FM la potencia de la portadora sin modular es de 50 W y su frecuencia de 100 kHz. El mensaje es sinusoidal de frecuencia 4 kHz y la desviación de frecuencia máxima de 40 kHz. El filtro de transmisión tiene ganancia unitaria.

- Demuestre que el ancho de banda del filtro de transmisión, a fin de que la potencia de la señal transmitida sea aproximadamente el 50% de la potencia de la señal modulada, es $56 \text{ kHz} \leq B < 64 \text{ kHz}$
- Dibuje el espectro de la señal transmitida indicando los valores de amplitud y frecuencia.

6.52. La señal $m(t)$ de la Fig. 6.79 se aplica a un modulador FM donde $f_c = 1 \text{ kHz}$ y $f_d = 200 \text{ Hz/V}$.



- Determine el valor pico a pico de la desviación de frecuencia
- Dibuje en forma aproximada la señal modulada pero mostrando las características de la señal e indicando los valores de interés.

6.53. En un receptor FM se ha recibido la señal $x_{cr}(t) = \cos \left[2\pi \times 10^6 t + 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda \left(\frac{t - 2 \times 10^{-2} n}{10^{-2}} \right) \right]$

La función de autocorrelación del ruido en antena es $R_n(\tau) = 2 \times 10^{-4} \text{sinc}^2(2 \times 10^6 \tau)$.

El amplificador de RF tiene una ganancia de tensión de 10, siendo la constante del discriminador $k_D = \pi$. La constante de desviación de frecuencia del transmisor es de 100 Hz/V.

- Demuestre que $m(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(100\pi n t)}{n\pi}$ para n impar
- Demuestre que el ancho de banda del amplificador de RF es de 200 Hz y que la potencia de ruido a su salida es de -26,99 dBm
- Suponiendo que el ancho de banda de $m(t)$ es de 200 Hz, demuestre que $\frac{S_o}{N_o} = 61,31 \text{ dB}$

6.54. La señal $m(t) = 2 \cos(2\pi \times 10^3 t) + 3 \cos(6\pi \times 10^3 t) + \text{sen}(2\pi \times 10^3 t) \text{sen}(10^4 \pi t)$ se aplica a un modulador FM cuya constante de desviación de frecuencia es igual a 10^4 Hz/V .

Demuestre que el ancho de banda de la señal modulada, de acuerdo con la Regla de Carson, es de 112 kHz.

6.55. La señal $m(t) = 5 \left[\Pi \left(\frac{t-1}{2} \right) - \Pi \left(\frac{t-3}{2} \right) \right]$ se aplica a un modulador FM cuya constante de desviación de frecuencia es de 10 Hz/V. La potencia de la señal modulada FM es de 800 W.

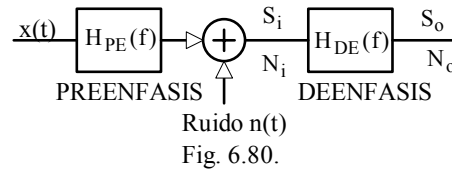
- Determine la amplitud de la portadora
- Demuestre que la desviación de fase es $\phi(t) = 200\pi \Lambda \left(\frac{t-2}{2} \right)$

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

(c) Demuestre que el ancho de banda aproximado de la señal es de 100 Hz.

6.56. Para cuantificar el efecto de las redes de preénfasis y deénfasis consideremos, por ejemplo, el sistema de la Fig. 6.80, donde

$$x(t) = 6\cos(6 \times 10^3 \pi t) + 4\cos(12 \times 10^3 \pi t) + 2\cos(2 \times 10^4 \pi t)$$



$$y \quad n(t) \Rightarrow S_n(f) = 10^{-6} \exp(10^4 |f|) \text{ W / Hz}$$

El sistema es pasabajo de ancho de banda $B = 10$ kHz. La respuesta de frecuencia del filtro $H_{DE}(f)$ se diseña para aplanar la densidad espectral de ruido a su entrada, dentro de la banda de paso del sistema, de manera que la densidad espectral a su salida sea $S_{no}(f) = 10^{-6} \text{ W / Hz}$. Este tipo de filtro se denomina “filtro de blanqueo”.

(a) Demuestre que las funciones de transferencia de los dos filtros son, respectivamente,

$$H_{PE}(f) = \exp(5 \times 10^{-5} |f|) \Pi\left(\frac{f}{2 \times 10^4}\right) \quad y \quad H_{DE}(f) = \exp(-5 \times 10^{-5} |f|) \Pi\left(\frac{f}{2 \times 10^4}\right)$$

(b) Demuestre que $\left[\frac{S_i}{N_i} \right]_{dB} = 32,851 \text{ dB}$ y $\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{dB} = 31,46$

Nótese que esta técnica produce, en el presente ejemplo, un desmejoramiento de 1,39 dB.

6.57. En un sistema DSB es necesario que la relación S/N de postdetección sea de 20 dB. El mensaje es sinusoidal de amplitud unitaria y frecuencia 2 kHz, y la densidad espectral de ruido blanco es de 10^{-4} W / Hz .

(a) Demuestre que la amplitud de la portadora es $A_r = 12,65 \text{ V}$.

(b) Si la transmisión es en AM con un índice de modulación del 80%, demuestre que la relación entre las potencias S_{iAM} y S_{iDSB} para producir la misma relación S/N de postdetección es $S_{iAM} = 4,125 S_{iDSB}$.

6.58. Se recibe la señal DSB $x_{DSB}(t) = A_r m(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$ junto con ruido blanco pasabanda de la forma $n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_c) - n_s(t) \sin(2\pi f_c t + \phi_c)$. El mensaje $m(t)$ es de banda limitada f_m y la densidad espectral del ruido es $\eta/2 \text{ W/Hz}$.

La combinación $[x_{DSB}(t) + n(t)]$ se aplica a un detector coherente cuyo oscilador produce la señal $2\cos(2\pi f_c t + \phi_o)$.

Demuestre que la relación S/N de postdetección es $\left[\frac{S_o}{N_o} \right]_{\Delta\phi} = \cos^2(\Delta\phi) \left[\frac{S_o}{N_o} \right]$ donde

$\Delta\phi = \phi_c - \phi_o$ es el error total de fase y $[S_o/N_o]$ es la relación S/N de postdetección en caso de detección sincrónica perfecta, expresión (6.181).

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.59. Una portadora de frecuencia f_c y amplitud 8 es modulada en AM por un tono de 1 kHz y amplitud A_m siendo el índice de modulación del 25%. El ruido blanco pasabanda tiene una densidad espectral de 2×10^{-9} W/Hz. La demodulación es coherente, pero antes de la demodulación, la señal AM y el ruido se pasan por un filtro cuya función de transferencia se muestra en la Fig. 6.81.

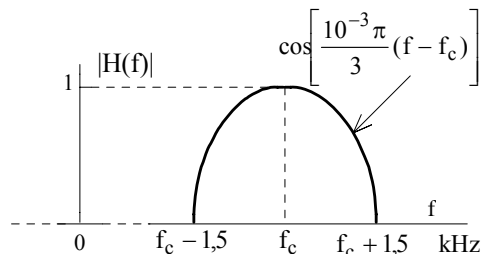


Fig. 6.81.

Demuestre que

$$S_o = 26,99 \text{ dBm} \quad \text{y} \quad N_o = -22,476 \text{ dBm}$$

6.60. Demuestre que para que las relaciones S/N de postdetección sean iguales en FM y PM, debe verificarse que $\beta_{FM} = \frac{\beta_{PM}}{\sqrt{3}}$.

$$\beta_{FM} = \frac{\beta_{PM}}{\sqrt{3}}.$$

6.61. En recepción AM se requiere que la relación S/N de postdetección sea de 30 dB. La señal modulante es un tono de amplitud unitaria y frecuencia f_m . El índice de modulación es del 80% y la densidad espectral del ruido blanco es de 10^{-8} W/Hz.

(a) Demuestre que $A_r = 1,25 \text{ V}$ y $f_m = 12,5 \text{ kHz}$

(b) Demuestre también que la ganancia de conversión es de 0,4848 y que el rendimiento de transmisión es del 24,24%.

6.62. En un receptor FM se recibe una señal FM donde $f_c = 100 \text{ Hz}$; $f_d = 2 \text{ Hz/V}$; $A_r = 8 \text{ V}$ y

$$k_d = 1 \text{ rad/Hz}; \quad m(t) = 8[\Pi(t - 1/2) - \Pi(t - 3/2)] * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n).$$

El ruido a la entrada está caracterizado por su función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = 8\text{sinc}^2(20\tau)\cos(200\pi\tau)$$

(a) Demuestre (analíticamente o gráficamente) que la desviación instantánea de fase es

$$\phi(t) = 32\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda(t - n) \quad \text{para } n \text{ impar}$$

(b) Demuestre, utilizando el criterio de Carson, que si la máxima frecuencia significativa de $m(t)$ es de 4 Hz, el ancho de banda de la señal modulada FM es de 40 Hz.

(c) Grafique la densidad espectral de ruido $S_{no}(f)$ a la salida del sistema

(d) Demuestre que las potencias de señal y de ruido a la salida del receptor son, respectivamente, $S_o = 243,1 \text{ W}$ y $N_o = 0,2267 \text{ W}$.

VI. MODULACION Y TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

6.63. Sea el receptor AM de la Fig. 6.82.

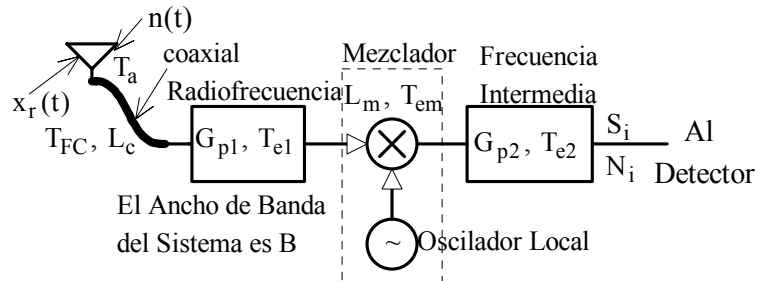


Fig. 6.82.

T_{FC} es la temperatura física del cable coaxial y L_c su constante de pérdidas. Las otras temperaturas son temperaturas efectivas. El ruido exterior $n(t)$ es blanco de densidad espectral $\eta/2$.

El mezclador se considera como una red atenuadora de pérdidas L_m y temperatura efectiva T_{em}

Demuestre que a la entrada del detector las potencias de ruido y de señal son, respectivamente,

$$N_i = \frac{G_{p1}G_{p2}}{L_c L_m} k \left[T_a + \frac{\eta}{k} + (L_c - 1)T_{FC} + L_c T_{e1} + \frac{L_c}{G_{p1}} (T_{em} + L_m T_{e2}) \right] B$$

$$\text{y} \quad S_i = \frac{G_{p1}G_{p2}}{L_c L_m} < x_r^2(t) >$$

APÉNDICE A

CÁLCULO NUMÉRICO DE LAS SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

A.1. CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Los coeficientes de Fourier dados por las expresiones (1.31), (1.32) y (1.42), se pueden determinar en forma aproximada mediante cálculo numérico, el cual se puede efectuar en forma veloz mediante computadoras. Esto es de especial importancia cuando no se conoce la ecuación explícita de la señal $x(t)$, cuando hay que variar algunos de sus parámetros o también cuando sólo se dispone de ella una serie de valores numéricos. Actualmente se consigue en el mercado toda una gama de paquetes de programas de computación para la resolución de los Coeficientes y Transformadas de Fourier, pero todos están basados en mayor o menor grado en los métodos que veremos en este Apéndice.

Tomemos, por ejemplo, el coeficiente a_k dado por la expresión (1.31),

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt; \quad f_0 = \frac{1}{T} \quad (\text{A.1})$$

donde $x(t)$ es una señal periódica de período T .

Supongamos que $x(t)$ ha sido muestreada uniformemente y se ha tomado N muestras sobre un período T con un intervalo de muestreo Δt . Este intervalo debe ser, como máximo, igual al intervalo de Nyquist. Aproximando la expresión (A.1) como una serie de rectángulos de base Δt y amplitud $x(n\Delta t)$ (Regla de Simpson), se puede escribir

$$a_k \approx \frac{2}{T} \sum_{n=1}^N x(n\Delta t) \cos(2\pi k \frac{1}{T} n\Delta t) \cdot \Delta t$$

Puesto que $T = N\Delta t$ o $\Delta t = \frac{T}{N}$, entonces

$$a_k \approx \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n\Delta t) \cos(2\pi \frac{nk}{N}) \quad (\text{A.2})$$

La magnitud de la componente continua se obtiene para $k = 0$. En efecto,

$$a_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n\Delta t) \quad (\text{A.3})$$

El cálculo se efectúa en términos de los números enteros n (la escala de tiempo) y k (la escala de frecuencia). Asimismo, para el coeficiente b_k ,

$$b_k \approx \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n\Delta t) \sin(2\pi \frac{nk}{N}) \quad (\text{A.4})$$

y de la expresión (2.40),

$$X_k = a_k - jb_k \approx \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x(n\Delta t) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N}) \quad (\text{A.5})$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots, N$, es el orden de las muestras

$k = 0, 1, 2, \dots, K-1$, es el orden de las armónicas

La frecuencia fundamental es aquella para la cual $k = 1$.

El espectro discreto $|X_k|$ exhibe una periodicidad de período N y sus componentes discretas tienen una separación $\Delta f = 1/N\Delta t$. Entre $\frac{N}{2} < k \leq N$, se invierten las frecuencias del espectro y aparece un solapamiento producido por el muestreo con la consiguiente distorsión de solapamiento, como se puede observar en la Fig. 5.15 del Capítulo V. Sin embargo, la cantidad de distorsión de solapamiento se puede disminuir aumentando la cantidad N de muestras (disminución de Δt). Puesto que el espectro de interés es aquel para el cual $K \leq N/2$, no es necesario tomar más de $N/2$ armónicas.

♣ Ejemplo A.1.

Vamos a determinar el espectro aproximado de una señal sinusoidal de frecuencia f_c Hz a partir de N muestras tomadas en un período T de la señal. Sea entonces,

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t); \quad x(t) \text{ es una señal par}$$

$$\text{Al muestrear la señal se obtiene} \quad x(n\Delta t) = \cos(2\pi f_c n\Delta t)$$

$$\text{pero } N\Delta t = T = \frac{1}{f_c}, \quad \text{de donde } \Delta t = \frac{1}{Nf_c}$$

$$x(n\Delta t) = \cos\left(2\pi f_c \frac{n}{Nf_c}\right) = \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \quad \text{y} \quad X_k \approx \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \cos\left(2\pi \frac{nk}{N}\right)$$

Sea $N = 12$ muestras. Al efectuar los cálculos en una computadora (utilizando el programa MATHCAD) obtenemos los espectros mostrados en la Fig. A.1.

En la Fig. A.1(a) se muestra el espectro aproximado de $x(t)$ para $K = 6$. En la Fig. A.1(b) se puede notar la periodicidad del espectro y el solapamiento producido cuando se toma $K = N = 12$ armónicas. No es necesario entonces calcular $N = K$ puntos de muestra del espectro a menos que se quiera observar las frecuencias negativas (aquellas vistas desde $k = N$ hacia atrás).

En la Fig. A.1(a) se muestra también la transformada exacta de un ciclo de $x(t)$ cuando $f_c = 1$. Nótese la dispersión del lóbulo principal alrededor de la frecuencia $f_c = 1$; si se integrara $x(t)$ para todo t , el espectro degeneraría en un impulso de Dirac en la frecuencia $f = 1$.

