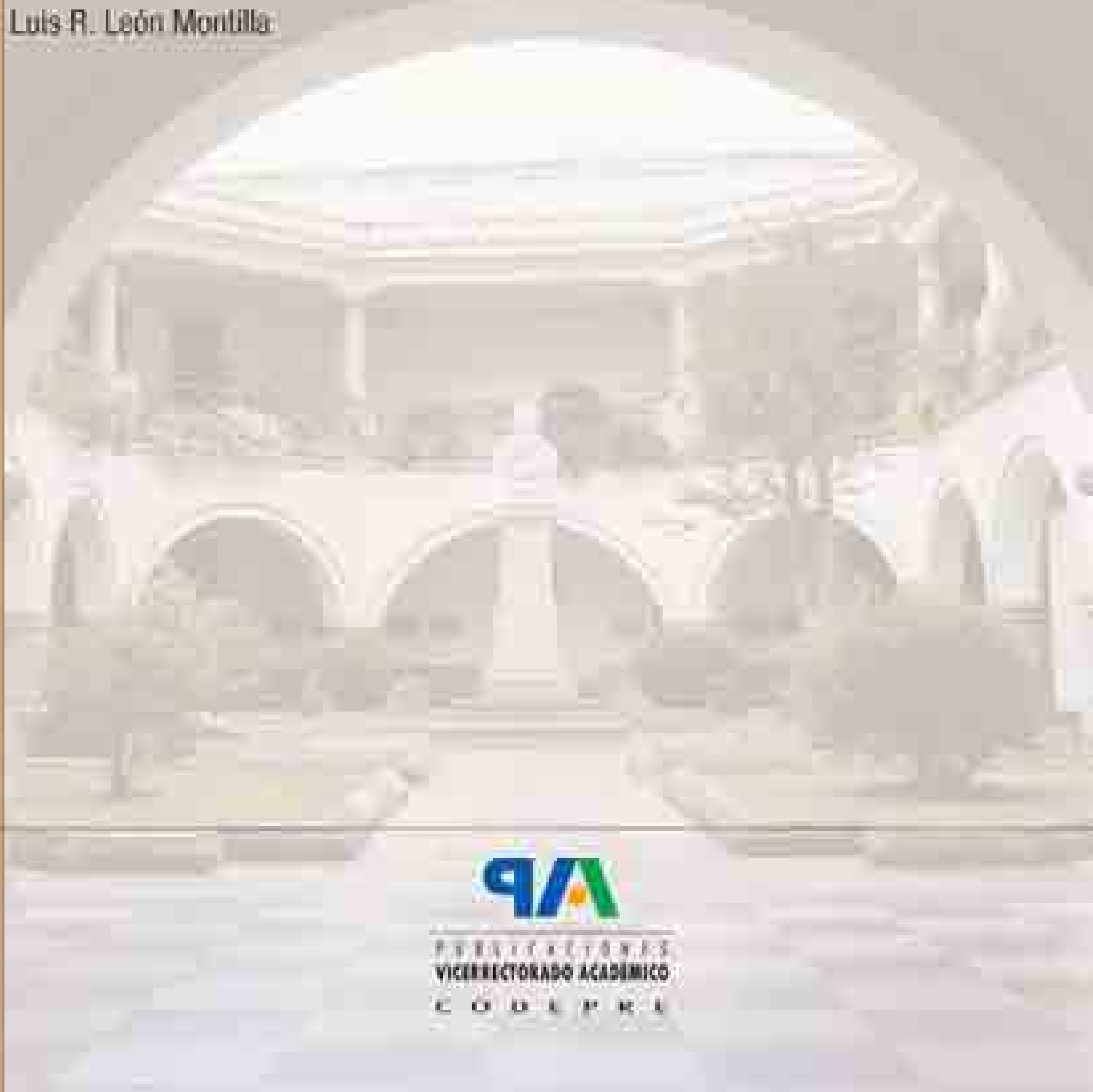
universitarios

textos

Análisis funcional I

Luis R. León Montilla



PUBLICACIONES
VICERRECTORADO ACADÉMICO
CODEPRE

Análisis funcional I

LUIS R. LEÓN MONTILLA

Universidad de Los Andes
Consejo de Publicaciones
Mérida - Venezuela
2008

Primera edición digital 2011

Hecho el depósito de ley

Universidad de Los Andes
Av. 3 Independencia
Edificio Central del Rectorado
Mérida, Venezuela
publicacionesva@ula.ve
publicacionesva@gmail.com
www2.ula.ve/publicacionesacademico

Los trabajos publicados en esta Colección han sido rigurosamente seleccionados y arbitrados por especialistas en las diferentes disciplinas

A mis padres, esposa e hijos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a Dios, mi Señor Jesuscrito primeramente. También a la institución de publicaciones de la Universidad de Los Andes CODEPRE, la cual brindó el apoyo financiero para la impresión de este texto.

También al Sr. Antonio Vizcaya Pinto por su paciencia y dedicación para la transcripción en Latex del manuscrito original.

A la profesora Patricia Rosenzweig, decana de la Facultad de Ciencias y al profesor Carlos Cova S, jefe del Departamento de Matemáticas de nuestra Universidad de Los Andes, quienes dieron su aval para la solicitud del presupuesto a CODEPRE.

El autor

Introducción

Podemos decir actualmente que el análisis funcional es la tendencia abstracta del análisis, la cual comenzó a ser desarrollada por algunos matemáticos europeos en los años de las dos primeras decadas del pasado siglo XX. Entre esos matemáticos destacan Fredholm, Volterra, Hilbert y Riesz. Inicialmente, estos matemáticos resolvieron problemas de ecuaciones integrales, autovalores de operadores y desarrollos ortogonales.

También uno de los principales pioneros en el desarrollo de esta rama de la Matemática, fue el polaco S. Banach, el cual compaginó en su libro publicado en el año de 1932 y reeditado en 1987 con título *Theory of linear operations* [1] muchos de los principales resultados conocidos hasta ese tiempo.

Nuestro propósito fundamental al redactar este libro es desarrollar algunos tópicos básicos del análisis funcional tratando, digamos a un nivel intermedio, la teoría de los espacios normados, la de los espacios de Banach, y también la de los operadores lineales acotados.

Nuestro texto se desarrolla en tres capítulos. El primero, el cual llamamos " Espacios normados," se ha dividido en cuatro secciones. A nuestra primera sección se la ha denominado "Definiciones y resultados preliminares" porque allí damos algunas de las nociones de uso más frecuente en el análisis funcional como el de conjunto absorbente, balanceado y convexo, capsula convexa, norma, espacio normado y algunas propiedades de la norma. También se dan algunos conceptos topológicos, habiendo definido previamente la topología fuerte de un espacio normado.

En la segunda sección se da inicialmente el concepto de sucesión en un espacio normado para después pasar a caracterizar los elementos de la clausura de un subconjunto de un espacio normado como límites de sucesiones de elementos de éste. También, introduciendo previamente el concepto de función continua de un espacio topológico (X, τ_1) en otro (Y, τ_2), se muestra un Teorema de Continuidad Global, y después una consecuencia de éste, el Teorema de Conservación de Compacidad.

La sección 1.3 contiene una buena lista de ejercicios propuestos como ejemplos y en cada uno de ellos hemos dado los detalles de la solución. Finalmente, la última sección presenta una variedad de ejercicios que el lector debe resolver (en algunos de los cuales se introducen nuevos conceptos).

El segundo capítulo trata sobre espacios de Banach. En la sección 2.1 se demuestran las desigualdades clásicas de Holder y de Holder - Minkowsky; en la seccion 2.2 se da la noción de espacio de Banach dada por S. Banach. Entre otras proposiciones y resultados mostramos un Teorema de Caracterización para Espacio de Banach (Teorema 2.9).

En la sección 2.3 damos algunos ejemplos de espacios de Banach. Entre otros mostramos, con respecto a una norma definida previamente, la completitud de los espacios de sucesiones

$$l^p \ (p \geq 1); \quad c_0; \quad \text{y} \quad l_\infty$$

También en nuestra sección 2.4, además de definir espacio de Banach separable, damos una Demostración del Lema de Riesz y la (2.5) presenta nuestra lista de ejercicios.

El tercer capítulo trata sobre operadores lineales acotados. En la primera sección se ha motivado el concepto de acotación de un operador lineal, del hecho de que toda transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es acotada. Introduciendo pués para un operador lineal T las nociones de acotación y continuidad se muestra en la proposición 3.3 que:

$$T \ \text{ es acotado} \Longleftrightarrow T \ \text{ es continuo.}$$

Ahora bien, definiendo los espacios $L(X, Y)$ y $B(X, Y)$ mostraremos en el teorema 3.6 que $B(X, Y)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

En la sección 3.2, específicamente en el teorema 3.11, mostramos que en *Dimensión finita todas las normas son equivalentes.* También damos el importante concepto de operador cerrado.

La sección 3.3 da una lista de ejemplos de operadores lineales acotados. Entre otros, destacan el operador de Fredholm, el operador Shift (a la izquierda y a la derecha) y la proyección canónica. Mostramos como un ejemplo también un teorema de extensión de operadores y dando la definición de operador compacto se muestra que el operador de Fredholm lo es.

Al final en la sección 3.4 presentamos nuestra lista de ejercicios a resolverse.

Esperamos que este texto sea de utilidad para aquellos estudiantes que comienzan con el estudio de esta importante área de las Matemáticas.

Índice general

Capítulo 1

Espacios normados

1.1. Definiciones y resultados preliminares

Comenzaremos esta sección recordando el concepto de espacio vectorial, por ser ésta una de las más importantes estructuras algebraícas que son objeto de estudio en el Análisis Funcional lineal.

En lo que sigue, a menos que explícitamente se especifique lo contrario, el símbolo $\mathcal{F}$ denotará el cuerpo de los números reales ó complejos.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto no vacío (abstracto). Supóngase que en el conjunto $X \times X$ está definida una operación llamada "suma" y en $\mathcal{F} \times X$ otra operación denominada multiplicación por escalar, tal que si*

$(x, y) \in X \times X$ y $(\alpha, x) \in \mathcal{F} \times X$ el resultado de cada una de éstas operaciones sobre éstos elementos es otro elemento de X denotado por $x + y$ y αx respectivamente, y que además se verifican las siguientes propiedades:

(P_1) $x + y = y + x, \quad \forall\, x, y \in X$ *(Propiedad conmutativa).*

(P_2) $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall\, x, y, z \in X$ *(Propiedad asociativa).*

(P_3) *Existe un único elemento en X denotado por 0 y tal que*

$$x + 0 = 0 + x, \qquad \forall\, x \in X.$$

Este elemento se llama el elemento neutro para la suma.

(P_4) *Para cada $x \in X$, existe un único elemento $-x \in X$ tal que:*

$$x + (-x) \;=\; (-x) + x \;=\; 0.$$

El elemento $-x$ se llama el simétrico aditivo de $x \in X$

(P_5) $1x \;=\; x, \qquad \forall\, x \in X, \quad 1$ *es la identidad de* $\mathcal{F}$

(P_6) $\alpha(\beta x) \;=\; (\alpha\beta)x, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \quad x \in X$

(P_7) $(\alpha + \beta)x \;=\; \alpha x + \beta x, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \quad x \in X$

(P_8) $\alpha(x + y) \;=\; \alpha x + \alpha y, \qquad \alpha \in \mathcal{F}, \quad x, y \in X.$

Entonces, X se llama un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{F}$. Los elementos de X se llaman vectores.

Observación 1.1 *(a) Se supone que el lector de este libro está familiarizado con los hechos básicos de la teoría de espacios vectoriales. De todas formas recomendamos tener a la mano un libro de Álgebra lineal, por ejemplo [7], en el momento de leerlo.*

(b) Las operaciones de suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial X inducen las funciones:

$$\varphi_1 : X \times X \longrightarrow X$$

y

$$\varphi_2 : \mathcal{F} \times X \longrightarrow X$$

definidas por

$$\varphi_1(x, y) \;=\; x + y$$
$$\varphi_2(\alpha, x) \;=\; \alpha x$$

respectivamente.

Definición 1.2 *Sea X un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío S de X se llama un subespacio vectorial de X si:*

$$\alpha x + \beta y \in S \qquad \forall\, x, y \in X, \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{F}.$$

Así, si S es un subespacio vectorial de X, entonces, $0 \in S$.

Definición 1.3 *Sean X un espacio vectorial, $x_0 \in X$ y $\lambda \in \mathcal{F}$. Entonces, si A es un subconjunto no vacío de X, definimos:*

(a) $x_0 + A \;:=\; \{x_0 + a : \; a \in A\}$

(b) $x_0 - A \;:=\; \{x_0 - a : \; a \in A\}$

(c) $\lambda A \;:=\; \{\lambda a : \; a \in A\}$

Si B es otro subconjunto no vacío de X, entonces:

(d) $A + B \;:=\; \{a + b : \; a \in A, \; b \in B\}$

Definición 1.4 *Un subconjunto A de un espacio vectorial X se dice:*

(a) *Convexo: Si el "segmento de recta" $\lambda x + (1-\lambda)y$ queda contenido en A, $\forall\, x, y \in A$, $0 \leq \lambda \leq 1$, esto es:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A, \quad \forall\, x, y \in A, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

(b) *Balanceado: Si $\lambda A \subset A$, cuando $|\lambda| \leq 1$.*

(c) *Absorbente: Si para cada $x \in X$, existe un $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$.*

Con el propósito de caracterizar los subconjuntos convexos de un espacio vectorial damos la siguiente definición:

Definición 1.5 *Sea X un espacio vectorial. Un $x \in X$ se dice una combinación convexa de los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en $\mathbb{R}$ con $\lambda_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ tal que:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Proposición 1.1 *Un subconjunto K de un espacio vectorial X es convexo si y sólo si cualquier combinación convexa de puntos de K es un punto de K.*

Demostración

($\Leftarrow$) Sean $x, y \in K$. Entonces, por la hipótesis el elemento

$$z = \lambda x + (1 - \lambda) y \in K,$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$. Así, K es convexo.

($\Rightarrow$) Supóngase que K es convexo y $S := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un número finito cualquiera de elementos de K.

Procederemos por inducción sobre n.
Si $n = 1$, es evidente.
Si $n = 2$, y $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces, es claro que $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ y $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ y así

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K.$$

Supóngase que el resultado es cierto para n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en K, esto es,

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \in K, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

Sea $x_{n+1} \in K$. *Veamos que:*

$r = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in K, \ \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

Consideremos los casos siguientes:

Caso 1. *Cuando* $\lambda_{n+1} = 1$, *entonces,* $\lambda_i = 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *y así,* $r \in K$.

Caso 2. *Cuando* $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$. *Sea*

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$$

Luego, por la hipótesis de inducción,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \in K$$

y ya que K *es convexo, entonces,*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + (1 - (1 - \lambda_{n+1}))\, x_{n+1} \in K$$

lo cual concluye la demostración. ■

A continuación introducimos el importante concepto de cápsula convexa.

Definición 1.6 *Sea A un subconjunto no vacío de un espacio vectorial X. La cápsula convexa de A denotada por co(A) es:*

$$co(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \quad x_i \in X, \ \ \alpha_i \geq 0 \ \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Es fácil verificar usando la caracterización dada en la proposición anterior que co(A) es un subconjunto convexo de X, y además es el convexo "más pequeño" de X que contiene a A, esto es,

$$\operatorname{co}(A) := \bigcap_{\substack{A_\alpha \text{ convexo} \\ A_\alpha \supset A}} A_\alpha$$

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial X es fácil verificar que el conjunto:

$$\operatorname{sp}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \ x_i \in A, \ \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

es un subespacio vectorial de A, y se llama el subespacio vectorial real generado por A. Note que co$(A) \subset$ sp(A).

A continuación se introduce el importante concepto de norma sobre un espacio vectorial.

Definición 1.7 *Sea X un espacio vectorial. Una función,*

$$\begin{aligned} ||\cdot|| \ : \ X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

que verifique las siguientes propiedades:

(A1) $||x|| \geq 0$ *y* $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(A2) $||\lambda x|| \;=\; |\lambda| \; ||x||, \quad \lambda \in \mathcal{F}, \quad x \in X$

(A3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall \, x, y \in X,$

se llama una norma sobre X. Al par $(X, ||\cdot||)$ se le llama un espacio normado.
La propiedad (A3) se llama la desigualdad triangular.

Toda norma verifica la importante desigualdad dada en la siguiente proposición

Proposición 1.2 *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. Entonces,*

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||, \quad \forall \, x, y \in X$$

Demostración

Recordemos que si $a > 0$, entonces:

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Así,

$$\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y|| \Longleftrightarrow -||x - y|| \leq ||x|| - ||y|| \leq ||x - y||.$$

Expresando:
$x \;=\; (x - y) + y, \quad$ entonces $\;||x|| \;=\; ||(x - y) + y|| \leq ||x - y|| + ||y||.$

Luego, $\quad ||x|| - ||y|| \leq ||x - y||.$

Expresando:
$y \;=\; (y - x) + x, \quad$ entonces $\;||y|| \leq ||y - x|| + ||x||$, luego

$||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| \ = \ ||x - y||$, esto es, $-||x - y|| \leq ||x|| - ||y||$, lo que concluye la demostración. ■

Con la finalidad de definir una topología en un espacio normado $(X, || \cdot ||)$ recordaremos la definición siguiente:

Definición 1.8 *Sea X un conjunto no vacío. Una función*

$$d \ : \ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \ \longmapsto d(x, y)$$

se llama una métrica sobre X si verifica las siguientes propiedades:

(A1) $d(x, y) \geq 0$ *y* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x \ = \ y$

(A2) $d(x, y) \ = \ d(y, x), \ \forall x, y \in X$

(A3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \ \forall x, y, z \in X$ *(Desigualdad triangular)*

Al par (X, d) se le llama un espacio métrico.

Proposición 1.3 *Sea $(X, || \cdot ||)$ un espacio normado. La función.*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x, y) \ = \ ||x - y||, \quad x, y \in X$$

es una métrica sobre X.

Demostración

Es fácil verificar (A1) y (A2). Por otra parte, como

$$\begin{aligned} d(x, y) \ = \ ||x - y|| \ &= \ ||x - z + z - y|| \\ &\leq \ ||x - z|| + ||z - y|| \ = \ d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

$\forall\, x, y, z \in X$, obtenemos también que (A3) es cierta.
Así, todo espacio normado es un espacio métrico, con la métrica

$$d(x, y) \;=\; ||x - y||, \qquad x, y \in X$$

$\blacksquare$

Definición 1.9 *Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X se llama una topología para X si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(A1) $\phi, X \in \tau$

(A2) *Si* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \tau$, *donde I es un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria,* $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$

(A3) *Si* $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{n} \subset \tau$, *entonces* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

Al par (X, τ) se le llama un espacio topológico. Los elementos de la colección τ se llaman conjuntos abiertos.
Si (X, τ) es un espacio topológico, un subconjunto B de X se llama cerrado si su complemento $B^c := X \backslash B$ es abierto en X, esto es $B^c \in \tau$

Definición 1.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

(a) *Una vecindad de un $x \in X$ es un subconjunto G de X, que contiene algún abierto A que contiene a $\{x\}$, esto es,*

$$x \in A \subset G$$

(b) *La topología τ se dice Hausdorff (ó T_2) si dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen vecindades V_x de x y V_y de y tal que*

$$V_x \cap V_y \;=\; \phi$$

Definición 1.11 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado, y* d *la métrica inducida por la norma* $||\cdot||$. *Sean* $x_0 \in X$, *y* $r > 0$. *Entonces,*

(a) *La bola abierta de centro* x_0 *y radio* r *es:*

$$B(x_0, r) := \left\{ x \in X \ : \ d(x, x_0) \ = \ ||x - x_0|| < r \right\}$$

(b) *La bola cerrada de centro* x_0 *y radio* r *es:*

$$\overline{B}(x_0, r) := \left\{ x \in X \ : \ d(x, x_0) \ = \ ||x - x_0|| \leq r \right\}$$

Definición 1.12 *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado. Un subconjunto no vacío* A *de* X *se dice abierto si para cada* $x \in A$ *existe un* $r_x > 0$ *tal que:*

$$B(x, r_x) \subset A$$

El conjunto vacío ϕ *lo consideramos como un abierto en* X *ya que inicialmente no existe ningún elemento en él que niegue nuestra definición.*

Proposición 1.4 *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado. Entonces,*

(a) X *es un conjunto abierto.*

(b) *Si* $x_0 \in X$, *y* $r > 0$, *entonces* $B(x_0, r)$ *es un conjunto abierto.*

(c) $\overline{B}(x_0, r)$ *es un conjunto cerrado en* X.

Demostración

(a) *Evidente.*

(b) *Sea* $x_1 \in B(x_0, r)$*. Tomemos* $r_1 = r - d(x_0, x_1)$*, entonces* $r_1 > 0$ *y si* $z \in B(x_1, r_1)$ *vamos a tener que:*

$$\begin{aligned} d(z, x_0) = ||z - x_0|| &= ||z - x_1 + x_1 - x_0|| \\ &\leq ||z - x_1|| + ||x_1 - x_0|| \\ &< r_1 + ||x_1 - x_0|| \\ &= r - d(x_0, x_1) + ||x_1 - x_0|| = r \end{aligned}$$

Por tanto, $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$ *y así* $B(x_0, r)$ *es abierto en* X*.*

(c) *Para verificar que* $\overline{B}(x_0, r)$ *es un conjunto cerrado, mostraremos entonces que:*

$$\overline{B}^c(x_0, r) := \left\{ z \in X \ : \ d(z, x_0) = ||z - x_0|| > r \right\}$$

es un conjunto abierto. En efecto, sea $z_0 \in \overline{B}^c(x_0, r)$ *y tomemos* $r_1 = d(x_0, z_0) - r > 0$*. Afirmamos que* $B(z_0, r_1) \subset \overline{B}^c(x_0, r)$*. En efecto, sea* $z \in B(z_0, r_1)$*. Entonces,*

$$||z_0 - x_0|| = ||z_0 - z + z - x_0|| \leq ||z_0 - z|| + ||z - x_0||,$$

como $||z_0 - x_0|| = r_1 + r$*, obtenemos:*

$$r_1 + r \leq ||z_0 - z|| + ||z - x_0|| < r_1 + ||z - x_0||$$

esto es, $||z - x_0|| > r$*, lo que concluye la demostración.* ■

Proposición 1.5 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* τ *la siguiente colección de subconjuntos de* X

$$\tau := \left\{ E \subset X : E \text{ es abierto en el sentido de la definición 1.6} \right\}$$

Entonces τ es una topología para X y se llama la topología fuerte de X.

Demostración

Debemos verificar los axiomas (A1), (A2) y (A3) de la definición 1.9. La propiedad (A1) es evidente.

Verificaremos (A2). Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$. Veamos que $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$. En efecto, si $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, entonces $x \in A_{\alpha_0}$ para algún índice α_0. Como A_{α_0} es abierto, existe un $r_{\alpha_0} > 0$ tal que $B(x, r_{\alpha_0}) \subset A_{\alpha_0}$, y por tanto

$$B(x, r_{\alpha_0}) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Verificaremos ahora (A3). Sea $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \tau$, y $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n A_i$. Entonces, $x \in A_i$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, y por tanto existe $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $B(x, \gamma_i) \subset A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$, entonces $B(x, \gamma) \subset A_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y por tanto

$$B(x, \gamma) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$$

■

Proposición 1.6 *La topología τ dada la proposición 1.5 es Hausdorff (ó T_2).*

Demostración

Sean $x, y \in X, x \neq y$. Entonces $d(x, y) = ||x - y|| > 0$. Tómese

$$\gamma \; = \; \frac{||x-y||}{4}$$

Afirmamos que $B(x,\gamma)\bigcap B(y,\gamma) \; = \; \phi$. *En efecto, si en caso contrario* $B(x,\gamma)\bigcap B(y,\gamma) \neq \phi$, *existiría un* $z \in B(x,\gamma)\bigcap B(y,\gamma)$, *luego*

$$||x-y|| \; = \; ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| < \frac{||x-y||}{4} + \frac{||x-y||}{4}$$

lo cual es una contradicción. ∎

Definición 1.13 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Entonces*

(a) *El interior de* A *denotado por* $int(A)$ *es:*

$$int(A) := \Big\{ x \in A \; : \; \text{existe un } \gamma > 0 \text{ tal que } B(x,\gamma) \subset A \Big\}$$

(b) *La frontera de* A, *denotada por* ∂A *es:*

$$\partial A := \Big\{ x \in X \; : \; \text{para cada } r > 0, \; B(x,r) \cap A \neq \phi, \; B(x,r) \cap A^c \neq \phi \Big\}$$

(c) *El exterior de* A *denotado por* $ext(A)$ *es:*

$$ext(A) := \; int(A^c)$$

Definición 1.14 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Un* $x_0 \in X$ *se llama un punto de acumulación de* A *si cada vecindad de* x_0 *contiene un punto de* A *diferente de* x_0

Nota 1.1 *La definición 1.14 expresa que si* V_{x_0} *es cualquier vecindad de* x_0 *en* $(X, ||\cdot||)$, *entonces*

$$\widehat{V}_{x_0} \cap A \neq \phi$$

donde $\widehat{V}_{x_0} := V_{x_0} \backslash \{x_0\}$. *Ya que* $B(x_0, r)$ *es una vecindad de* x_0, *para cada* $r > 0$, *entonces* x_0 *es un punto de acumulación de* A *si y sólo sí*

$$\widehat{B}(x_0, r) \cap A \ \neq \ \phi$$

donde también

$$\widehat{B}(x_0, r) \ := \ B(x_0, r)\backslash\{x_0\}$$

Denotamos por:

$$A' := \left\{ x \in X \ : \ x \text{ es un punto de acumulación de } A \right\}$$

Definición 1.15 *Un subconjunto* A *de un espacio normado* $(X, ||\cdot||)$ *se dice acotado si existe un* $M > 0$ *tal que:*

$$\|x\| \leq M, \ \ \forall\, x \in A.$$

Es claro que $B(x_0, r)$ *y* $\overline{B}(x_0, r)$ *son subconjuntos acotados.*

La siguiente proposición nos permite caracterizar los subconjuntos cerrados en un espacio normado.

Proposición 1.7 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Entonces,*

$$A \text{ es cerrado } \Longleftrightarrow A' \subset A$$

Demostración

($\Rightarrow$) *Supóngase que* A *es cerrado en* $(X, ||\cdot||)$ *pero* $A' \not\subset A$. *Entonces, existe algún* $x \in A'$ *tal que* $x \notin A$. *Luego* $x \in A^c$ *y como* A *es cerrado,* A^c *es abierto, por tanto existe un* $r > 0$ *tal que:*

$$B(x, r) \subset A^c$$

Pero por otra parte, como $x \in A'$,

$$\widehat{B}(x, r) \cap A \neq \phi$$

se sigue entonces, que $A \cap A^c \neq \phi$ *lo cual es una contradicción. Así,* $A' \subset A$.

($\Leftarrow$) *Recíprocamente, sea* $A' \subset A$ *y* $x \in A^c$. *Entonces* $x \notin A$ *y así también por la hipótesis* $x \notin A'$, *luego existe un* $r > 0$ *tal que*

$$\widehat{B}(x, r) \cap A \ = \ \phi$$

En consecuencia, $B(x, r) \subset A^c$, *con lo cual concluimos que* A^c *es abierto, y así* $(A^c)^c \ = \ A$ *es cerrado.* ■

Seguidamente damos la importante definición de clausura de un subconjunto de un espacio normado.

Definición 1.16 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$.