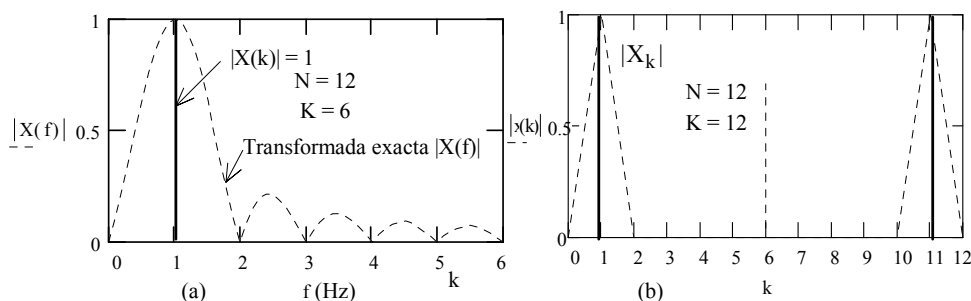


Fig. A.1.

♣

A.2. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Consideremos una señal continua $x(t)$ de banda limitada f_m , de la cual solamente se dispone de N muestras tomadas a intervalos Δt que cumplen con el Teorema del Muestreo de Shannon. Sea $x(n\Delta t)$ esta secuencia discreta, donde $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

La **Transformada de Fourier Discreta** (Discrete Fourier Transform, **DFT**) de la secuencia discreta $x(n\Delta t)$ se define en la forma

$$\text{DFT}\{x(n\Delta t)\} = X(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \exp(-j2\pi k\Delta f n\Delta t) \quad (\text{A.6})$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$

Si las N muestras se han tomado durante un tiempo T , entonces $T = N \Delta t$, y puesto que los intervalos se toman, como máximo, a la frecuencia de Nyquist, entonces $\Delta t = 1 / 2f_m$. Por otra parte, un análisis numérico impone un muestreo de Shannon aplicado a la transformada inversa. Esto permite establecer el valor máximo de la separación entre dos valores de frecuencia o “resolución”. En efecto, sea Δf la separación o resolución del espectro; entonces,

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}, \quad \text{de donde} \quad \Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{De la misma manera, } n\Delta t = \frac{n}{N\Delta f} \quad \text{y} \quad k\Delta f = \frac{k}{N\Delta t}$$

La expresión que define la DTF será entonces

$$X(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \exp(-j2\pi \frac{nk}{N}) \quad (\text{A.8})$$

Esta expresión representa el valor de la componente de orden k del espectro de $x(n\Delta t)$.

Sea r un entero cualquiera; si en (A.8) se reemplaza k por $rN - k_0$, y si $k = k_0$. Módulo N , se puede verificar que $X(k\Delta f)$ es una función periódica de período N y

$$X(k\Delta f) = X(k_0\Delta f) = X[(k + N)\Delta f] \quad (\text{A.9})$$

Si $x(n\Delta t)$ es real, se puede constatar que si se reemplaza k por $N - k$ se obtiene

$$X(k\Delta f) = X^*[(N - k)\Delta f] \quad (\text{A.10})$$

con lo cual confirmamos la periodicidad N de la DFT.

Veamos ahora el número de puntos K necesarios para representar el espectro $X(k\Delta f)$.

En la Fig. A.2 se muestra el espectro $X(f)$ de $x(t)$. Si se toma K puntos de frecuencia separados en Δf , vemos que $f_m = K\Delta f$, y del teorema de Shannon, $f_m = 1 / 2\Delta t$. f_m es la frecuencia máxima que queremos observar.

Como $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$, entonces $\frac{K}{N\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}$, de donde $K = N/2$

$$(\text{A.11})$$

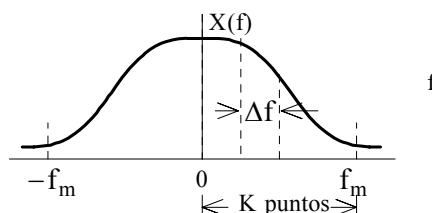


Fig. A.2. Espectro Continuo $X(f)$

Por consiguiente, N puntos definidos en el dominio del tiempo permiten definir $K = N/2$ puntos en el dominio de la frecuencia.

Puesto que se verifica, según la expresión (A.9), que $X(k\Delta f) = X[(k+N)\Delta f]$, esto significa que $X(k\Delta f)$ es periódica de período N , e igual que en el caso del cálculo de los coeficientes de Fourier, la DFT exhibe una periodicidad de período N y sus componentes discretas tendrán una separación o resolución $\Delta f = 1/N\Delta t$. Puede aparecer un solapamiento entre los espectros desplazados, pero este solapamiento se puede disminuir aumentando la cantidad N de muestras (disminución de Δt), y puesto que el espectro de interés es aquel para el cual $0 \leq k \leq N/2$, no es necesario calcular más de $N/2$ componentes de frecuencia. En la Fig. A.3 se muestra la DFT correspondiente a la transformada de Fourier de la Fig. A.2 cuando se calcula con $N/2$ y N términos de frecuencia, respectivamente.

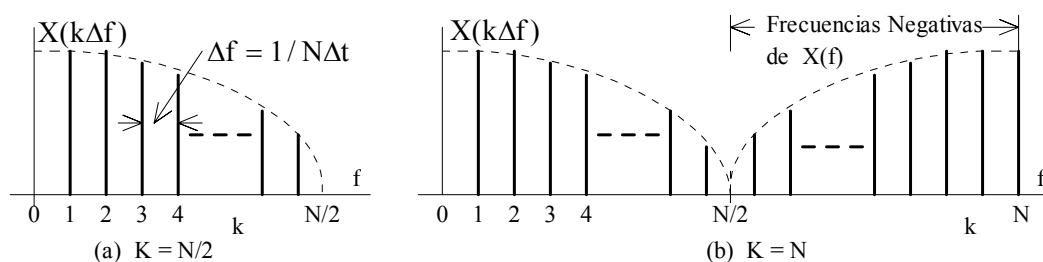


Fig. A.3. Transformada de Fourier Discreta

Nótese que si se aumenta el número de muestras N manteniendo Δt constante, el perfil o envolvente de $X(k\Delta f)$ no varía, pero mejora la resolución (Δf se hace más pequeño) pues aumenta el número de componentes de frecuencia. En la práctica siempre se desea una resolución Δf apropiada a la aplicación; tomando como límite el intervalo de Nyquist Δt , el número de muestras necesario será $N = 1/\Delta t\Delta f$.

Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, expresión (A.5), se pueden calcular utilizando la DFT y luego se multiplica por $2/N$. La máxima componente de frecuencia que se puede determinar corresponde entonces a $k = N/2$.

Por analogía con la Transformada de Fourier en el caso continuo, se puede definir la **Transformada de Fourier Discreta Inversa (IDFT)** en la forma

$$\text{IDFT}\{X(k\Delta f)\} = x(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) \exp(j2\pi \frac{nk}{N}) \quad (\text{A.12})$$

Igual que con $X(k\Delta f)$, la secuencia $x(n\Delta t)$ es periódica de período N . Esto es consecuencia del muestreo en frecuencia necesario para obtener $x(n\Delta t)$ a partir de $X(k\Delta f)$.

Las expresiones (A.8) y (A.12) se pueden identificar con el par de transformadas (1.67) y (1.68), y podemos decir que la DFT es una versión muestreada de la transformada de Fourier clásica. En efecto, un cierto número de propiedades son idénticas (simetría, traslación, etc.); sin embargo, es necesario observar que si las cantidades $x(n\Delta t)$ representan las muestras de una señal, el espectro de esta señal se ha tornado periódico a causa del muestreo. De la misma manera, si el espectro $X(k\Delta f)$ se muestrea, la función correspondiente $x(t)$ es reemplazada por una función periódica. Además, es evidente que la duración de $x(t)$ debe limitarse a N veces el período Δt de muestreo. Como consecuencia de estas consideraciones, hay que tomar ciertas precauciones no solamente en la selección de los instantes de muestreo de $x(t)$, sino también en el empleo ulterior del “espectro” $X(k\Delta f)$. En otras palabras, el cálculo exacto de la transformada de Fourier de una señal $x(t)$ muestreada necesitaría un número infinito de muestras y como cada muestra debe estar separada por un intervalo distinto de cero, habría que esperar un tiempo infinito para efectuar el cálculo. Es evidente que el tiempo de observación $T = N\Delta t$ debe limitarse a un valor razonable. Esta restricción está implícita en la expresión (A.8), y puesto que no se dispone de un número infinito de puntos en el tiempo, no se puede calcular los valores de amplitud y fase del espectro en un número infinito de frecuencias comprendidas entre cero y f_m . Equivalentemente, la expresión (A.8) no produce un espectro continuo porque únicamente las funciones continuas poseen un espectro tal. Dicho de otra

manera, la expresión (A.8) supone que la señal observada entre 0 y T segundos es recurrente de período T para $0 \leq t < \infty$, independientemente de si $x(t)$ es o no periódica. Esto es lo que se conoce con el nombre de “efecto instrumental”. En términos más prácticos, la DFT dada por la expresión (A.8) se puede considerar como una serie de Fourier muestreada.

♣ Ejemplo A.2

Consideremos la señal $x(t) = \exp(-t)u(t)$ cuya transformada de Fourier sabemos que es $X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$, siendo su módulo $|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2}}$.

Como ejemplo de aplicación de la DFT, vamos a calcular la DFT de una secuencia muestreada de $x(t)$. Supongamos que deseamos una resolución de 0,1 Hz cuando tomamos $N = 20$ muestras. Se tiene entonces,

$$\text{De (A.7), el intervalo de muestreo es } \Delta t = \frac{1}{N\Delta f} = \frac{1}{20 \cdot 0,1} = 0,5 \text{ seg}$$

La señal muestreada es entonces $x(n\Delta t) = \exp(-jn\Delta t) = \exp(-j0,5n)$ para $n = 0, 1, \dots, 19$.

De (A.8), la correspondiente transformada de Fourier discreta es

$$X(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{19} \exp(-j0,5n) \exp(-j\pi nk / 10)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, 9$

En la Fig. A.4 se muestra la forma de la DFT $X(k\Delta f)$ de $x(n\Delta t)$. Para efectos de comparación, en la Figura se muestra también la transformada exacta $X(f)$ correspondiente.

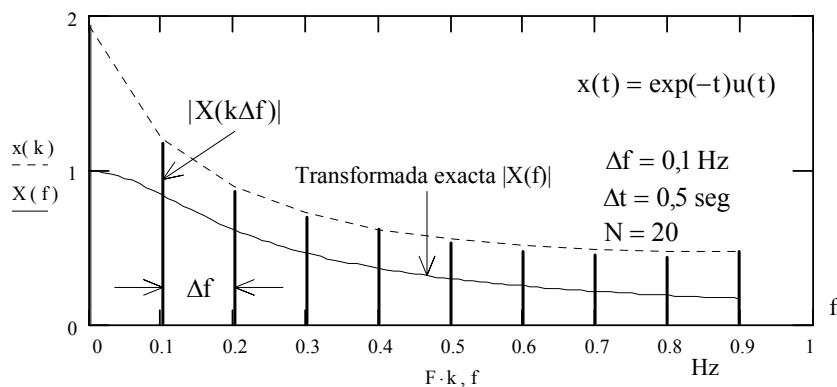


Fig. A.4.

Como el espectro de $x(t)$ decae muy rápidamente, solamente lo calculamos para $f < 1$ Hz. Nótese la diferencia entre las amplitudes de $X(k\Delta f)$ y $X(f)$ para los valores considerados, que puede considerarse razonablemente buena. Si se desea una mayor exactitud, es necesario aumentar el valor de N y disminuir el valor de Δt . Por ejemplo, si queremos una resolución $\Delta f = 0,05$ Hz y aumentamos el número de muestras a $N = 200$, se necesita un intervalo de muestreo $\Delta t = 0,1$ seg y un tiempo de cálculo $T = 20$ seg. En este caso el lector puede verificar que la DFT y la $X(f)$ son casi idénticas. Estos cálculos han sido efectuados con MATHCAD.

♣

Cálculo Directo de Transformada de Fourier Discreta

Hay que considerar primero el problema del cálculo de la DFT en la forma más simple, rápida y directa, atendiendo particularmente al número de operaciones (sumas y multiplicaciones) requerido.

Para calcular la DFT, expresión (A.8), para un valor k suponiendo que la señal $x(t)$ es compleja, se requiere N multiplicaciones complejas y N sumas complejas. Nótese que una multiplicación compleja corresponde a 4 multiplicaciones reales más 2 sumas reales, mientras que una suma compleja corresponde a 2 sumas reales. En consecuencia, para calcular los $K = N/2$ valores de $X(k\Delta f)$ se necesita efectuar un número de operaciones N_{op} igual a

$$N_{op} = N^2[2 \text{ multiplicaciones reales} + 1 \text{ suma real}]$$

Si una operación equivale a $[2 \text{ multiplicaciones reales} + 1 \text{ suma real}]$ y se efectúa en t_d segundos, el tiempo total de cálculo de la DFT es

$$T_c = N^2 t_d$$

Por ejemplo, si $t_d = 10^{-4}$ seg, que es un tiempo razonable en un computadora personal corriente, para $N = 64$ se tendrá que $T_c = 0,41$ seg, pero para $N = 1024$, entonces $T_c = 1,75$ minutos.

Puede observarse que el cálculo directo de la DFT consume mucho tiempo de computación, por lo cual esta forma de cálculo fue poco utilizada hasta que en 1965, Cooley y Tukey [Cooley y Tukey, 1965] publicaron un algoritmo de cálculo de la DFT en que se demostraba que se podía calcular la DFT mediante $N \log_2 N$ operaciones cuando N era una potencia entera de 2. Este algoritmo se conoce con el nombre de “Transformada de Fourier Rápida (Fast Fourier Transform, FFT)” y es el más utilizado en el cálculo numérico de la Transformada de Fourier pues la reducción en tiempo de cálculo es de $N^2/N \log_2 N$ veces, que para $N = 1024$ es de 102,4 veces, es decir, el cálculo mediante la FFT se hace en 1,024 seg en vez de 1,75 minutos que demandaría el cálculo directo. El algoritmo FFT lo veremos a continuación.

A.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER RÁPIDA (FFT)

Algoritmo FFT por Decimación en el Tiempo

Se han desarrollado varios algoritmos FFT, cada uno con sus ventajas y desventajas en términos de programación e instrumentación. Para ilustrar el procedimiento, aquí vamos a considerar solamente el algoritmo FFT conocido como “**Algoritmo FFT por Decimación en el Tiempo**”. La programación e instrumentación de la FFT está fuera de los objetivos del presente texto. El lector interesado puede consultar el texto, clásico ya, “Digital Signal Processing” de Oppenheim y Schafer [Oppenheim y Schafer, 1975].

Para simplificar la notación vamos a definir

$$X(k) = X(k\Delta f); \quad x(n) = x(n\Delta t); \quad W = \exp(-j \frac{2\pi}{N})$$

La expresión (A.8) queda entonces en la forma

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} \quad (A.13)$$

con $k = 1, 2, 3, \dots, N-1$

N es una potencia entera de 2 y para efectos de ilustración del algoritmo vamos a tomar $N = 8$. En este caso, $W^0 = 1$; $W^2 = -j$; $W^4 = -1$; $W^5 = -W$; $W^6 = -W^2 = j$; $W^7 = -W^3$.

El primer paso o etapa es la partición de $x(n)$ en dos partes: $x_a(n)$ para n par y $x_b(n)$ para n impar. $x_a(n)$ y $x_b(n)$ se pueden definir en la forma

$$\begin{aligned}
 x_a(n) &= x(2n) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\
 x_b(n) &= x(2n+1) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$

Puesto que $X(k)$ es de periodicidad N , entonces las DFT de $x_a(n)$ y $x_b(n)$ serán de periodicidad $N/2$.

Consideremos ahora las DFT de $x_a(n)$ y $x_b(n)$:

$$X_a(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_a(n) W^{2nk} \quad \text{para } n \text{ par} \tag{A.15a}$$

$$X_b(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_b(n) W^{(2n+1)k} \quad \text{para } n \text{ impar} \tag{A.15b}$$

$X_a(k)$ y $X_b(k)$ se pueden relacionar con $X(k)$ en la forma

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W^{(2n+1)k}$$

pero $W^{(2n+1)k} = W^k W^{2nk}$

$$\text{entonces, } X(k) = X_a(k) + W^k X_b(k) \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1 \tag{A.16}$$

$X_a(k)$ y $X_b(k)$ son de periodicidad $N/2$, es decir, se verifica que

$$X_a(k) = X_a(k + \frac{N}{2}) \quad \text{y} \quad X_b(k) = X_b(k + \frac{N}{2})$$

La expresión (A.16) nos lleva a la primera etapa en la formación del diagrama de flujo para el cálculo de FFT para $N = 8$, Fig. A.5.

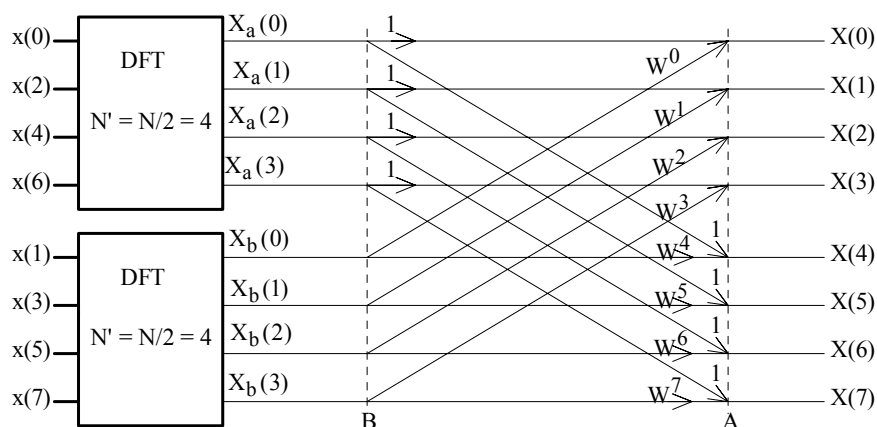


Fig. A.5. Primera etapa en la formación del diagrama de flujo, $N = 8$.

En número total de operaciones (multiplicaciones complejas + sumas complejas) en este caso es

$$2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N \approx \frac{N^2}{2} \quad \text{para } N \text{ grande} \quad (\text{A.17})$$

El término $2(N/2)^2$ corresponde al cálculo de las DFT de $N' = 4$, mientras que el término N es el número de operaciones en la etapa. Vemos que el número de operaciones se ha reducido en aproximadamente la mitad del número de operaciones a efectuar en forma directa (N^2).

Para acortar aún más el tiempo de cálculo, se repite el mismo procedimiento. En efecto, hagamos

$$x_{aa}(n) = x(4n)$$

$$x_{ab}(n) = x(4n + 2)$$

$$x_{ba}(n) = x(4n + 1)$$

$$x_{bb}(n) = x(4n + 3)$$

Nótese que cada una de estas funciones es periódica de periodicidad $N/4$. Asimismo,

$$X_a(k) = X_{aa}(k) + W^{2k}X_{ab}(k) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (\text{A.18})$$

$$X_b(k) = X_{ba}(k) + W^{2k}X_{bb}(k) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \quad (\text{A.19})$$

Ahora podemos desarrollar la segunda etapa del diagrama de flujo hacia la izquierda del punto B de la Fig. A.5. De acuerdo con (A.18) y (A.19), podemos establecer la Fig. A.6.

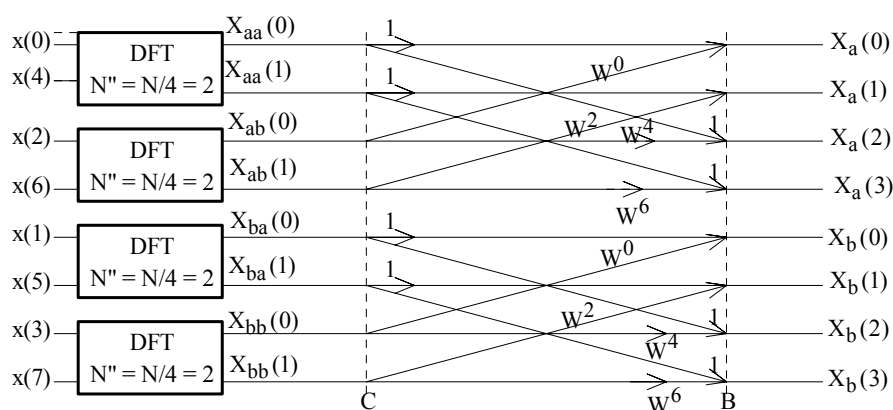


Fig. A.6. Segunda etapa en la formación del diagrama de flujo, $N = 8$.

El número de operaciones ahora requerido es

$$4\left(\frac{N}{4}\right)^2 + N + N = \frac{N^2}{4} + 2N \approx \frac{N^2}{4} \quad \text{para } N \text{ grande} \quad (\text{A.20})$$

Vemos que el número total de operaciones se ha reducido a aproximadamente la cuarta parte.

Finalmente, vamos a tomar un paso adicional, para lo cual hacemos

$$x_{aaa}(n) = x(0)$$

$$x_{baa}(n) = x(1)$$

$$x_{aab}(n) = x(4)$$

$$x_{bab}(n) = x(5)$$

$$x_{aba}(n) = x(2)$$

$$x_{bba}(n) = x(3)$$

$$x_{abb}(n) = x(6)$$

$$x_{bbb}(n) = x(7)$$

Cada una de estas funciones es periódica de período $N/8$, y en este caso el período es la unidad. Nótese también que

$$X_{aaa}(k) = x_{aaa}(0)W^0 = x(0) \quad \text{para } k = 0$$

$$X_{aab}(k) = x_{aab}(0)W^0 = x(4) \quad \text{para } k = 0$$

$$X_{aba}(k) = x_{aba}(0)W^0 = x(2) \quad \text{para } k = 0$$

.....

$$X_{bbb}(k) = x_{bbb}(0)W^0 = x(7) \quad \text{para } k = 0$$

En consecuencia, la DFT de un punto de función es la función misma.

Los valores de $X_{aa}(k)$, $X_{ab}(k)$, $X_{ba}(k)$ y $X_{bb}(k)$ se pueden calcular en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} X_{aa}(k) &= x(0) + W^{4k}x(4) & k = 0, 1 \\ X_{ab}(k) &= x(2) + W^{4k}x(6) & k = 0, 1 \\ X_{ba}(k) &= x(1) + W^{4k}x(5) & k = 0, 1 \\ X_{bb}(k) &= x(3) + W^{4k}x(7) & k = 0, 1 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Las expresiones (A.21) nos permiten establecer el diagrama de flujo de la Fig. A.7.

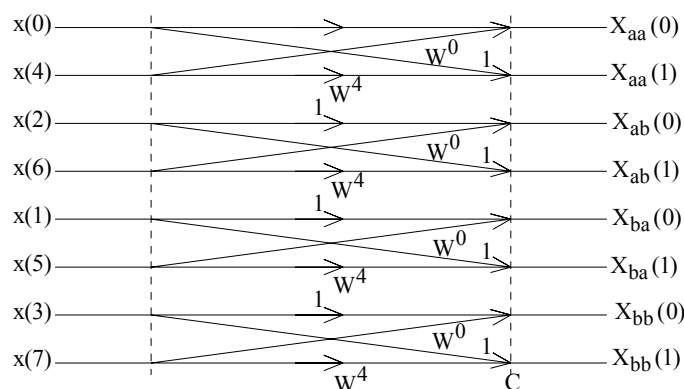


Fig. A.7. Tercera etapa en la formación del diagrama de flujo. $N = 8$.

Vemos que la DFT de 8 puntos se ha reducido al cálculo de cuatro DFT de dos puntos. Por ejemplo, el diagrama de flujo de la DFT de los puntos $x(0)$ y $x(4)$ se muestra en la Fig. A.8. Debido a su forma, estos diagramas se denominan “mariposas” y constituyen las células de base para el cálculo de la FFT.

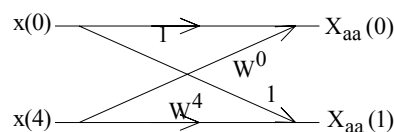


Fig. A.8. DFT de dos puntos.

Nótese que cada uno de los diagramas anteriores contiene cuatro mariposas; en general, si la FFT es para N puntos, cada diagrama parcial tendrá $N/2$ mariposas. Asimismo, para $N = 8$ puntos, se tiene tres etapas o subdiagramas de flujo, es decir, $\log_2 N$ etapas. Las flechas de las mariposas se pueden interpretar como multiplicaciones complejas, mientras que sus nodos son sumas complejas; por lo tanto, para el cálculo de cada mariposa se necesita dos multiplicaciones complejas y dos sumas complejas. Sin embargo, el número de multiplicaciones se puede reducir a la mitad puesto que $W^4 = -W^0 = -1$, $W^5 = -W$; $W^6 = -W^2 = j$ y $W^7 = -W^3$.

En la Fig. A.9 se muestra el diagrama de flujo completo para la determinación de la FFT con $N = 8$. Nótese que fueron tres las etapas necesarias para la construcción completa del diagrama de flujo para $N = 8$. En general, si N es el número de puntos de la señal, el número de etapas o

subdiagramas necesario para establecer el diagrama de flujo completo de la FFT será $N_p = \log_2 N$ y $N \log_2 N$ el número de mariposas. Asimismo, será necesario efectuar $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplicaciones complejas y $N \log_2 N$ sumas complejas.

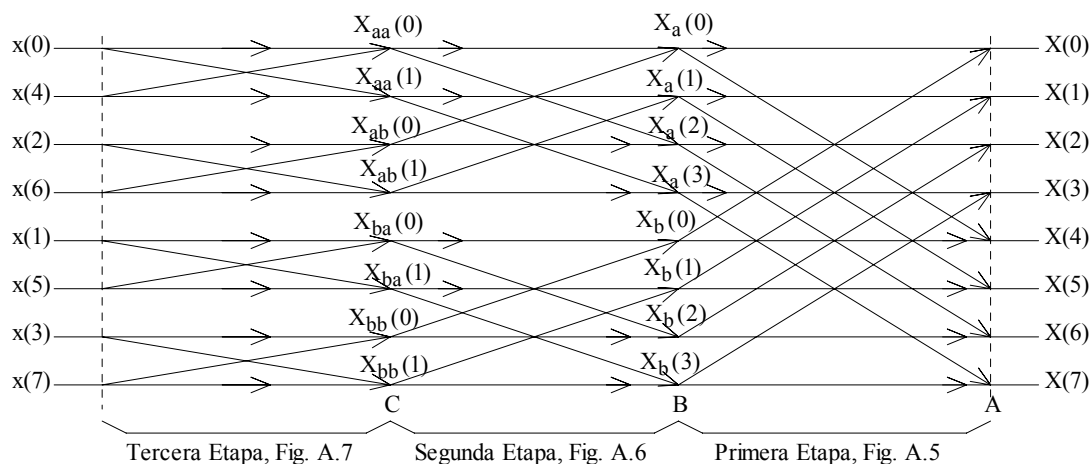


Fig. A.9. Diagrama de Flujo completo del Algoritmo FFT con Decimación en el Tiempo, para $N = 8$.

Sea N_{op} el número de operaciones requerido para calcular la FFT. De acuerdo con las consideraciones establecidas más arriba, se tiene

$$N_{op} = \frac{N}{2} \log_2 N \cdot [\text{multiplicaciones complejas}] + N \log_2 N \cdot [\text{sumas complejas}]$$

pero como una multiplicación compleja equivale a 4 multiplicaciones reales y dos sumas reales, mientras que una suma compleja equivale a dos sumas reales, el número de operaciones será

$$N_{op} = N \log_2 N \cdot [2 \text{ multiplicaciones reales} + 3 \text{ sumas reales}]$$

El tiempo total de cálculo de la FFT será entonces

$$T_c = N \log_2 N \cdot t_d$$

donde t_d es el tiempo de máquina para computar las dos multiplicaciones reales y las tres sumas reales.

Si el tiempo t_d es aproximadamente igual al tiempo de cálculo de la DFT, hay entonces una reducción de $N^2/N \log_2 N$ veces en el tiempo de computación de la FFT respecto a la DFT.

La FFT se ha convertido en una de las herramientas más poderosas en el Análisis Espectral de Señales y en la Teoría de los Filtros Digitales. Todos los programas de cálculo digital contienen rutinas para el cálculo de la FFT y no se requiere conocimientos avanzados del análisis espectral para utilizarlos; sin embargo, las siguientes consideraciones pueden ser de utilidad en el procesamiento de señales continuas mediante la FFT.

1. El número de muestras N debe ser una potencia entera de 2, es decir, $N = 2^p$, donde p es un número entero. Cuando N no es una potencia entera de 2, los programas usuales insertan ceros en las secuencias $x(n\Delta t)$ hasta que N es una potencia entera de 2.
2. N muestras en el dominio del tiempo definen N frecuencias discretas en el dominio de la frecuencia. Compárese con la DFT donde N muestras en el tiempo determinan $N/2$ valores en frecuencia. La resolución de la FFT es superior a la de la DFT.

3. Como resultado de la extensión periódica, los puntos de muestra 0 y N son idénticos en ambos dominios.
4. Se considera como componentes de frecuencia positivas las que caen en el intervalo $(0, N/2)$, y como negativas aquellas que caen en el intervalo $(N/2, N)$.
5. Para señales reales, las componentes de frecuencia positivas son el conjugado de las componentes de frecuencia negativas.
6. La separación mínima entre dos componentes de frecuencia, de una secuencia dada, puede disminuirse agregando ceros a la secuencia hasta que el número de puntos total (incluyendo los ceros agregados) sea de nuevo una potencia entera de 2.
7. La FFT puede emplearse para calcular DFT's inversas. Para ello, la entrada del algoritmo debe ser la conjugada de la transformada.

A continuación damos algunas aplicaciones de la FFT en el procesamiento de señales:

- o Deconvolución
- o Análisis espectral en tiempo real
- o Análisis del Cepstrum
- o Estimaciones de funciones de transferencia
- o Análisis de sistemas
- o Moduladores y Demoduladores (Orthogonal Frequency Division Multiplex, OFDM)
- o Filtros digitales de alta velocidad
- o Compresión del ancho de banda de video
- o Restauración de imágenes

Finalmente, hay que tener presente que la FFT no es un fin en sí misma sino un medio: el fin es el cálculo numérico de la Transformada de Fourier de una señal, y la FFT es el medio de lograrlo en la forma más eficiente y rápida posible.

APÉNDICE B

ESTÁNDARES DE TELEVISIÓN Y RADIODIFUSIÓN DIGITALES

B.1. INTRODUCCIÓN

Los estándares de televisión y radiodifusión digitales son el conjunto de principios técnicos acordados para el uso digital del espectro radioeléctrico. Es el requisito básico para iniciar la transmisión de radio y televisión en un área geográfica, ya que todo el ciclo de transmisión y recepción debe estar acorde con un estándar definido. Por tanto, los receptores y transmisores, decodificadores, consolas y demás implementos de transmisión y recepción, además del software, deben compartir el mismo lenguaje, estándar o característica tecnológica que permita una intercomunicación con éxito.