La clausura de A *denotada por* $\overline{A}$ *es el conjunto cerrado más pequeño de* X *que contiene a* A, *esto es, si:*

$$\mathcal{F} \text{ es otro cerrado en } (X, ||\cdot||) \text{ tal que } \mathcal{F} \supset A, \text{ entonces } \mathcal{F} \supset \overline{A}.$$

Es claro que

$$\overline{A} \;=\; \bigcap_{\substack{\mathcal{F}_\alpha \ cerrado \\ \mathcal{F}_\alpha \supset A}} \mathcal{F}_\alpha$$

Además,

$$A \text{ es cerrado} \Longleftrightarrow \overline{A} = A$$

Queremos ahora mostrar que

$$\overline{A} \;=\; A \cup A'$$

Para esto mostraremos inicialmente la siguiente:

Proposición 1.8 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Entonces* $A \cup A'$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración

Veamos que $(A \cup A')^c$ *es un conjunto abierto. En efecto, sea*

$$x \in (A \cup A')^c := A^c \cap (A')^c$$

Entonces $x \in A^c$ *y* $x \in (A')^c$, *y así* $x \notin A$ *y* $x \notin A'$. *De la definición de* A' *existe un* $\epsilon > 0$ *tal que* $B(x, \epsilon) \cap A := \phi$ *y así,* $B(x, \epsilon) \subset A^c$. *Afirmamos ahora que* $B(x, \epsilon) \subset (A')^c$. *En efecto, sea* $y \in B(x, \epsilon)$. *Como* $B(x, \epsilon)$ *es un conjunto abierto, existe un* $r > 0$ *tal que* $B(y, r) \subset B(x, \epsilon)$. *Ahora bien, como* $B(x, \epsilon) \cap A \;:=\; \phi$, *también* $B(y, r) \cap A := \phi$, *y por tanto* $y \notin A'$, *luego* $y \in (A')^c$. *Como* y *es arbitrario en* $B(x, \epsilon)$ *se concluye que* $B(x, \epsilon) \subset (A')^c$, *lo cual finaliza la demostración.* ∎

Proposición 1.9 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Entonces*

$$\overline{A} \;:=\; A \cup A'$$

Demostración

Tenemos que:

$$\overline{A} \ := \ A \cup A' \Leftrightarrow \overline{A} \subset A \cup A' \subset \overline{A}$$

Como $A \cup A'$ *es cerrado por la proposición anterior y* $A \cup A' \supset A$*, se sigue que* $A \cup A' \supset \overline{A}$*. Por otra parte, si* $x \in A \cup A'$*, entonces* $x \in A$ *ó* $x \in A'$*. Si* $x \in A$*, también* $x \in \overline{A}$*, y si* $x \in A'$ *se tiene que*

$$\widehat{B}(x, \epsilon) \cap A \neq \phi \quad \textit{para cada} \quad \epsilon > 0$$

y así

$$\widehat{B}(x, \epsilon) \cap \overline{A} \neq \phi \quad \textit{para cada} \quad \epsilon > 0$$

Esto es, $x \in (\overline{A})'$*. Como* $\overline{A}$ *es un conjunto cerrado se sigue de la proposición 1.9 que* $x \in \overline{A}$*.* ∎

Hasta aquí la primera sección del capítulo 1.

1.2. Continuidad

Esta sección contiene algunas caracterizaciones de función continua definida sobre un subconjunto de un espacio normado en otro. También mostraremos un importante teorema sobre continuidad global (Teorema 1.21).

Inicialmente comenzamos dando la siguiente

Definición 1.17 *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado. Una sucesión en* X *es el rango de una función:*

$$\begin{aligned} f: \ \ \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto f(n) \ = \ x_n \end{aligned}$$

x_n *se llama el término n-ésimo de la sucesión. El rango lo denotamos por* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *y lo llamamos una sucesión en* X*. Si* $\left\{n_k \ : \ k \in \mathbb{N}\right\}$ *es un subcon-*

junto de $\mathbb{N}$ *tal que* $n_1 < n_2 \ldots$, *entonces* $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *se llama una subsucesión de la sucesión* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$

Definición 1.18 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X. *Decimos que* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente a un* $x \in X$ *si dado* $\epsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$||x_n - x|| < \epsilon \qquad si \qquad n \geq n_0$$

En caso contrario se dice que $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *no es convergente (ó divergente).*

Si $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente a* $x \in X$, *decimos también que* x *es el límite de* x_n *cuando* $n \to \infty$ *y escribimos,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ = \ x \ \textit{en la topología de la norma} \ || \cdot ||$$

Es claro por el hecho de ser la topología inducida por la norma T_2 *que si* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente, su límite es único.*

Proposición 1.10 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión convergente en* X. *Entonces,* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada.*

Demostración

Veamos que existe un $M > 0$ *tal que* $||x_n|| \leq M$ *para* $n = 1, 2, \ldots$. *Sea,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ = \ x.$$

Entonces, dado $\varepsilon = 1$, *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$||x_n - x|| < 1 \qquad si \qquad n \geq n_0,$$

pero por la proposición 1.2,

$$\Big| ||x_n|| - ||x|| \Big| \leq ||x_n - x|| < 1, \qquad si \qquad n \geq n_0$$

Luego,

$$-1 < ||x_n|| - ||x|| < 1 \qquad si \qquad n \geq n_0$$

esto es,

$$||x_n|| < 1 + ||x|| \qquad si \qquad n \geq n_0.$$

Sea $M = \max\Big\{ ||x_1||, ||x_2||, \ldots, ||x_{n_0-1}||, 1 + ||x|| \Big\}$, *entonces es evidente que*

$$||x_n|| \leq M \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y así, $\Big\{x_n\Big\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada.* ■

La siguiente proposición nos muestra una propiedad muy importante de la clausura de un conjunto: sus elementos son límites de sucesiones de elementos del conjunto, más especificamente:

Proposición 1.11 (Una caracterización de $\overline{A}$***)*** *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado y* $A \subset X$. *Entonces,*

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \text{ existe una sucesión } \Big\{x_n\Big\}_{n=1}^{\infty} \subset A$$

tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Demostración

($\Rightarrow$) *Sea* $x \in \overline{A} = A \cup A'$, *entonces* $x \in A$ *ó* $x \in A'$. *Si* $x \in A$, *basta tomar* $x_n = x$ *para* $n = 1, 2, 3 \ldots$, *y así* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Por otra parte, si $x \in A'$, *entonces* A *debe de ser un conjunto infinito. Entonces, dado* $\epsilon = 1$ *existe un* $x_1 \in A$ *tal que:*

$$0 < ||x - x_1|| < 1$$

Sea $A_1 = A \backslash \{x_1\}$. *Es claro que* $A_1 \subset A$ *y* A_1 *es infinito. Como* $x \in A'$, *también* $x \in A_1'$ *(¿Por qué?). Así, dado* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *existe un* $x_2 \in A_1 \subset A$
($x_2 \neq x_1$) *tal que:*

$$0 < ||x - x_2|| < \frac{1}{2}$$

Consideremos ahora $A_2 = A \backslash \{x_1, x_2\}$. *Nuevamente,* A_2 *es infinito y también* $x \in A_2'$. *Luego, dado* $\epsilon = \frac{1}{3}$ *existe un* $x_3 \in A_2$ *tal que:*

$$0 < ||x - x_3|| < \frac{1}{3}$$

Continuando este procedimiento obtenemos una sucesión de elementos $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *de* A *tal que:*

$$0 < ||x - x_n|| < \frac{1}{n}, \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, *se sigue entonces que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *lo cual finaliza nuestra demostración.*

($\Leftarrow$) *Sea* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. *Entonces, si* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *consta de un número finito de términos solamente, entonces* $x_n = x$ *para* $n \geq n_0$. *Por tanto,* $x \in A$, *y así también* $x \in \overline{A}$.

Si $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *consta de un número infinito de términos, entonces*

$$\widehat{B}(x,\epsilon) \cap \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \neq \phi \qquad \textit{para cada} \qquad \varepsilon > 0,$$

y por tanto $x \in A'$ *y en consecuencia* $x \in \overline{A}$. ■

Definición 1.19 *Sean* $(X, \mathcal{T}_1)$ *y* $(Y, \mathcal{T}_2)$ *espacios topológicos, y* $D \subseteq X$. *Una función*

$$f : D \longrightarrow Y$$

se dice continua en un $x_0 \in D$ *si dada una vecindad* V *de* $f(x_0)$ *en* Y, *existe una vecindad* U *de* x_0 *en* X *tal que si*

$$x \in U \cap D \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Proposición 1.12 *Sean* $(X, ||\cdot||_1)$ *y* $(Y, ||\cdot||_2)$ *espacios normados,* $D \subseteq X$, *y:*

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Las siguientes afirmaciones son mutuamente equivalentes:

(1) f *es continua en* $x_0 \in D$.

(2) *Dado* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ *tal que*

$$||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon \qquad si \qquad ||x - x_0|| < \delta$$

(3) f *es secuencialmente continua en* $x_0 \in D$, *esto es, si* $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ *tal que:*

$$x_n \longrightarrow x$$

si $n \longrightarrow \infty$, *entonces* $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ *si* $n \longrightarrow \infty$.

Demostración

Sin perder generalidad podemos denotar las normas $||\cdot||_1$ *y* $||\cdot||_2$ *por* $||\cdot||$ *respectivamente.*

(1) $\Rightarrow$ (2) *Sean* $\epsilon > 0$ *y*

$$V := B(f(x_0), \epsilon) := \left\{ y \in Y \ : \ ||y - f(x_0)|| < \epsilon \right\}$$

Entonces V *es una vecindad de* $f(x_0)$ *en* Y, *luego por* (1) *existe una vecindad* U *de* x_0 *en* X *tal que si*

$$x \in U \cap D \Longrightarrow f(x) \in V$$

Ahora bien, como U *es una vecindad de* x_0, *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$B(x_0, \delta) \subset U,$$

luego

$$B(x_0, \delta) \cap D \subset U \cap D$$

Por tanto, si $x \in B(x_0, \delta) \cap D$, *entonces* $x \in U \cap D$ *y así,* $f(x) \in V$, *esto es,*

$$||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon \qquad si \qquad ||x - x_0|| < \delta.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) *Sea* V *una vecindad de* $f(x_0)$ *en* Y, *entonces* V *contiene algún conjunto abierto que contiene a* x. *Así, para algún* $\epsilon > 0$

$$B(f(x_0), \epsilon) \subset V$$

Por (2) *existe un* $\delta > 0$ *tal que si*

$$||x - x_0|| < \delta, \qquad entonces \qquad ||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon.$$

Tomando $U := B(x_0, \delta)$ *se sigue por lo anterior que si* $x \in U \cap D$, *entonces* $f(x) \in V$.

(2) $\Rightarrow$ (3) *Sean ϵ y δ el par de números positivos dados por la hipótesis* (2), *y $x_0 \in D$. Sea $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$ si $n \longrightarrow \infty$ entonces, para nuestro $\delta > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$||x_n - x_0|| < \delta \qquad si \qquad n \geq n_0,$$

y en consecuencia por (1):

$$||f(x_n) - f(x_0)|| < \epsilon \qquad si \qquad n \geq n_0,$$

esto es, f es secuencialmente continua en $x_0 \in D$.

(3) $\Rightarrow$ (1) *Supóngase que* (3) *es cierta, pero que f no es continua en $x_0 \in D$. Entonces, existe alguna vecindad V de $f(x_0)$ en Y tal que para cada vecindad U de x_0 en X existe un $x_U \in U \cap D$ con $f(x_U) \notin V$. Sea*

$$U_n := \left\{x \in X \;:\; ||x - x_0|| < \frac{1}{n}\right\}$$

Entonces, $U_n := B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ y así, U_n es una vecindad de x_0 para $n = 1, 2, \ldots$. Luego existe un $x_n \in U_n \cap D$ tal que $f(x_n) \notin V$ para $n = 1, 2, \ldots$ lo cual contradice (3). ■

Consideremos ahora X y Y espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathcal{F}$. Sea

$$X \times Y := \left\{(x, y) \;:\; x \in X, \;\; y \in Y\right\}$$

En este conjunto $X \times Y$ definimos las siguientes operaciones:

(O1) Suma: Si $(x_1, y_1) \in X \times Y$ y $(x_2, y_2) \in X \times Y$, entonces,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(O2) Multiplicación por escalar: Si $\alpha \in \mathcal{F}$ y $(x, y) \in X \times Y$, entonces,

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Proposición 1.13 *El conjunto $X \times Y$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathcal{F}$ respecto de las operaciones $(O1)$ y $(O2)$.*

Demostración

Es evidente que (O1) y (O2) están bien definidas sobre $X \times Y$. Se deja como ejercicio verificar todas las propiedades de espacio vectorial. ■

Proposición 1.14 *Sean $(X, ||\cdot||_1)$ y $(Y, ||\cdot||_2)$ espacios normados. La función*

$$|| \cdot || : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por

$$||(x, y)|| = ||x||_1 + ||y||_2$$

es una norma sobre $X \times Y$. Así, $(X \times Y, || \cdot ||)$ es un espacio normado.

Demostración

Verificaremos que $|| \cdot ||$ cumple con todas las propiedades de una norma.

(P1) *Es claro que $||(x, y)|| \geq 0$, $\forall (x, y) \in X \times Y$. Además, si $||(x, y)|| = ||x||_1 + ||y||_2 = 0$ entonces $||x||_1 = 0$ y $||y||_2 = 0$ y así $x = 0$ y $y = 0$, por tanto $(x, y) = (0, 0)$ y recíprocamente.*

(P2) *En efecto,*

$$\begin{aligned} ||\alpha(x, y)|| = ||(\alpha x, \alpha y)|| &= ||\alpha x||_1 + ||\alpha y||_2 \\ &= |\alpha| \, ||x||_1 + |\alpha| \, ||y||_2 \\ &= |\alpha|(||x||_1 + ||y||_2) \\ &= |\alpha| ||(x, y)|| \qquad \alpha \in \mathcal{F}, \;\; (x, y) \in X \times Y \end{aligned}$$

(P3) (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned}||(x_1,y_1)+(x_2,y_2)|| &= ||(x_1+x_2,y_1+y_2)|| \\ &= ||x_1+x_2||_1+||y_1+y_2||_2 \\ &\leq ||x_1||_1+||x_2||_1+||y_1||_2+||y_2||_2 \\ &= ||x_1||_1+||y_1||_2+||x_2||_1+||y_2||_2 \\ &= ||(x_1,y_1)||+||(x_2,y_2)||\end{aligned}$$

$\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$, *lo cual concluye la prueba.* ■

Tenemos ahora la importante proposición:

Proposición 1.15 *Sea* $(X,||\cdot||)$ *un espacio normado. Entonces, las funciones:*

$$\varphi_1 : X\times X\to X \qquad \textit{definida por} \qquad \varphi_1(x,y)=x+y$$

y

$$\varphi_2 : \mathcal{F}\times X\to X \qquad \textit{definida por} \qquad \varphi_2(\alpha,x)=\alpha x$$

son continuas sobre $X\times X$ *y* $\mathcal{F}\times X$ *respectivamente.*

Demostración

Observemos inicialmente que cuando $Y=X$, *la norma definida por la proposición 1.13 de un elemento* $(x,y)\in X\times X$ *es:*

$$||(x,y)|| \ = \ ||x||+||y||$$

y cuando $X=\mathcal{F}$ *y* $Y=X$, *la norma de un elemento* $(\alpha,x)\in\mathcal{F}\times X$ *es:*

$$||(\alpha,x)|| \ = \ |\alpha|+||x||$$

Sea $(x_0,y_0)\in X\times X$. *Veamos que dado* $\varepsilon>0$ *existe un* $\delta>0$ *tal que:*

$$||\varphi_1(x,y)-\varphi_1(x_0,y_0)||<\epsilon \qquad si \qquad ||(x,y)-(x_0,y_0)||<\delta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
||\varphi_1(x,y)-\varphi_1(x_0,y_0)|| &= ||x+y-(x_0+y_0)|| \\
&= ||x-x_0+y-y_0|| \\
&\leq ||x-x_0||+||y-y_0|| < \delta+\delta \ = \ 2\delta \ = \ \epsilon
\end{aligned}$$

Luego, basta tomar $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$
Por otra parte,

$$\begin{aligned}
||\varphi_2(\alpha,x)-\varphi_2(\alpha_0,x_0)|| &= ||\alpha x-\alpha_0 x_0|| \\
&= ||\alpha x-\alpha x_0+\alpha x_0-\alpha_0 x_0|| \\
&= ||\alpha(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)x_0|| \\
&\leq ||\alpha(x-x_0)||+||(\alpha-\alpha_0)x|| \\
&= |\alpha|\ ||x-x_0||+|\alpha-\alpha_0|\ ||x||
\end{aligned}$$

Restringiendo,

$$||x-x_0||<\delta\leq 1 \quad y \quad |\alpha-\alpha_0|<\delta\leq 1,$$

entonces, ya que

$$\Big|||x||-||x_0||\Big| \leq ||x-x_0||<\delta\leq 1, \quad y \quad \Big||\alpha|-|\alpha_0|\Big| \leq |\alpha-\alpha_0|<\delta\leq 1$$

vamos a tener que $||x||<1+||x_0||,$ y $|\alpha|<1+|\alpha_0|$, *luego*

$$\begin{aligned}
||\varphi_2(\alpha,x)-\varphi_2(\alpha_0,x_0)|| &< (1+|\alpha_0|)||x-x_0||+|\alpha-\alpha_0|(1+||x_0||) \\
&< m\delta+m\delta \ = \ 2m\delta
\end{aligned}$$

donde $m = \text{máx}\{1+|\alpha_0|, 1+||x_0||\}$. *Así, tomando* $\delta \leq \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{2m}\}$ *obtenemos que* φ_2 *es continua en* (α_0, x_0). ■

Recordemos que si (X, τ_1) *y* (Y, τ_2) *son espacios topológicos, una función*

$$f : X \to Y$$

que es biyectiva (esto es, f *es uno a uno y sobre) y bicontinua (bicontinua significa que* f *y su inversa* f^{-1} *son continuas) se llama un homeomorfismo, y en este caso* X *y* Y *se dicen homeomorfos.*

Las operaciones de suma y multiplicación por escalar de un espacio vectorial que es además un espacio normado, inducen dos homeomorfismos "naturales", hecho que expresa la proposición siguiente:

Proposición 1.16 *Sean* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado,* $a \in X$ *y* $\alpha \in \mathcal{F}$, $(\alpha \neq 0)$. *Entonces, las funciones*

$$T_a : X \longrightarrow X, \quad \textit{definida por} \quad T_a(x) = x + a$$

y

$$M_\alpha : X \longrightarrow X, \quad \textit{definida por} \quad M_\alpha(x) = \alpha x$$

son homeomorfismos. T_a *se llama el operador de traslación y* M_α *el operador de multiplicación.*

Demostración

Dejamos como un ejercicio verificar la continuidad y biyectividad de T_a *y* M_α. *El inverso de* T_a *es* T_{-a} *y el inverso de* M_α *es* $M_{1/\alpha}$ *para* $\alpha \neq 0$. *Así, tenemos el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T_a"] & X \arrow[d, "M_\alpha"] \\
X \arrow[u, "{M_\alpha}^{-1}"] & X \arrow[l, "{T_a}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 1.1

donde

$$ {T_a}^{-1}(x) \;=\; T_{-a}(x) \;=\; x-a $$

y

$$ {M_\alpha}^{-1}(x) \;=\; M_{1/\alpha}(x) \;=\; \frac{1}{\alpha}x, \;\; (\alpha \neq 0) $$

Sean (X,τ_1), (Y,τ_2) *y* (Z,τ_3) *espacios topológicos,* $T_2, D_1 \subseteq X$ *y* $D_2 \subseteq Y$. *Consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g_\circ f"'] & D_2 \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

Fig 1.2

donde f *es una función definida sobre* D_1 *tal que su rango* $f(D_1) \subseteq D_2$ *y* g *es una función definida sobre* D_2 *a valores en el espacio* Z. *Así, podemos construir la compuesta de* g *y* f *denotada por* $g_\circ f$ *y definida como*

$$ (g_\circ f)(x) \;=\; g(f(x)) \qquad x \in D_1 $$

Tenemos entonces la siguiente proposición

Proposición 1.17 *Si f es continua en un $x_0 \in D_1$ y g también lo es en $f(x_0)$, entonces $g_\circ f$ es continua en x_0.*

Demostración

Sea V una vecindad de $(g_\circ f)(x_0)$ en Z. Entonces, como g es continua en $f(x_0)$ y $(g_\circ f)(x_0) = g(f(x_0))$, existe una vecindad W de $f(x_0)$ en Y tal que si

$$y \in W \cap D_2, \qquad \textit{entonces} \qquad g(y) \in V$$

También, como f es continua en x_0, existe una vecindad U de x_0 en X tal que si:

$$x \in U \cap D_1, \qquad \textit{entonces} \qquad f(x) \in W,$$

pero también $f(x) \in D_2$, así $f(x) \in W \cap D_2$ y en consecuencia $g(f(x)) \in V$, lo cual concluye la demostración.

Definición 1.20 *Sean X y Y conjuntos no vacíos, $D \subseteq X$ y*

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Sea $H \subseteq Y$. La imagen inversa de H denotada por $f^{-1}(H)$ es:

$$f^{-1}(H) := \Big\{ x \in D \ : \ f(x) \in H \Big\}$$

Es claro de la definición anterior que si $B \subseteq Y$,

$$D := f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B^c).$$

Proposición 1.18 *Sean X y Y conjuntos no vacíos, $D \subseteq X$ y*

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Supóngase que dado $B \subset Y$ existe un $B_1 \subset X$ tal que:

$$B_1 \cap D \ := \ f^{-1}(B),$$

entonces,

$$B_1{}^c \cap D \ := \ f^{-1}(B^c)$$

Demostración

Ya que

$$f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B^c) \ := \ D \ := \ D \cap B_1 \cup D \cap B_1{}^c$$

y por hipótesis tenemos que $B_1 \cap D \ := \ f^{-1}(B)$, se sigue que:

$$B_1{}^c \cap D \ := \ f^{-1}(B^c)$$

Ahora podemos mostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.1 Sean** (X, τ_1) **y** (Y, τ_2) **espacios topológicos** T_2, **y** $D \subseteq X$. **Sea

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función. Las siguientes afirmaciones mutuamente equivalentes:

***(1)** f **es continua sobre** D.*

(2) Dado** $G \in \tau_2$, **existe un** $G_1 \in \tau_1$ **tal que

$$G_1 \cap D \ := \ f^{-1}(G)$$

(3) Dado un cerrado** H **en** Y, **existe un cerrado** H_1 **en** X **tal que:

$$H_1 \cap D \ := \ f^{-1}(H)$$

Demostración

(1) $\Longrightarrow$ (2) *Sea* $G \in \tau_2$, *esto es,* G *es abierto en* Y. *Si* $f^{-1}(G) := \phi$, *tomamos* $G_1 = \phi$.

Por otra parte, si $f^{-1}(G) \neq \phi$, *existe un* $x_0 \in D$ *tal que* $f(x_0) \in G$, *y como* G *es abierto en* Y *y* f *es continua en* x_0, *existe* U_{x_0} *vecindad de* x_0 *en* X *tal que si:*

$$x \in U_{x_0} \cap D, \qquad \textit{entonces} \qquad f(x) \in G$$

Sin perder generalidad podemos suponer que U_{x_0} *es abierto en* X. *Repitamos este procedimiento para cada* $x \in f^{-1}(G)$, *y sea*

$$G_1 := \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U_x$$

entonces, G_1 *es abierto en* X *y además:*

$$\begin{aligned} G_1 \cap D &:= \left(\bigcup_{x \in f^{-1}(G)} U_x \right) \cap D \\ &:= \bigcup_{x \in f^{-1}(G)} (U_x \cap D) \\ &:= f^{-1}(G) \end{aligned}$$

lo cual finaliza la demostración.

(2) $\Longrightarrow$ (1) *Sean* $x_0 \in D$ *y* V *una vecindad de* $f(x_0)$ *en* Y. *Entonces existe un abierto* G *en* Y *tal que*

$$f(x_0) \in G \subset V$$

Por la hipótesis (2) *existe un* G_1 *abierto en* X *tal que:*

$$G_1 \cap D := f^{-1}(G),$$

y ya que $f(x_0) \in G$, *entonces* $x_0 \in f^{-1}(G) := G_1 \cap D$, *luego* $x_0 \in G_1$.

Así, G_1 es vecindad de x_0 en X y si:

$$x \in G_1 \cap D, \qquad \textit{entonces} \qquad f(x) \in G \subset V,$$

esto es, f es continua en $x_0 \in D$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) *Sea H cerrado en Y y tomemos $G := H^c$. Entonces G es abierto en Y y así, por la hipótesis* (2) *existe un abierto G_1 en X tal que:*

$$G_1 \cap D \;:=\; f^{-1}(G)$$

se sigue por la proposición 1.18 que:

$$\begin{aligned} {G_1}^c \cap D \;&:=\; f^{-1}(G^c) \\ &:=\; f^{-1}(H) \end{aligned}$$

Tomando $H_1 \;:=\; {G_1}^c$ *obtenemos* (3)

(3) $\Longrightarrow$ (2) *Se deja como un ejercicio.*

Corolario 1.1 *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos T_2, y*

$$f : X \longrightarrow Y$$

una función. Entonces:

(1) f es continua sobre $X \Longleftrightarrow f^{-1}(G)$ es abierto en X para cada abierto G en Y.

(2) f es continua sobre $X \Longleftrightarrow f^{-1}(H)$ es cerrado en X para cada cerrado H en Y.

Demostración

Tomar $D \;:=\; X$ y usar el teorema anterior.

Definición 1.21 *Sean* (X, τ) *un espacio topológicos y* $A \subset X$, $A \neq \phi$. *Una colección* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *de subconjuntos abiertos de* X *se llama cubrimiento de* A *si:*

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

en donde I *es un conjunto de índices de cardinalidad arbitraria.*

Definición 1.22 *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $A \subset X$, $A \neq \phi$. *Entonces* A *se dice compacto si cada cubrimiento de* A *contiene un subcubrimiento finito, esto es, si dado* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *un cubrimiento de* A, *existe un número finito de los* A_α, *digamos*

$$A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}$$

tal que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}.$$

El teorema clásico de Heine - Borel expresa que un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ *es compacto* $\Longleftrightarrow$ *es cerrado y acotado. El lector puede intentar demostrar éste teorema como un ejercicio.*

Teorema 1.2 *(Preservación de Compacidad)* ***Sean*** X ***y*** Y ***espacios normados. Sea***

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función continua, donde $D \subset X$ ***compacto. Entonces*** $f(D)$ ***es compacto en*** Y.

Demostración

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *un cubrimiento de* $f(D)$. *Mostraremos que existe un número de los* A_α *digamos* $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}$ *tal que:*

$$f(D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}.$$

En efecto, ya que A_α *es abierto en* Y, *y* $f : D \longrightarrow Y$ *es continua, entonces de acuerdo al teorema 1.19 existe un abierto* B_α *en* X *tal que:*

$$B_\alpha \cap D \ := \ f^{-1}(A_\alpha).$$

Afirmamos ahora que la colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es un cubrimiento de* D. *Efectivamente, sea* $x \in D$, *entonces* $f(x) \in f(D) \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, *luego existe algún subíndice* $\alpha_0 \in I$ *tal que* $f(x) \in A_{\alpha_0}$ *y así* $x \in f^{-1}(A_{\alpha_0}) \ := \ B_{\alpha_0} \cap D$, *y en consecuencia* $x \in B_{\alpha_0}$. *Se sigue por lo anterior que la colección* $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$, *donde* $B_\alpha \cap D \ := \ f^{-1}(A_\alpha)$ $(\alpha \in I)$ *es un cubrimiento de* D, *que por hipótesis es compacto, por tanto existe un número finito de los* B_α, *digamos* $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \ldots, B_{\alpha_n}$ *tal que* $D \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$. *Veamos ahora que:*

$$f(D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \qquad \textit{donde} \qquad D \cap B_{\alpha_i} \ := \ f^{-1}(A_{\alpha_i}), \ \ i = 1, 2, \ldots, n$$

En efecto, sea $y \in f(D)$. *Entonces, existe un* α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *tal que*

$$x \in B_{\alpha_i} \cap D \ := \ f^{-1}(A_{\alpha_i})$$

Así, $y \ = \ f(x) \in A_{\alpha_i}$. *Como* y *es arbitraria en* $f(D)$ *concluimos que:*

$$f(D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$$

y por tanto, $f(D)$ *es compacto.*

Nota 1.2 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $D \subset X$ *compacto y*

$$f : D \longrightarrow K$$

una función continua. De acuerdo al teorema anterior $f(D)$ es compacto, luego por el Teorema clásico de Heine - Borel $f(D)$ es en particular acotado en $\mathcal{C}$. Por tanto, existe una constante $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall\, x \in D$$

1.3. Ejemplos resueltos

Esta sección contiene una importante lista de ejemplos con sus detalles, que servirán de complemento para un mejor entendimiento de la teoría desarrollada en las secciones 1.1 y 1.2. En algunos de estos, cuando sea necesario, se introduce el concepto que nos ayudará a demostrar lo que se exige en él.

Ejemplo 1.1 *Sea*

$$\mathbb{R}^n := \Big\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n \Big\}$$

En $\mathbb{R}^n$ definimos las siguentes operaciones:

(O1) Suma: Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, la suma de x y y denotada por $x + y$ se define como:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

(O2) Multiplicación por escalar: Si $\alpha \in \mathcal{F}$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\begin{aligned} \alpha x &= \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

Es claro que (O1) y (O2) están bien definidas y el lector puede mostrar que se verifican todas las propiedades $(A1), (A2), \ldots, (A8)$ de la definición 1.1. Así, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathcal{F}$.

Ejemplo 1.2 *Sea la función:*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por:

$$\|x\| \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, $\|\cdot\|$ es una norma sobre $\mathbb{R}^n$. En efecto, verificaremos los axiomas $(A1), (A2)$ y $(A3)$ de la definición 1.7.

$(A1)$ *Es claro que $\|x\| \geq 0, \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Por otra parte, si:*

$$\begin{aligned}
\|x\| \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \;=\; 0 \;&\Longrightarrow\; |x_i| \;=\; 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
&\Longrightarrow\; x_i \;=\; 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
&\Longrightarrow\; x \;=\; 0,
\end{aligned}$$

y recíprocamente.

$(A2)$ *Si $\alpha \in \mathcal{F}$, entonces:*

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{1/2} \;&=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^2 |x_i|^2\right)^{1/2} \\
&=\; |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \\
&=\; |\alpha| \|x\| \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

$(A3)$ *Para verificar la desigualdad triangular inicialmente verificaremos la siguiente desigualdad:*

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y,* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *entonces:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\| \|y\|$$

En efecto, si $x = 0$ *ó* $y = 0$*, la desigualdad es evidente.*

Supóngase entonces que $x \neq 0$ *y,* $y \neq 0$*. Definamos la función:*

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2 \qquad (A)$$

Desarrollando el miembro a la derecha de (A) vamos a obtener que:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 t^2 + 2 x_i y_i t + {y_i}^2) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \\
&= \|x\|^2 t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Así,

$$0 \leq \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2 = \|x\|^2 t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \|y\|^2,$$

entonces, la representación gráfica de $\varphi(t)$ *es una parábola que está situada por arriba del eje de abcisas o intersecta éste eje en un sólo punto.*

Por tanto:

$$\triangle = \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$$

esto es,

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le 4\|x\|^2\|y\|^2$$

y así,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \|x\|\|y\|$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 + 2x_i y_i + {y_i}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \|y\|^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| + \|y\|^2 \\
&\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

extrayendo raíces cuadradas en ambos miembros obtenemos que:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|\cdot\|$ *que también es denotada por* $\|\cdot\|_2$, *es representado por* ${l_2}^n$. *Así,*

$${l_2}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$$

Esta norma $\|\cdot\|_2$ *se llama la norma euclidiana de* $\mathbb{R}^n$ ■

Ejemplo 1.3 *Sea la función:*

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida por:

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Entonces, $\|\cdot\|_1$ *define una norma sobre* $\mathbb{R}^n$. *Verificaremos los axiomas* $(A1), (A2)$ *y* $(A3)$ *de la definición 1.7.*

$(A1)$ $\quad \|x\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$ *ya que* $|x_i| \geq 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Además, si

$$\begin{aligned} \|x\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \;=\; 0 \;&\Longrightarrow\; |x_i| \;=\; 0 \qquad \textit{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Longrightarrow\; x_i \;=\; 0 \qquad \textit{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Longrightarrow\; x \;=\; 0 \end{aligned}$$

y recíprocamente

$(A2)$ *Si* $\alpha \in \mathcal{F}$, *vamos a tener que:*

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| \;&=\; \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| \\ &=\; |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &=\; |\alpha| \|x\|_1 \qquad\qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(A3) *(Desigualdad triangular)*

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Así, $\mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|\cdot\|_1$ *es denotado por* ${l_1}^n$*. Por tanto,*

$${l_1}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$$

■

Ejemplo 1.4 *Sea*

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

definida como:

$$\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Verificaremos que $\|\cdot\|_\infty$ *define una norma sobre* $\mathbb{R}^n$*. En efecto:*
(A1) *Es claro que si:*

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| = 0 &\Longrightarrow |x_i| = 0 \\ &\Longrightarrow x_i = 0 \qquad \text{para} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ &\Longrightarrow x = 0\end{aligned}$$

y recíprocamente

(*A*2) *Para* $\alpha \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |\alpha x_i| &= \sup_{1\leq i\leq n} (|\alpha||x_i|) \\
&= |\alpha| \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| \\
&= |\alpha|\|x\|_\infty \qquad\qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

(*A*3) *(Desigualdad triangular)*

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i + y_i| &\leq \sup_{1\leq i\leq n} (|x_i| + |y_i|) \\
&= \sup_{1\leq i\leq n} |x_i| + \sup_{1\leq i\leq n} |y_i| \\
&= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty
\end{aligned}$$

para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Así, $\mathbb{R}^n$, *dotado de la norma* $\|\cdot\|_\infty$ *se denota por* ${l_\infty}^n$, *esto es,*

$${l_\infty}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

■

Ejemplo 1.5 *Sean* X *un espacio vectorial,* $\|\cdot\|$ *y* $|||\cdot|||$ *dos normas sobre* X. *Decimos que* $\|\cdot\|$ *y* $|||\cdot|||$ *son equivalentes si existen constantes* $a > 0$ *y* $b > 0$, *tales que:*

$$a\|x\| \leq |||x||| \leq b\|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

Sea el conjunto:

$$\mathcal{N} := \left\{ \|\cdot\| \;:\; \|\cdot\| \quad \textit{es una norma sobre } X \right\}$$

Mostraremos que esta definición de normas equivalentes induce una relación de equivalencia sobre $\mathcal{N}$ *y que es denotada por* "$\sim$"; *esto es,* "$\sim$" *es reflexiva, simétrica y transtiva.*

(a) *" $\sim$" es reflexiva, lo cual es evidente tomando* $a = b = 1$

(b) *" $\sim$" es simétrica. En efecto, si* $\|\cdot\| \in \mathcal{N}$ *y* $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$, *tales que* $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$, *entonces existen* $a > 0$ *y* $b > 0$ *tales que:*

$$a\|x\| \leq |||x||| \leq b\|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

De aquí vamos a obtener que:

$$b^{-1}|||x||| \leq \|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

y también que:

$$\|x\| \leq a^{-1}|||x||| \qquad \forall\, x \in X,$$

por tanto,

$$b^{-1}|||x||| \leq \|x\| \leq a^{-1}|||x||| \qquad \forall\, x \in X,$$

y así $|||\cdot||| \sim \|\cdot\|$.

(c) *Sean* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *y* $\|\cdot\|_3$ *elementos de* $\mathcal{N}$ *tales que* $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ *y* $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$. *Veamos que* $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$. *En efecto, ya que*

$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \Longrightarrow$ *existen* $a_1 > 0$ *y* $b_1 > 0$ *tales que :*

$$a_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b_1\|x\|_1 \ \ \forall\, x \in X$$

y $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3 \Longrightarrow$ *existen* $a_2 > 0$ *y* $b_2 > 0$ *tales que :*

$$a_2\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq b_2\|x\|_2 \ \ \forall\, x \in X,$$

así, vamos a obtener que:

$$\|x\|_3 \leq b_2\|x\|_2 \leq b_1 b_2\|x\|_1 \ \ \forall\, x \in X,$$

y que:

$$a_1 a_2\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_3 \ \ \forall\, x \in X$$

En consecuencia:

$$a_1a_2\|x\|_1 \ \leq \ \|x\|_3 \ \leq \ b_1b_2\|x\|_2 \ \ \forall\, x \in X,$$

esto es, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$ *y concluye nuestra demostración.*

$\blacksquare$

Ejemplo 1.6 *Las normas de los espacios* ${l_1}^n$, ${l_2}^n$ *y* ${l_\infty}^n$ *son equivalentes, donde de los ejemplos 1.2, 1.3 y 1.4 sabemos que:*

$${l_1}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1), \qquad {l_2}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2), \qquad {l_\infty}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

donde:

$$\|x\|_1 \ = \ \sum_{i=1}^{n} \ |x_i|, \qquad \|x\|_2 \ = \ \left(\sum_{i=1}^{n} \ |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad y \qquad \|x\|_\infty \ = \ \sup_{1\leq i\leq n} \ |x_i|$$

Mostraremos en (A) *y en* (B) *que* $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$, *respectivamente. Luego, por el ejemplo 1.5 tendremos que* $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$.

En efecto,

$\Big(A\Big)$ $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. *Ya que*

$$|x_i|^2 \ \leq \ |x_i|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \qquad para \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \ |x_i| \leq n\|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

luego

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Por otra parte, como:

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2$$

vamos a tener que:

$$\|x\| \leq \|x\|_1, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

así,

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x\|_1, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

$\left(B\right)$ $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$. *Efectivamente,*

$$\|x\|^2 \ = \ |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leq n\ {\|x\|_\infty}^2$$

esto es,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ \|x\| \leq \|x\|_\infty, \qquad (\forall\ x \in \mathbb{R}^n)$$

También

$${\|x\|_\infty}^2 \ = \ \left(\sup_{1\leq i\leq n}|x_i|\right)^2 \ = \ |x_{i_o}|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 \ = \ \|x\|^2$$

luego

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

en consecuencia,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ \|x\| \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

■

Ejemplo 1.7 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. De acuerdo a nuestra definición 1.11 (a), la bola abierta de centro* x_0 *y radio* $r > 0$ *es:*

$$B(x_0, r) \; := \; \Big\{ x \in X \; : \; \|x - x_0\| < r \Big\}$$

Entonces, $B(x_0, r)$ *es un conjunto convexo. En efecto, sean* $x, y \in B(x_0, r)$ *y* $0 \leq \lambda \leq 1$. *Ya que:*

$$\lambda x + (1-\lambda)y - x_0 \; = \; \lambda(x - x_0) + (1-\lambda)(y - x_0)$$

vamos a tener que

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y - x_0\| \; &= \; \|\lambda(x - x_0) + (1-\lambda)(y - x_0)\| \\ &\leq \; |\lambda|\|x - x_0\| + |1-\lambda|\|y - x_0\| \\ &< \; \lambda r + (1-\lambda)r \; = \; r \end{aligned}$$

esto es, el "segmento de recta":

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in B(x_0, r)$$

Por tanto, $B(x_0, \varepsilon)$ *es convexo.* ■

Ejemplo 1.8 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $A \subset X$ *convexo. Entonces* $\overline{A}$ *es también un subconjunto convexo de* X. *En efecto, sean* $x, y \in \overline{A}$ *y* $0 \leq \lambda \leq 1$. *Mostraremos que* $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A}$. *Efectivamente, ya que* $x, y \in \overline{A}$ *por la proposición 1.11 dado* $\varepsilon > 0$ *existen sucesiones* $\Big\{ x_n \Big\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ *y* $\Big\{ y_n \Big\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ *tales que:*

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad si \qquad n \geq n_1$$

y,

$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad si \qquad n \geq n_2$$

Sea $n_0 \; = \; \text{máx}(n_1, n_2)$. *Entonces, si* $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - \lambda x - (1-\lambda)y\| &= \|\lambda(x_n - x) + (1-\lambda)(y_n - y)\| \\
&\leq \|\lambda(x_n - x)\| + \|(1-\lambda)(y_n - y)\| \\
&= |\lambda|\|x_n - x\| + |1-\lambda|\|y_n - y\| \\
&< \lambda\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + (1-\lambda)\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

esto es, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A}$.

Así, en virtud del ejemplo 1.7 y 1.8 concluimos que si $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces* $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ *es un subconjunto cerrado y convexo de* X ■

Ejemplo 1.9 *Dibujar en los espacios* ${l_2}^2$, ${l_1}^2$ *y* ${l_\infty}^2$ *la bola cerrada de centro* $0 = (0,0)$ *y radio* $r = 1$.

Solución

$\Big($*1.9 (a)*$\Big)$ *Tenemos que* ${l_2}^2 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. *Así,*

$$\begin{aligned}
\overline{B}(0,1) &:= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)\| \leq 1\Big\} \\
&:= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\Big\}
\end{aligned}$$

y sabemos de la geometría analítica que la representación gráfica de este conjunto es lo que muestra la figura siguiente:

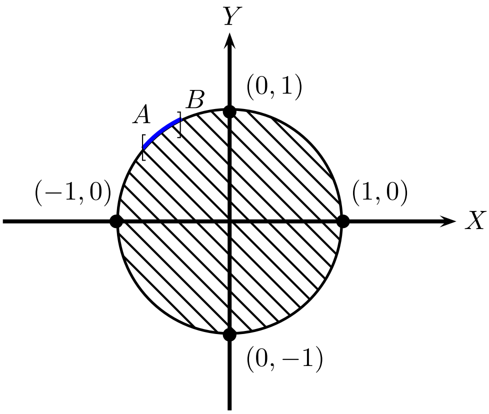


Fig 1.3

Note que la frontera de $\overline{B}(0,1)$ *no contiene ningún segmento de recta, como se observa en la fig 1.3.*

$\left(\textit{1.9 (b)}\right)$ *Ya que* ${l_1}^2 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ *entonces,*

$$\begin{aligned}\overline{B}(0,1) &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)\|_1 \leq 1\right\} \\ &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ |x|+|y| \leq 1\right\}\end{aligned}$$

cuya representación gráfica es la siguiente:

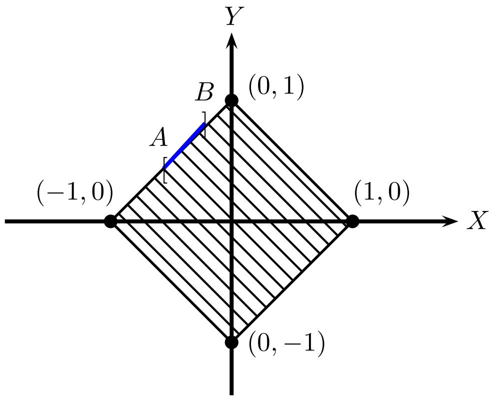


Fig 1.4

Observe de la fig 1.4 que la frontera de $\overline{B}(0,1)$ *sí contiene segmentos de recta.*

$\left(\text{1.9 (c)}\right)$ *Ya que* $l_\infty{}^2 := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ *vamos a obtener que:*

$$\begin{aligned}\overline{B}(0,1) &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \|(x,y)\|_\infty \le 1\right\}\\ &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \sup\{|x|,|y|\}\le 1\right\}\\ &:= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ |x|\le 1 \ \ y \ \ |y|\le 1\right\}\end{aligned}$$

y cuya representación gráfica lo muestra el dibujo siguiente:

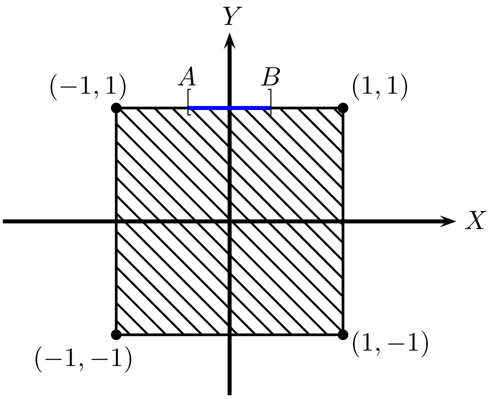


Fig 1.5

Note que la frontera de esta bola también contiene segmento de recta. ■

Ejemplo 1.10 *Sea*

$$C([a,b]) := \left\{ f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ f \ \textit{es continua sobre}\ [a,b] \right\}$$

Es claro que $C([a,b])$ *es un conjunto no vacío. Definamos en* $C([a,b])$ *las siguientes operaciones:*

(O1) Suma:

$$(f+g)(x) \ = \ f(x)+g(x) \qquad x \in [a,b], \ \ f,g \in C([a,b])$$

(O2) Multiplicación por escalar:

$$(\alpha f)(x) \ = \ \alpha f(x) \qquad \alpha \in \mathcal{F}, \ \ x \in [a,b], \ \ f \in C([a,b])$$

Entonces (O1) y (O2) están bien definidas y el lector puede verificar las propiedades $(A1)$, $(A2)$, $\ldots, (A8)$ *de la definición 1.1. Por tanto,* $C([a,b])$ *es un espacio vectorial.*

De acuerdo a nuestra nota 1.2 existe una constante $M > 0$ *tal que:*

$$|f(x)| \leq M \qquad (\forall\, x \in [a,b])$$

Sea entonces la función:

$$\|\cdot\|_u : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|f\|_u = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

es evidente ahora que:

$$0 \leq \|f\|_u < +\infty, \qquad \textit{para cada} \qquad f \in C([a,b])$$

Así, $\|\cdot\|_u$ *está bien definida sobre* $C([a,b])$. *Mostraremos también que* $\|\cdot\|_u$ *es una norma sobre* $C([a,b])$. *En efecto,*

(A1)

$$\begin{aligned} \|f\|_u = \sup |f(x)| = 0 &\iff |f(x)| = 0, \qquad \forall\, x \in [a,b] \\ &\iff f = 0 \end{aligned}$$

(A2) *Si* $\alpha \in \mathcal{F}$ *y* $f \in C([a,b])$, *entonces:*

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_u = \sup_{x\in[a,b]} |(\alpha f)(x)| &= \sup_{x\in[a,b]} |\alpha||f(x)| \\ &= |\alpha| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \\ &= |\alpha|\, \|f\|_u \end{aligned}$$

(A3) *(Desigualdad triangular). Sean* $f, g \in C([a,b])$. *Entonces, ya que:*

$$\|f+g\|_u = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)|$$

dado $\varepsilon > 0$ *existe un* $x_0 \in [a,b]$ *tal que:*

$$\begin{aligned} \|f+g\|_u < |f(x_0)+g(x_0)|+\varepsilon &\leq |f(x_0)|+|g(x_0)|+\varepsilon \\ &< \|f\|_u+\|g\|_u+\varepsilon \end{aligned}$$

como ε es arbitrario, obtenemos que:

$$\|f+g\|_u \leq \|f\|_u+\|g\|_u$$

■

Ejemplo 1.11 *Consideremos la función:*

$$\|\cdot\|_1 \ : \ C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

Entonces, ya que $f \in C([a,b])$ también $|f| \in C([a,b])$ donde:

$$|f|(x) = |f(x)|, \ \ x \in [a,b]$$

Las propiedades que mencionaremos a continuación de la integral de Riemann permiten demostrar que $\|\cdot\|_1$ define también una norma sobre $C([a,b])$.

(a) *Si* $f \in C([a,b])$ *y* $f \geq 0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(b) *Si* $f \in C([a,b])$ *y es no negativa sobre* $[a,b]$ *y si además*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

entonces $f(x) = 0, \; \forall\, x \in [a,b]$

(c) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

(d) *Si* $f, g \in C([a,b])$ *y* $f(x) \geq g(x) \;\; \forall\, x \in [a,b]$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(e) *Si* $f, g \in C([a,b])$, *entonces*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

■

Ejemplo 1.12 *En el espacio* $C([0,1])$ *las normas:*

$$\|f\|_u = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

y

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

no son equivalentes. Efectivamente, si $\|\cdot\|_u$ *y* $\|\cdot\|_1$ *fueran equivalentes deberian existir constantes* $a_1, a_2 > 0$ *tales que:*

$$a_1\|f\|_u \leq \|f\|_1 \qquad \forall\ f \in C([a,b]) \qquad\qquad (B)$$

y

$$\|f\|_1 \leq a_2\|f\|_u \qquad \forall\ f \in C([a,b]) \qquad\qquad (A)$$

La desigualdad (A) *siempre es cierta, ya que* $|f(x)| \leq \|f\|_u\ \forall\ x \in [a,b]$, $f \in C([a,b])$ *y entonces*

$$\|f\|_1 \ = \ \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \|f\|_u dx \ = \ \|f\|_u \qquad \forall\ f \in C([a,b]).$$

Ahora bien, (B) *no siempre es cierta. En efecto, sean:*

$$f_n(x) \ = \ \begin{cases} n - n^2x & si \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & si \quad x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

entonces $f_n \in C([a,b])$ *para* $n = 1,2,3,\ldots$ *y por otra parte:*

$$\|f_n\|_u = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |n - n^2x| \ = \ n$$

y

$$\begin{aligned} \|f_n\|_u \ = \ \int_0^1 |f_n(x)|dx \ &= \ \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0dx \\ &= \ \int_0^{\frac{1}{n}} ndx - \int_0^{\frac{1}{n}} n^2xdx \\ &= \ 1 - n^2\left(\frac{1}{2n^2}\right) \ = \ 1 - \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ *Por tanto, no existe ninguna constante* $a_1 > 0$ *tal que*

$$a_1 n \leq \frac{1}{2} \qquad \textit{para} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

■

Ejemplo 1.13 *Consideremos el espacio vectorial* $C([0,1])$ *dotado de la norma* $\| \cdot \|_u$. *Sea*

$$M \ := \ \left\{ f \in C([0,1]) \ : \ \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \right\}$$

Entonces M *es un subconjunto convexo y cerrado de* $C([0,1])$. *En efecto:*

(*a*) M *es convexo. Efectivamente, si* $f, g \in M$, *entonces*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1$$

y

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)dt = 1$$

Hagamos, $h = \alpha f + (1-\alpha)g \in M$, $0 \leq \alpha \leq 1$. *Efectuando las operaciones respectivas vamos a obtener que:*

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)dt &= \alpha\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \Bigg)(1-\alpha)\Bigg(\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t \\ &= \alpha(1) + (1-\alpha)(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

y así, $h = \alpha f + (1-\alpha)g \in M$

(b) M *es cerrado. Sea entonces,* $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ *tal que*

$$f_n \longrightarrow f \in C([0,1]) \quad si \quad n \longrightarrow \infty \quad en \quad \| \cdot \|_u$$

Veamos que $f \in M$*. En efecto, como la convergencia es uniforme sobre* $[0,1]$ *vamos a tener que:*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt \longrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

y

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(t)dt \longrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

luego

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(t)dt \longrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

esto es,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(t)dt \right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

Por tanto, $f \in M$ *y así* M *es cerrado.* ■

Ejemplo 1.14 *Sea X un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío K de X se llama un cono si:*

$$\forall\, x \in K \;\; y \;\; \lambda \geq 0 \qquad \textit{entonces} \qquad \lambda x \in K$$

Note que $0 \in K$ y este elemento se llama el vértice del cono.
Mostraremos que un cono K de X es convexo $\Longleftrightarrow x + y \in K, \;\; \forall\, x, y \in K$

En efecto:

$(\Longrightarrow)$ *Supóngase que K es un cono que es además un subconjunto convexo de X. Entonces, por la convexidad de K*

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in K \qquad \forall\, x, y \in K$$

luego por ser K un cono obtenemos que:

$$x + y \;=\; 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \in K$$

$(\Longleftarrow)$ *Sea K un cono de X tal que $x + y \in K, \;\; \forall\, x, y \in K$. Entonces, para $0 \leq \lambda \leq 1$:*

$$\lambda\, x \in K \qquad\qquad \forall\, x \in K$$

y

$$(1 - \lambda)y \in K \qquad\qquad \forall\, y \in K$$

Luego por nuestra hipótesis:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

■

Ejemplo 1.15 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $A \subseteq X$ y*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función acotada (esto es, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \;\; \forall\, x \in A$). Sean $a \in A$ y $\delta > 0$. Definamos:

$$\Omega(a, f, \delta) = \sup \left\{ |f(x) - f(x')| \ : \ x, x' \in B(a, \delta) \cap A \right\}$$

Como f es una función acotada se sigue que $\Omega(a, f, \delta)$ es un número finito, y es claro que si $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces

$$0 \leq \Omega(a, f, \delta_1) \leq \Omega(a, f, \delta_2)$$

así, manteniendo a fijo y haciendo que $\delta \longrightarrow 0^+$ va a existir

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0^+} \Omega(a, f, \delta)$$

El valor de este límite lo llamaremos la oscilación de f en a y lo denotamos por $0(f, a)$. Así,

$$0(f, a) \ = \lim_{\delta \longrightarrow 0^+} \Omega(a, f, \delta)$$

Demostrar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es continua en un $a \in A \Longleftrightarrow 0(f, a) = 0$. En efecto:

$(\Longrightarrow)$ *Sea f continua en $a \in A$, entonces por la proposición 1.12, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_0 > 0$ tal que:*

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad si \qquad x \in B(a, \delta_0) \cap A$$

y

$$|f(x') - f(a)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad si \qquad x' \in B(a, \delta_0) \cap A$$

luego:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f(x) - f(a) + f(a) - f(x')| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(x')| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Así,

$$\Omega(a, f, \delta_0) \;=\; \sup\left\{|f(x) - f(x')| \;:\; x, x' \in B(a, \delta_0) \cap A\right\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

luego, como $\Omega(a, f, \delta)$ *es creciente vamos a obtener que si:*

$$0 < \delta < \delta_0$$

entonces,

$$\Omega(a, f, \delta) \leq \Omega(a, f, \delta_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y en consecuencia:

$$0 \leq \lim_{\delta \to 0^+} \Omega(a, f, \delta) < \varepsilon, \quad \textit{para} \quad \varepsilon > 0,$$

esto es,

$$0(f, a) \;=\; \lim_{\delta \to 0^+} \Omega(a, f, \delta) < \varepsilon, \quad \textit{para} \quad \varepsilon > 0$$

por tanto:

$$0(f, a) \;=\; 0$$

$(\Longleftarrow)$ *Sea* $0(f, a) = 0$. *Entonces, de la definición de* $0(f, a)$ *dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta_0 > 0$ *tal que:*

$$\Omega(a, f, \delta_0) \;=\; \sup\left\{|f(x) - f(x')| \;:\; x, x' \in B(a, \delta_0) \cap A\right\} < \varepsilon$$

si $0 < \delta < \delta_0$, *y en consecuencia:*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \textit{si} \qquad \|x - a\| < \delta_0$$

y así f *es continua en* $a \in A$ ∎

Ejemplo 1.16 *Sean* $I := [a,b]$ *y* $J := [c,d]$ *intervalos cerrados de* $\mathbb{R}$. *Demostraremos que* I *y* J *son homeomorfos, esto es, existe una función*

$$f : I \longrightarrow J$$

que es bicontinua y biyectiva (En este ejemplo consideramos a $\mathbb{R}$ *dotado de la métrica usual* $d(x,y) = |x-y| \quad x,y \in \mathbb{R}$*). En efecto, consideremos el siguiente gráfico:*