Aunque muchas de las características técnicas sean compartidas tanto en radiodifusión como en televisión, en el escenario mundial han emergido dos conjuntos separados de estándares en el área de las telecomunicaciones digitales:

- (a) Los Estándares Internacionales de Televisión Digital
- (b) Los Estándares Internacionales de Radiodifusión Digital

En este Apéndice haremos un breve recorrido en estas dos áreas, dando una breve descripción de los sistemas. Pero siendo éste un texto de principios de las comunicaciones, se dará primordial importancia al sistema de modulación y multiplexado conocido con el nombre de Multiplicidad por División de Frecuencia Ortogonal (Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM), empleado en todos los sistemas de transmisión digitales, excepto el estándar norteamericano (ATSC). Comenzaremos nuestra exposición con una introducción al sistema OFDM, en la cual se resume una gran parte de los principios de las comunicaciones que hemos estudiado a lo largo del presente texto.

B.2. LA MULTIPLICIDAD POR DIVISIÓN DE FRECUENCIA ORTOGONAL

B.2.1. Introducción

La multiplicidad OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) es una técnica en telecomunicaciones que divide un canal de banda ancha, Fig. B.1(a), en un número de subportadoras o subcanales de banda angosta igualmente espaciados, como se muestra en la Fig. B.1(b) en el caso de 5 subportadoras.

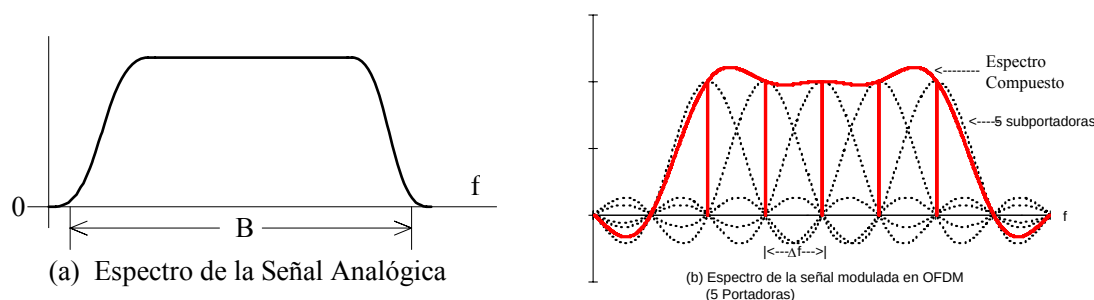


Fig. B.1. Espectros de Entrada-Salida en OFDM

La OFDM se utiliza para la transmisión de señales de radiodifusión y televisión digitales. La idea es usar un gran número de subportadoras o canales de banda angosta en vez de una sola portadora o canal de banda ancha.

Las técnicas COFDM (Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing) y DTM (Discrete Multi-Tone Multiplexing) son formas de la técnica OFDM utilizadas en algunos de los estándares europeos que son esencialmente idénticas a OFDM con algunas diferencias en su instrumentación.

En la Fig B.2 se muestra el esquema de base de la modulación OFDM.

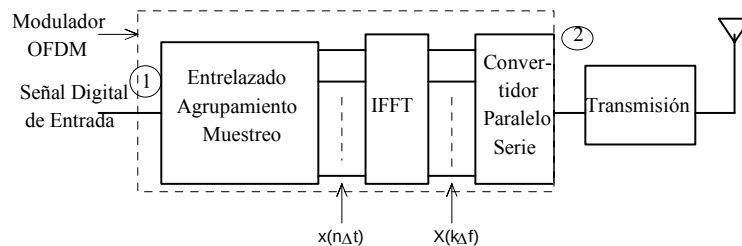


Fig. B.2. Principio de la Modulación OFDM

La señal digital de entrada es una secuencia de estados **0** ó **1**, de duración T_s , que llevan la información. Cada estado lleva un bit de información. El bloque de entrelazado, agrupamiento y muestreo (interleaving, mapping and sampling) entrelaza los estados de entrada produciendo N secuencias (subportadoras) de estados entrelazados que son agrupados en subsecuencias de 2^M estados ($M = 1, 2, 3, \dots$). Por ejemplo, para $M = 2$ cada subsecuencia contendrá 4 estados, 4 bits de información y una duración T_b . La subportadora será simplemente una serie de subsecuencias de duración T_b .

Las subsecuencias se muestrean cada Δt segundos con N muestras sobre la duración T_b de la subsecuencia, tal que $N\Delta t = T_b$. Son N muestras $x(n\Delta t)$ que se aplican al operador IFFT. A la salida del operador IFFT se tiene un conjunto de N señales sinusoidales o subportadoras de amplitud $X(k\Delta f)$ y frecuencia $(f_0 + k\Delta f)$ con $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, donde $\Delta f = 1/T_b$. El Convertidor Paralelo Serie toma estas señales y las convierte en un flujo serie cuyo espectro tiene la forma dada en la Fig. B.1(b) en el caso de 5 subportadoras. En el extremo de recepción se lleva a cabo el proceso inverso.

En resumen, en el punto 1, Fig. B.2, se tiene una señal digital correspondiente a una señal analógica de ancho de banda B , mientras que en el punto 2 se tiene un conjunto de N subcanales o subportadoras de ancho de banda $B/(N+1)$. Esto lo demostraremos a continuación.

B.2.2. Bases Teóricas de OFDM

Matemáticamente, cada subportadora se puede describir como una señal compleja de la forma

$$x(t) = A_c(t) \exp[j(\omega_c t + \varphi_c(t))] \quad (B.1)$$

La señal real es la parte real de $x(t)$. Tanto la amplitud $A_c(t)$ como la fase $\varphi_c(t)$ varían en las diferentes subsecuencias, pero dentro de una subsecuencia de período T_b son constantes.

Como OFDM consiste de muchas subportadoras, la señal compleja mostrada en la Fig. B.1(b) se puede representar mediante la expresión

$$x_s(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m(t) \exp[j(\omega_m t + \varphi_m(t))] \quad (B.2)$$

N es el número de subportadoras; $\omega_m = \omega_0 + m\Delta\omega$ y $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$

$m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ es el orden de la frecuencia de las subportadoras

Δf es la separación entre las componentes de frecuencia o subportadoras.

Como dentro de un período T_b la amplitud y la fase se pueden considerar constantes, se puede hacer $A_m(t) \Rightarrow A_m$ y $\varphi_m(t) \Rightarrow \varphi_m$.

Si se toman N muestras de la señal $x_s(t)$ durante un tiempo T_b con una frecuencia de muestreo $f_s = 1/\Delta t$, la señal resultante se puede representar en la forma

$$x_s(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m \exp(j\varphi_m) \exp[j(\omega_0 + m\Delta\omega)n\Delta t] \quad (B.3)$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$ es el orden de las muestras en el dominio del tiempo

El muestreo se realiza sobre cada subsecuencia durante un período T_b tomando N muestras de duración Δt ; por lo tanto, $T_b = N \Delta t$.

Sin perder generalidad, podemos simplificar (B.3) haciendo $\omega_0 = 0$, en cuyo caso,

$$x_s(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m \exp(j\varphi_m) \exp[j(2\pi m\Delta f n\Delta t)] \quad (B.4)$$

En esta expresión $A_m \exp(j\varphi_m)$ no es nada más que la definición de la amplitud de la señal muestreada en el dominio de la frecuencia, mientras que $x_s(n\Delta t)$ es la correspondiente representación en el dominio del tiempo.

Consideremos ahora la forma general de la Transformada de Fourier Discreta Inversa (IDFT) [Apéndice A, expresión A.12], que escribiremos en la forma

$$g(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G\left(\frac{k}{N\Delta t}\right) \exp\left[j2\pi \frac{nk}{N}\right] \quad (B.5)$$

N es el número de subportadoras, n el orden de las muestras o amplitudes en el dominio del tiempo y k el orden de las componentes en el dominio de la frecuencia.

Nótese que la estructura de las expresiones (B.4) y (B.5) es muy parecida, de modo que podemos averiguar el grado de equivalencia entre ellas.

Condición de Equivalencia

Las expresiones (B.4) y (B.5) serán equivalentes cuando, con $m = k$,

$2\pi n\Delta f k\Delta t = 2\pi \frac{nk}{N}$, es decir, cuando se verifica que

$$\Delta f \Delta t = \frac{1}{N} \quad (B.6)$$

Esta es la condición de equivalencia a fin de que $x_s(n\Delta t)$ sea una Transformada de Fourier Discreta Inversa. En la práctica se utiliza más bien la Transformada de Fourier Rápida Inversa (IFFT) por las ventajas que tiene sobre la correspondiente IDFT en las aplicaciones.

La amplitud $A_k \exp(j\varphi_k)$ es la componente discreta en el dominio de la frecuencia y de acuerdo con la relación de equivalencia se verifica que

$$A_k \exp(j\varphi_k) \equiv X(k\Delta f) = X\left(\frac{k}{N\Delta t}\right) \quad (B.7)$$

La expresión (B.4) se puede escribir finalmente en la forma

$$x_s(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) \exp\left[j2\pi \frac{nk}{N}\right] \quad (B.8)$$

Nótese que $X(k\Delta f)$ representa la amplitud de la componente de orden k del espectro de $x_s(t)$. Como la DFT impone un muestreo de Shannon aplicado a la Transformada de Fourier Discreta Inversa, entonces $X(k\Delta f)$ representa los valores del espectro de $x_s(t)$ en las frecuencias $(f_0 + k\Delta f)$. En el dominio del tiempo las componentes $X(k\Delta f)$ representarán entonces señales sinusoidales de frecuencia $(f_0 + k\Delta f)$ cuya separación es Δf y cuya duración es T_b .

He aquí la importancia de la OFDM. A la entrada del bloque de entrelazado, agrupamiento y muestreo, punto 1, Fig. B.2, se tiene la señal digital de entrada. El bloque de entrelazado, agrupamiento y muestreo produce entonces un conjunto de componentes $x_s(n\Delta t)$ que a su vez, mediante el operador IFFT, genera un espectro que a las frecuencias $(f_0 + k\Delta f)$ tiene valores discretos $X(k\Delta f)$ y que es transmitido. La separación entre las componentes de frecuencia es Δf . Cada una de estas componentes en el dominio del tiempo es una señal sinusoidal de frecuencia $(f_0 + k\Delta f)$ que dura un tiempo T_b y que el Convertidor Paralelo Serie procesa para su transmisión en serie, punto 2,

Fig. B.2. El modulador OFDM convierte entonces un conjunto de muestras en el dominio del tiempo en un conjunto de señales sinusoidales de frecuencias $(f_0+k\Delta f)$, sin necesidad de disponer de una gran batería de N conversores de frecuencia, filtros, etc., tanto en el lado de transmisión como en el de recepción, que son internamente generados por el operador IFFT.

El conjunto de señales sinusoidales que es transmitido contiene la misma información que la señal digital de entrada.

En la Fig. B.3 se muestra este mecanismo para 4 subportadoras. Tanto a la señal compuesta, Fig. B.3(a), como a su espectro, Fig. B.3(b), generalmente se les denomina “símbolos”. Nótese que las amplitudes de las subportadoras, en general, son diferentes.

Condición de Ortogonalidad

Hasta aquí hemos demostrado la parte “Multiplex” de OFDM, pero todavía no hemos demostrado la “Ortogonalidad” del conjunto de señales sinusoidales transmitidas.

Sea $x_m(t)$ la señal a la salida del Convertidor Paralelo Serie. Puesto que esta señal consta de N señales sinusoidales de duración T_b y amplitud $X(k\Delta f)$, $x_m(t)$ se puede expresar en la forma

$$x_m(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) \exp[j2\pi(f_0+k\Delta f)t] \Pi[(t-T_b/2)/T_b] \quad (B.9)$$

$X(k\Delta f)$ es constante en un intervalo T_b y $(f_0 + k\Delta f)$ es la frecuencia f_k de la portadora de orden k ($k = 0, 1, \dots, N-1$). La señal rectángulo de (B.9) es la que produce en el dominio de la frecuencia la forma característica sinc(...), como se puede apreciar en la Fig. B.3.

La ortogonalidad del conjunto de señales de salida se verifica si, de (B.9),

$$\int_0^{T_b} \cos(2\pi f_k t) \cos[2\pi(f_k + \Delta f)t] dt = 0 \quad (B.10)$$

Como la ortogonalidad debe verificarse para todas las subportadoras, para simplificar el desarrollo podemos hacer $f_k = f_0$, frecuencia de la primera portadora. Si hay ortogonalidad entre f_0 y $(f_0 + \Delta f)$, la habrá también para cualquier otro par de frecuencias separadas en Δf . La expresión (B.10) se puede escribir entonces en la forma

$$\int_0^{T_b} \cos[2\pi(2f_0 + \Delta f)t] dt + \int_0^{T_b} \cos(2\pi \Delta f t) dt = 0 \quad (B.11)$$

Aplicando el mismo procedimiento utilizado en la demostración de la ortogonalidad de señales FSK, Sección 5.7.4, podemos demostrar que

Para dos enteros m y n , tal que $n > m \geq 1$, con $f_b = \frac{1}{T_b}$, la ortogonalidad se verifica cuando

$$\Delta f = mf_b \quad \text{y} \quad f_0 = \frac{n-m}{2} f_b$$

El valor óptimo de m es la unidad pues se asegura la ortogonalidad, se cumple con la condición de equivalencia (B.6) y la separación entre portadoras será la mínima. En este caso, en condiciones de ortogonalidad,

$$\Delta f = f_b; \quad f_0 = \frac{n-1}{2} f_b, \quad f_k = f_0 + kf_b; \quad B = (N+1)f_b \quad (B.13)$$

f_k es la frecuencia de la subportadora de orden k , y B es el ancho de banda de la señal transmitida. Este valor Δf asegura la ortogonalidad de las subportadoras; $k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$.

El valor de n dependerá de la banda de frecuencias de la señal, y se elige de modo que la frecuencia f_0 quede dentro de la banda de paso de la señal original $x(t)$ o de acuerdo con criterios de diseño (En la norma ETSI 300 744 del Estándar DVB el valor mínimo de f_0 es de 474 MHz).