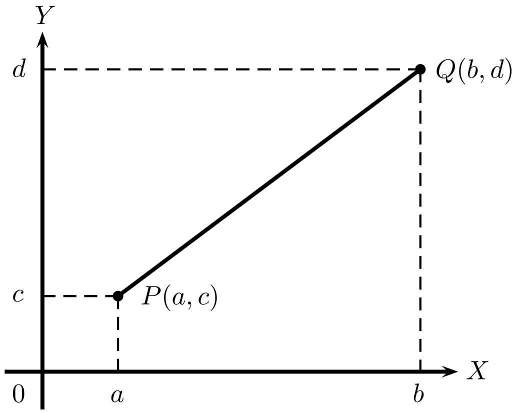


Fig 1.6

Observe que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(a,c)$ *y* $Q(b,d)$ *es:*

$$m = \frac{d-c}{b-a}$$

Definamos ahora la función:

$$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

por:

$$\begin{aligned} f(x) &= c + m(x-a) \\ &= c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

Es claro que $f \in C([a,b])$ *y es además inyectiva por ser una función lineal.*

Mostraremos ahora que $f([a,b]) \;:=\; [c,d]$. *En efecto, sea* $y \in [c,d]$, *entonces:*

$$c \leq y \leq d$$

luego

$$0 \leq y - c \leq d - c$$

y ya que $\dfrac{1}{m} \;=\; \dfrac{b-a}{d-c} > 0$, *entonces*

$$0 \leq \frac{b-a}{d-c}(y-c) \leq \frac{b-a}{d-c}(d-c) \;=\; b-a$$

así, también

$$a \leq a + \frac{b-a}{d-c}(y-c) \leq b$$

por tanto, $\quad x \;=\; a + \dfrac{b-a}{d-c}(y-c) \in [a,b]$ *y además:*

$$\begin{aligned}
f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c)\right) &= c + \frac{d-c}{b-a}\left(a + \frac{b-a}{d-c}(y-c) - a\right) \\
&= c + \frac{d-c}{b-a}\left(\frac{b-a}{d-c}\right)(y-c) \\
&= c + y - c \\
&= y
\end{aligned}$$

Así, f *es también sobreyectiva y por tanto existe su inversa*

$$f^{-1} : [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

que es también una función lineal y por tanto continua. En consecuencia, $[a,b]$ *y* $[c,d]$ *son homeomorfos.*

Note que:

$$f \;=\; T_c \circ M_{\frac{d-c}{b-a}} \circ T_{-a}$$

donde T_c, $M_{\frac{d-c}{b-a}}$ *y,* T_{-a} *son los operadores de translación y multiplicación definidos en la proposición 1.16.* ■

Ejemplo 1.17 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $x_0, y_0 \in X$ *y* $r > 0$. *Entonces,* $B(x_0, \varepsilon)$ *y* $B(y_0, \varepsilon)$ *son conjunto homeomorfos. En efecto, consideremos la función:*

$$f : B(x_0, \varepsilon) \longrightarrow B(y_0, \varepsilon)$$

definida por:

$$\begin{aligned} f(x) &= (T_{y_0} \circ M_{\frac{r}{\varepsilon}} \circ T_{-x_0})(x) \\ &= y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0) \end{aligned}$$

Es claro que f *es una función continua por ser composición de funciones continuas y evidentemente es* $1-1$. *Mostraremos a continuación que* f *es sobreyectiva, esto es,*

$$f(B(x_0, \varepsilon)) \;:=\; B(y_0, r)$$

o equivalentemente:

$$f(B(x_0, \varepsilon)) \subseteq B(y_0, r) \qquad (A)$$

y

$$B(y_0, r) \subseteq f(B(x_0, \varepsilon)) \qquad (B)$$

Efectivamente:

(A) *Sea* $z \in f(B(x_0, \varepsilon))$, *entonces existe un* $x \in B(x_0, \varepsilon)$ *tal que*

$$z \;=\; f(x)$$

Como

$$f(x) = y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0),$$

entonces

$$\begin{aligned}\|f(x) - y_0\| &= \left\|\frac{r}{\varepsilon}(x - x_0)\right\| \\ &= \left|\frac{r}{\varepsilon}\right| \|x - x_0\| \\ &= \frac{r}{\varepsilon}\|x - x_0\| \\ &< \frac{r}{\varepsilon}\varepsilon = r\end{aligned}$$

esto es, $z = f(x) \in B(y_0, r)$.

(B) $B(y_0, r) \subseteq f(B(x_0, \varepsilon))$. *Efectivamente, sea* $z \in B(y_0, r)$. *Veamos que existe un* $x \in B(x_0, \varepsilon)$ *tal que*

$$f(x) = z.$$

esto es,

$$y_0 + \frac{r}{\varepsilon}(x - x_0) = z$$

Al despejar x *de esta última ecuación obtenemos que:*

$$x = x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z - y_0)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|x-x_0\| &= \left\|\frac{\varepsilon}{r}(z-y_0)\right\| \\ &= \left|\frac{\varepsilon}{r}\right| \|z-y_0\| \\ &= \frac{\varepsilon}{r}\|z-y_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{r}r \;=\; \varepsilon\end{aligned}$$

Se sigue que: $x \;=\; x_0 + \dfrac{\varepsilon}{r}(z-y_0) \in B(x_0,\varepsilon)$. *Por otra parte:*

$$\begin{aligned}f(x) &= f\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z-y_0)\right) \\ &= y_0 + \frac{r}{\varepsilon}\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z-y_0) - x_0\right) \\ &= y_0 + z - y_0 \\ &= z\end{aligned}$$

por tanto f es sobreyectiva. Así, existe la inversa de f,

$$f^{-1} : B(y_0, r) \longrightarrow B(x_0, \varepsilon)$$

definida por

$$f^{-1}(x) \;=\; x_0 + \frac{\varepsilon}{r}(z-y_0)$$

y es continua, y concluimos la demostración.

1.4. Comentario final

Para la demostración de la proposición 1.1 nos hemos ayudado de la dada en [10] de la proposición 1 de la sección 1.5 del tema 1. La de los teoremas

1.19 y 1.21 hemos seguido las pruebas de los teoremas 22.1 y 22.5 del libro [2] de análisis matemático.

Puede consultar también el lector el buen texto Matemáticas para la Economía [12], el cual, en su capítulo 1 muestra una lista de ejercicios sobre conjuntos convexos.

Las nociones de función de variación acotada y, absolutamente continua usadas en nuestros ejercicios 1.18 y 1.19 respectivamente, pueden consultarse en el capítulo 1 de [11].

Queremos mencionar también que en el capítulo 2 de [3] se muestra una numerosa lista de ejemplos de espacios normados.

1.5. Ejercicios propuestos

Esta sección contiene una lista de ejercicios propuestos a resolverse con las nociones teóricas dadas en las secciones 1.1 y 1.2. Cuando la solución del ejercicio requiera el uso de un nuevo concepto no dado en dichas secciones, éste será introducido en el enunciado del ***ejercicio*** *mismo.*

A continuación pues presentamos los ejercicios.

Ejercicio 1.1 *Sean X un espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos de X. Demostrar que los conjuntos:*

$$A+B, \quad A\times B, \quad A\cap B \quad y \quad tA \;\; (t\in\mathbb{R}, \;\; t\neq 0)$$

son subconjunto convexos de X

Ejercicio 1.2 *Sean X un espacio normado y A un subconjunto no vacío de X. Demostrar que $co(A)$ (ver la definición 1.6) es un subconjunto convexo de X, y que además:*

$$co(A) \;:= \bigcap_{\substack{A_\alpha \ convexo \\ A_\alpha \supset A}} A_\alpha \qquad\qquad (\alpha\in I, I \ conjunto\ de\ índices)$$

¿Es $\overline{co}(A)$ también convexo?

Ejercicio 1.3 *Calcular la cápsula convexa de los siguientes conjuntos:*

(a) $A \;:=\; (-2,2)\cup(3,4]$

(b) $A \;:=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 4\le x^2+y^2\le 9\right\}$

(c) $A \;:=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y=-2x+1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y=3x\right\}$

(d) $A \;:=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2=9\right\}$

(e) $A \;:=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y+2x-1\ge 0\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y-3x\ge 0\right\}$

¿Cuál es en cada caso $\overline{co}(A)$*?*

Ejercicio 1.4 *Sea* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio normado. Demostrar que* $B(0,\varepsilon)$ *y* $\overline{B}(0,\varepsilon)$ *son conjuntos absorbentes, balanceados y convexos (ver la definición 1.4 y el ejercicio resuelto 1.7 y 1.9)*

Ejercicio 1.5 *¿Es* $B(x_0,\varepsilon)$ *un conjunto absorbente?*

Ejercicio 1.6 *Sea* X *un espacio vectorial y* A *un subconjunto no vacío de* X*. Demostrar que el conjunto:*

$$\bigcup_{|\lambda|\le 1}\lambda A$$

es balanceado y se llama la cápsula balanceada de A*.*

Ejercicio 1.7 *Sean* X *un espacio vectorial y* K *un subconjunto no vacío de* X*. Un elemento* $x\in K$ *se llama un punto extremal de* K *si:*

$$x \;=\; \lambda y+(1-\lambda)z$$

donde $\quad 0<\lambda<1,\; y,z\in X,$ *con* $y\ne z$*, entonces:*

$$y\notin K \qquad \text{ó} \qquad z\notin K$$

Dar un ejemplo justificando su respuesta de un conjunto K *tal que:*

(a) No tenga puntos extremales

(b) Tenga un número finito de puntos extremales

(c) Tenga una infinidad de puntos extremales

Ejercicio 1.8 *Un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice estrictamente convexo si la frontera de la bola unitaria no contiene ningún segmento de recta, esto es, si* $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, *entonces,*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1 \qquad \textit{si} \qquad 0 < \lambda < 1$$

(ver el ejemplo 1.9).

Demostrar que $(X, \|\cdot\|)$ *es estrictamente convexo* $\Longleftrightarrow$ $\forall\ x, y \in X$, *con* $\|x\| = \|y\| = 1$, $(x \neq y)$, *entonces* $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$

Ejercicio 1.9 *Un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice estrictamente normado si:*

$$x, y \in X,\ \ x \neq 0,\ \ y \neq 0\ \ \textit{con}\ \ \|x+y\| \ = \ \|x\| + \|y\|,$$

entonces existe un $\alpha > 0$ *tal que:*

$$x \ = \ \alpha y$$

Demostrar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ *es estrictamente normado* $\Longleftrightarrow$ $(X, \|\cdot\|)$ *es estrictamente convexo.*
Sugerencia: $(\Longleftarrow)$ $\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \ = \ \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|}, x, y \in X,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

Ejercicio 1.10 *Un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice uniformemente convexo si la bola cerrada unitaria de* X *es un conjunto uniformemente convexo, esto es,*
dado $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $\forall\ x, y \in X$ *con* $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $\|x-y\| \geq \varepsilon$, *entonces:*

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq 1 - \delta$$

Demostrar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ *es uniformemente convexo* $\Longleftrightarrow$ *para cada par de sucesiones* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *y* $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *con*

$\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *y que:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| \;=\; 1$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \;=\; 0$$

Ejercicio 1.11 *Demostrar que todo espacio normado uniformemente convexo es estrictamemente convexo.*

Ejercicio 1.12 *Sean* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *dos normas definidas sobre el mismo espacio vectorial* X. *Demostrar que:*

(a) *La expresión:*

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2$$

es una norma sobre X.

(b) *¿Es también* $\|x\| = \|x\|_1\|x\|_2$ *una norma sobre* X*?*

Ejercicio 1.13 *(a)* *Sea*

$$C'([a,b]) \;:=\; \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; f'(x) \;\; \textit{existe y es continua sobre } [a,b] \right\}$$

En $C'([a,b])$ *definimos las siguentes operaciones:*

(O1) *Suma:*

$$(f+g)(x) \;=\; f(x) + g(x) \qquad x \in [a,b]$$

(O2) *Multiplicación por escalar:*

$$(\alpha f)(x) \;=\; \alpha f(x) \qquad \alpha \in K, \;\; x \in [a,b]$$

Se puede verificar que respecto de (O1) y (O2) $C'([a,b])$ *es un espacio vectorial sobre* K*. Demuestre que la expresión:*

$$\|f\| \ = \ |f(a)| + \|f'\|_u$$

donde

$$\|f'\|_u \ = \ \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

(ver ejemplo 1.10), es una norma sobre $C'([a,b])$

(b) *Demostrar que:*

$$\|f\|_u \leq [1+(b-a)]\|f\| \qquad\qquad f \in C'([a,b])$$

Sugerencia: $f(x) \ = \ f(a) + \int_a^x f'(t)dt$

Ejercicio 1.14 *Sea*

$$X_0 \ := \ \left\{ f \in C'([a,b]) \ : \ \int_a^b f(x)dx \ = \ 0 \right\}$$

(a) *Demostrar que la expresión:*

$$\|f\| \ = \ \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

es una norma sobre el subespacio X_0.

(b) *¿Es también* $\|\cdot\|$ *una norma sobre* $C'([a,b])$*?*

Ejercicio 1.15 *Sean* $X \ := \ C([0,1])$ *y* $f_n(x) \ = \ \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$ *para* $n = 1, 2, \ldots$ *Se pide:*

(a) *Demostrar que* $f_n \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow \infty$ *en* $\|\cdot\|_1$ *de* X *(Ver ejemplo 1.11)*

(b) *Demostrar también que* $f_n \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow \infty$ *en* $\| \cdot \|_u$ *de* X

Ejercicio 1.16 *Sea* $X := C([0,1])$ *y* $f_n(x) = x^n$ *para* $n = 1, 2, \ldots$ *Se pide:*

(a) *Demostrar que* $f_n \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow \infty$ *en* $\| \cdot \|_1$

(b) *Demostrar también que* $f_n \longrightarrow 0$ *si* $n \longrightarrow \infty$ *en* $\| \cdot \|_u$ *de* X

Ejercicio 1.17 *Sea* $I := [a,b]$. *Una partición de* I *es un subconjunto finito de puntos* $P = \Big\{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n\Big\}$ *de* $[a,b]$ *tal que:*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$$

y

$$\bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i] = I$$

Sea

$$\Pi := \Big\{P : P \text{ es una partición de } [a,b]\Big\}$$

Una función:

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice que es de variación acotada sobre $[a,b]$ $\Big($*en el sentido de Jordan* [11], *pag*14$\Big)$ *si:*

$$V(f) := \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty.$$

Denotemos por:

$$BV[a,b] := \Big\{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \text{ es de variación acotada sobre } [a,b]\Big\}$$

Entonces, respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar $BV[a,b]$ tiene estructura de espacio vectorial sobre K $[K = \mathbb{R}$ ó $\mathcal{C}]$ Definamos:

$$\|\cdot\|_{BV[a,b]} : BV[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

por:

$$\|f\|_{BV[a,b]} \;=\; |f(a)| + V(f)$$

Demostrar que $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ es una norma sobre $BV[a,b]$

Ejercicio 1.18 *Una función:*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice absolutamente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que: $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(c_i)-f(d_i)| < \varepsilon$ donde $\Big\{[c_i, d_i]\Big\}_{i=1}^{n}$ es cualquier sucesión de intervalos no solapados en $[a,b]$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} |c_i - d_i| < \delta$

(solapados significa que cualesquiera de éstos dos intervalos tienen a lo sumo un elemento en común)

Se pide:

(a) *Demostrar que toda función absolutamente continua es continua.*

(b) *Sea*

$$AC([a,b]) \;:=\; \Big\{f \;:\; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\;\; f \text{ es absolutamente continua sobre } [a,b]\Big\}$$

Demostrar que $AC([a,b])$ es un espacio vectorial sobre K respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar.

(c) *Demostrar que $AC([a,b]) \subset BV[a,b]$*

(d) Dar un ejemplo de una función $f \in BV[a,b]$ tal que $f \notin AC([a,b])$

Ejercicio 1.19 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $x_0 \in X$. Demostrar que X y $B(x_0, \varepsilon)$ son conjuntos homeomorfos.*

Ejercicio 1.20 *¿Es posible establecer un homeomorfismo entre el círculo*

$$A \ := \ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \ = \ 1\right\}$$

y la elipse

$$B \ := \ \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4u^2 + 9v^2 \ = \ 1\right\}?$$

Capítulo 2

Espacios de Banach

2.1. Desigualdades clásicas en análisis funcional

En esta sección mostraremos las desigualdades de Holder - Minkowski y Minkowski.

Para preparar la demostración de esas desigualdades previamente introducimos el concepto de conjugados armónicos y mostraremos un lema previo.

Definición 2.1 *Dos números reales p y q se dicen conjugados armónicos si:*

$$p > 1, \qquad q > 1 \qquad y \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Observe que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longleftrightarrow (p-1)(q-1) = 1 \Longleftrightarrow (p-1)q = p \Longleftrightarrow (q-1)p = q$$

Los conjugados armónicos, también se llaman exponentes conjugados (o índices conjugados)

Lema 2.1 *Sean p y q conjugados armónicos; $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demostración

Caso 1.- Si $a = 0$ ó $b = 0$, la demostración es evidente.

Caso 2.- Cuando $a > 0$ y $b > 0$. Entonces, debe cumplirse alguna de las siguientes afirmaciones:

$$a > b \qquad ó \qquad a < b \qquad ó \qquad a = b$$

Consideremos la función potencial $f(x) = x^{p-1}$. La representación gráfica de esta función para $f\Big|_{[0,a]}$ y para $a > b$ es la que muestra la figura siguiente:

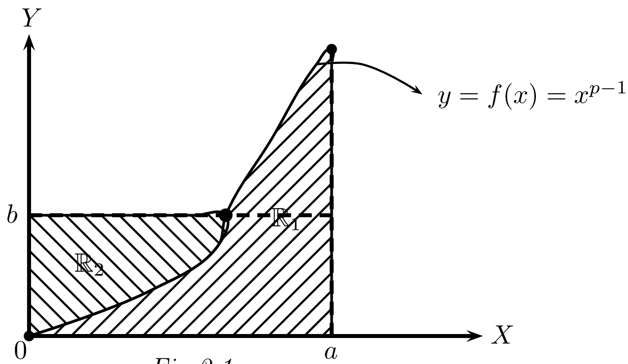


Fig 2.1

Observe de la figura 2.1 que:

$$ab \leq A(R_1) + A(R_2)$$

Ahora bien:

$$A(R_1) \;=\; \int\limits_0^a x^{p-1}dx \;=\; \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a \;=\; \frac{a^p}{p}$$

Por otra parte, haciendo $x^{p-1} \;=\; y$*, obtenemos que:*

$$x \;=\; y^{\frac{1}{p-1}} \;=\; y^{q-1}$$

por tanto,

$$A(R_2) \;=\; \int\limits_0^a y^{q-1}dy \;=\; \left.\frac{y^q}{q}\right|_0^b \;=\; \frac{b^q}{q}$$

En consecuencia,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Las demostraciones para los casos $a < b$ *ó* $a = b$ *son semejantes y se dejan como ejercicio.*

Como una consecuencia del lema anterior obtenemos la importante desigualdad de Holder-Minkowski.

Corolario 2.1 (Desigualdad de Holder-Minkowski) *Sean* p *y* q *conjugados armónicos,* $x \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\in\; \mathcal{F}^n$ *y,* $y \;=\; (y_1, y_2, \ldots, y_n) \;\in\; \mathcal{F}^n$*. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

Demostración

Caso 1.- Cuando $x \;=\; 0$ *ó* $y \;=\; 0$ *se obtiene una igualdad evidente.*

Caso 2.- Cuando $x \;\neq\; 0, \;\; y \;\neq\; 0$*. Sean,*

$$\alpha \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \qquad \beta \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1/q}$$

Entonces $\alpha \neq 0$ *y* $\beta \neq 0$. *Sean*

$$x_j{}' = \frac{x_j}{\alpha}, \qquad y_j = \frac{y_j}{\beta} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Luego

$$|x_j{}'|^p = \frac{|x_j|^p}{\alpha^p} \qquad |y_j{}'|^q = \frac{|y_j|^q}{\beta^q} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

y así,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j{}'|^p = \frac{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}{\alpha^p} = \frac{\alpha^p}{\alpha^p} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j{}'|^p = \frac{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}{\beta^p} = \frac{\beta^q}{\beta^q} = 1$$

Ahora bien, por el lema 2.1, tomando $a = |x_j{}'|$ *y,* $b = |y_j{}'|$ *obtenemos que:*

$$|x_j{}'||y_j{}'| \leq \frac{|x_j{}'|^p}{p} + \frac{|y_j{}'|^q}{q}$$

y así,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j{}'||y_j{}'| \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} |x_j{}'|^p}{p} + \frac{\sum_{j=1}^{n} |y_j{}'|^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

en virtud de que p *y* q *son conjugados armónicos. En consecuencia,*

$$1 \geq \sum_{j=1}^{n} |x_j{}'y_j{}'| = \sum_{j=1}^{n} |x_j{}'||y_j{}'| = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{x_j}{\alpha}\right|\left|\frac{y_j}{\beta}\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{x_j y_j}{\alpha\beta}\right|$$

esto es,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \alpha\beta = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1/q}$$

Ahora, tenemos el importante corolario:

Corolario 2.2 (Desigualdad de Minkowski) *Sean $p > 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathcal{F}^n$. Entonces*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

Demostración

Sea $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces,

$$|x_j + y_j|^p = |x_j + y_j|^{p-1}|x_j + y_j| \leq |x_j + y_j|^{p-1}|x_j| + |x_j + y_j|^{p-1}|y_j|$$

y ahora, aplicando la desigualdad de Holder-Minkowski para:

$$\begin{cases} a = |x_j| \\ b = |x_j + y_j|^{p-1} \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} a = |y_j| \\ b = |x_j + y_j|^{p-1} \end{cases}$$

vamos a obtener que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j||x_j + y_j|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{q(p-1)}\right)^{-1/q} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

esto es,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p\right)^{1/p}$$

Proposición 2.1 *Sea* $p > 1$. *La función*

$$\| \cdot \|_p : \mathcal{F}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|x\|_p \ = \ \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}^n$$

es una norma sobre $\mathcal{F}^n$. *Además:*

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p \ = \ \|x\|_\infty$$

Demostración

Es fácil verificar los axiomas (A1) y (A2) de la definición 1.7. La desigualdad triangular es la de Minkowski mostrada anteriormente en el corolario 2.2.

Mostraremos ahora que:

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p \ = \ \|x\|_\infty$$

Para esto recordaremos inicialmente que:

$$si \qquad |a| < 1, \qquad \lim_{n\to\infty} a^n \ = \ 0$$

y,

$$si \qquad a > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} \; = \; 1$$

Consideremos pues, los siguientes casos:

Caso 1. Cuando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *donde*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 1$$

y

$$|x_j| < 1, \qquad j = m+1, \ldots, n$$

Entonces, $\|x\|_\infty \; = \; 1$ *y*

$$\begin{aligned} {\|x\|_p}^p \; = \; \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \; &= \; |x_1|^p + \ldots + |x_m|^p + |x_{m+1}|^p + \ldots + |x_n|^p \\ &= \; \overbrace{1 + \ldots + 1}^{m-veces} + |x_{m+1}|^p + \ldots + |x_n|^p \\ &= \; m + \sum_{j=m+1}^{n} |x_j|^p \end{aligned}$$

luego,

$$\|x\|_p \; = \; \left(m + \sum_{j=m+1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

y así,

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} \|x\|_p \; &= \; \lim_{p\to\infty} \left(m + \sum_{j=m+1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \\ &= \; \lim_{p\to\infty} m^{\frac{1}{p}} \; = \; 1 \end{aligned}$$

esto es, $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = 1 = \|x\|_\infty$

Caso 2. Cuando $\|x\|_\infty \neq 1$. *Definimos:*

$$y = \frac{x}{\|x\|_\infty}$$

Entonces $\|y\|_\infty = 1$, *y así, por el caso 1:*

$$\lim_{p\to\infty} \|y\|_p = 1,$$

esto es,

$$\lim_{p\to\infty} \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p = 1 \Longrightarrow \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

2.2. Espacios de Banach. Teoría básica. Ejemplos y ejercicios

En la teoría de espacios métricos, un espacio métrico (X, d) *se dice completo si cada sucesión* $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *tal que*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

es convergente a un $x \in X$. *Ahora bien, sabemos que si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces* X *es un espacio métrico con la métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|$ *de* X, *esto es,*

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad x, y \in X$$

En esta sección introducimos la noción de espacio de Banach. Previamente damos la siguiente definición y mostramos una proposición básica.

Definición 2.2 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X*. Decimos que* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy si:*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) \;=\; \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| \;=\; 0$$

esto es, es dado $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \;=\; n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$d(x_n, x_m) \;=\; \|x_n - x_m\| < \varepsilon \qquad si \qquad m, n \geq n_0$$

Proposición 2.2 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X*. Entonces,*

(a) *Si* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy, entonces* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es acotada.*

(b) *Si* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy y esta sucesión contiene alguna subsucesión convergente, entonces* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es también convergente.*

Demostración

(a) *Como* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy, dado* $\varepsilon \;=\; 1$ *existe un* $n_1 = n_1(1) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\Big|\|x_n\| - \|x_m\|\Big| \leq \|x_n - x_m\| < 1 \qquad si \qquad m, n \geq n_0,$$

luego

$$-1 < \|x_n\| - \|x_m\| < 1 \qquad si \qquad m, n \geq n_0,$$

entonces, tomando $m = n_0, \;\; n > n_0$ *y*

$M \;=\; \text{máx}\left\{1+\|x_{n_0}\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_m\|\right\}$ *se obtiene que:*

$$\|x_n\| \leq M \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Sea $\left\{x_{n_k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una subsucesión de la sucesión de Cauchy* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que*

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} \;=\; x \quad \text{en la norma} \quad \|\cdot\| \quad \text{de} \quad X$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ *existe un* $k_1 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\left\|x_{n_k} - x\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad si \qquad n_k \geq k_1$$

Por otra parte, como $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad si \qquad m, n \geq n_1$$

Sean $n_0 \;=\; \text{máx}(k_1, n_1),\; n > n_0$ *y* $n_k > n_0$, *entonces*

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x\| \\ &\leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \end{aligned}$$

Introduciremos ahora la importante noción de espacio de Banach.

Definición 2.3 *Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se llama un espacio de Banach si cada sucesión de Cauchy en X es convergente a un elemento $x \in X$.*

De esta definición el lector puede observar, que un espacio de Banach no es otra cosa que un espacio normado completo.