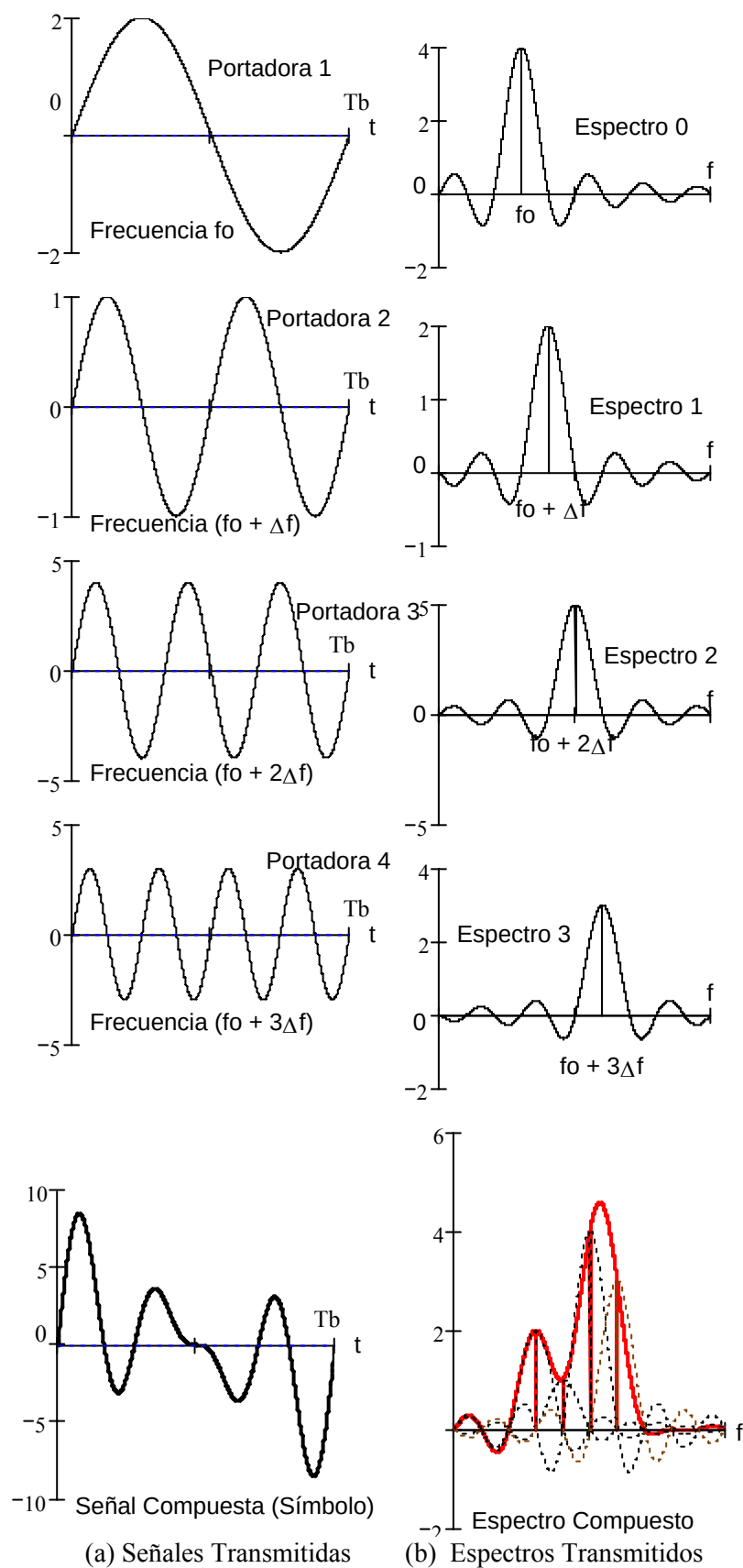


Fig. B. 3. Formación del Espectro de Salida del Modulador OFDM para 4 subportadoras.

B.2.3. Fuentes de Interferencia en OFDM

En los sistemas OFDM se pueden identificar dos tipos de interferencia:

- La interferencia interportadora (Intercarrier Interference, ICI) producida por distorsión en el canal sobre cada subportadora individual.
- La interferencia intersímbolo (Intersymbol Interference, ISI) que es la producida por la superposición de los espectros de las subportadoras debido a la distorsión multitrayecto.

La ortogonalidad de las subportadoras se mantiene en OFDM y cada uno de los subcanales es recuperado mediante FFT en la recepción. Por esta razón, la interferencia interportadora ICI no es de mucho cuidado en OFDM. Sin embargo, como los espectros de las subportadoras no son estrictamente de banda limitada (ellas son de tipo $\text{sinc}(f)$), la distorsión por multitrayecto hace que las colas de los subcanales de una portadora se extiendan a los subcanales de portadoras adyacentes y produzcan interferencia intersímbolo ISI.

Una manera de prevenir la ISI es crear un intervalo de guarda para separar los símbolos sucesivos. El intervalo de guarda está formado por una extensión periódica de una parte de cada símbolo, como se puede observar en la Fig. B.4. La duración total de cada trama será $T_t = T_g + T_b$, donde T_g es la duración del intervalo de guarda. Nótese, en la Fig. B4 (a), la forma cómo se efectúa la inserción de la banda de guarda, en (b) la trama transmitida en un tiempo T_t , y en (c) el correspondiente espectro transmitido. En la práctica la duración T_g es menor que $T_b/4$. El Intervalo de Guarda se conoce también con el nombre de Prefijo Cíclico.

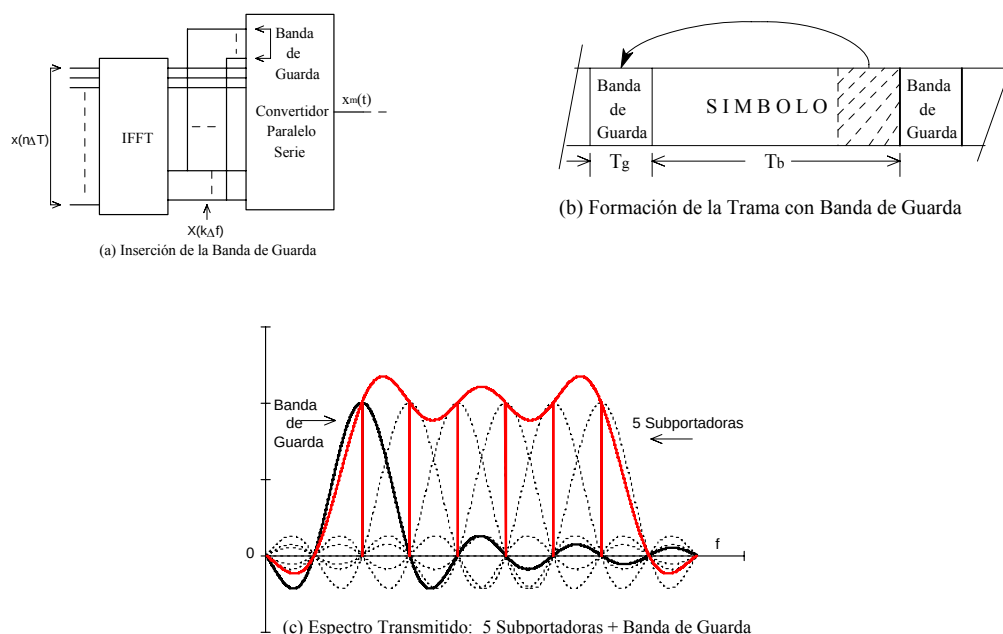


Fig. B.4. Inserción del Intervalo de Guarda en OFDM

La tecnología OFDM minimiza los efectos de desvanecimiento de la señal de televisión pues actúa sobre la señal antes de ser transmitida en anticipación de los efectos producidos por la atmósfera. Cuando la señal llega al receptor de televisión, el operador FFT recupera la señal con una alta fidelidad.

♣ Ejemplo B.1. Normas del Estándar Europeo DVB

Como ejemplo de aplicación de la modulación OFDM daremos algunos valores usados en la Norma ETSI 300 744 del Estándar DVB europeo para Televisión Digital Terrestre.

En la Norma ETSI 300 744 del Estándar DVB se especifica una estructura de trama para utilizarse en los modos de transmisión 8K y 2K en canales de 8 MHz en la banda IV y V, UHF, 470 MHz a 862 MHz.

La señal transmitida se organiza en tramas. Cada trama tiene una duración T_F y consiste de 68 símbolos OFDM; estos símbolos se numeran de 0 a 67. Cada 4 tramas conforman una supertrama. El espectro transmitido está constituido por un conjunto de $N = 6817$ subportadoras en el Modo 8K y de $N = 1705$ subportadoras en el Modo 2K, y transmitidas con una duración $T_b = 896$ microsegundos en el Modo 8K y $T_b = 224$ microsegundos en Modo 2K. El espaciado entre subportadoras es $\Delta f = 1116$ Hz en el Modo 8K y $\Delta f = 4464$ Hz en el Modo 2K. La señal transmitida está compuesta de dos partes: la parte útil (símbolo) con una duración T_b y un intervalo de guarda de duración T_g . De acuerdo con la norma, la duración T_g puede tener los valores $T_b/4$, $T_b/8$, $T_b/16$ y $T_b/32$ tanto en Modo 8K como en Modo 2K. El ancho de banda ocupado es de 7,61 MHz. El estándar DVB puede operar también en anchos de banda de 6 y 7 MHz.

Además de la información útil, la trama OFDM puede contener otros tipos de información como, por ejemplo, frecuencias piloto para sincronización de trama, sincronización de frecuencia y tiempo, parámetros de señalización, etc., que no consideraremos aquí.

La modulación OFDM, en sus diferentes variedades, se utiliza en los Estándares DAB Eureka 147, DVB-T, DVB-H, DMB-T/H, IEEE 802.11a, IBOC y DRM. ♣

B.3. ESTÁNDARES DE TELEVISION DIGITAL

B.3.1. Introducción

La Televisión Digital Terrestre (TDT) es un sistema de difusión terrestre de televisión digital que utiliza, según el país, diferentes estándares que citaremos más adelante. Esta difusión se hace en las bandas III (VHF), IV y V (UHF) desde 174 MHz hasta 826 MHz.

Los sistemas de transmisión de televisión digital TDT otorgan algunos beneficios frente a los analógicos, que se podrían resumir de la siguiente manera:

- Mejora la interacción con otras tecnologías digitales (Los estudios de TV ya trabajan con equipos digitales y la conversión a analógico implica una pérdida de calidad)
- Aumenta sensiblemente la calidad de sonido e imagen
- Posibilita diferentes proporciones de pantalla, por ejemplo, 16:9 (“formato cine”)
- Posibilita, concurrente con el programa en curso, la transmisión de datos y audio adicionales (como son subtítulos, radio digital, alarmas, traducción, etc.)
- Posibilita servicios interactivos
- Los equipos pueden trasladarse de un sitio a otro (en una red en una red de televisión terrestre, a diferencia de las instalaciones de TV satelital que son fijas)
- Mejor recepción (señal libre de ruido)

Y a nivel empresas de radiodifusión y telecomunicaciones:

- Menor costo de transmisión por programa
- Posibilidad de prestar servicios adicionales en modalidad de suscripción o pay-per-view, entre otros tipos

La TDT permite una mejora en la calidad de la recepción y amplía la oferta disponible tanto en número de canales como en versatilidad del sistema: emisión con sonido multicanal, múltiples señales de audio, teletexto, EPG (guía electrónica de programas), canales de radio, servicios interactivos, imagen panorámica, etc. A mediano plazo el sistema de televisión analógico desaparecerá completamente liberando frecuencias que permitirán aumentar la oferta de canales, su calidad y otros servicios en TDT.

B.3.2. Estándares de Televisión Digital

A nivel mundial se han definido actualmente cuatro estándares de TDT:

- **ATSC** (Advanced Television Systems Committee) de los Estados Unidos de América. Sistema adoptado (hasta mayo de 2009) por más de 10 países: Estados Unidos, Canadá, México, Corea del Sur, Bahamas, Bermuda, El Salvador, Honduras, Samoa Americana, Guam e Islas Marianas del Norte.
- **DVB** (Digital Video Broadcasting) de la Unión Europea. Sistema adoptado (hasta mayo de 2009) por más de 120 países, entre ellos los países de la Unión Europea, la India, Uruguay, Colombia, Panamá, Sudáfrica, Arabia Saudita, Hong Kong, Singapur, Taiwán, Vietnam y Australia.
- **ISDB** (Integrated Services Digital Broadcasting) de Japón y Brasil. Sistema adoptado (hasta octubre de 2009) por 5 países: Japón, Brasil, Perú, Chile, Argentina y Venezuela.
- **DTMB** (Digital Terrestrial Multimedia Broadcast) de la República Popular China. Sistema adoptado (hasta mayo de 2009) por China (incluyendo Honk Kong y Macao).

El Estándar ATSC

ATSC es una organización internacional norteamericana sin fines de lucro cuya misión es crear y fomentar el uso de estándares voluntarios y prácticas recomendadas para la TDT y su interoperabilidad con otros medios. Los estudios y desarrollos efectuados desde 1987 hasta 1996 tuvieron como meta el desarrollo de la Televisión Libre y Gratuita (Bandas I y II, 47 MHz a 230 MHz). Habiendo consolidado las normas para las bandas I y II, ATSC acometió la incorporación de la TDT para las bandas superiores (Bandas IV y V, 470 MHz a 826 MHz) relacionadas con los nuevos servicios de televisión digital terrestre, móvil y satelital.

El sistema ATSC utiliza la modulación 8T-VSB (8 niveles de 3 bits, uno de ellos de paridad, código de digitalización en celosía (Trellis), transmisión en Banda Lateral Residual) con el objeto de transmitir la máxima carga útil (19,4 Mbps) aún en entornos y ambientes hostiles. La transmisión se efectúa por canales de 6 MHz.

La familia ATSC contiene actualmente una gran variedad de normas y prácticas recomendadas que el lector puede consultar en la Página Web de ATSC.

El Estándar DVB

EL estándar DVB es el estándar para la transmisión de Televisión Digital Terrestre creado por la organización europea DVB (Digital Video Broadcasting). Este sistema transmite audio, video y otros datos a través de una codificación MPEG-2 utilizando una modulación OFDM.

El estándar DVB forma parte de toda una familia de estándares de la industria europea para la transmisión de emisiones de televisión digital según diversas tecnologías: emisiones de televisión digital mediante la red de distribución terrestre de señal usada en la televisión analógica tradicional (DVB-T), emisiones desde satélites geoestacionarios (DVB-S), por redes de cable (DVB-C) e incluso para emisiones destinadas a dispositivos móviles con reducida capacidad de proceso y alimentados por baterías (DVB-H). Otra nueva modalidad es la TV por ADSL que también posee un nuevo estándar como es el DVB-IPTV y también la nueva modalidad de audio, el DAB (Digital Audio Broadcasting), utilizado para las nuevas emisoras de radio en formato digital.

El estándar DVB utiliza la modulación OFDM con las características dadas en el Ejemplo B.1.

El Estándar ISDB

El Estándar ISDB (Integrated Services Digital Broadcasting) o Transmisión Digital de Servicios Integrados es un conjunto de normas creado en el Japón para la transmisión de radio digital y televisión digital.

Igual que la norma europea DVB, el estándar ISDB se compone de toda una familia de componentes. La más conocida es la de televisión digital terrestre (ISDB-T e ISDB-Tb), pero también la conforman la televisión satelital (ISDB-S), la televisión por cable (ISDB-C), los servicios multimedia (ISDB-Tmm) y la radio digital (ISDB-Tsb).

Además de transmisión de audio y video, ISDB también define conexiones de datos (transmisión de datos) con Internet como un canal de retorno sobre varios medios y con diferentes protocolos. Esto se usa, por ejemplo, para interfaces interactivas como la transmisión de datos y guías electrónicas de programas.

En el estándar ISDB se han adoptado la siguientes tecnologías: (a) tecnología múltiple flexible (MPEG-2), (b) sistemas de codificación de video/audio flexibles y de alto rendimiento (MPEG-2 y MPEG-AAC) y (c) transmisión OFDM. Como resultado, en este estándar son posibles muchas clases de servicios de transmisión, tales como Televisión de Alta Definición (HDTV), Televisión Standard (SD) y Televisión Múltiple (HDTV + SDTV).

El Estándar ISDB ha devenido internacional (ISDB-T) al ser adoptado por Brasil que le agregó importantes mejoras. El sistema brasileño, que seguramente será el que prevalecerá en el mercado latinoamericano, no es exactamente igual al sistema japonés. En el sistema brasileño se adoptan nuevas tecnologías, tales como la tecnología H.264 (del UIT-T) para codificación de SDTV, así como otras tecnologías de avanzada. Pero la estructura es la misma y el sistema ISDB-T brasileño sigue siendo de la familia ISDB y tiene las mismas características del ISDB-T japonés.