En este capítulo estudiaremos algunos ejemplos de espacios de Banach, los cuales mencionamos en la siguiente lista:

(a) *Los espacios ${l_p}^n$ $(p \geq 1)$ y ${l_\infty}^n$*

(b) *Los espacios de funciones $C([a,b])$, $BV([a,b])$ y $C'([a,b])$*

(c) *Los espacios de sucesiones l^p $(p \geq 1)$, l_∞ y c_0*

Antes de estudiar la completitud de los mencionados espacios en (a), (b) y (c), respecto de una norma definida previamente, mostraremos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.3 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y Y un subespacio de X. Entonces,*

(a) *Si Y es cerrado en X, entonces Y es también un espacio de Banach.*

(b) *Si Y es un espacio de Banach, entonces Y es cerrado (en sí mismo).*

Demostración

(a) *Sea $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en Y. Entonces, $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es también de Cauchy en X. Como $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach, existe un $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$ si $n \longrightarrow \infty$ y como Y es cerrado concluimos que $x \in Y$. Así, $(Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

(b) *Evidente.*

Proposición 2.4 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\|\cdot\|_1$ otra norma sobre X tal que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ (Ver el ejemplo 1.5). Entonces, $(X, \|\cdot\|_1)$ es también un espacio de Banach.*

Demostración

Sea $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X respecto de la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces, como $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|$ existen constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que:

$$a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in X$$

en particular vamos a tener que:

$$a\|x_n - x_m\|_1 \leq \|x_n - x_m\| \qquad (B)$$

$$\|x_n - x_m\| \leq b\|x_n - x_m\|_1 \qquad (A)$$

Se sigue de la desigualdad (A) que $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy respecto de la norma $\|\cdot\|$, y ya que $(X, \|\cdot\|)$ es completo existe un $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$ si $n \longrightarrow \infty$.

De (B) se obtiene también que $x_n \longrightarrow x$ si $n \longrightarrow \infty$ en $\|\cdot\|_1$. Por tanto, $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach.

Proposición 2.5 *Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios de Banach. Entonces, el espacio normado $X \times Y$ es también un espacio de Banach (ver proposición 1.13).*

Demostración

De acuerdo a la proposición 1.14 la norma en $X \times Y$ es:

$$\|(x, y)\| \;=\; \|x\|_1 + \|y\|_2 \qquad (x, y) \in X \times Y$$

Sea entonces, $\left\{(x_n, y_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $X \times Y$. *Entonces, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\begin{aligned} \|(x_n, y_m) - (x_m, y_m)\| &= \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| \\ &= \|x_n - x_m\|_1 + \|y_n - y_m\|_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

si $n, m \geq n_0$. *De aquí, es claro que:*

$$\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \qquad y \qquad \|y_n - y_m\|_2 < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$. *Se sigue entonces que* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *son sucesiones de Cauchy en* $(X, \|\cdot\|_1)$ *y* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *respectivamente. Como* $(X, \|\cdot\|_1)$ *y* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *son completos, existe un* $x \in X$ *y,* $y \in Y$ *tal que:*

$$x_n \longrightarrow x \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

y,

$$y_n \longrightarrow y \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

Así, $(x, y) \in X \times Y$ *y es fácil verificar que:*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

en $(X \times Y, \|\cdot\|)$. *Así,* $(X \times Y, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

Con el propósito de establecer una caracterización para los espacios de Banach, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.4 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Una suma de una infinidad de elementos de* X, *esto es,*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

se llama una serie en X *y denota en forma abreviada por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_k$$

También diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_k$ *es convergente en* $(X, \|\cdot\|)$ *si la sucesión de sumas parciales*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

es convergente en X.

Definición 2.5 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *una serie en* X. *Decimos que* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es absolutamente convergente si:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

Tenemos entonces la siguiente caracterización para los espacios de Banach.

Teorema 2.1 Sea $(X, \|\cdot\|)$ ***un espacio normado. Entonces,*** $(X, \|\cdot\|)$ ***es un espacio de Banach*** $\Longleftrightarrow$ ***cada serie absolutamente convergente es convergente.***

Demostración

$\Longrightarrow$) *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *una serie de* X *absolutamente convergente. Entonces, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\sum_{n=k+1}^{m} \|x_n\| < \varepsilon \qquad si \qquad m > k \geq k_0$$

Así, para $m > k \geq k_0$ *vamos a tener que:*

$$\begin{aligned}\|s_k - s_m\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=k+1}^{m} x_n \right\| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{m} \|x_n\| < \varepsilon\end{aligned}$$

Luego la sucesión de sumas parciales de la serie formal $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *es de Cauchy en* $(X, \|\cdot\|)$, *que es completo, por tanto, ésta es convergente.*

$\Longleftarrow$) *Supóngase que cada serie en* X *es absolutamente convergente, es convergente. Sea* $S := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* X. *Se sigue entonces que:*

Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, *existe un* $x_{n_1} \in S$ *tal que:*

$$\left\| x_{n_1} - x_l \right\| < \frac{1}{2} \qquad si \qquad l \geq n_1$$

Sea $S_1 := S \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\}$. *Entonces, dado* $\varepsilon = \dfrac{1}{2^2}$ *existe un* $x_{n_2} \in S_1$ *y así* $n_2 > n_1$ *tal que:*

$$\left\| x_{n_2} - x_l \right\| < \frac{1}{2^2} \qquad si \qquad l \geq n_2$$

Continuando este procedimiento, obtenemos una subsucesión $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $S := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que:*

$$\left\| x_{n_k} - x_l \right\| < \frac{1}{2^k} \qquad si \qquad l \geq k$$

en donde l se identifica con n_l y k es fijo, con $k = 1, 2, 3, \ldots$

Definamos ahora:

$$y_k \;=\; x_{n_k} - x_{n_{k-1}} \qquad \textit{donde} \qquad x_{n_0} \;=\; 0$$

Es evidente que:

$$x_{n_k} \;=\; \sum_{i=1}^{k} y_i$$

y así, por la construcción anterior:

$$\|y_k\| \;=\; \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| < \frac{1}{2^{k-1}}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty$$

se sigue de aquí que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ *es absolutamente convergente, luego por la hipótesis* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ *es convergente, esto es, la subsucesión* $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *de la sucesión* $S = \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente, y luego, por la proposición 2.5 (b)* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es también convergente y esto finaliza la demostración.*

Ahora, nuestro próximo objetivo es construir un cierto espacio de Banach de uso frecuente en el análisis funcional: el espacio cociente. Para esto, inicialmente recordaremos la siguiente definición:

Definición 2.6 *Sea X un conjunto no vacío. Una relación entre los elementos de X, denotada con el símbolo "$\sim$" se llama una relación de equivalencia sobre X si verifica las siguientes propiedades:*

(P1) $x \sim x, \;\; x \in X$ *(reflexiva)*

(P2) *Si* $x \sim y$ *entonces* $y \sim x$ *(simétrica)*

(P3) *Si* $x \sim y, \;\; y \sim z$ *entonces* $x \sim z$ *(transitiva)*

(La noción de relación de equivalencia ya fué usada en la solución del ejemplo 1.5)

Así, si " $\sim$ " *es una relación de equivalencia sobre* X *y* $x \in X$, *entonces la clase de equivalencia de* $x \in X$, *denotada por* $[x]$, *es:*

$$[x] \; := \; \Big\{ y \in X \; : \; x \sim y \Big\}$$

y el conjunto cociente de X *determinado por esta relación de equivalencia* " $\sim$ " *y denotado por* $X/\sim$, *es:*

$$X/\sim \; := \; \Big\{ [x] \; : \; x \in X \Big\}$$

Observe que $X/\sim$ *es una subcolección de* $\mathcal{P}(X)$

Ahora bien, sean X *un espacio vectorial y* M *un subespacio (no necesariamente cerrado) de* X. *Definamos:*

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in M, \;\; x, y \in X$$

Entonces es fácil verificar que " $\sim$ " *es una relación de equivalencia sobre* X. *Note que en este caso, la clase de equivalencia de un* $x \in X$, *es:*

$$[x] := x + M$$

El conjunto cociente determinado por esta relación de equivalencia es denotado por: X/M.

Definiremos en X/M *las siguientes operaciones:*

(O1) Suma:

$$[x] + [y] \ := \ [x + y] \qquad x, y \in X$$

(O2) Multiplicación por escalar:

$$\alpha[x] \ := \ [\alpha x] \qquad \alpha \in \mathcal{F}, \ \ x \in X$$

Mostraremos a continuación que $(O1)$ *y* $(O2)$ *están bien definidas.*

En efecto:

$(O1)$ *Supóngase que:*

$$[x] \ := \ [x'] \qquad y, \qquad [y] \ := \ [y']$$

esto es,

$$x + M \ := \ x' + M$$

y,

$$y + M \ := \ y' + M$$

entonces,

$$x + y + M \ := \ x' + y' + M$$

Efectivamente, como $x' \in [x]$ *y,* $y' \in [y]$*, entonces:*

$$x' \ = \ x + m_1 \qquad m_1 \in M$$

$$y' \ = \ y + m_2 \qquad m_2 \in M$$

luego

$$\begin{aligned} x'+y'+M &:= x+m_1+y+m_2+M \\ &:= x+y+m_1+m_2+M \\ &:= x+y+M \end{aligned}$$

Así, $$[x+y] := [x'+y']$$

$(O2)$ *Supóngase que:*

$$\alpha[x'] := \alpha[x]$$

Entonces,

$$\alpha(x'+M) := \alpha(x+M)$$

Luego, $\alpha x' \in \alpha[x]$, *y así,*

$$\alpha x' = \alpha(x+m_1) \qquad m_1 \in M$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \alpha x'+M &:= \alpha(x+m_1)+M \\ &:= \alpha x+\alpha m_1+M \\ &:= \alpha x+M \end{aligned}$$

esto es, $$[\alpha x'] := [\alpha x]$$

y por tanto $(O2)$ *está también bien definida.*

A continuación tenemos la siguiente proposición y los detalles de la demostración los dejamos al lector.

Proposición 2.6 *Sean X un espacio vectorial y M un subespacio de X. El conjunto cociente X/M es un espacio vectorial respecto a las operaciones $(O1)$ y $(O2)$. El elemento neutro para la adición $(O1)$ es todo el subespacio M, ya que:*

$$[0] \ := \ M \qquad\qquad 0 \in M$$

Cuando además X es un espacio normado y M es un subespacio cerrado de X, obtenemos el siguiente:

Teorema 2.2 Sean** $(X, \|\cdot\|)$ **un espacio normado y** M **un subespacio cerrado de** X. **Entonces, la expresión:

$$\Big\|[x]\Big\| = \inf_{m\in M} \ \|x+m\| \qquad x \in M \qquad (\boldsymbol{A})$$

***define una norma sobre el espacio cociente** X/M*

Demostración

Es claro que que la ecuación (A) está bien definida sobre X/M y que además,

$$0 \leq \|x+M\| \leq \|x\| \qquad\qquad x \in X$$

esto es,

$$\|x+M\| \ = \ \Big\|[x]\Big\| \in \Big[o, \|x\|\Big]$$

A continuación mostraremos que (A) satisface las propiedades de una norma. En efecto:

$(A1)(\Longrightarrow)$ *Si* $\Big\|[x]\Big\| \ = \ 0$, *entonces dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $m_0 \in M$ *tal que:*

$$\|x+m_0\| \ = \ \|x-(-m_0)\| < \varepsilon$$

esto es,

$$B(x, \varepsilon) \cap M \neq \phi$$

también

$$\widehat{B}(x, \varepsilon) \cap M \neq \phi$$

luego, ya que ε *es arbitrario vamos a tener que* $x \in M'$. *Por otra parte, como* M *es cerrado* $x \in M$ *(ver la proposición 1.7). Por tanto,*
$[x] = x + M = M = [0]$.

($\Longleftarrow$) *Si* $[x] = [0]$, *entonces* $x \in [0] = M$ *y por tanto* $-x \in M$. *Así,*

$$\left\|[x]\right\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leq \|x + (-x)\| = \|0\| = 0$$

y en consecuencia $\left\|[x]\right\| = 0$

($A2$) *Consideremos los siguientes casos:*

Caso 1: Cuando $\lambda = 0$. *Entonces,*

$$\left\|0[x]\right\| = \left\|[0x]\right\| = \left\|[0]\right\| = 0 = 0\left\|[x]\right\|$$

Caso 2: Sea $\lambda \neq 0$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}
\|\lambda(x+M)\| &= \|\lambda x+M\| = \inf_{m\in M} \|\lambda x+m\| \\
&= \inf_{m\in M} \left\|\lambda\left(x+\frac{m}{\lambda}\right)\right\| \\
&= \inf_{m'\in M} \left\|\lambda(x+m')\right\| \\
&= \inf_{m'\in M} |\lambda| \, \|x+m'\| \\
&= |\lambda| \inf_{m'\in M} \|x+m'\| \\
&= |\lambda| \, \|x+M\|
\end{aligned}$$

Por tanto, $\quad \|\lambda(x+M)\| = |\lambda| \, \|x+M\| \qquad \lambda\in\mathcal{F}, \;\; x\in X$

$(A3)$ *(Desigualdad triangular). Mostraremos que:*

$$\Big\|[x]+[y]\Big\| \leq \|x\|+\|y\| \qquad\qquad x,y\in X$$

Como $[x]+[y]:=[x+y]$, *basta demostrar que:*

$$\Big\|[x+y]\Big\| \leq \Big\|[x]\Big\|+\Big\|[y]\Big\|,$$

o equivalentemente que:

$$\Big\|[x+y]\Big\| \leq \Big\|[x]\Big\|+\Big\|[y]\Big\|+\varepsilon \qquad \text{para} \quad \varepsilon>0 \qquad \text{arbitrario.}$$

En efecto, de la definición de $\Big\|[\cdot]\Big\|$ *vamos a tener que dado* $\varepsilon>0$ *existen* $m_1, m_2\in M$ *tales que:*

$$\begin{aligned} \|x+m_1\| &< \Big\|[x]\Big\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ \|y+m_2\| &< \Big\|[y]\Big\| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

luego

$$\|x+m_1\| + \|y+m_2\| < \Big\|[x]\Big\| + \Big\|[y]\Big\| + \varepsilon$$

Pero como

$$\|x+m_1\| + \|y+m_2\| \geq \Big\|x+y+m_1+m_2\Big\|$$

haciendo $m = m_1 + m_2 \in M$ *obtenemos que:*

$$\Big\|x+y+m\Big\| \leq \|x+m_1\| + \|y+m_2\| < \Big\|[x]\Big\| + \Big\|[y]\Big\| + \varepsilon$$

y en consecuencia,

$$\Big\|[x+y]\Big\| < \Big\|[x]\Big\| + \Big\|[y]\Big\| + \varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$ *arbitrario. Por tanto,*

$$\Big\|[x+y]\Big\| \leq \Big\|[x]\Big\| + \Big\|[y]\Big\|$$

Para el caso cuando $X = \mathbb{R}^2$ *dotado de la norma Euclidiana y,*

$$M := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x\Big\}$$

entonces, la clase de equivalencia de un elemento $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, *es el que muestra en la figura siguiente:*

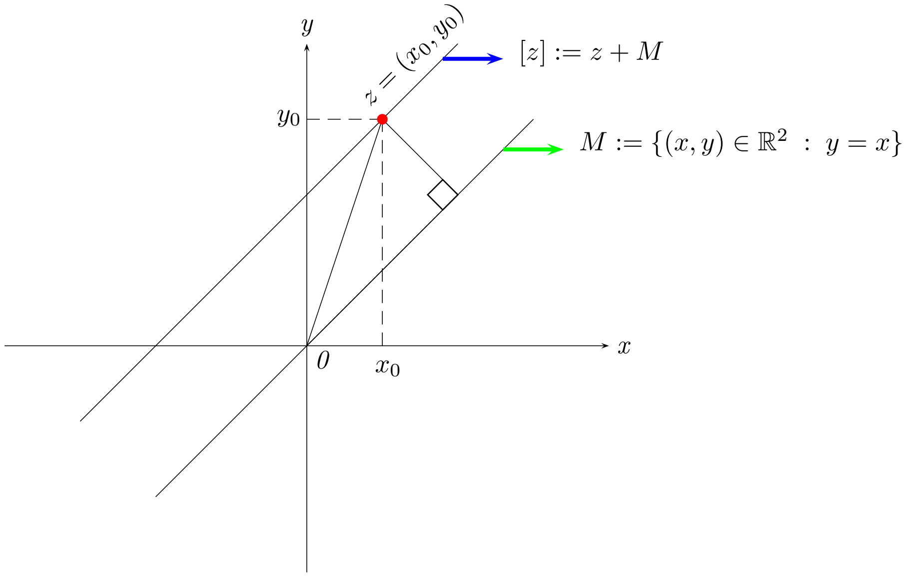


Fig 2.2

Note también de la figura 2.2 que:

$$\left\| [z] \right\| = \inf_{m \in M} \|z + m\| = d(z, M),$$

donde $d(z, M)$ *es la distancia de* $z = (x_0, y_0)$ *a la recta* $y = x$.

A continuación enunciamos y mostramos el importante

Teorema 2.3 Sean $(X, \|\cdot\|)$ ***un espacio de Banach y*** M ***subespacio cerrado de*** X. ***Entonces, el espacio cociente*** $\widehat{X} = X/M$ ***es un espacio de Banach con la norma:***

$$\left\| [x] \right\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \quad x \in X, \;\; [x] := x + M$$

Demostración

Sea $\left\{[x_n]\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* X/M*. Entonces, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\left\|[x_n] - [x_m]\right\| < \varepsilon \qquad si \qquad n, m \geq n_0,$$

de aquí existe una subsucesión $\left\{[x_{n_k}]\right\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $\left\{[x_n]\right\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que*

$$\left\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\right\| < \frac{1}{2^k} \qquad para \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Haciendo $y_k = x_{n_k}$ *vamos a tener que*

$$\left\|[y_k] - [y_{k+1}]\right\| < \frac{1}{2^k} \qquad para \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Como

$$[y_k] - [y_{k+1}] = y_k + M - (y_{k+1} + M),$$

entonces en particular, para $k = 1$,

$$\|y_1 - y_2 + M\| < \frac{1}{2},$$

luego de la definición de $\|[\cdot]\|$ *en el espacio cociente* X/M *existe un elemento digamos* $m_2 \in M$ *tal que:*

$$\|y_1 - y_2 + m_2\| < \frac{1}{2}$$

esto es,

$$\|y_1 - (y_2 - m_2)\| < \frac{1}{2}$$

Sea $z_1 = y_1, \qquad z_2 = y_2 - m_2$ *entonces,*

$$\|z_1 - z_2\| < \frac{1}{2}$$

También, para $k = 2$

$$\|y_2 - y_3 + M\| < \frac{1}{2^2},$$

por tanto, existe un $m_3{}' \in M$ *tal que*

$$\|y_2 - y_3 + m_3{}'\| < \frac{1}{2^2}$$

esto es,

$$\|z_2 + m_2 - y_3 + m_3{}'\| < \frac{1}{2^2}$$

Haciendo $z_3 = y_3 - m_3$ *donde* $m_3 = m_2 + m_3{}' \in M$ *obtenemos que:*

$$\|z_2 - z_3\| < \frac{1}{2^2}$$

Continuando este procedimiento obtenemos una sucesión $\left\{ z_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *tal que*

$$\|z_n - z_{n+1}\| < \frac{1}{2^n} \qquad \textit{para} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde

$$\begin{aligned} z_n &= y_n - m_n \\ z_{n+1} &= y_{n+1} - m_{n+1} \end{aligned}$$

$m_n, m_{n+1} \in M$. *Por tanto,*

$$\begin{aligned} \|z_n - z_{n+p}\| &= \|z_n - z_{k+1} + z_{n+1} - z_{n+2} + \ldots + z_{n+p-1} - z_{n+p}\| \\ &\leq \|z_n - z_{n+1}\| + \|z_{n+1} - z_{n+2}\| + \ldots + \|z_{n+p-1} - z_{n+p}\| \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \longrightarrow 0 \qquad si \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

se sigue entonces que $\left\{ z_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* $(X, \|\cdot\|)$ *que es de Banach, por tanto existe un* $z \in X$ *tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; z \qquad \textit{en la norma} \qquad \|\cdot\| \quad \textit{de} \quad X$$

Ahora bien, como:

$$\|z + M - (z_n + M)\| \;=\; \|z - z_n + M\| \le \|z - z_n\| \longrightarrow 0 \qquad \textit{si} \qquad n \to \infty$$

se sigue que

$$z_n + M \longrightarrow z + M \qquad \textit{si} \qquad n \to \infty \;\; \textit{en} \;\; X/M$$

Por otra parte, como $z_n \;=\; y_n - m_n$ $(m_n \in M)$ *vamos a tener también que*

$$y_n + M \longrightarrow z + M \qquad \textit{si} \qquad n \to \infty \;\; \textit{en} \;\; X/M$$

Como $y_n \;=\; x_{k_n}$

$\Big($*aunque inicialmente* $y_k = x_{n_k}$ *no se pierde generalidad usando ahora esta notación*$\Big)$,

se tiene también que:

$$x_{k_n} + M \longrightarrow z + M \qquad \textit{si} \qquad n \to \infty \;\; \textit{en} \;\; X/M$$

Así,

$$x_{n_k} + M \longrightarrow z + M \qquad \textit{si} \qquad k \to \infty \;\; \textit{en} \;\; X/M,$$

en conclusión, $\left\{ [x_n] \right\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* X/M *que contiene una subsucesión convergente en* X/M*. Por tanto,*

$$x_n + M \longrightarrow z + M \qquad \textit{en} \qquad X/M \;\; \textit{si} \;\; n \to \infty$$

lo cual concluye la demostración.

En la demostración del teorema anterior ¿ En donde se usa la hipótesis que M es cerrado?

El siguiente resultado solamente algebraico nos da la dimensión del espacio cociente X/M cuando $dimX < \infty$.

Proposición 2.7 *Sea X un espacio vectorial con $dimX = n$ y, M un subespacio de X con $dimX = m$. Entonces,*

$$dimX/M = n - m$$

Demostración

Sea

$$B_M := \left\{ l_1, l_2, \ldots, l_m \right\}$$

una base de M y, extendámosla a una base B_X de X, esto es,

$$B_X := \left\{ l_1, l_2, \ldots, l_m, l_{m+1}, \ldots, l_n \right\}$$

Afirmación 1. *Una base para el espacio cociente X/M es:*

$$B_{X/M} := \left\{ [l_{m+1}], [l_{m+2}], \ldots, [l_n] \right\}$$

En efecto, supóngase inicialmente que:

$$\alpha_{m+1}[l_{m+1}] + \alpha_{m+2}[l_{m+2}] + \ldots + \alpha_n[l_n] = [0] = M \qquad (A)$$

Mostraremos que $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_n = 0$

Efectivamente, por (A) vamos a obtener que:

$$\alpha_{m+1}l_{m+1} + \alpha_{m+2}l_{m+2} + \ldots + \alpha_n l_n \in M,$$

y así, existen escalares no todos nulos $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ en $\mathcal{F}$ tal que:

$$\alpha_{m+1}l_{m+1} + \alpha_{m+2}l_{m+2} + \ldots + \alpha_n l_n \;=\; \sum_{i=1}^{m}\,\alpha_i l_i$$

o también

$$\sum_{i=1}^{m}\,\alpha_i l_i - \sum_{i=m+1}^{n}\,\alpha_i l_i \;=\; 0$$

esto es,

$$\sum_{i=1}^{m}\,\alpha_i l_i + \left(\sum_{i=m+1}^{n} - \alpha_i l_i\right) \;=\; 0$$

Haciendo:

$$\beta_i \;\; = \;\; \begin{cases} \alpha_i & si \;\; 1 \leq i \leq m \\ \\ -\alpha_i & si \;\; m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}\,\beta_i\; l_i \;=\; 0$$

y en consecuencia
$\left(ya\ que\ \ B_X\ :=\ \left\{l_1, l_2, \ldots, l_m, \ldots, l_n\right\}\ es\ una\ base\ de\ X\right)$,

$\beta_1 \;=\; \beta_2 \;=\; \ldots \;=\; \beta_n \;=\; 0$ *y así en particular*

$$\alpha_{m+1} \;=\; \alpha_{m+2} \;=\; \alpha_n \;=\; 0$$

Sea ahora $\quad [x] \in X|M \quad (x \in X)$. *Entonces,*

$$x \;=\; x' + m \qquad x' \in X, \;\; m \in M$$

luego $x - x' \in M$. *Por tanto,*

$$[x] \;:=\; [x']$$

Ahora bien, al tener que $x \;=\; x' + m$ *obtenemos que:*

$$\begin{aligned} x \;=\; x' + m \;\; &= \;\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, l_i + m \\ &= \;\; \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, l_i + m \right) + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \, l_i \end{aligned}$$

Luego,

$$[x] \;:=\; \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, l_i + m \right] + \left[\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \, l_i \right]$$

como $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \, l_i + m \in M$, *entonces* $\left[\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \, l_i + m \right] \;=\; [0]$, *y en consecuencia*

$$\begin{aligned} [x] \;\; &:= \;\; \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, l_i + m \right] + \left[\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \, l_i \right] \\ &:= \;\; [0] + \left[\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \, l_i \right] \\ &:= \;\; \left[\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \, l_i \right] \;:=\; \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \, [l_i] \end{aligned}$$

2.3. Algunos ejemplos de espacios de Banach

En esta sección daremos algunos ejemplos de espacios de Banach que son de uso frecuente en el análisis funcional.

Los ejemplos que estudiaremos van a ser del tipo:

(a) Espacios de Banach de dimensión finita.

(b) *Espacios de Banach de sucesiones.*

(c) *Espacios de Banach de funciones.*

Suponemos que para el desarrollo de la presente sección, el lector está familiarizado con el hecho fundamental del análisis de que el conjunto de los números reales es un espacio de Banach con la métrica inducida por el valor absoluto. Comenzaremos pues con nuestros ejemplos.

Ejemplo 2.1 *Sea $p > 1$. Sabemos de la proposición 2.4 que la expresión:*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^n$$

define una norma sobre $\mathcal{F}^n$. Mostraremos a continuación que $\mathcal{F}^n$ es un espacio de Banach dotado de esta norma. En efecto, sea $\left\{ x_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_p)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_k - x_m\|_p < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0$$

Sean

$$\begin{aligned} x_k &= ({x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k)}, \dots, {x_n}^{(k)}) \\ x_m &= ({x_1}^{(m)}, {x_2}^{(m)}, \dots, {x_n}^{(m)}) \end{aligned}$$

entonces,

$$\|x_k - x_m\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |{x_i}^{(k)} - {x_i}^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0$$

de esta desigualdad se sigue que:

$$|{x_i}^{(k)} - {x_i}^{(m)}| < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Se sigue que $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $\mathcal{F}$*, para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *y, ya que* $(\mathcal{F}, |\cdot|)$ *es completo, esta sucesión* $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *es convergente a un* $x_i \in \mathcal{F}$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Sea* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. Entonces,* $x \in \mathcal{F}^n$*. Por otra parte, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $k_i \in \mathbb{N}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ *tal que:*

$$
\begin{array}{rclcl}
|x_1^{(k)} - x_1| & < & \dfrac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}} & si & k \geq k_1 \\
|x_2^{(k)} - x_2| & < & \dfrac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}} & si & k \geq k_2 \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & & \\
|x_n^{(k)} - x_n| & < & \dfrac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}} & si & k \geq k_n
\end{array}
$$

Sea $k_0 = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$*. Entonces, para* $k \geq k_0$ *vamos a obtener que:*

$$
\|x_k - x\|_p{}^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i|^p < n\left(\frac{\varepsilon^p}{n}\right) = \varepsilon^p \qquad si \qquad k \geq k_0
$$

lo cual muestra que $(\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_p)$ *es un espacio de Banach.*

Al par $(\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_p)$ *se denota por* $l_p{}^n$*. Así,*

$$
l_p{}^n := (\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_p)
$$

Note que cuando $\mathcal{F} := \mathbb{R}$ *y* $p = 2$ *tenemos como caso particular el espacio dado en el ejemplo 1.2*

Ejemplo 2.2 *En nuestro ejemplo 1.4 hemos demostrado que la expresión*

$$
\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n
$$

define una norma sobre $\mathbb{R}^n$. *También* $\|\cdot\|_\infty$ *define una norma sobre* $\mathcal{C}^n$. *Mostraremos entonces que* $(\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

En efecto, sea $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $(\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$. *Entonces, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\|x_k - x_m\|_\infty < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0$$

Como en nuestro ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} x_k &= ({x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k)}, \ldots, {x_n}^{(k)}) \\ x_m &= ({x_1}^{(m)}, {x_2}^{(m)}, \ldots, {x_n}^{(m)}) \end{aligned}$$

y

$$x_k - x_m = ({x_1}^{(k)} - {x_1}^{(m)}, {x_2}^{(k)} - {x_2}^{(m)}, \ldots, {x_n}^{(k)} - {x_n}^{(m)}),$$

luego

$$\|x_k - x_m\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |{x_i}^{(k)} - {x_i}^{(m)}| < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0$$

se sigue de esta desigualdad que:

$$|{x_i}^{(k)} - {x_i}^{(m)}| < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Así, $\left\{{x_i}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *es de Cauchy para* $i = 1, 2, \ldots, n$ *en* $(\mathcal{F}^n, |\cdot|)$, *el cual es completo. Por tanto, existe* $x_i \in \mathcal{F}$ *tal que:*

$$x_i = \lim_{m \to \infty} {x_i}^{(m)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}^n$ *y, tomando* $k \geq n_0$ *y haciendo que* $m \to \infty$ *vamos a tener que:*

$$|{x_i}^{(k)} - x_i| \leq \varepsilon \qquad para \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

en consecuencia

$$\|x_k - x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i{}^{(k)} - x_i| \le \varepsilon \qquad si \qquad k \ge n_0$$

Al par $(\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *se le denota por* $l_\infty{}^n$. *Así,*

$$l_\infty{}^n \;:=\; (\mathcal{F}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

A continuación mostraremos nuestros ejemplos de espacios de Banach de sucesiones.

Ejemplo 2.3 *Sea* $p \ge 1$. *Definamos el conjunto:*

$$l^p \;:=\; \left\{\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \;:\; x_n \in \mathcal{F} \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\right\}$$

En l^p *y en* $\mathcal{F}\times l^p$ *definimos las siguientes operaciones:*

(O1) *Dados* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ *y* $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$:

$$\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} + \left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty} \;:=\; \left\{x_n + y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

(O2) *Dados* $\alpha \in \mathcal{F}$ *y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$:

$$\alpha\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \;:=\; \left\{\alpha x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Es claro que $(O2)$ *está bien definida en* $\mathcal{F}\times l^p$. *Por otra parte, ya que:*

$$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

se sigue por ser $p \ge 1$ *que:*

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^p &\le (|x_n| + |y_n|)^p \\ &\le 2^p \max(|x_n|^p, |y_n|^p) \end{aligned}$$

de donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p < \infty$$

Así, (O1) está bien definida en l^p*. Es fácil verificar también* $\Bigg($*usando la desigualdad de Minkowski para el caso* $p > 1\Bigg)$ *y el criterio de comparación para series de números reales que la expresión:*

$$\left\| \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

define una norma sobre l^p*. Mostraremos a continuación que* $(l^p, \| \cdot \|_p)$ *es un espacio de Banach. Sea* $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $(l^p, \| \cdot \|_p)$*. Entonces:*

$$\begin{aligned}
x_1 &:= \left\{ x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, x_3{}^{(1)}, \ldots \right\} \\
x_2 &:= \left\{ x_1{}^{(2)}, x_2{}^{(2)}, x_3{}^{(2)}, \ldots \right\} \\
\ldots\ldots &\ \ \ldots\ldots \ \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &:= \left\{ x_1{}^{(n)}, x_2{}^{(n)}, x_3{}^{(n)}, \ldots \right\} \\
x_m &:= \left\{ x_1{}^{(m)}, x_2{}^{(m)}, x_3{}^{(m)}, \ldots \right\}
\end{aligned}$$

Ahora bien, de nuestra hipótesis dado $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\left\|x_n - x_m\right\|_p^{\,p} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j{}^{(n)} - x_j{}^{(m)}|^p < \varepsilon^p \qquad si \qquad m,n \geq n_0$$

luego,

$$|x_j{}^{(n)} - x_j{}^{(m)}|^p < \varepsilon^p \qquad si \qquad m,n \geq n_0, \;\; j = 1,2,3,\ldots.$$

se sigue de esta última desigualdad que la sucesión $\left\{x_j{}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $\mathcal{F}$*, para* $j = 1,2,3,\ldots$. *Como* $(\mathcal{F}, |\cdot|)$ *es completo, existe un único* $z_j \in \mathcal{F}$ *tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} x_j{}^{(n)} \;=\; z_j, \qquad j = 1,2,3,\ldots$$

Sea $x := \left\{z_j\right\}_{j=1}^{\infty}$

Afirmación 1. $x := \left\{z_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$. *En efecto, ya que nuestra sucesión inicial* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy, entonces por la proposición 2.5(a) es acotada. Así, existe un* $M > 0$ *tal que:*

$$\|x_n\|_p \;=\; \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j{}^{(n)}|^p\right)^{1/p} \leq M \qquad para \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j{}^{(n)}|^p\right)^{1/p} \leq \|x_n\|_p \leq M$$

y ahora, haciendo que $n \to \infty$ *obtenemos que:*

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |z_j|^p\right)^{1/p} \leq M$$

y en consecuencia, como k es arbitrario

$$\|x\|_p \;=\; \left(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^p\right)^{1/p} \leq M$$

esto es, $x \;:=\; \left\{z_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in l^p$

Afirmación 2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; x$ *en* $\|\cdot\|_p$. *En efecto, usando nuevamente el hecho de que* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy:*

$$\|x_n - x_m\|_p{}^p \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j{}^{(n)} - x_j{}^{(m)}|^p < \varepsilon^p \qquad si \qquad m, n \geq n_0$$

Luego, en particular,

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j{}^{(n)} - x_j{}^{(m)}|^p < \varepsilon^p \qquad si \qquad m, n \geq n_0, \qquad k \in \mathbb{N} \;\; fijo$$

Así, manteniendo n fijo, pero con $n \geq n_0$ *y haciendo que* $m \to \infty$ *vamos a tener que:*

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j{}^{(n)} - z_j|^p < \varepsilon^p, \qquad k \in \mathbb{N} \qquad fijo$$

Por tanto, ahora haciendo que $k \to \infty$, *se obtiene que*

$$\|x_n - x\|_p \;=\; \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j{}^{(n)} - z_j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \qquad si \qquad n \geq n_0$$

lo cual finaliza la demostración.

Ejemplo 2.4 *Sea el conjunto:*

$$l_\infty := \left\{ \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathcal{F}, \quad y \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

Es fácil verificar que éste conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathcal{F}$ respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar para sucesiones. Además, la expresión

$$\left\| \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

define una norma sobre l_∞. Mostraremos a continuación que l_∞ dotado de esta norma es un espacio de Banach. En efecto, sea $\left\{ x_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en l_∞. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_k - x_m\|_\infty < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0$$

como

$$\begin{aligned} x_k &:= \left\{ x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)}, \ldots \right\} \\ x_m &:= \left\{ x_1{}^{(m)}, x_2{}^{(m)}, \ldots, x_n{}^{(m)}, \ldots \right\} \end{aligned}$$

entonces, con k y m fijos,

$$x_k - x_m := \left\{ x_j{}^{(k)} - x_j{}^{(m)} \right\}_{j=1}^{\infty}$$

y por tanto,

$$\|x_k - x_m\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j{}^{(k)} - x_j{}^{(m)}| < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0$$

y en consecuencia

$$|x_j{}^{(k)} - x_j{}^{(m)}| < \varepsilon \qquad si \qquad k, m \geq n_0, \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad (A)$$

se sigue de esta última desigualdad que la sucesión $\left\{x_j{}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $\mathcal{F}$ *para* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *y ya que* $(\mathcal{F}, |\cdot|)$ *es completo, existe un* $x_j \in \mathcal{F}$ *tal que:*

$$x_j \;=\; \lim_{k\to\infty} x_j{}^{(k)} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \qquad (B)$$

sea $x := \left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$

Afirmación 1. $x := \left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$. *En efecto, tomando* $m = n_0$ *en (A) vamos a tener que:*

$$|x_j{}^{(k)} - x_j{}^{(n_0)}| < \varepsilon \qquad si \qquad k \geq n_0, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

y ahora, haciendo que $k \to \infty$ *y usando (B) obtenemos que:*

$$|x_j - x_j{}^{(n_0)}| < \varepsilon \qquad para \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora bien, como $x_{n_0} := \left\{x_1{}^{(n_0)}, x_2{}^{(n_0)}, \ldots, \right\} \in l_\infty$, *entonces*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j{}^{(n_0)}| < \infty$$

y ya que

$$|x_j| \leq |x_j - x_j{}^{(n_0)}| + |x_j{}^{(n_0)}| \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

entonces

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \;=\; \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \;&\leq\; \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - x_j{}^{(n_0)}| + \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j{}^{(n_0)}| \\ &<\; \infty \end{aligned}$$

Afirmación 2. $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$ *en* $\|\cdot\|_\infty$. *En efecto, de (A) y (B) se obtiene que:*

$$|x_j - x_j{}^{(m)}| < \varepsilon \qquad \textit{donde} \qquad m \geq n_0 \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Luego

$$\|x - x_m\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j - x_j{}^{(m)}| < \varepsilon \qquad m \geq n_0$$

lo cual finaliza la demostración.

Ejemplo 2.5 *Sea*

$$c := \left\{ \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathcal{F} \;\; \textit{y existe} \;\; \lim_{n\to\infty} x_n \right\}$$

Entonces, c es un espacio vectorial sobre $\mathcal{F}$ respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. Además, ya que toma sucesión convergente es acotada se sigue c es un subespacio vectorial de l_∞.

Afirmación. $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach. Para mostrar esta afirmación basta demostrar que c es cerrado en l_∞ $\Big($ver proposición 2.6 (a)$\Big)$. Sea, entonces $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en c tal que $x_n \to x \in l_\infty$ si $n \to \infty$ en $\|\cdot\|_\infty$. Mostraremos que $x \in c$. Sean*

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & := & \left\{ x_1{}^{(1)}, x_2{}^{(1)}, \dots, x_i{}^{(1)}, \dots \right\} \in c \\[2ex]
x_2 & := & \left\{ x_1{}^{(2)}, x_2{}^{(2)}, \dots, x_i{}^{(2)}, \dots \right\} \in c \\[2ex]
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\[2ex]
x_n & := & \left\{ x_1{}^{(n)}, x_2{}^{(n)}, \dots, x_i{}^{(n)}, \dots \right\} \in c \\[2ex]
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\[2ex]
x & := & \left\{ y_1, \;\; y_2, \;\; \dots, \;\; y_i, \dots \right\} \in l_\infty
\end{array}
$$

Afirmación 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_i{}^{(n)} = y_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots$

En efecto, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, *dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left| x_i{}^{(n)} - y_i \right| < \varepsilon \qquad si \qquad n \geq n_0$$

en consecuencia

$$\left| x_i{}^{(n)} - y_i \right| < \varepsilon \qquad si \qquad n \geq n_0 \qquad i = 1, 2, 3, \dots$$

lo cual muestra nuestra afirmación 1.

Afirmación 2. *Sea* $L_n = \lim\limits_{i\to\infty} x_i{}^{(n)}$. *La sucesión de límites* $\left\{ L_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $(\mathcal{F}, |\cdot|)$. *En efecto, como* $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente en* l_∞, *entonces ésta es de Cauchy en* l_∞, *por tanto, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|x_n - x_m\|_\infty \;=\; \sup_{i\in\mathbb{N}} \left| {x_i}^{(n)} - {x_i}^{(m)} \right| < \varepsilon \qquad si \qquad n, m \geq n_1$$

y en consecuencia

$$\left| {x_i}^{(n)} - {x_i}^{(m)} \right| < \varepsilon \qquad si \qquad n, m \geq n_1, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

y así también cuando $i \longrightarrow \infty$ *vamos a obtener que:*

$$\left| L_n - L_m \right| < \varepsilon \qquad si \qquad n, m \geq n_1$$

y en consecuencia por la completitud de $(\mathcal{F}, |\cdot|)$ *existe un único* $L \in \mathcal{F}$ *tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} L_n \;=\; L$$

Afirmación 3. $\displaystyle\lim_{i\to\infty} y_i \;=\; L$ $\Big($*esto mostrará que* $x := \Big\{ y_i \Big\}_{i=1}^{\infty} \in c$ *y completa la demostración*$\Big)$.

En efecto, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L_n \;=\; L$, *entonces dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$|L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad si \qquad n \geq n_1$$

Por otra parte, usando nuevamente el hecho de que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x$$

en $\|\cdot\|_\infty$, *entonces dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\|x_n - x\|_\infty \;=\; \sup_{i\in\mathbb{N}} |{x_i}^{(n)} - y_i| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad si \qquad n \geq n_2$$

y en consecuencia

$$|x_i{}^{(n)} - y_i| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad si \qquad n \geq n_2, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Tomando entonces $n_0 = \text{máx}(n_1, n_2)$ *vamos a obtener al fijar este* n_0 *que:*

$$|L_{n_0} - L| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad y \qquad |x_i{}^{(n_0)} - y_i| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

También, ya que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i{}^{(n)} \;=\; L_n \qquad para \qquad n = 1, 2, \ldots,$ *entonces*

$$\lim_{i\to\infty} x_i{}^{(n_0)} \;=\; L_{n_0}\left(\Rightarrow \left| x_i{}^{(n_0)} - L_{n_0} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad si \qquad i \geq i_0 \right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |y_i - L| \;&\leq\; |y_i - x_i{}^{(n_0)}| + |x_i{}^{(n_0)} - L_{n_0}| + |L_{n_0} - L| \\ &<\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon \qquad si \qquad i \geq i_0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6 *Sea*

$$c_0 \;:=\; \left\{ \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}, \;\; x_n \in \mathcal{F} \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \;=\; 0 \right\}$$

Entonces, c_0 *es un espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. La expresión:*

$$\left\| \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

define también una norma sobre c_0*.*

Afirmación. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach. En efecto, para esto basta demostrar que* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *es cerrado en* l_∞*. En efecto, si* $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$ *tal que* $x_n \to x := \{y_1, y_2, \ldots\} \in l_\infty$ *si* $n \to \infty$ *en* $\|\cdot\|_\infty$*, entonces, siguiendo un proceso semejante a el dado en la demostración del ejemplo 1.7, vamos a ver que* $L_n = 0$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *y así:*

$$L \;=\; \lim_{n\to\infty} L_n \;=\; 0$$

Luego, por la afirmación 3:

$$\lim_{i\to\infty} y_i \;=\; 0$$

y en consecuencia $x \;:=\; \Big\{ y_i \Big\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$

Ejemplo 2.7 $(C([a,b]), \|\cdot\|_u)$ *es un espacio de Banach* $\Bigg($*ver el ejemplo 1.10 para recordar la definición del espacio* $C([a,b])$ *y de la norma* $\|\cdot\|_u\Bigg)$.

En efecto, sea $\Big\{ f_n \Big\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $C([a,b])$*. Entonces, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\|f_n - f_m\|_u \;=\; \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad si \qquad m, n \geq n_0$$

Se sigue de esta desigualdad que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad si \qquad m, n \geq n_0 \qquad \forall\, x \in [a,b] \qquad\qquad (A)$$

y por tanto, la sucesión $\Big\{ f_n(x) \Big\}_{n=1}^{\infty}$ *es uniformemente de Cauchy en* $(\mathcal{F}, |\cdot|)$*. Sea*

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Por la unicidad del límite f *es evidentemente una función definida sobre el intervalo* $[a,b]$ *a valores en* $\mathcal{F}$*.*

Afirmación 1. $f_n \longrightarrow f$ *si* $n \to \infty$ *en* $\|\cdot\|_u$*. En efecto, tomando* $n \geq n_0$ *y haciendo que* $m \to \infty$ *de (A) se obtiene que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Luego

$$\|f_n - f\|_u \;=\; \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad si \qquad n \geq n_0$$

Afirmación 2. *$f \in C([a,b])$. En efecto, sea $x_0 \in [a,b]$. Como $f_{n_0} \in C([a,b])$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:*

$$\Big|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad si \qquad |x - x_0| < \delta$$

Por otra parte, como:

$$f(x) - f(x_0) \;=\; f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)$$

entonces,

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - f(x_0)\Big| \;&\leq\; \Big|f(x) - f_{n_0}(x)\Big| + \Big|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\Big| + \Big|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\Big| \\ &<\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon\end{aligned}$$

si $|x - x_0| < \delta$, lo cual concluye la demostración.

Ejemplo 2.8 *$(BV([a,b]), \|\cdot\|_{BV})$ es un espacio de Banach $\Big($ver el ejercicio 1.17 para recordar la definición del espacio $BV([a,b])\Big)$. En efecto, tenemos inicialmente que si $f \in BV([a,b])$ entonces,*

$$\|f\|_{BV} \;=\; |f(a)| + V(f),$$

donde,

$$V(f) \;=\; \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

Sea entonces, $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $BV([a,b])$. *Sin perder generalidad podemos suponer que* $f_n(a) = 0$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*¿Por qué?*) *Así, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$
\begin{aligned}
\Big\|f_n - f_m\Big\|_{BV} &= \Big|(f_n - f_m)(a)\Big| + V(f_n - f_m) \\
&= V(f_n - f_m) \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{k} |(f_n - f_m)(t_i) - (f_n - f_m)(t_{i-1})| \\
&< \varepsilon \qquad si \qquad m, n \geq n_0 \qquad\qquad (A)
\end{aligned}
$$

como $P_0 = \left\{a, x, b\right\}$ $(a < x < b)$ *es una partición de* $[a,b]$ *y además*

$$
\begin{aligned}
\Big|(f_n - f_m)(b) - (f_n - f_m)(a)\Big| &\leq \Big|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)\Big| + \\
&+ \Big|(f_n - f_m)(b) - (f_n - f_m)(x)\Big| \\
&< \varepsilon \qquad si \qquad m, n \geq n_0
\end{aligned}
$$

vamos a tener entonces que $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión uniformemente de Cauchy* $\forall\, x \in [a,b]$ *en* $(\mathcal{F}, |\cdot|)$ *que es completo. Sea*

$$
f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)
$$

Tomando ahora $n \geq n_0$ *y haciendo que* $m \to \infty$ *en (A) obtenemos que:*

$$
\Big\|f_n - f\Big\|_{BV} = \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{k} |(f_n - f)(t_i) - (f_n - f)(t_{i-1})| < \varepsilon
$$

y así $f_n \longrightarrow f$ *si* $n \to \infty$ *en* $\|\cdot\|_{BV}$

Por otra parte, como $\|f_{n_0}\|_{BV} \leq M < \infty$ *para algún* $M > 0$*, entonces,*

$$\|f\|_{BV} \leq \|f - f_{n_0}\|_{BV} + \|f_{n_0}\|_{BV} < \varepsilon + M < \infty$$

y en consecuencia $f \in BV([a,b])$.

Ejemplo 2.9 *En nuestro ejercicio 1.13 hemos definido el espacio* $C'([a,b])$*. El lector puede mostrar que la expresión*

$$\|f\|' \;=\; \|f\|_u + \|f'\|_u \qquad (f \in C'([a,b]))$$

define también una norma sobre $C'([a,b])$

Afirmación. $(C'([a,b]), \|\cdot\|')$ *es un espacio de Banach. Efectivamente, sea* $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $C'([a,b])$*. Entonces, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\begin{aligned}
\Big\|f_n - f_m\Big\|' &= \Big\|f_n - f_m\Big\|_u + \Big\|(f_n - f_m)'\Big\|_u \\
&= \Big\|f_n - f_m\Big\|_u + \Big\|{f_n}' - {f_m}'\Big\|_u \\
&< \varepsilon \qquad si \qquad m, n \geq n_0
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\Big\|f_n - f_m\Big\|_u < \frac{\varepsilon}{2} \qquad si \qquad m, n \geq n_0$$

y

$$\Big\|{f_n}' - {f_m}'\Big\|_u < \frac{\varepsilon}{2} \qquad si \qquad m, n \geq n_0$$

Se sigue de cada una de estas desigualdades que las sucesiones $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\left\{{f_n}'\right\}_{n=1}^{\infty}$ *son sucesiones de Cauchy en* $C([a,b])$ *que es completo. Así, existen funciones* $f \in C([a,b])$ *y* $g \in C([a,b])$ *tales que:*

$$f_n \longrightarrow f \qquad \text{si} \qquad n \to \infty \qquad \text{uniformemente sobre } [a,b]$$

y

$$f_n{}' \longrightarrow g \qquad \text{si} \qquad n \to \infty \qquad \text{uniformemente sobre } [a,b]$$

Se sigue entonces del teorema 4 - 8 en [14] pag. 127, que f *es derivable sobre* $[a,b]$ *y además*

$$g = f'$$

Por tanto, $f \in C'([a,b])$ *y esto culmina la demostración.*

2.4. Separabilidad de un espacio normado y ejemplos. El Lema de Riesz.

En Análisis funcional, la noción de separabilidad de un espacio normado tiene su motivación en esa propiedad que presenta el conjunto de los números reales de que cada elemento de este conjunto es el límite de una sucesión de números racionales. Aquí, en esta sección, se introduce esta noción y se muestra que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ $(1 \le p < \infty)$ *es separable y también que* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *no lo es. También se muestra el Lema de Riesz.*

Definición 2.7 *Un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice separable si existe un subconjunto* A *de* X *tal que:*

(a) A *es numerable.*

(b) A *es denso en* X $\Big($*esto es, dado* $\varepsilon > 0$ *y* $x \in X$ *existe un* $a \in A$ *tal que* $0 < \|x - a\| < \varepsilon\Big)$

En nuestro ejemplo 2.3 se mostró que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ $(1 \leq p < \infty)$ *es un espacio de Banach. En el siguiente ejemplo se muestra la separabilidad de* $(l^p, \|\cdot\|_p)$.

Ejemplo 2.10 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ *es separable* $(1 \leq p < \infty)$. *En efecto, mostraremos la existencia de un subconjunto* D *en* l^p *que es numerable y denso en* l^p; *sea entonces* $x := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$. *Decimos que este* $x \in l^p$ *es del tipo racional si* $x_n \in \mathbb{Q}$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\Big($*para el caso en que* $x_n \in \mathcal{C}$, *entonces*

$x_n = a_n + ib_n$ *donde* $a_n \in \mathbb{Q}$ *y* $b_n \in \mathbb{Q}$ *para* $n = 1, 2, 3, \ldots\Big)$. *Si además* $x_n \neq 0$ *para un número finito de subíncides* n *decimos que* $x := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es del tipo racional finito y lo denotamos por (TRF); sea*

$$D := \left\{x := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^p \ : \ x \ \text{ es (TRF)}\right\}$$

Es claro que D *es numerable (¿Por qué?) mostraremos a continuación que* D *es denso en* l^p. *En efecto, sea* $x := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ *y* $\varepsilon > 0$ *entonces, de la definición de* l^p, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. *Por tanto, existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Sea $y := \left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty} \in D$ *tal que:*

$$|y_k - x_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n_0}} \qquad \text{para} \qquad k = 1, 2, \ldots, n_0$$

y además

$$y_k = 0 \qquad \text{si} \qquad k \geq n_0 + 1$$

luego

$$\|x-y\|_p{}^p \;=\; \sum_{k=1}^{n_0} |x_k-y_k|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p < n_0\left(\frac{\varepsilon^p}{2n_0}\right) + \frac{\varepsilon^p}{2} \;=\; \varepsilon^p$$

y en consecuencia

$$\|x-y\|_p < \varepsilon$$

por tanto, D es denso en l^p.

Para nuestro próximo ejemplo necesitamos usar el siguiente resultado de la Teoría de Conjuntos: la colección $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable, esto es,

$$card\,\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) \;=\; 2^{\mathcal{N}_0} \;=\; c$$

Ejemplo 2.11 *$(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ no es separable. Supóngase lo contrario, esto es, $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es separable. Sea entonces, D un subconjunto de l_∞, que es numerable y denso en l_∞. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $F_1 \neq F_2$ entonces, $\mathcal{X}_{F_1} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{X}_{F_2} \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ donde*

$$\mathcal{B}(\mathbb{N}) \;:=\; \Big\{ f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R} \;:\; f \;\; \textit{es una función acotada} \Big\}$$

Este $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ es un espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar y la expresión:

$$\|f\|_u \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|$$

define una norma sobre $\mathcal{B}(\mathbb{N})$.

Además,

$$\|\mathcal{X}_{F_1}-\mathcal{X}_{F_2}\|_u \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\mathcal{X}_{F_1}(n)-\mathcal{X}_{F_2}(n)\Big| \;=\; 1 \;\; si \;\; n \in F_1\backslash F_2 \;\; ó \;\; n \in F_2\backslash F_1$$

Ahora bien, sea $F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. Entonces $\Big\{\mathcal{X}_F(n)\Big\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$. Por otra parte, como $\mathbb{Q}$ es denso en l_∞, existe una sucesión $\Big\{d_F(n)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ en D tal que:

$$\|\mathcal{X}_F - d_F\|_\infty \; = \; \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\mathcal{X}_F(n) - d_F(n)\right| < \frac{1}{4},$$

en consecuencia $\|d_{F_1} - d_{F_2}\| \geq \frac{1}{4}$. *En efecto, si* $\|d_{F_1} - d_{F_2}\|_\infty < \frac{1}{4}$ *vamos a tener que:*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{F_1} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u &= \|\mathcal{X}_{F_1} - d_{F_1} + d_{F_1} - d_{F_2} + d_{F_2} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u \\ &\leq \|\mathcal{X}_{F_1} - d_{F_1}\|_u + \|d_{F_1} - d_{F_2}\|_u + \|d_{F_2} - \mathcal{X}_{F_2}\|_u \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \; = \; \frac{3}{4} < 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. En efecto, significaria que la transformación

$$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow D$$

definida por $\varphi(F) = d_F$ *es 1-1, lo cual contradice la no numerabilidad de* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

A continuación mostraremos el importante Lema de Riesz.