Este es el estándar que ha sido seleccionado por Venezuela. Cabe destacar que la selección de este estándar ofrece numerosas ventajas para el desarrollo tecnológico de Venezuela (transferencia y apropiación tecnológica), además de lo económico y social. Entre ellas se cuentan el uso eficiente del espectro, con la posibilidad de manejar más canales de televisión; permite disponer de un canal para la recepción móvil (teléfonos celulares o autos) sin costo para el usuario; brinda la posibilidad de diseñar programas de Telegobierno y de Teletrabajo; y disponer, además, de un sistema de alerta temprana en caso de emergencias nacionales, que es accionado por los operadores de la TDT.

El Estándar DTMB

El Estándar DTMB (Digital Terrestrial Multimedia Broadcast) o Transmisión Digital Terrestre Multimedia, es el estándar de televisión digital terrestre para terminales fijos y móviles de la República Popular China, que incluye a este país, Hong Kong y Macao. Fue adoptado como estándar nacional en 2006, siendo denominado GB 20600-2006.

El DTMB es el resultado del trabajo de la Universidad de Shanghai Jiao Tong (que desarrolló el ADTB-T) en Shanghai y la Universidad Tsinghua (desarrollo del DMB-T) en Peking, ambos en 1999 y la Academia de Ciencias de Radiodifusión que en 2002 propone el TiMi (Terrestrial Interactive Multiservice Infrastructure). Entre 2004 y 2006 se propone y efectúa la fusión de los tres estándares, creándose el DTMB.

Aunque originalmente se le llamó Transmisión-Terrestre/Portátil Digital de Multimedia (DMB-T/H por las siglas en inglés de Digital Multimedia Broadcast-Terrestrial/Handheld), el estándar ha sido oficialmente denominado DTMB.

La transmisión de las señales es instrumentada mediante la tecnología TDS-OFDM ("Time Domain Synchronous-Orthogonal Frequency Division Multiplexing"), mediante la cual es capaz de transmitir calidades aceptables de señal para receptores HDTV moviéndose a velocidades de hasta 200 Km/h.

La norma también cuenta con el apoyo del servicio móvil de televisión digital en dispositivos móviles que está ausente en las implementaciones típicas de televisión digital en Europa y Estados Unidos. Además de esto, el radio de la zona con cobertura de la señal utilizando el estándar DTMB es de 10 km mayor que la aplicación europea, el estándar DVB-T. La norma también tiene las ventajas de las tres normas chinas, ADTB-T, DMB-T y TiMi3.

A pesar de las ventajas, existen otros problemas con esta norma. Aunque la norma soporta los esquemas de modulación de portadora sencilla como de portadora doble, no se han definido los estándares de codificación de video por defecto, y por ello el costo de la investigación y el desarrollo y la complejidad del circuito integrado para esta norma se incrementarán, dando lugar a productos más caros. Además, los programas de TV comprados en el extranjero que se emitan en formato de televisión digital puede que tengan que ser convertidos para que se adapten al entorno DTMB, ya que el estándar DTMB es ligeramente diferente a DVB-T y ATSC, lo que lo hace menos rentable.

Cabe señalar que a pesar de la metodología de transmisión de datos que la norma establece, la propia norma no restringe el uso de cierto número de codecs de video que se utilizarán en la transmisión de señales de televisión digital, de modo que cada televisora tiene la facultad de usar cualquiera de los codecs que admite video de alta definición, así como los sistemas de subtítulo, guías electrónicas de programas y funciones interactivas.

Puede decirse que actualmente (noviembre 2009) el estándar DTMB chino está todavía en desarrollo. Para China es de capital importancia el desarrollo completo de estas normas, pues con una población de 1500 millones de habitantes se asegura un mercado inmenso y el estándar DTMB pasaría a competir con los otros estándares actuales.

La Competencia entre los Estándares

La estandarización de todo proceso industrial implica fuertes disputas entre los sectores interesados, y el audiovisual no es una excepción, pues están en juego considerables intereses económicos. Como en la selección entre los sistemas PAL-N, NTSC y SECAM para la transmisión de televisión en colores, la opción por uno de los estándares para la televisión digital depende de los diferentes países, siendo hasta el momento cuatro las normas en competencia: ATSC, DVB, ISDB y DTMB. La competencia por lograr la aprobación de los países que faltan por plegarse a una norma sigue siendo fuerte.

B.4. ESTÁNDARES DE RADIODIFUSIÓN DIGITAL

B.4.1. Introducción

El uso de las bandas de radiofrecuencia por debajo de los 30 MHz (onda larga, onda media y onda corta) ha disminuido continuamente a lo largo de los últimos años. La principal razón es la pobre calidad de sonido que se obtiene en estas bandas. Los canales utilizados para la transmisión de programas son muy estrechos: 9 kHz en onda media y onda larga en Europa, y 10 kHz en onda corta en América. La modulación de amplitud (AM) que se ha utilizado hasta nuestros días es, técnicamente, una modulación bastante fuerte y robusta, aunque no lo suficientemente eficiente.

De forma más particular, la onda corta es muy propensa a las interferencias. Sin embargo, si se utilizan sistemas de modulación más sofisticados y técnicas modernas de compresión de datos, es posible conseguir realizar transmisiones vía radio con una calidad próxima a la de un disco compacto (CD) en estas bandas de frecuencia. La ventaja de la onda corta es su amplio rango e independencia con respecto a los operadores por satélite o proveedores de servicios de Internet, lo que juega en su beneficio.

La creciente necesidad de desarrollar un sistema digital de radiodifusión hizo que diversas empresas, al final del siglo XX y principios del siglo XXI, se lanzaran a la búsqueda de un sistema que pudiera ser útil y rentable, basándose en distintas filosofías de creación. Mientras que Europa iniciaba sus estudios mediante el proyecto Eureka 147, tratando de ganar calidad, Estados Unidos, mediante la empresa Ibiqity, buscaba un sistema más adaptativo que permitiera un cambio gradual de los receptores, el IBOC.

Actualmente el IBOC se está implantando con relativa facilidad en los países donde se ha adoptado este sistema, debido a su filosofía. En Europa la situación es algo distinta. El sistema DAB se está implantando de forma más lenta y con algo más de dificultad en algunos países, hasta el punto de que países como Suecia han decidido no adoptar esta tecnología.

En Europa la fecha límite para la implantación de un sistema de radio digital es 2010.

La Radio Digital es el más significativo avance en tecnología de radio desde la introducción del FM estéreo. Ofrece tanto a oyentes como emisoras una interesante combinación de beneficios y oportunidades:

Por parte de los oyentes:

- Proporciona gran calidad en la recepción de señales sonoras, equivalente a la del disco compacto.
- Robustez del sistema de transmisión aéreo. Receptores móviles y portátiles libres de interferencias (multitrayecto, desvanecimiento e interferencia entre canales) en la recepción; es decir, resuelve los problemas de distorsión y cancelaciones que sufren las señales de FM en móviles (vehículos en movimiento).
- Receptores de bajo costo (en el mediano plazo).
- Mayor variedad en la información recibida: texto, multimedia.

Por parte de las emisoras:

- Permite configurar Redes de Frecuencia Única, que permiten la recepción de un programa en la misma frecuencia a todo el territorio de cobertura, sin necesidad de resintonizar el equipo receptor. Esta es una gran ventaja respecto a la FM convencional, donde se requieren redes multifrecuencia para la difusión de un programa en zonas amplias de cobertura u orográficamente complejas.
- Garantiza calidad elevada en recepción con niveles de señal reducidos. Una relación S/N de 9 dB permite ya una calidad de señal sonora de calidad, frente a la relación S/N de 50 dB que se requiere en FM.
- Optimiza y economiza el espectro radioeléctrico, combinando un solo bloque y, por tanto, un solo transmisor, dando lugar a un mayor número de estaciones.
- Ofrece mayor cobertura, llegando a lugares de difícil acceso.
- Flexibilidad: por ejemplo, el sistema DAB provee un canal digital de datos por el cual se puede entregar un amplio rango de tipos de servicios, desde audio hasta multimedia, mediante el envío de información adicional visualizable en pantalla:
 - informaciones asociadas al programa
 - información complementaria e independiente
 - imágenes, mapas, etc.
 - incluso el sistema puede proveer servicios con más valor agregado, que son un desafío a la innovación de los radiodifusores (web, video, letras de canciones, etc.).
 - Al ser un canal digital, se pueden multiplexar cinco o más servicios de alta calidad. El multiplex puede ser reconfigurado dinámicamente para introducir nuevos servicios temporales o de suscripción, por ejemplo.

La radio digital no es lo mismo que la analógica. Esto es fácil de ver, pero puede suponer el cambio más radical introducido en la radio difusión desde los años cincuenta cuando se introdujo VHF-FM. La radiodifusión digital comporta una tecnología completamente diferente de la radio analógica, y una de las ventajas más destacadas que aporta es la de transmisión de audio y datos simultáneamente. Aunque el concepto de radio para mucha gente implique que sólo se oye, la radio digital aparte de oírse, en una pantalla se podrá ver información complementaria como: autor y nombre de la canción que se está reproduciendo en ese momento, alguna imagen, información meteorológica, etc.. También, la implantación de este sistema aporta una mayor calidad en la recepción fija o en movimiento y una posibilidad de aumentar el número de programas sin disminuir prácticamente la calidad.

B.4.2. Estándares de Radio Digital Terrestre

La Radio Digital Terrestre es un sistema de radiodifusión de audio, que se distingue por la emisión de una señal digital. Actualmente existen tres sistemas de radiodifusión digital conocidos con repercusión a nivel mundial:

- IBOC (In-band On-channel),
- DAB (Digital Audio Broadcasting)
- DRM (Digital Radio Mondiale).

El Estándar IBOC

En abril de 2005 el Comité Nacional de Sistemas de Radio (NRSC) de los Estados Unidos aprobó el estándar NRSC 5, que deriva del sistema IBOC AM. Esto indica claramente que uno de los principales impulsores de este sistema son los Estados Unidos de América. La utilización de un estándar mundial es hoy en día una utopía dado que dependiendo de la zona geográfica el espacio radioeléctrico dedicado a radiodifusión es distinto. Por ejemplo, se sabe que el espacio dedicado a onda media HF-AM en Europa sólo permite enviar señales monofónicas, esto es causa de que en Europa el ancho de banda dedicado a onda media es de 9KHz. Esto no ocurre en EEUU donde el ancho de banda es de 20KHz lo que permite el envío de señales estereofónicas en HF. Existen dos tipos de IBOC que trabajarían en frecuencias AM y el de FM.

Características básicas

- Capacidad para la transmisión de audio y datos
- Calidad de la señal de radio en recepción similar a FM
- Alta compresión de audio
- Buena relación entre robustez y calidad
- Eficiencia del uso del espectro radioeléctrico
- Posibilidad de enviar señales estereofónicas

IBOC-AM y FM

No hay diferencias notables entre estas dos modalidades del sistema IBOC, a salvo de que uno está creado para convivir con señales de onda media y onda corta (AM) recibiendo señales de radiodifusión, mientras que la otra está diseñada para obtener alta calidad aunque debe transmitir señales analógicas para que sigan funcionando receptores analógicos. Es este diseño el que condiciona los factores diferenciales como, por ejemplo, pueden ser un número de grupos complementarios, subportadoras, anchos de banda, etc.

El estándar IBOC incluye la transmisión tanto en AM como en FM. Actualmente estaciones IBOC de AM y FM se encuentran en uso en los Estados Unidos.

El sistema IBOC FM ofrece 4 servicios básicos en su programación corriente. El programa principal provee el audio principal, un segundo canal provee otros servicios (datos, información de usuario, etc.), un tercer canal la identificación de la estación y un cuarto canal proporciona servicios auxiliares en un gran rango de aplicaciones. La transmisión de la señal en todos los sistemas utiliza la modulación OFDM.

El Estándar DAB

El Estándar DAB (Digital Audio Broadcasting) es un estándar de emisión de radio digital desarrollado por EUREKA como un proyecto de investigación para la Unión Europea (Eureka 147). El DAB está diseñado para receptores tanto de uso doméstico como portátiles para la difusión de audio terrestre y mediante satélites, la cual también permite introducir datos. Del espectro radial usa las frecuencias de la Banda III (174-230 MHz) y Banda L (1452-1492 MHz). La tecnología fue principalmente desarrollada en la década de 1980, aunque el proyecto comenzó en 1987 y finalizó en

2000. Más de 285 millones de personas en todo el mundo pueden recibir más de 550 servicios DAB diferentes. El Reino Unido fue el primer país que ofreció un servicio de DAB, de parte de la BBC y radioemisoras comerciales, en Londres en 2001 y posteriormente a nivel nacional.

En febrero de 2007 se lanzó una versión actualizada llamada DAB+, que no es compatible con los equipos receptores anteriores. El DAB+ es aproximadamente dos veces más eficiente que el DAB al usar el codec de audio AAC+. Además, la calidad de la recepción es más robusta en el DAB+ que en el DAB ya que la primera incluye la codificación de corrección de error Reed-Solomon que es mucho más eficiente. La combinación Reed-Solomon + AAC+ provee una alta calidad con velocidades del orden de los 64 kbps.

Según sus proponentes, el estándar DAB tiene varios beneficios sobre los servicios existentes de FM analógica dentro de la misma banda, y una mayor resistencia contra el ruido, interferencia multitrayecto, desvanecimientos e interferencia entre canales. Sin embargo, pruebas llevadas a cabo por expertos en el campo del audio han mostrado que la calidad del audio DAB es inferior a la de FM, debido a que la mayoría de las estaciones en estéreo utilizan una velocidad de información de 128 kbps con un codificador MP2, cuando para igualar la calidad FM se necesitaría una velocidad de 160 kbps.

Como es de suponer, la radio digital no se podrá sintonizar en los receptores actuales. El receptor DAB, según el estándar europeo, debe poder trabajar en las bandas III y L. Deberá contar con una salida de audio y según los modelos y necesidades una salida para datos. Deberá ser capaz de detectar el modo de transmisión y conmutar al modo de recepción correspondiente. El codificador utilizará una frecuencia de muestreo de 24 a 48 kHz y tendrá que ser capaz de conmutar entre las distintas tramas de datos cuando sea necesario (según los datos que se quieran recibir o si se está en movimiento). Debe ser capaz de descodificar un programa de audio estéreo con una velocidad de 256 kbps. En caso de servicio cifrado (de pago) el receptor deberá informar al usuario de este servicio. Es recomendable que tenga una pantalla con gráficos sencillos y de por lo menos 8 caracteres alfanuméricos que informen del servicio prestado, tipo de programa, trama y segmento seleccionado.

El Estándar DRM

El Estándar DRM (Digital Radio Mondiale) es un conjunto de estándares de radiodifusión sonora de radio digital desarrollado por el consorcio Digital Radio Mondiale usando las frecuencias y concesiones otorgadas a las transmisiones de AM y FM. Hay que destacar que ningún país es propietario de este sistema de radio digital, por lo cual dicho sistema desarrollado por el consorcio Digital Radio Mondiale se considera mundial.

Los estándares de DRM son:

DRM30

Para bandas menores a 30 MHz de AM que son: a) Onda Larga (longwave, LW) de 150 kHz a 529 kHz, b) Onda Media (mediumwave, MW) de 530 kHz a 1710 kHz o sea la tradicional radio AM y c) Onda Corta (shortwave, SW) de 1711 kHz a 30 MHz. Se logra así una señal digital completamente nítida, sin interferencias ni ruido ni desvanecimiento. Si una emisora decide utilizar para sus transmisiones el sistema de radio digital DRM, puede transmitir su señal utilizando un transmisor de baja potencia y tener una cobertura aceptable en comparación con el sistema de radio analógico. En muchos países, las radiodifusoras de AM han probado este sistema de Radio Digital Terrestre (RDT) existiendo en la actualidad muchas transmisiones regulares de DRM en diferentes países.