Lema 2.2 (de Riesz) *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* M *un subespacio vectorial cerrado de* X *tal que* $M \neq \{0\}$. *Sea* $0 < \theta < 1$. *Entonces existe un* $x_\theta \in S(0,1)$ *tal que:*

$$\|x - x_\theta\| \geq \theta \qquad\qquad \forall\, x \in M$$

Aquí

$$S(0,1) := \left\{ x \in X \;:\; \|x\| = 1 \right\}$$

Demostración

Sea $x_1 \in X|M$. *Entonces,*

$$d \;=\; d(x_1, M) \;=\; \inf_{m\in M} \|x_1 - m\| > 0$$

ya que M *es un subconjunto propio y cerrado del espacio métrico* X*. Por otra parte, como* $0 < \theta < 1$*, entonces*

$$\theta d < d$$

y así,

$$d < \frac{d}{\theta}$$

en consecuencia, existe un $m_1 \in M$ *tal que:*

$$d < \|x_1 - m_1\| < \frac{d}{\theta}$$

Sea $x_\theta = \dfrac{x_1 - m_1}{\|x_1 - m_1\|}$*. Es claro que* $\|x_\theta\| = 1$ *y así* $x_\theta \in S(0,1)$*. En consecuencia, si* $m \in M$ *vamos a tener que*

$$\begin{aligned} \|x_\theta - m\| \;=\; \left\|\frac{x_1 - m_1}{\|x_1 - m_1\|} - m\right\| \;&=\; \frac{1}{\|x_1 - m_1\|}\Big\|x_1 - m_1 - m\|x_1 - m_1\|\Big\| \\ &=\; \frac{1}{\|x_1 - m_1\|}\Big\|x_1 - \overbrace{m_1 + m\|x_1 - m_1\|}^{\in M}\Big\| \\ &\geq\; \frac{\theta}{d}\, d \;=\; \theta \end{aligned}$$

Por tanto

$$d(x_\theta, M) \;=\; \inf_{m\in M} \|x_\theta - m\| \geq \theta$$

2.5. Comentario final

La literatura actual sobre la teoría de espacios de Banach es bastante extensa. El texto [1] mencionado en nuestra introducción es un material de gran utilidad al estudiante que comienza y desea además continuar con el estudio de ésta teoría.

En el capítulo 1 de [8] se muestra una buena lista de ejemplos de espacios de Banach con su respectivas demostraciones.

La demostración de Lema de Riesz fue tomada de [6] capítulo 1.

La noción de espacio normado separable puede verse también en [8] capítulo 1.

2.6. Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1 *Sea* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *con* $x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$.
Sean

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \\ G(x) &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} \end{aligned}$$

Demostrar que:

$$G(x) \leq A(x)$$

Esta expresión se llama Desigualdad Media Aritmética - Geométrica.

Ejercicio 2.2 *Sean X un espacio vectorial y $D \subset X$ convexo y no vacío. Decimos que una función*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

es:

(a) *Convexa si:*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in D, \;\; t \in [0,1]$$

(b) *Estrictamente convexa si:*

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in D, \;\; \text{con } x \neq y, \;\; t \in [0,1]$$

(c) *f es cóncava si:*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in D, \;\; t \in [0,1]$$

(d) *f es estrictamente cóncava si:*

$$f(tx+(1-t)y) > tf(x)+(1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in D, \;\; \text{con } x \neq y, \;\; t \in [0,1]$$

Demostrar que:

(e) *f es convexa $\Longleftrightarrow -f$ es cóncava.*

(f) *f es estrictamente convexa $\Longleftrightarrow -f$ es estrictamente cóncava.*

(g) *Si f es convexa y $c \geq 0$ entonces cf es convexa.*

(h) *Si f es estrictamente convexa y $c > 0$ entonces cf es estrictamente convexa.*

(i) Si f es cóncava y $c \geq 0$ entonces cf es cóncava.

(j) Si f es estrictamente cóncava y $c > 0$ entonces cf es estrictamente cóncava.

Ejercicio 2.3 *Sean $f_i : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \ldots, m$, funciones convexas. Demostrar que la función:*

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$g(x) \;=\; \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \qquad x \in D$$

es convexa.

Ejercicio 2.4 *Demostrar que cualquier combinación lineal no negativa de funciones convexas es una función convexa.*

Ejercicio 2.5 *Demostrar que la función:*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$f(x, y) \;=\; |x| + |y|$$

es convexa.

Ejercicio 2.6 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava.*
Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i\right)$$

donde $\quad x_i \in D, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad$ *y* $\quad \alpha_i \in (0, 1) \quad$ *tal que* $\quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \;=\; 1$

Ejercicio 2.7 *Usando el ejercicio 2.6 demostrar la Desigualdad Logarítmica de Jensen:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log a_i \leq \log\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, a_i\right)$$

donde $a_i \in (0, +\infty) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Ejercicio 2.8 *Demostrar la Desigualdad Media Aritmética - Geométrica usando la Desigualdad Logarítmica de Jensen.*

Ejercicio 2.9 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X *tal que:*

$$\left\|x_{n+2} - x_{n+1}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|x_{n+1} - x_n\right\| \qquad \textit{para} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Demostrar que $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $(X, \|\cdot\|)$.

Ejercicio 2.10 *Sea* $C([-1,1])$ *dotado de la norma:*

$$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

Demostrar que $\left(C([-1,1]), \|\cdot\|_2\right)$ *no es un espacio de Banach*

Sugerencia: *Considere la sucesión:*

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \leq t \leq 0 \\ nt & si \quad 0 < t < \dfrac{1}{n} \\ 1 & si \quad \dfrac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2.11 *Demostrar que un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *es completo* $\Longleftrightarrow \overline{B}\,(0,1)$ *es completa.*

Ejercicio 2.12 *Sean*

(a) $X_1 := \Big\{ f \in C([0,1]) \ : \ f(0) = 0 \Big\}$

(b) $X_2 := \Big\{ f \in C([0,1]) \ : \ \int_0^1 f(x)dx = 0 \Big\}$

Demostrar que X_1 *y* X_2 *son subespacios cerrados de* $\Big(C([0,1]), \|\cdot\|_u \Big)$

Ejercicio 2.13 *Sean* $\Big(C([0,1]), \|\cdot\|_u \Big)$ *y* $\Big\{ t_n \Big\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $[0,1]$. *Sea la expresión:*

$$\|f\| = \|f\|_u + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n |f(t_n)|^2, \qquad f \in C([0,1])$$

Demostrar que:

(a) $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* $C([0,1])$

(b) $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

Ejercicio 2.14 *Demostrar que la expresión:*

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| + \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x_n|$$

donde $x := \Big\{ x_n \Big\}_{n=1}^{\infty} \in l_1$ *define una norma sobre* l_1 *¿Es* $(l_1, \|\cdot\|')$ *un espacio de Banach.*

Ejercicio 2.15 *Sea* $x := \left\{ \dfrac{n}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty} \in l_1$. *Hallar* $\|x\|'$

Sugerencia: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$ *y así* $x := \left\{ \dfrac{n}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty} \in l_1$

Ejercicio 2.16 *Demostrar que la expresión:*

$$\|x\|' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n|$$

es una norma sobre c_0. *¿Es* $(c_0, \|\cdot\|')$ *un espacio de Banach?*

Ejercicio 2.17 *¿Son de acuerdo al teorema 2.6* c/c_0 *y* l_∞/c *espacios de Banach?*

Ejercicio 2.18 *En el espacio cociente* l_∞/c *hallar:*

$$\Big\| [(-1, 1, -1, 1, \ldots)] \Big\|$$

Ejercicio 2.19 *Demostrar que* $(c, \|\cdot\|_\infty)$ *y* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *son separables.*

Ejercicio 2.20 *Demostrar que* $(C([a,b]), \|\cdot\|_u)$ *es separable.*

Sugerencia: *Usar el Teorema de Stone-Weirstrass.*

Ejercicio 2.21 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Una sucesión* $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *se llama una Base de Schauder de* X, *si para cada* $x \in X$ *existe una única sucesión* $\left\{ \alpha_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *tal que:*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \qquad \text{en la norma } \|\cdot\|$$

Demostrar que todo espacio de Banach con una base de Schauder es separable.

Capítulo 3

Operadores lineales acotados

3.1. Noción de acotación de un operador lineal. El espacio $B(X, Y)$

Con el propósito de motivar la noción de acotación de un operador lineal recordamos previamente algunos hechos del Álgebra lineal matricial

Definición 3.1 *Sean X y Y espacios vectoriales $\Big($sobre el mismo cuerpo de esc*
Una función

$$T : X \longrightarrow Y$$

se llama una transformación lineal si:

(P1) Es aditiva, esto es:

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \qquad \forall\, x, y \in X$$

(P2) Es homogénea, esto es:

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \qquad \alpha \in \mathcal{F}, \;\; x \in X$$

Observemos de $(P1)$ *y* $(P2)$ *que:*

$$T : X \longrightarrow Y \ \text{es lineal} \iff T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \qquad \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \ x, y \in X$$

Definición 3.2 *Un arreglo de elementos de* $\mathcal{F}$ *de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama una matriz de orden $m \times n$ $\Big($*esto es,* m *filas y* n *columnas*$\Big)$ *y se denota por:* $A = (a_{ij})_{m\times n}$. *Sea*

$$M_{m\times n} := \Big\{ A = (a_{ij})_{m\times n} \ : \ A \text{ es una matriz de orden } m \times n \Big\}$$

Se sabe que este conjunto $M_{m\times n}$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathcal{F}$ *respecto de las operaciones usuales de suma de matrices y, multiplicación por escalar.*
Además, si $A \in M_{m\times n}$ *la función:*

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definida por

$$T(x) = Ax$$

donde Ax *representa el producto de la matriz* A *con el vector* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *pero escrito como un vector columna, esto es,*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

A continuación tenemos el importante teorema:

Teorema 3.1 $\Big($***Representación matricial de una transformación linea***

Sea

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

una transformación lineal con $T(x) \neq 0$ ***para algún*** $x \in \mathbb{R}^n$. ***Entonces, existe una única matriz que denotamos por*** $A(T) \in M_{m\times n}$ ***tal que:***

$$A(T) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos c_{ij} ***han de determinarse y, tal que***

$$T(x) = A(T)x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración

Existencia. *Sea* $\mathcal{B} := \left\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \right\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^n$. *Llamemos*

$$\begin{array}{ccccc} T(e_1) & = & w_1 & = & (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m1}) \\ T(e_2) & = & w_2 & = & (c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{m2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ T(e_n) & = & w_n & = & (c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{mn}) \end{array}$$

Sea $A(T)$ *la matriz de orden* $m \times n$ *cuyas columnas son* $w_1, w_2, \ldots, w_n$. *Note que* w_j *escrito como una matriz columna es:*

$$w_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

luego,

$$A(T)e_j = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2j} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mj} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Así, si $x \in \mathbb{R}^n$ *con* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *entonces,*

$$
\begin{aligned}
T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} T(x_j e_j) &= \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j w_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j A(T) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} A(T) x_j e_j \\
&= A(T)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \\
&= A(T)x
\end{aligned}
$$

Unicidad. *Sea $B(T)$ otra matriz tal que*

$$T(x) = B(T)x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Por la existencia de $A(T)$ vamos a tener que:

$$T(x) = A(T)x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

y en consecuencia

$$(B(T) - A(T))x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Sea $C(T) = B(T) - A(T)$, entonces

$$C(T)x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

en particular tomando $x = e_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, obtenemos que

$$C(T)e_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

por tanto la i-ésima columna de $C(T)$ es el vector cero y, en conclusión:

$$C(T) = 0 \qquad \Big[\Rightarrow B(T) = A(T) \Big]$$

Sabemos del ejemplo 1.2 que si:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ y, } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \textit{entonces}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \|x\| \, \|y\|$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana del espacio $\mathbb{R}^n$. Esta desigualdad, conocida como desigualdad de Cauchy - Schwarz, será usada para la demostración de la siguiente:

Proposición 3.1 *Sea*

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

una transformación lineal. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración

Sea $A(T) = (c_{ij})_{m\times n}$ la matriz única dada por el teorema 3.1 tal que:

$$T(x) = A(T)x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y, $T(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$.

Entonces, al calcular el producto matricial $A(T)x$ vamos a obtener que:

$$\begin{array}{lclcl} y_1 & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n & = & \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j \\ y_2 & = & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n & = & \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_m & = & c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n & = & \sum_{j=1}^{n} c_{mj}x_j \end{array}$$

En consecuencia,

$$\left|y_i\right|^2 = \left|\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} {c_{ij}}^2\right) \|x\|^2 \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {c_{ij}}^2\right) \|x\|^2$$

esto es,

$$\|T(x)\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {c_{ij}}^2\right) \|x\|^2$$

y así,

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \qquad \forall\ X \in \mathbb{R}^n$$

donde:

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} {c_{ij}}^2}$$

Tenemos así la importante definición:

Definición 3.3 *Sean* $(X, \|\cdot\|_1)$ *y* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *espacios normados. Una transformación lineal*

$$T : X \longrightarrow Y$$

se dice acotada si existe un $M > 0$ *tal que:*

$$\|T(x)\|_2 \leq M\|x\|_1, \qquad \forall\, x \in X$$

En lo sucesivo, una transformación lineal será referida como un operador lineal, y una transformación lineal acotada como un operador lineal acotado. En lo que sigue, también sin perder generalidad, las normas $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *de* X *y* Y *respectivamente serán denotadas por* $\|\cdot\|$.

Definición 3.4 *Sean* X *y* Y *espacios normados. Un operador lineal*

$$T : X \longrightarrow Y$$

se dice continuo en un $x_0 \in X$ *si dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|x - x_0\| < \delta$$

Proposición 3.2 *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son mutuamente equivalentes:*

(1) T *es un operador lineal acotado.*

(2) T *es continuo sobre* X.

(3) T *es continuo en el elemento* $0 \in X$.

(4) T *es continuo en algún* $x_0 \in X$.

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2) *Sean* T *un operador lineal acotado y,* $x_0 \in X$, x_0 *arbitrario. Veamos que dado* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|x - x_0\| < \delta$$

En efecto, como T es un operador lineal acotado vamos a tener que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| \;=\; \|T(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\| < M\delta < \varepsilon$$

y así podemos tomar $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ $\left(T(0) \;=\; 0 \textit{ por ser } T \textit{ lineal}\right)$

$(2) \Rightarrow (1)$ *Sea T continuo sobre X. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:*

$$T(B(0,\delta)) \subseteq B(T(0),\varepsilon) \;:=\; B(0,\varepsilon)$$

Sea $x \in X$, $x \neq 0$. Entonces, el elemento:

$$y \;=\; \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(0,\delta)$$

y en consecuencia por la continuidad de T en 0 vamos a tener que:

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \varepsilon$$

y por tanto

$$\|T(x)\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|,$$

tomando $M \;=\; \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$ *concluimos que:*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \qquad \forall\, x \in X$$

$(2) \Rightarrow (3)$ *Es evidente.*

$(3) \Rightarrow (2)$ *Sea $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Como T es continuo en el $0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:*

$$\|T(x)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|x\| < \delta$$

así, si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $\|x - x_0 - 0\| < \delta$, y por tanto,

$$\|T(x - x_0) - T(0)\| \;=\; \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$$

(3) $\Rightarrow$ (4) *Es evidente.*

(4) $\Rightarrow$ (3) *Veamos que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:*

$$\|T(y)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|y\| < \delta$$

En efecto, como T es continuo en algún $x_0 \in X$ $(x_0 \neq 0)$ dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|x - x_0\| < \delta$$

esto es,

$$\|T(x - x_0) - T(0)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|x - x_0 - 0\| < \delta$$

Sea $y \;=\; x - x_0$. Entonces vamos a obtener que:

$$\|T(y)\| < \varepsilon \qquad si \qquad \|y\| < \delta$$

$\Big($*La función $f : B(x_0, \delta) \longrightarrow B(0, \delta)$ definida por $f(x) \;=\; x - x_0$ es un homeomorfismo*$\Big)$.

A continuación definimos los conjuntos $L(X, Y)$ y, $B(X, Y)$.

Definición 3.5 *Sean X y Y espacios normados. El conjunto $L(X, Y)$ es:*

$$L(X, Y) \;:=\; \Big\{T : X \longrightarrow Y \;:\; T \text{ es un operador lineal}\Big\}$$

y $B(X, Y)$ es:

$$B(X, Y) \;:=\; \Big\{T : X \longrightarrow Y \;:\; T \text{ es un operador lineal acotado}\Big\}$$

Note que, en general, $B(X,Y) \subset L(X,Y)$.

Ahora bien, en $L(X,Y)$ *(y por tanto también en* $B(X,Y)$*) definimos las siguientes operaciones:*

(01) *Suma:*

$$(T+S)(x) \;=\; T(x)+S(x), \qquad x \in X$$

(02) *Multiplicación por escalar:*

$$(\alpha T)(x) \;=\; \alpha T(x), \qquad \alpha \in \mathcal{F}, \;\; x \in X$$

Mostraremos a continuación que (01) *y* (02) *están bien definidos en* $L(X,Y)$ $\Big($*suponiendo inicialmente que* $L(X,Y) \neq \phi\Big)$

$$\begin{aligned}
(01) \quad (T+S)(x+y) &= T(x+y)+S(x+y) \\
&= T(x)+T(y)+S(x)+S(y) \\
&= (T+S)(x)+(T+S)(y), \qquad \forall\, x,y \in X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T+S)(\alpha x) &= T(\alpha x)+S(\alpha x) \\
&= \alpha T(x)+\alpha S(x) \\
&= \alpha(T(x)+S(x)), \quad \alpha \in \mathcal{F} \quad x \in X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(02) \quad (\alpha T)(x+y) &= \alpha T(x+y) \\
&= \alpha(T(x)+T(y)) \\
&= (\alpha T)(x)+(\alpha T)(y), \quad \alpha \in \mathcal{F} \quad x,y \in X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha T)(\beta x) \;=\; \alpha T(\beta x) \;=\; (\alpha\beta)T(x) \;&=\; (\beta\alpha)T(x)\\
&=\; \beta(\alpha T)(x) \quad \alpha,\beta \in \mathcal{F}, \quad x \in X
\end{aligned}
$$

Además, ya que T y S son operadores lineales acotados:

$$
\begin{aligned}
\|(T+S)(x)\| \;=\; \|T(x)+S(x)\| \;&\leq\; \|T(x)\| + \|S(x)\|\\
&\leq\; M_1\|x\| + M_2\|x\| \;=\; (M_1+M_2)\|x\|, \quad x \in X
\end{aligned}
$$

y

$$
\|(\alpha T)(x)\| \;=\; \|\alpha T(x)\| \;=\; |\alpha|\|T(x)\| \leq |\alpha|M\|T(x)\|, \quad x \in X
$$

tenemos así la proposición:

Proposición 3.3 *Los conjuntos $L(X,Y)$ y $B(X,Y)$ son espacios vectoriales respecto de las operaciones* (01) *y* (02).

Demostración

Se deja como un ejercicio

Proposición 3.4 *La función:*

$$
\|\cdot\|_u : B(X,Y) \longrightarrow [0,\infty)
$$

definida por:

$$
\|T\|_u \;=\; \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}
$$

es una norma.

Demostración

Observemos inicialmente que como $T \in B(X,Y)$ existe un $M > 0$ tal que:

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \qquad \forall\, x \in X$$

Así, si $x \neq 0$,

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M$$

por tanto,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq M < \infty$$

y este supremo lo denotamos por $\|T\|_u$.

El lector puede verificar los axiomas $(A1)$ y $(A2)$ de la norma. Verificaremos la desigualdad triangular. Para esto, basta verificar que:

$$\|T+S\|_u < \|T\|_u + \|S\|_u + \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

En efecto, como:

$$\|T+S\|_u \;=\; \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)+S(x)\|}{\|x\|}$$

entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ tal que:

$$\|T+S\|_u < \frac{\|T(x_0)+S(x_0)\|}{\|x_0\|} + \varepsilon,$$

luego,

$$\begin{aligned}\|T+S\|_u < \frac{\|T(x_0)+S(x_0)\|}{\|x_0\|} + \varepsilon \quad &\leq \quad \frac{\|T(x_0)\|}{\|x_0\|} + \frac{\|S(x_0)\|}{\|x_0\|} + \varepsilon \\ &< \quad \|T\|_u + \|S\|_u + \varepsilon\end{aligned}$$

en consecuencia:

$$\|T+S\|_u \leq \|T\|_u + \|S\|_u, \quad \forall\, S, T \in L(X,Y)$$

Teorema 3.2

Sean X ***un espacio normado y*** Y ***un espacio de Banach. Entonces,*** $(B(X,Y), \|\cdot\|_u)$ ***es un espacio de Banach.***

Demostración

Sea $\left\{T_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de Cauchy en* $(B(X,Y), \|\cdot\|_u)$*. Entonces, dado* $\varepsilon > 0$*, existe un* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$\|T_n - T_m\|_u = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} < \varepsilon \quad si \quad m, n \geq n_0$$

Luego

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad si \quad m, n \geq n_0 \quad \forall\, x \in X \qquad (A)$$

Se sigue de ésta última desigualdad que $\left\{T_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy en* Y *para cada* $x \in X$ *que es completo y, por tanto, ésta sucesión es convergente.*

Sea

$$T : X \longrightarrow Y$$

definida por:

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad x \in X$$

Es fácil verificar que T *es una transformación lineal. Afirmamos que* T *es acotada. En efecto, como* $\left\{T_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $(B(X,Y), \|\cdot\|_u)$*, es acotada, esto es, existe un* $M > 0$ *tal que:*

$$\|T_n\|_u \leq M \quad para \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\|_u \|x\| \\ &\leq M\|x\| \quad \forall\, x \in X \end{aligned}$$

Así, $T \in B(X,Y)$. Por otra parte, haciendo que $m \to \infty$ y tomando $n \geq n_0$ en (A) vamos a tener que:

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon\|x\|, \qquad \forall\, x \in X$$

luego, si $x \neq 0$:

$$\frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$$

y por tanto:

$$\|T_n - T\|_u = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon \quad si \quad n \geq n_0$$

Culminaremos esta sección dando otra definición y después estableceremos una observación

Definición 3.6 *Sea $T \in L(X,Y)$. Entonces,*

(a) El núcleo de T denotado por $N(T)$ es:

$$N(T) := \left\{x \in X \;:\; T(x) = 0\right\}$$

Obsérvese que si además T es acotado, entonces $N(T)$ es cerrado en X $\Big($inicialmente la linealidad de T, garantiza que $N(T)$ es un *subespacio vectorial de* $X\Big)$ *(Ver también corolario 1.20 (b) y la proposición 3.3)*

(b) *El rango o la imagen denotado por* $R(T)$*, es:*

$$R(T) \;:=\; \Big\{y \in Y \;:\; y \;=\; T(x), \;\; x \in X\Big\}$$

esto es, $\quad R(T) \;:=\; T(X)$

Observación 3.1

(a) *Sean* X, Y *y* Z *espacios normados. Un diagrama del tipo siguiente:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

Fig 3.1

donde T *y* A *son operadores lineales acotados, son de utilidad en la Teoría de Optimización y permiten resolver ciertos problemas de minimización. El lector interesado en esto puede consultar el trabajo [9].*

(b) *El lector puede verificar como un ejercicio que:*

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \;=\; \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \;=\; \sup_{\|x\| \,=\, 1} \|T(x)\|$$

y este valor común es el que hemos denotado por $\|T\|_u$*. En lo que sigue la norma* $\|\cdot\|_u$ *de un operador lineal* T *será denotada por* $\|T\|$*.*

(c) *Si* $Y = \mathcal{F}$ $[\mathcal{F} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathcal{C}]$, *entonces el operador lineal acotado:*

$$T : X \longrightarrow \mathcal{F}$$

se llama un funcional lineal acotado y es designado generalmente con la letra f

(d) *El espacio de Banach* $B(X, \mathcal{F})$ *es denotado por* $X^\star$ *y se llama el dual topológico de* X. *Así,*

$$X^\star := \left\{ f : X \longrightarrow \mathcal{F} \ : f \text{ es un funcional lineal acotado} \right\}$$

Uno de los teoremas más importantes del análisis funcional, el Teorema de Hahn - Banach (a demostrarse más adelante), afirma que si X *es un espacio normado* $X \neq \{0\}$ *y* $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, *entonces existe un* $f \in X^\star$ *tal que:*

$$\|f\| = 1 \quad y \quad f(x_0) = \|x_0\|$$

Como una consecuencia del Teorema de Hahn - Banach obtenemos que si:

$$X \neq \{0\} \Rightarrow X^\star \neq \{0\}$$

3.2. Normas equivalentes. Noción de operador cerrado

En esta sección se mostrará un resultado bastante importante en análisis funcional: el que expresa que en un espacio normado de dimensión finita dos normas cualesquiera definida sobre el son equivalentes.
También se introducirá la noción de operador cerrado, el cual es vital también para el desarrollo del Análisis funcional: el Teorema del Grafo Cerrado.

Comenzaremos nuestra sección recordando la siguiente definición:

Definición 3.7 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Un subconjunto no vacío* A *de* X *se llama secuencialmente compacto si toda sucesión de puntos de* A *contiene una subsucesión convergente a un elemento de* A.

La demostración de los siguientes teoremas pueden consultarse en [2] capítulo IV sección 22.

Teorema 3.3

Sea $(X, \|\cdot\|)$ ***un espacio normado. Entonces, un subconjunto*** A ***de*** X ***es compacto*** $\Longleftrightarrow$ ***es secuencialmente compacto***

Teorema 3.4

Sean $(X, \|\cdot\|)$ ***y*** $(Y, \|\cdot\|)$ ***espacios normados. Sean*** $D \subset X$ ***compacto y:***

$$f : D \longrightarrow Y$$

una función continua. Entonces, existen puntos $x_1, x_2 \in D$ ***tales que:***

$$\|f(x_1)\| \;=\; \sup_{x\in D} \,\|f(x)\|$$

y

$$\|f(x_2)\| \;=\; \inf_{x\in D} \,\|f(x)\|$$

Tenemos ahora la siguiente proposición:

Proposición 3.5 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado con* $\dim X < \infty$. *Entonces existe una norma:*

$$\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow [0, \infty)$$

y una constante $M > 0$ *tal que:*

$$\|x - y\| \leq M\|x - y\|_1 \qquad \forall\, x, y \in X \quad (A)$$

Demostración

Sean $B := \left\{e_1, e_2, \ldots, e_n\right\}$ *una base (algébraica) de* X *y* $x \in X$. *Entonces existen escalares* $\lambda_i \in \mathcal{F}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n$ *tal que* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. *Definamos:*

$$\|\cdot\|_1 : X \longrightarrow [0, \infty)$$

por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

Es claro que $\|\cdot\|_1$ *está bien definida y satisface los axiomas* (A_1) *y* (A_2) *de la definición de norma. Por otra parte, si* y *es otro elemento de* X, *entonces* $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ *luego,*

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i + \beta_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \qquad \forall\, x, y \in X$$

También:

$$\begin{aligned} \|x-y\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \beta_i)e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \beta_i|\|e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x-y\|_1 \|e_i\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|\right) \|x-y\|_1 \qquad \forall\, x, y \in X \end{aligned}$$

Tomando $M = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\| > 0$ *obtenemos nuestra desigualdad* (A)

Proposición 3.6 *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $\|\cdot\|_1$ *la norma dada por la proposición anterior. El conjunto*

$$S_1 \;:=\; \left\{ x \in X \;:\; \|x\|_1 \;=\; 1 \right\}$$

es secuencialmente compacto

Demostración

Sea $\left\{ x_k \right\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de puntos de* S_1*. Mostraremos que ésta contiene una subsucesión* $\left\{ x_{k_j} \right\}_{j=1}^{\infty}$ *que es convergente en* $\|\cdot\|_1$ *a un* $x \in S_1$*. En efecto, como* $x_k \in S_1,$ *entonces*

$$x_k \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_k{}^{(i)} e_i \qquad \textit{donde} \qquad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_k{}^{(i)}| \;=\; 1 \quad k \;=\; 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora bien, consideremos el siguiente "esquema":

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ \alpha_1{}^{(1)} & \alpha_1{}^{(2)} & \ldots & \ldots & \alpha_1{}^{(n)} \\ \alpha_2{}^{(1)} & \alpha_2{}^{(2)} & \ldots & \ldots & \alpha_2{}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_k{}^{(1)} & \alpha_k{}^{(2)} & \ldots & \ldots & \alpha_k{}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad (A)$$

Entonces, como $|\alpha_k{}^{(i)}| < 1 \quad i \;=\; 1, 2, \ldots, n, \quad k \;=\; 1, 2, 3, \ldots$

se sigue entonces que cada sucesión columna $\Big($*las indicamos en nuestro esquema (A) con una flecha hacia abajo* $\downarrow\Big)$

$$\left\{\alpha_k{}^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}, \left\{\alpha_k{}^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty}, \ldots\ldots, \left\{\alpha_k{}^{(n)}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

es acotada, luego por el Teorema de Bolzano - Weirstrass, cada una de éstas contiene una subsucesión:

$$\left\{\alpha_{k_j}{}^{(i)}\right\}_{j=1}^{\infty}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

que es convergente a un $\beta_i \in \mathcal{F} \quad i = 1, 2, \ldots, n$. *Sea* $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. *Entonces,* $x \in X$ *y además*

$$\|x_{k_j} - x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{k_j}{}^{(i)} - \beta_i| \longrightarrow 0 \quad si \quad j \longrightarrow \infty$$

así, $x_{k_j} \longrightarrow x \quad si \quad j \longrightarrow \infty \quad en \quad \|\cdot\|_1$. *Por otra parte:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| &= \sum_{i=1}^{n} \lim_{j\to\infty} \left|\alpha_{k_j}{}^{(i)}\right| \\ &= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{k_j}{}^{(i)}\right| \\ &= \lim_{j\to\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

lo cual muestra que $x \in S_1$ *y culmina la demostración.*

Teorema 3.5

En un espacio vectorial X ***con*** $dim\ X < \infty$ ***todas las normas son equivalentes.***

Demostración

Sean $\|\cdot\|$ *una norma definida sobre* X *y,* $\|\cdot\|_1$ *la norma sobre* X *dada por la proposición 3.9. Consideremos* $\|\cdot\|\Big|_{S_1}$*. Ya que la norma* $\|\cdot\|$ *es* $\|\cdot\|_1-$*continua y* S_1 *es compacto, entonces por el teorema 3.8 existen* $x_1, x_2 \in S_1$ *tales que:*

$$\|x_1\| \;=\; \sup_{x\in S_1} \|x\| > 0 \qquad y \qquad \|x_2\| \;=\; \inf_{x\in S_2} \|x\| > 0$$

y en consecuencia

$$\|x_1\| \leq \|x\| \leq \|x_2\|, \qquad \forall\, x \in S_1.$$

Ahora bien, si $x \in X,\;\; x \neq 0,$ *entonces* $\dfrac{x}{\|x\|_1} \in S_1$*, por tanto:*

$$\|x_1\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \leq \|x_2\|,$$

luego

$$\|x_2\|\|x\|_1 \leq \|x\| \leq \|x_2\|\|x\|_1 \qquad \forall\, x \in X$$

tomando $a \;=\; \|x_2\| > 0$ *y* $b \;=\; \|x_2\| > 0$ *obtenemos que* $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$*. Por otra parte, si* $|||\cdot|||$ *es otra norma definida sobre* X*, entonces por el procedimiento anterior* $|||\cdot||| \sim \|\cdot\|_1$ *y, así por el ejercicio 1.5.*

$$\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$$

y culmina la demostración.