DRM+

Aprobado en 2009 por la ETSI, para el espectro radial entre los 30 a 174 MHz, que corresponden las emisiones de radio FM. Esta gama incluye:

- Banda de TV de 47 MHz a 68 MHz
- Banda OIRT FM de 65,8 MHz a 74 MHz
- Banda FM Japonesa de 76 MHz a 90 MHz

- Banda FM Internacional de 87,5 MHz a 107,9 MHz

El sistema DRM+ tiene un ancho de banda más angosto y está diseñado para encajar en la banda de radiodifusión con anchos de banda de 100 kHz, que pueden operar en bandas congestionadas y su implantación será rápida pues es compatible con el estándar DRM. DRM+ tiene velocidades desde 35 kbps y, al igual que DRM, permite hasta cuatro servicios.

Tanto DRM como DRM+ utilizan COFDM que junto con MPEG 4 HE AAC v2 proporciona una alta calidad y altas velocidades de transmisión. Además, con el agregado de los códigos CELP y HVXC se puede transmitir voz solamente a velocidades aún más bajas.

En un principio se supone que los receptores serán bastante caros pero, después de un período inicial, cuando se inicie la producción en masa, se espera que los precios de los equipos sean un poco más caros que los receptores actuales. Los nuevos equipos deben soportar tanto los modos de transmisión digital como los de transmisión analógica, ya que se requiere que la transición se realice de un modo gradual. Dentro de pocos años dejarán de emitirse las primeras transmisiones analógicas, aunque en los países más pobres el tiempo puede alargarse aún más.

La mayoría de los grandes, y muchos de los pequeños servicios de radiodifusión de onda corta, han expresado su interés en la RDM. Los transmisores modernos pueden modificarse con una sencillez relativa para permitir que puedan realizarse, a su vez, las transmisiones en RDM. La onda media también ha experimentado un renacimiento debido a la mejora de la calidad de sonido. De hecho, en algunos casos, las empresas de radiodifusión ya están utilizando transmisiones digitales en onda media.

APÉNDICE C

MISCELÁNEOS

C.1. EL ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

Frecuencia	Longitud de Onda	Designación	Medio de Transmisión	Aplicaciones
3 Hz-30 kHz	$10^8 - 10^4$ m	Frecuencia muy Baja VLF	Conductores Metálicos, Radio	Audio, Telefonía, Transmisión de Datos, Radionavegación
3 kHz-300 kHz	$10^4 - 10^3$ m	Frecuencia Baja LF	Conductores Metálicos, Radio	Radioayudas, Radiofaros, Transmisión por Portadora (PLC)
300 kHz-3 MHz	$10^3 - 10^2$ m	Frecuencia Media MF	Cable Coaxial, Radio de Onda Corta	Radiodifusión Comercial, Defensa Civil, Radioaficionados
3 MHz-30 MHz	$10^2 - 10$ m	Frecuencia Alta HF	Cable Coaxial, Radio de Onda Corta	Radioaficionados, Radiotelefonía Móvil, Comunicaciones Militares
30 MHz-300 MHz	0 - 1 m	Frecuencia Muy Alta VHF	Cable Coaxial, Radio de Onda Corta	Televisión VHF, Radio FM, Control de Tránsito Aéreo, Radiotaxis, Policía, Radioayudas
300 MHz-3 GHz	100 - 1 cm	Frecuencia Ultra Alta UHF	Radio de Onda Corta, Guías, Microondas	Televisión UHF, Telemetría Espacial, Comunicaciones Militares, Banda Ciudadana
3 GHz-30 GHz	10 - 1 cm	Frecuencia Super Alta SHF	Guías de Onda, Microondas	Radar, Comunicación por Satélite, Radioenlaces de Microondas
30 GHz-300 GHz	< 1 cm	Frecuencia Extra Alta EHF	Guías de Onda, Microondas, Fibras Ópticas	Radioastronomía, Servicio de Ferrocarriles, Sistemas Experimentales, Comunicaciones Ópticas (Laser e Infrarrojo)

C.2. DESIGNACIÓN DE LAS BANDAS DE MICROONDAS

BANDA (GHZ)	DESIGNACIÓN	BANDA (GHZ)	DESIGNACIÓN
1.0-2.0	L	12.0-18.0	Ku
2.0-4.0	S	18.0-27.0	K
4.0-8.0	C	27.0-40.0	Ka
8.0-12.0	X		

C.3. BANDAS DE TELEVISIÓN (NTSC, CATV) y FM EN VHF (*)

Canal	Banda (MHz)	Portadora de Video, MHz	Canal	Banda (MHz)	Portadora de Video, MHz
1	----	No se utiliza	7	174-180	175,25
2	54-60	55,25	8	180-186	181,25
3	60-66	61,25	9	186-192	187,25
4	66-72	67,25	10	192-198	193,25
5	76-82	77,25	11	198-204	199,25
6	82-88	83,25	12	204-210	205,25
FM	88-108	----	13	210-216	211,25

(*) En VHF los sistemas NTSC y CATV utilizan las mismas bandas de frecuencia.

C.4. BANDAS DE TELEVISIÓN (NTSC, CATV) EN UHF (*)

Canal	Banda (MHz)	Banda (MHz)	Canal	Banda (MHz)	Banda (MHz)	Canal	Banda (MHz)	Banda (MHz)
14	470-476	120-126	44	650-656	342-348	74	--	522-528
15	476-482	126-132	45	656-662	348-354	75	--	528-534
16	482-488	132-138	46	662-668	354-360	76	--	534-540
17	488-494	138-144	47	668-674	360-366	77	--	540-546
18	494-500	144-150	48	674-680	366-372	78	--	546-552
19	500-506	150-156	49	680-686	372-378	79	--	552-558
20	506-512	156-162	50	686-692	378-384	80	--	558-564
21	512-518	162-168	51	692-698	384-390	81	--	564-570
22	518-524	168-174	52	698-704	390-396	82	--	570-576
23	524-530	216-222	53	704-710	396-402	83	--	576-582
24	530-536	222-228	54	710-716	402-408	84	--	582-588
25	536-542	228-234	55	716-722	408-414	85	--	588-594
26	542-548	234-240	56	722-728	414-420	86	--	594-600
27	548-554	240-246	57	728-734	420-426	87	--	600-606
28	554-560	246-252	58	734-740	426-432	88	--	606-612
29	560-566	252-258	59	740-746	432-438	89	--	612-618
30	566-572	258-264	60	746-752	438-444	90	--	618-624
31	572-578	264-270	61	752-758	444-450	91	--	624-630
32	578-584	270-276	62	758-764	450-456	92	--	630-636
33	584-590	276-282	63	764-770	456-462	93	--	636-642
34	590-596	282-288	64	770-776	462-468	94	--	642-648
35	596-602	288-294	65	776-782	468-474	95	--	90-96
36	602-608	294-300	66	782-788	474-480	96	--	96-102
37	608-614	300-306	67	--	480-486	97	--	102-108
38	614-620	306-312	68	--	486-492	98	--	108-114
39	620-626	312-318	69	--	492-498	99	--	114-120
40	626-632	318-324	70	--	498-504			
41	632-638	324-330	71	--	504-510			
42	638-644	330-336	72	--	510-516			
43	644-650	336-342	73	--	516-522			

(*) La frecuencia de portadora está a 1,25 MHz por encima de la frecuencia inferior de la banda

C.5. CÓDIGO ASCII o ALFABETO INTERNACIONAL No. 5 DE LA UIT-T.

bits	7	0	0	0	1	1	1	1
4 3 2 1	6	0	0	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	1	0	1
0 0 0 0	NUL	DLE	SP	0	@	P	\	p
0 0 0 1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0 0 1 0	STX	DC2	“	2	B	R	b	r
0 0 1 1	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0 1 0 0	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0 1 0 1	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0 1 1 0	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0 1 1 1	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
1 0 0 0	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1 0 0 1	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1 0 1 0	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1 0 1 1	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1 1 0 0	FF	FS	‘	<	L	\	l	:
1 1 0 1	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1 1 1 0	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1 1 1 1	SI	US	/	?	O	—	o	DEL

C.6. CÓDIGO BAUDOT

Caja de Caracteres		Codificación					Caja de Caracteres		Codificación				
Superior	Inferior	5	4	3	2	1	Superior	Inferior	5	4	3	2	1
A	-	1	1	0	0	1	Q	1	1	0	1	1	1
B	?	0	0	0	1	1	R	4	0	1	0	1	0
C	:	0	1	1	1	0	S	‘	0	0	1	0	1
D	\$	0	1	0	0	1	T	5	1	0	0	0	0
E	3	0	0	0	0	1	U	7	0	0	1	1	1
F	!	0	1	1	0	1	V	;	1	1	1	1	0
G	&	1	1	0	1	0	W	2	1	0	0	1	1
H	#	1	0	1	0	0	X	/	1	1	1	0	1
I	8	0	0	1	1	0	Y	6	1	0	1	0	1
J	BELL	0	1	0	1	1	Z	“	1	0	0	0	1
K	(	0	1	1	1	1	Letras ↓		1	1	1	1	1
L	)	1	0	0	1	0	Cifras ↓		1	1	0	1	1
M	.	1	1	1	0	0	Espacio		0	0	1	0	0
N	,	0	1	1	0	0	Retorno de carro		0	1	0	0	0
O	9	1	1	0	0	0	Feed Line		0	0	0	1	0
P	0	1	0	1	1	0	En Blanco		0	0	0	0	0

APÉNDICE D

TRANSFORMADAS

D.1. TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

$x(t)$	$X(f)$	$x(t)$	$X(f)$
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(f) + bX_2(f)$	$\frac{d}{dt}x(t)$	$(j2\pi f)X(f)$
$x(t \pm t_0)$	$X(f) \exp(\pm j2\pi t_0 f)$	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$	$tx(t)$	$\frac{1}{(-j2\pi)} \frac{d}{df} X(f)$
$X(t)$	$x(-f)$	$t^n x(t)$	$\frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{df^n} X(f)$
$x(t) \cos(2\pi f_c t)$	$\frac{1}{2} [X(f + f_c) + X(f - f_c)]$	$\frac{1}{t} x(t)$	$-j2\pi \int_{-\infty}^f X(f') df'$
$x(t) \sin(2\pi f_c t)$	$\frac{j}{2} [X(f + f_c) - X(f - f_c)]$	$\int_{-\infty}^t x(t') dt'$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$
Para $x(t)$ compleja $x^*(t)$	$X^*(-f)$	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$

D.2. PARES DE TRANSFORMADAS DE HILBERT

Señal	Transformada	Señal	Transformada
$x(at + b)$	$\hat{x}(at + b)$	$\text{sinc}(at)$	$-\frac{at}{2} \text{sinc}^2(at)$
$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\hat{x}_1(t) + b\hat{x}_2(t)$	$\exp(\pm j2\pi f_c t)$	$\mp j \exp(\pm j2\pi f_c t)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$\frac{d^n}{dt^n} \hat{x}(t)$	$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
A (para todo t)	0	$\frac{a}{\pi(t^2 + a^2)}$	$\frac{t}{\pi(t^2 + a^2)}$
$\frac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$	$\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$	$\frac{1}{\pi} \text{Ln} \left \frac{t+1}{t-1} \right $
$\sin(2\pi f_c t + \phi)$	$-\cos(2\pi f_c t + \phi)$	$m(t) \cos(2\pi f_c t) \quad f_c \geq f_m$	$m(t) \sin(2\pi f_c t)$
		$m(t) \sin(2\pi f_c t) \quad f_c \geq f_m$	$m(t) \cos(2\pi f_c t)$

D.3. PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señal	Transformada	Señal	Transformada
$A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau\text{sinc}(\tau f)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
$A\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau\text{sinc}^2(\tau f)$	$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$
$\exp(-a t)$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	$r(t)$	$\frac{1}{(j2\pi f)^2}$
$t \exp(-at)u(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$	$\hat{x}(t)$	$-j\text{sgn}(f)X(f)$
$\exp[j(2\pi f_c t \pm \phi)]$	$\delta(f \mp f_c) \exp(j\phi)$	$\delta(t)$	1
$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi f^2)$	1	$\delta(f)$
$\cos(2\pi f_c t + \phi)$	$\frac{1}{2} [\delta(f + f_c) e^{-j\phi} + \delta(f - f_c) e^{j\phi}]$	$\delta(t \pm t_0)$	$\exp(\pm j2\pi t_0 f)$
$\text{sen}(2\pi f_c t + \phi)$	$\frac{j}{2} [\delta(f + f_c) e^{-j\phi} - \delta(f - f_c) e^{j\phi}]$	$2t\Pi(t)$	$\left[\frac{\cos(\pi f)}{\pi f} - \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi^2 f^2} \right]$

D.4. OTRAS FÓRMULAS DE INTERÉS

1. Coefficiente de Fourier:	$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt$
2. Teorema de Parseval:	$\text{Potencia} = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n ^2$
3. Teorema de Raleigh:	$\text{Energía} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$
4. Teorema de la Modulación para Señales de Energía:	$x_c(t) = x(t)A \cos(2\pi f_c t) \Leftrightarrow X_c(f) = \frac{A}{2} [X(f + f_c) + X(f - f_c)]$
5. Teorema de la Modulación para Señales de Potencia:	$x_c(t) = x(t)A \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow S_c(f) = \frac{A^2}{4} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)]$
6. Relación de Wiener-Kintchine:	$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \Leftrightarrow R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \exp(j2\pi f\tau) df$

APÉNDICE E

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

E.1. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓN	n	n PAR	n IMPAR	n/2 PAR	n/2 IMPAR
$\text{sen}(n\pi)$	0	0	0	0	0
$\text{cos}(n\pi)$	$(-1)^n$	+1	-1	+1	+1
$\text{sen}(n\pi / 2)$		0	$(-1)^{(n-1)/2}$	0	0
$\text{cos}(n\pi / 2)$		$(-1)^{n/2}$	0	+1	-1
$\text{sen}[(n \pm 1)\pi / 2]$		$\pm(-1)^{n/2}$	0		
$\text{cos}[(n \pm 1)\pi / 2]$		0	$\pm(-1)^{(n+1)/2}$		
$\text{sen}[(2n \pm 1)\pi / 2]$	$\pm(-1)^n$				
$\text{cos}[(2n \pm 1)\pi / 2]$	0				

$$\cos(\omega t) = \text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}[\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)]$$

$$\cos(\omega t / 2) = \sqrt{[1 + \cos(\omega t)] / 2}$$

$$\text{sen}(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2j}[\exp(j\omega t) - \exp(-j\omega t)]$$

$$\text{sen}(\omega t / 2) = \sqrt{[1 - \cos(\omega t)] / 2}$$

$$\exp(\pm j\omega t) = \cos(\omega t) \pm j\text{sen}(\omega t)$$

$$\cos^2(\omega t) = [1 + \cos(2\omega t)] / 2$$

$$\text{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$$

$$\text{sen}^2(\omega t) = [1 - \cos(2\omega t)] / 2$$

$$\cos(2\omega t) = 1 - 2\text{sen}^2(\omega t) = \cos^2(\omega t) - \text{sen}^2(\omega t)$$

$$\cos^3(\omega t) = [\cos(3\omega t) + 3\cos(\omega t)] / 4$$

$$\text{sen}(2\omega t) = 2\text{sen}(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\text{sen}^3(\omega t) = [-\text{sen}(3\omega t) + 3\text{sen}(\omega t)] / 4$$

$$\cos(\omega_1 t \pm \omega_2 t) = \cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) \mp \text{sen}(\omega_1 t)\text{sen}(\omega_2 t)$$

$$\text{sen}(\omega_1 t \pm \omega_2 t) = \text{sen}(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) \pm \cos(\omega_1 t)\text{sen}(\omega_2 t)$$

$$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\{\cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]\}$$

$$\text{sen}(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\{\text{sen}[(\omega_1 + \omega_2)t] + \text{sen}[(\omega_1 - \omega_2)t]\}$$

$$\text{sen}(\omega_1 t)\text{sen}(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t]\}$$

E.2. INTEGRALES INDEFINIDAS

$\int \operatorname{sen}(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax)$	$\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} e^{ax} (ax - 1)$
$\int \operatorname{sen}^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4a}$	$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{1}{a^3} e^{ax} [a \operatorname{sen}(ax) - 2ax + 2]$
$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2ax)}{4}$	$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} [a \operatorname{sen}(bx) - b \cos(bx)]$
$\int \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sen}^2(ax)$	$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} [a \cos(bx) + b \operatorname{sen}(bx)]$
$\int x \operatorname{sen}(ax) dx = \frac{1}{a^2} [\operatorname{sen}(ax) - ax \cos(ax)]$	$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right)$
$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} [\cos(ax) + ax \operatorname{sen}(ax)]$	$\int \frac{x^2 dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a}{b^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right)$
$\int x^2 \operatorname{sen}(ax) dx = \frac{1}{a^3} [2ax \operatorname{sen}(ax) - 2 \cos(ax) - a^2 x^2 \cos(ax)]$	
$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{2x \cos(ax)}{a^2} + \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right] \operatorname{sen}(ax)$	

E.3. INTEGRALES DEFINIDAS

$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(m\pi/n)} \quad n > m > 0$	$\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$	$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad n \geq 1, a > 0$
$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & n^2 < 1 \\ \pi/4 & n^2 = 1 \\ 0 & n^2 > 1 \end{cases}$	$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi} \quad a > 0$
$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$	$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$
$\int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \exp(- n)$	$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x) dx = \frac{a}{1+a^2} \quad a > 0$
$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x) dx = \int_0^\infty \operatorname{sinc}^2(x) dx = \frac{1}{2}$	$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen}(x) dx = \frac{1}{1+a^2} \quad a > 0$
	$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi} \cdot e^{-(b/2a)^2}$

E.4. LA FUNCION ERROR

La Función Error $\text{erf}(x)$ y la Función Error Complementaria $\text{erfc}(x)$ se definen mediante las integrales [Korn y Korn, 1968],

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz; \quad \text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-z^2) dz; \quad \text{erf}(x) + \text{erfc}(x) = 1$$

$$\text{erf}(\infty) = 1; \quad \text{erf}(-\infty) = -1; \quad \text{erf}(-x) = -\text{erf}(x); \quad \text{erfc}(-\infty) = 2; \quad \text{erfc}(\infty) = 0; \quad \text{erfc}(0) = 1.$$

En la figura se muestra $\text{erf}(x)$ y $\text{erfc}(x)$ para $-\infty < x < \infty$.

En algunos textos, en vez de la función $\text{erfc}(x)$,

$$\text{se utiliza la función } Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Las funciones $Q(y)$ y $\text{erfc}(x)$ se pueden relacionar mediante las expresiones

$$\text{erfc}(x) = 2 \cdot Q(\sqrt{2}x) \quad \text{o} \quad Q(y) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

En la Tabla siguiente se dan algunos valores de $\text{erfc}(x)$ para $1,5 \leq x \leq 4,45$ (Calculados con el programa MATHCAD)

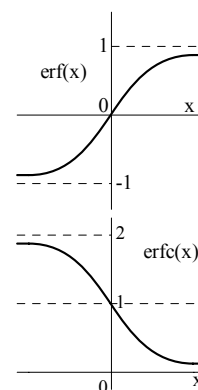


TABLA DE VALORES DE $\text{erfc}(x)$

x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)	x	erfc(x)
1,50	0,034	2,25	0,001	3,00	1,608E-5	3,75	7,7E-8
1,55	0,028	2,30	8,893E-4	3,05	1,165E-5	3,80	5,189E-8
1,60	0,024	2,35	6,885E-4	3,10	8,398E-6	3,85	3,479E-8
1,65	0,02	2,40	5,306E-4	3,15	6,026E-6	3,90	2,322E-8
1,70	0,016	2,45	4,07E-4	3,20	4,303E-6	3,95	1,542E-8
1,75	0,013	2,50	3,107E-4	3,25	3,058E-6	4,00	1,019E-8
1,80	0,011	2,55	2,36E-4	3,30	2,162E-6	4,05	6,7E-9
1,85	0,009	2,60	1,785E-4	3,35	1,522E-6	4,10	4,385E-9
1,90	0,007	2,65	1,343E-4	3,40	1,066E-6	4,15	2,855E-9
1,95	0,006	2,70	1,006E-4	3,45	7,431E-7	4,20	1,851E-9
2,00	0,005	2,75	7,501E-5	3,50	5,155E-7	4,25	1,193E-9
2,05	0,004	2,80	5,566E-5	3,55	3,559E-7	4,30	7,659E-10
2,10	0,003	2,85	4,11E-5	3,60	2,445E-7	4,35	4,892E-10
2,15	0,002	2,90	3,02E-5	3,65	1,672E-7	4,40	3,109E-10
2,20	0,001	2,95	2,209E-5	3,70	1,137E-7	4,45	1,966E-10

BIBLIOGRAFIA

- AARON, M.R. y TUFTS, D. W., “Intersymbol Interference and Error Probability”, IEEE Trans. on Information Theory, Vol.IT-12, Enero 1966.
- AMOROSO, F., “The Bandwidth of Digital Data Signals”, IEEE Communications Magazine, Vol. 18, No. 6, Noviembre 1980.
- APRILLE, T. J., “Filtering and Equalization for Digital Transmission”, IEEE Communications Magazine, Marzo 1983.
- ARRL SPREAD SPECTRUM SOURCEBOOK, The American Radio Relay League, Inc., 1991.
- ASH, R. B., “Information Theory”, Wiley Interscience, John Wiley and Sons, Nueva York, 1967
- BENDAT, J. S. y PIERSON, A. G., “Random Data: Analysis and Measurements Procedures”, Wiley-Interscience, Nueva York, 1971.
- BENEDETTO, S., BIGLIERI, E. y CASTELLANI, V., “Digital Transmission Theory”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1987.
- BENNET, W. R. y DAVEY, J. R., “Data Transmission”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1965.
- BLACKMAN, R. B. y TUKEY, J. W., “The Measurement of Power Spectra”, Dover, Nueva York, 1958.
- BRICEÑO, J. E., “Principios de las Comunicaciones”, Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, 1996.
- BRICEÑO, J.E., “Capacidad de Carga en Sistemas Multicanal de Pequeña y Mediana Densidad”, Nota de Aplicación, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Los Andes, Mérida, 1982.
- BRIGHAM, E.O., “The Fast Fourier Transform”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1974.
- BROOKS, J., “Telephone, The First Hundred Years”, Harpar and Row, Nueva York, 1976.
- BROWN, R. G. y NILSSON, J.W., “Introduction to Linear Systems Analysis”, John Wiley and Sons, Nueva York, 1962.
- CARLSON, A. B., “Communications Systems”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1986.
- CHAKRABORTY, D., “VSAT Communication Networks, An Overview”, IEEE Communications Magazine, Vol. 26, No. 5, Mayo 1988.
- COOLEY, J.W. y TUKEY, J. W., “An Algoritm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series”, Math. Computation, Vol. 19, Abril 1965.
- COOPER, G. R. y MCGILLEN, C. D., “Modern Communications and Spread Spectrum”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1986.
- COUCH, L. W., “Digital and Analog Communication Systems”, Maxwell Macmillan International Editions, Macmillan Publishing House, Nueva York, 1990.
- DAVENPORT, W. B. y ROOT, W. L., “An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1958.
- DAVEY, J. R., “Modems”, Proc. IEEE, Vol. 60, Noviembre 1972.
- DIXON, R. C., “Spread Spectrum Systems”, John Wiley and Sons, Nueva York, 1984.
- FELLER, W., “An Introduction to Probability Theory and its Applications”, John Wiley and Sons, Nueva York, 1957.

- FRANKS, L.E., "Teoría de la Señal", Editorial Reverté S.A., Barcelona (España), 1975.
- FRANKS, L. E., "Carrier and Bit Synchronization in Data Communications: A Tutorial Review", IEEE Trans. on Communications, Vol. COM-28, Agosto 1980.
- FREEMAN, R. L., "Reference Manual for Telecommunication Engineering". Segunda Edición. John Wiley and Sons, Nueva York, 1994.
- GABEL, R. A. y ROBERTS, R. A., "Signals and Linear Systems", Wiley International Edition, John Wiley and Sons, Nueva York, 1973.
- GARDNER, F. M. y LINDSEY, W. C., (Editores), "Special Issue on Synchronization", IEEE Transactions on Communications", Vol. COM. 28, No. 8, Agosto 1980.
- GOODYEAR, C. C., "Signals and Information", Butterworths and Co., Londres, 1971.
- GIBSON, J.D., "Principles of Digital and Analog Communications", Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1993.
- GREGG, W.D., "Analog and Digital Communication", John Wiley and Sons, Nueva York, 1977.
- HANCOCK, J. C., "The Principles of Communication Theory", McGraw-Hill Book. Co., Nueva York, 1961.
- HARMAN, W. W., "Principles of the Statistical Theory of Communication", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1963.
- HARTLEY, R. V. L., "Transmission of Information", Bell Syst. Tech. Journal, Vol. 7, No. 3, Julio 1928.
- HAYKIN, S., "Communication Systems", John Wiley and Sons, Nueva York, 1983.
- HOFFMANN, J. C., "Transmission du Signal", Ecole Supérieure d'Electronique, Toulouse, 1971.
- HOLMES, J. K., "Coherent Spread Spectrum", Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, Nueva York, 1982.
- HSU, H. P., "Fourier Analysis", Simon and Shuster, Nueva York, 1970.
- IEEE Communications Society, "100 Years of Communications Progress", IEEE Communications Magazine, Vol. 2, No. 5, Mayo 1984.
- KORN, G. y KORN, T., "Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968.
- JOHNSON, J.B., "Thermal Agitation of Electricity in Conductors", Physics Review, 32, 97-109, Julio, 1928.
- KORN G. y KORN T., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1968.
- KREYSZIG, E., "Advanced Engineering Mathematics", John Wiley and Sons, Nueva York, 1962.
- LATHI, B. P., "An Introduction to Random Signals and Communication Theory", International Textbook Co., Scranton (Pennsylvania), 1968.
- LATHI, B. P., "Modern Digital and Analog Communication Systems", Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1983.
- LINDSEY W. D. y SIMON, M. K., "Telecommunication Systems", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1973.
- LUCKY, R. W., SALZ, J. y WELDON, E. J., "Principles of Data Communication", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1968.
- MAX, J., "Méthodes et Techniques de Traitement du Signal et Applications aux Mesures Physiques", Masson y Compañía, París, 1972.

- MIDDLETON, D., "An Introduction to Statistical Communication Theory", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1960.
- MILLER, G.M., "Modern Electronic Communication", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1993.
- NYQUIST, H., "Certain Factors Affecting Telegraph Speed", Bell Syst. Tech. J., Vol. 3, Abril 1924.
- NYQUIST, H., "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", Transactions of the AIEE, Vol. 47, Febrero 1928.
- NYQUIST, H., "Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors", Physics Review, 32, 110-113, Julio, 1928.
- OPPENHEIM, A.V. y SHAFER, R. W., "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1975.
- PANTER, P. F., "Modulation, Noise and Spectral Analysis", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1965.
- PAPOULIS, A., "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1965.
- PAPOULIS, A., "Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación Espectral", Marcombo Boixareu Editores, Barcelona (España), 1978.
- PEEBLES, P. Z., "Communication System Principles", Addison-Wesley Publishing Co., Reading (Mass), 1976.
- PIETROSEMOLI, E., "Transmisión por Fibras Ópticas", Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes, Mérida, 1994.
- PICKHOLTZ, R. L., SCHILLING, D. L. y MILSTEIN, L. B., "Theory of Spread-Spectrum Communications: A Tutorial", IEEE Trans. Commun., Vol. COM-30, Mayo 1982.
- PIERCE, J.R., "Símbolos, Señales y Ruidos", Revista de Occidente, Madrid, 1962.
- PIERCE, J. R. y POSNER, E. C., "Introduction to Communication Science and Systems", Plenum Press, Nueva York, 1980.
- PROAKIS, J. G., "Digital Communication", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1989.
- RABINER, L. R. y GOLD, B., "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1975.
- RISTENBATT, M. P., "Alternatives in Digital Communications", Proc. IEEE, Junio 1973.
- RODEN, M. S., "Introduction to Communication Theory", Pergamon Press Inc., Nueva York, 1972.
- RODEN, M. S., "Digital Communication Systems Design", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1988.
- SARWATE, D. V. y PURSLEY, M. B., "Crosscorrelation Properties of Pseudorandom and Related Sequences", Proc. IEEE, Vol. 68, Mayo 1980.
- SCHWARTZ, M., BENNET, W. R. y STEIN S., "Communication Systems and Techniques", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1966.
- SCHWARTZ, M., "Information Transmission, Modulation, and Noise", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1990.
- SHANMUGAN, K. S., "Digital and Analog Communication", John Wiley and Sons, Nueva York, 1979.
- SHULZE, H. y LUDERS, C., "Theory and Applications of OFDM and CDMA", John Wiley and Sons, The Atrium, Inglaterra, 2005.

- SHANNON, C.E., “Communications in the Presence of Noise”, Proc. IRE, Vol. 37, Enero 1949.
- SKLAR, B., “A Structured Overview of Digital Communications: A Tutorial Review”, Partes I y II, IEEE Communications Magazine, Agosto y Octubre, 1983.
- SMITH, J. R., “Modern Communication Circuits”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1986.
- SPATARU, A., “Théorie de la Transmission de l’Information: I Signaux et Bruits”, Masson y Compañía, París, 1970.
- STARK, H., TUTEUR, F.B. y ANDERSON, J.B., “Modern Electrical Communications”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1988.
- STERN, J., BARBEYRAC, J. y POGGI R., “Méthodes Pratiques d’Étude des Fonctions Aléatoires”, Dunod, París, 1967.
- STREMLER, F.G., “Introduction to Communication Systems”, Addison-Wesley Publishing Co., Reading (Mass), 1982.
- TAUB, H. y SCHILLING, D. L., “Principles of Communication Systems”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1986.
- TOMASI, W., “Sistemas de Comunicaciones Electrónicas”, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A. México, 1996.
- TURING, G., “An Introduction to Digital Matched Filters”, Proceedings of the IEEE, Vol. 64, No. 7, Julio 1976.
- WOZENCRAFT J. M. y JACOBS, I. M., “Principles of Communication Engineering”, John Wiley and Sons, Nueva York, 1965.
- WYLIE, C. R., “Advanced Engineering Mathematics”, McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1960.
- ZIEMER R.E. y PETERSON, R. L., “Digital Communication and Spread Spectrum Systems”, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1985.
- ZIEMER, R. E. y TRANTER, W. H., “Principios de Comunicaciones: Sistemas, Modulación y Ruido”, Editorial Trillas, México, 1981.
- ZIEMER, R. E., TRANTER, W. H. y FANNIN D.R., “Signals and Systems”, Macmillan