Proposición 3.7 *Sean* X *y* Y *espacios normados con* $dim X < \infty$*. Entonces,*

$$L(X,Y) \;:=\; B(X,Y)$$

Demostración

Sea $B := \left\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \right\}$ *una base de* X *y* $x \in X$. *Entonces,*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \in \mathcal{F}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sea $T \in L(X,Y)$ *Por la linealidad de* T *vamos a tener que:*

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(\alpha_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i T(e_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|T(e_i)\| \end{aligned}$$

Sea $M = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \|T(e_i)\|$. *Es claro que:*

$$\|T(x)\| \leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = M\|x\|_1 \quad \forall\, x \in X$$

y así, en virtud del teorema anterior

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \qquad \forall\, x \in X,$$

y por tanto $T \in B(X,Y)$.

Sean X *y* Y *espacios vectoriales y,* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal. El inverso de* T $\left(\textit{supuesta su existencia}\right)$ *es el operador lineal*

$$T^{-1} : Y \longrightarrow X$$

definido por

$$x = T^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = T(x)$$

La siguiente proposición establece una caracterización para la continuidad de T^{-1}

Proposición 3.8 *Sean X y Y espacios normados y, $T \in B(X, Y)$ tal que T es inyectivo $\Big($esto es, $T(x_1) = T(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2\Big)$. Entonces, el operador lineal*

$$T^{-1} : T(X) \longrightarrow Y \;\; \textit{es acotado} \Longleftrightarrow \textit{existe un } k > 0 \textit{ tal que}$$

$$\|T(x)\| \geq k\|x\|, \qquad \forall\, x \in X$$

Demostración

Observemos inicialmente que la inyectividad de T garantiza la existencia del "inverso" $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ y es también un operador lineal.

$\Rightarrow$) *Supóngase que T^{-1} es un operador lineal acotado. Entonces existe un ${k_1}' > 0$ tal que:*

$$\|T^{-1}(y)\| \leq {k_1}'\|y\|, \qquad \forall\, y \in T(X)$$

Luego existe un $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Por tanto,

$$\|T^{-1}T(x)\| \leq {k_1}'\|T(x)\|$$

esto es,

$$\|x\| \leq {k_1}'\|T(x)\|$$

y así también,

$$\|T(x)\| \geq \frac{1}{{k_1}'}\|x\|$$

tomando $k = \dfrac{1}{{k_1}'}$ *obtenemos que:*

$$\|T(x)\| \geq k_1\|x\|, \qquad \forall\, x \in X$$

$\Leftarrow$) *Recíprocamente, si* $\|T(x)\| \geq k\|x\|$ *para algún* $k > 0$ *y* $\forall\ x \in X$, *entonces, llamando* $y = T(x)$ *vamos a tener que* $x = T^{-1}(y)$ *y por tanto*

$$\|y\| \geq k\|T^{-1}(y)\|$$

esto es,

$$\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{k}\|y\|, \qquad \forall\, y \in T(X)$$

y en consecuencia $T^{-1} \in B(Y, X)$.
Introduciremos ahora la noción de operador cerrado.

Definición 3.8 *Sean* X *y* Y *espacios normados y,* D *un subespacio vectorial de* X. *Un operador lineal*

$$T : D \longrightarrow Y$$

se llama cerrado si $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ *tal que*

$$x_n \to x \in X \qquad si \qquad n \to \infty$$

y,

$$T(x_n) \to y \qquad si \qquad n \longrightarrow \infty$$

entonces $x \in D$ *y,* $y = T(x)$.

Un operador lineal que es cerrado se llama un operador cerrado. Es obvio que si $D := X$ *y,* $T : X \longrightarrow Y$ *es un operador lineal acotado entonces* T *es cerrado. El recíproco no siempre es cierto. En efecto, en lo que sigue se mostrará un ejemplo* $\big($*que daremos como una proposición*$\big)$ *que ilustrá esta afirmación, en donde nuestra herramienta principal para su demostración, está hecha en el teorema 4-8[13 pag. 127] el cual, ya fué usado para la solución de nuestro ejemplo 2.9.*

Recordemos también que $C([a,b])$ *es un espacio de Banach con la norma uniforme:*

$$\|f\|_u \;=\; \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

y que

$$C'([a,b]) \;:=\; \Big\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;:\; f' \text{ existe y es continua sobre } [a,b] \Big\}$$

es un espacio vectorial. Tomando $\|\cdot\|_u\Big|_{C'([a,b])}$, *éste se convierte en un espacio normado. El lector puede verificar que* $(C'([a,b]), \|\cdot\|_u)$ *no es necesariamente cerrado en* $C([a,b])$*. Tenemos ahora nuestra proposición:*

Proposición 3.9 *El operador lineal:*

$$T : C'([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$$

definido por

$$T(f) \;=\; f'$$

es cerrado, pero no es acotado [f' *representa la función derivada de* f*].*

Demostración

Verificaremos inicialmente que T *es cerrado. En efecto, sea* $\Big\{f_n\Big\}_{n=1}^{\infty} \subset C'([0,1])$ *tal que:*

$$f_n \to f \in C([0,1]) \qquad\qquad si \quad n \to \infty \quad en \quad \|\cdot\|_u$$

y

$$T(f_n) = {f_n}' \to g \in C([0,1]) \quad si \quad n \to \infty \quad en \quad \|\cdot\|_u$$

Debemos ver que $f' \in C'([0,1])$ y que $T(f) = g$. En efecto, de acuerdo al teorema 4-8 en [13, pag. 127], f es derivable sobre $[0,1]$ y además:

$$f' \; = \; g$$

Por otra parte, como la convergencia es uniforme y las ${f_n}'$ son continuas, se sigue que f' es continua y así $f \in C'([0,1])$. Así, hemos demostrado $f \in C'([0,1])$ y $T(f) \; = \; g$, lo cual establece que T es cerrado.

Veamos ahora que T no es acotado. Para verificar esto consideraremos la sucesión $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset C'([0,1])$ donde:

$$f_n(t) \; = \; t^n$$

Entonces, de la definición de T vamos a tener que

$$T(f_n)(t) \; = \; {f_n}'(t) \; = \; nt^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}, \;\; t \in [0,1])$$

Luego

$$\|T\| \; = \; \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f_n)\|_u}{\|f_n\|_u} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} n \; = \; \infty$$

lo cual muestra que T no es acotado.

De los cursos básicos de cálculo sabemos que si $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función $[y \; = \; f(x)]$ el grafo de f denotado por $G(f)$ es el conjunto:

$$G(f) \; := \; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \in D, \; y \; = \; f(x)\right\}$$

el cual puede dibujarse usando técnicas del cálculo diferencial. Este hecho nos motiva la siguiente definición:

Definición 3.9 *Sean X y Y espacios normados y D un subespacio vectorial de X. Sea*

$$T : X \longrightarrow Y$$

un operador lineal. El grafo de T denotado por $G(T)$ es:

$$G(T) \ := \ \Big\{(x, y) \in X \times Y \ : \ x \in D, \ y \ = \ T(x)\Big\}$$

Es claro por la linealidad de T que el elemento $(0, 0) \in G(T)$. Restringiendo las operaciones de espacio vectorial de $X \times Y$ sobre $G(T)$, éste toma estructura de espacio vectorial. Así, al restringir la norma de $X \times Y$ sobre $G(T)$, también se transforma en un espacio normado (La norma que estamos considerando en $X \times Y$ es:

$$\|(x, y)\| \ = \ \|x\| + \|y\|, \qquad (x, y) \in X \times Y$$

Sabemos por la proposición 2.8 que si X y Y son espacios de Banach, entonces $X \times Y$ es también un espacio de Banach con la norma

$$\|(x, y)\| \ = \ \|x\| + \|y\|$$

Por tanto, si $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$, es también un espacio de Banach.

Teorema 3.6 ***(Una Caracterización de Operadores Cerrados)***
Sean X y Y espacios normados y, D un subespacio vectorial de X. Sea

$$T : D \longrightarrow Y$$

un operador lineal. Entonces

$$G(T) \ \textit{\textbf{es cerrado}} \iff T \ \textit{\textbf{es un operador cerrado}}$$

Demostración

$\Rightarrow)$ *Sea* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ *tal que:*

$$x_n \longrightarrow x \in X \quad y \quad T(x_n) \longrightarrow y \quad si \quad n \to \infty$$

Mostraremos que $x \in D$ *y,* $y = T(x)$*. En efecto, de nuestra hipótesis:*

$$\begin{aligned} \|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\| &= \|(x_n - x, T(x_n) - y)\| \\ &= \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad si \quad n \geq n_0 \end{aligned}$$

así,

$$(x_n, T(x_n)) \longrightarrow (x, y) \qquad si \qquad n \to \infty$$

Como $(x_n, T(x_n)) \in G(T)$ *y* $G(T)$ *es cerrado, entonces* $(x, y) \in G(T)$*. Por tanto,* $x \in D$ *y,* $y = T(x)$*.*

$\Leftarrow)$ *Sea* $\left\{(x_n, y_n)\right\}_{n=1}^{\infty} \subset G(T)$ *tal que:*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \qquad si \qquad n \to \infty$$

Entonces, por la norma considerada en $X \times Y$ *vamos a tener que:*

$$x_n \longrightarrow x \in X \qquad si \qquad n \to \infty$$

y,

$$y_n = T(x_n) \longrightarrow y \qquad si \qquad n \to \infty$$

Como T *es un operador cerrado, vamos a tener que* $x \in D$ *y además* $y = T(x)$*. Por tanto,* $(x, y) \in G(T)$ *y así* $G(T)$ *es cerrado en* $X \times Y$*.*

3.3. Algunos ejemplos de operadores lineales acotados

Esta sección contiene algunos ejemplos de operadores lineales acotados. Entre otros, mencionaremos el operador de Fredholm, la proyección canónica y el operador Shift.

También se da la noción de operador compacto y se muestra un teorema de extensión de operadores.

Para tratar nuestro primer ejemplo que será el operador de Fredholm, damos inicialmente la siguiente definición:

Definición 3.10 *Una función continua:*

$$k : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$M(b - a) < 1$$

donde

$$M \;=\; \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]} |k(x, y)|$$

se llama una función con un núcleo aceptable de Fredholm.

Ejemplo 3.1 *Sea $k : [a, b]\times[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con un núcleo aceptable de Fredholm. Sea*

$$K :\; C([a, b]) \longrightarrow C([a, b]),$$

el operador lineal, definido como:

$$K(x)(s) \;=\; \int_a^b k(s, t)x(t)dt \qquad x \in C[a, b]$$

Este K se llama el operador de Fredholm.

Observemos inicialmente que $K(x)$ *es una función continua definida sobre* $[a,b]$ *(El lector puede verificar fácilmente la linealidad y homogeneidad de* K*). En efecto, sean* $s \in [a,b]$ *y* $\left\{ s_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$ *tal que* $s_n \to s$ *si* $n \to \infty$ *Entonces, ya que* f *es una función continua sobre* $[a,b] \times [a,b]$, *dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$|k(x,y) - k(x',y')| < \varepsilon \qquad si \qquad \|(x,y) - (x',y')\| < \delta$$

Ahora bien, como $s_n \to s$ *si* $n \to \infty$ *para nuestro* $\delta > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$|s_n - s| < \delta \qquad si \qquad n \geq n_0$$

Por otra parte, como:

$$\|(s_n,t) - (s,t)\| \ = \ \|(s_n - s, 0)\| \ = \ |s_n - s| < \delta \quad si \quad n \geq n_0$$

entonces,

$$|k(s_n,t) - k(s,t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)\|x\|_u} \qquad x \neq 0$$

en consecuencia,

$$
\begin{aligned}
|K(x)(s_n) - K(x)(s)| &= \left| \int_a^b k(s_n,t)x(t)dt - \int_a^b k(s,t)x(t)dt \right| \\
&= \left| \int_a^b (k(s_n,t) - k(s,t))x(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^b |k(s_n,t) - k(s,t)|\; |x(t)|dt \\
&\leq \|x\|_u \int_a^b |k(s_n,t) - k(s,t)|dt \\
&< \|x\|_u \frac{\varepsilon}{(b-a)\|x\|_u}(b-a) \;=\; \varepsilon
\end{aligned}
$$

si $n \geq n_0$, lo cual muestra la continuidad de $K(x)$.

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\|K(x)\|_u \;=\; \sup_{s\in[a,b]} |K(x)(s)| &= \sup_{s\in[a,b]} \left| \int_a^b k(s,t)\; x(t)dt \right| \\
&\leq \sup_{s\in[a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\; |x(t)|dt \\
&\leq M(b-a)\|x\|_u \qquad x \in C([a,b]) \qquad [M(b-a) \\
&< \|x\|_u \qquad \forall\, x \in C([a,b])
\end{aligned}
$$

lo cual muestra que K es un operador lineal acotado y que

$$
\|K\| \;=\; \sup_{x\neq 0} \frac{\|K(x)\|_u}{\|x\|_u} < \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|_u}{\|x\|_u} \;=\; 1
$$

Ejemplo 3.2 *Sea*

$$K : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

el operador de Fredholm. La transformación

$$K^n : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

definida por:

$$K^n(x) \;=\; K^{n-1}(K(x)), \qquad n \in \mathbb{N}, \;\; n > 1$$

es también un operador de Fredholm.

Basta demostrarlo para $n \;=\; 2$ *y luego usar inducción sobre* n. $\Big($*si* $n = 1$, *convenimos que* $K^0 = I$, *donde* I *denota la identidad de* $C([a,b])$ *en* $C([a,b])\Big)$. *En efecto,*

$$\begin{aligned} K^2(x+y) &= K(K(x+y)) &&= K(K(x)+K(y)) \\ & &&= K(K(x)) + K(K(y)) \\ & &&= K^2(x) + K^2(y) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} K^2(\alpha x) &= K(K(\alpha x)) &&= K(\alpha K(x)) \\ & &&= \alpha K(K(x)) \\ & &&= \alpha K^2(x), \qquad \forall\, x, y \in C([a,b]), \;\; \alpha \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} K^2(x)(s) \;=\; K(K(x))(s) \;&=\; \int_a^b k(s,t)\; K(x)(t)dt \\ &=\; \int_a^b k(s,t)\; x_1(t)dt \end{aligned}$$

donde $x_1(t) = K(x)(t)$. *Así,* K^2 *es un operador de Fredholm.*

Ejemplo 3.3 *Sea*

$$K : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b]),$$

el operador de Fredholm. Entonces, $I - K$ *donde* I *denota el operador identidad de* $C([a,b])$ *en* $C([a,b])$ *es un operador lineal acotado. Ahora bien, nos planteamos la siguiente pregunta:*

Dada una función $y \in C([a,b])$, *¿ existe alguna función* $x \in C([a,b])$ *tal que:*

$$(I-K)(x) \;=\; y\ ?$$

Observe que

$$(I-K)(x) = y \Longleftrightarrow x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s)$$

La ecuación

$$(I-K)(x) = y$$

se llama la ecuación integral de Fredholm. Existe una única solución para dicha ecuación y es la función

$$x \;=\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^n\right)(y) \qquad [K^0 \;=\; I]$$

donde la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K^n$ *define un operador lineal acotado de* $C([a,b])$ *en* $C([a,b])$.

Ejemplo 3.4 *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y, M un subespacio cerrado de X. Sabemos por el teorema 1.18 que el espacio cociente $\widehat{X} = X/M$ es un espacio de Banach con la norma:*

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \qquad x \in X, \ \ [x] := x + M$$

Sea la transformación

$$\Pi : X \longrightarrow X/M$$

definida por:

$$\Pi(x) := [x]$$

Se puede verificar facilmente que Π es un operador lineal. Además,

$$\|\Pi(x)\| = \|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leq \|x\| \qquad \forall\, x \in X,$$

lo cual muestra que Π es acotado.

Al operador lineal acotado Π también se le llama la proyección canónica.

Ejemplo 3.5 *Sea $p \geq 1$. De acuerdo a nuestro ejemplo 2.3 sabemos que l^p es un espacio de Banach con la norma*

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

Sea $p = 2$, y consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} l^2 \arrow[r, "S_d"] \arrow[d, "S_i"'] & l^2 \\ l^2 & \end{tikzcd}$$

Fig 3.2

donde S_d *y* S_i *son transformaciones definidas de la manera siguiente: Si* $(x_1, x_2, \ldots,) \in l^2$ *entonces,*

$$S_d(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) \ := \ \{0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

y,

$$S_i(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) \ := \ \{x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

Es fácil verificar que S_d *y* S_i *son operadores lineales. Además*

$$\|S_d(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\})\|_2{}^2 \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \ |x_n|^2 \ = \ \left\| \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \right\|_2^{\,2}$$

esto es,

$$\|S_d(x)\|_2 \ = \ \|x\|_2, \qquad \forall \ x \ := \ \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$

Así, S_d *es un operador lineal acotado y* $\|S_d\| \ = \ 1$

También:

$$\|S_i((x_1, x_2, x_3, \ldots))\|_2{}^2 \ = \ \sum_{n=2}^{\infty} \ |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ |x_n|^2$$

luego

$$\|S_i(x)\|_2 \leq \|x\|_2, \qquad \forall\ x\ :=\ \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$$

Se puede verificar también que:

$$\|S_i\|\ =\ 1$$

Estos operadores S_d y S_i son llamados operador Shift a la derecha y operador Shift a la izquierda respectivamente

Ejemplo 3.6 *Sean X y Y espacios de Banach. Sabemos por la proposición 2.8 que $X \times Y$ es también un espacio de Banach con la norma:*

$$\|(x,y)\|\ =\ \|x\| + \|y\|, \qquad (x,y) \in X \times Y$$

Ahora bien, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \oplus Y \arrow[r, "P_x"] \arrow[d, "P_y"'] & X \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Fig 3.3

donde P_x y P_y son transformaciones definidas como:

$$P_x((x,y))\ =\ x$$

y

$$P_y((x,y))\ =\ y$$

Es fácil verificar que P_x y P_y son operadores lineales. Además,

$$\begin{aligned}
\|P_x((x,y))\| &= \|x\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\| \\
\|P_y((x,y))\| &= \|y\| \leq \|y\| + \|x\| = \|(x,y)\|
\end{aligned}$$

Por tanto, P_x y P_y son operadores lineales acotados y:

$$\begin{aligned}
\|P_x\| &\leq 1 \\
\|P_y\| &\leq 1
\end{aligned}$$

Note que:

$$P_x((x,y)) + P_y((x,y)) = x + y$$

Ejemplo 3.7 *Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y,*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n < t_{n+1} = b \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

una partición del intervalo $I := [a, b]$. Sea T la transformación siguiente:

$$T : C([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por

$$T(f) = (f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n))$$

Es claro que T es un operador lineal y:

$$\|T(f)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i)|^2$$

Por otra parte, como $|f(t_i)| \leq \|f\|_u, \;\; i = 1, 2, \ldots, n,$ *entonces*

$$\|T(f)\|^2 \leq n{\|f\|_u}^2 \qquad n \in \mathbb{N}, \;\; n \text{ fijo}$$

$\forall\, f \in C([a,b])$. *Así, T es un operador lineal acotado y:*

$$\|T\| \leq \sqrt{n}$$

Ejemplo 3.8 *(Un teorema de extensión para operadores lineales acotados)*

Sean V un espacio normado, W un espacio de Banach y, V_0 un subespacio vectorial de V. Sea

$$T_0 : V_0 \longrightarrow W$$

un operador lineal acotado. Entonces existe un único operador lineal acotado

$$T : \overline{V_0} \longrightarrow W$$

tal que:

$$T|_{V_0} \;=\; T_0$$

y así T es una extensión de T_0 a $\overline{V_0}$. Además

$$\|T\|_{\overline{V_0}} \;=\; \|T_0\|_{V_0}$$

donde $\|T\|_{\overline{V_0}}$ y $\|T_0\|_V$ son las normas de los operadores T y T_0 calculadas respecto de las bolas unitaras de $\overline{V_0}$ y V_0 respectivamente. En lo que sigue estas normas las denotaremos por $\|T\|$ y $\|T_0\|$

Demostración

(a) ***Existencia*** *Sea $x \in \overline{V_0}$. Entonces existe una sucesión $\Big\{x_n\Big\}_{n=1}^{\infty} \subset V_0$ tal que $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$. Ahora bien, ya que T_0 es acotado vamos a tener que:*

$$\|T_0(x_n) - T_0(x_m)\| \;=\; \|T_0(x_n - x_m)\| \leq \|T_0\|\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$$

si $n, m \longrightarrow \infty$ $\Bigg(\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ *si* $n, m \longrightarrow \infty$ *ya que* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es convergente*$\Bigg)$

así, la sucesión $\left\{T_0(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* W *que por hipótesis es un espacio de Banach, y por tanto es convergente a un único elemento de* W. *Definamos una transformación*

$$T : \overline{V_0} \longrightarrow W$$

por

$$T(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} T_0(x_n)$$

Notemos que $T(x)$ *es independiente de la sucesión elegida en* V_0 *que converja a* x. *En efecto, sea* $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *otra sucesión en* V_0 *tal que* $y_n \longrightarrow x$ *si* $n \to \infty$. *Entonces* $x_n - y_n \to 0$ *si* $n \to \infty$ *y en consecuencia por la continuidad de* T_0 :

$$\lim_{n\to\infty} T_0(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} T(y_n)$$

Es fácil verificar la linealidad de T *y que* $T|_{V_0} \;=\; T_0$ (*¿Por qué ?*)

b) ***Unicidad*** *Sea*

$$S : \overline{V_0} \longrightarrow W$$

otro operador lineal acotado tal que:

$$S|_{V_0} \;=\; T_0$$

Afirmamos que $S \;=\; T$. *En efecto, sea* $x \in \overline{V_0}$ *y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset V_0$ *tal que* $x_n \to x$ *si* $n \to \infty$. *Entonces, por la continuidad de* S *y de la definición de* T *obtenemos que:*

$$S(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} S(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} T_0(x_n) \;=\; T(x)$$

por tanto, $S = T$.

Mostraremos ahora que:

$$\|T\| = \|T_0\|$$

En efecto, recordemos inicialmente que:

$$\|T_0\| = \sup_{\substack{x \in V_0 \\ x \neq 0}} \frac{\|T_0(x)\|}{\|x\|}$$

y

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \overline{V_0} \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

Ahora bien, es claro que $\|T_0\| \leq \|T\|$. *Por otra parte, si* $x \in \overline{V_0}$ *y* $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset V_0$ *tal que* $x_n \to x$ *si* $n \to \infty$, *entonces*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_0(x_n)$$

Luego

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_0(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_0(x_n)\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|T_0\|\|x_n\| \end{aligned}$$

y en consecuencia, como $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ *obtenemos que:*

$$\|T(x)\| \leq \|T_0\|\|x\|$$

esto es,

$$\|T\| \;=\; \sup_{\substack{x \in \overline{V_0} \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T_0\|$$

Ejemplo 3.9 *(Noción de operador compacto)*

Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal

$$T : X \longrightarrow Y$$

se dice compacto si para cada sucesión acotada $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ la sucesión de imágenes $\left\{T(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente. Un operador lineal que es compacto se llama un operador compacto.

A continuación mostraremos que el operador de Fredholm:

$$K : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$$

donde

$$K(x)(s) \;=\; \int_a^b k(s,t)x(t)dt$$

es un operador compacto. (Ver el ejemplo 3.1). En efecto, sea $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset C([a,b])$ tal que:

$$\|x_n\|_u \leq M \qquad \textit{para} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mostraremos que la sucesión de imágenes $\left\{K(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ tiene las siguientes propiedades:

$(P1)$ *Es uniformemente acotada, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\|K(x_n)\|_u \leq C \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$(P2)$ *Es equicontinua, esto es, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$|K(x_n)(s) - K(x_n)(s')| < \varepsilon \qquad si \qquad |s - s'| < \delta \qquad para \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y así en consecuencia por el Teorema de Ascoli - Arzela [ver [13], pag. 85]quedará demostrado que $\left\{K(x_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *contiene una subsucesión convergente.*

Verificaremos entonces $(P1)$ *y* $(P2)$

$(P1)$ *Como* K *es acotado,*

$$\|K(x_n)\| \leq \|K\|\|x_n\|_u \leq \|K\|M < \infty \qquad para \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$(P2)$ *Como* $k(s,t)$ *es una función uniformemente continua, dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$|k(s,t) - k(s',t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \qquad si \qquad |s - s'| < \delta$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\Big|K(x_n)(s) - K(x_n)(s')\Big| &= \left|\int_a^b k(s,t)x_n(t)dt - \int_a^b k(s',t)x_n(t)dt\right| \\
&= \left|\int_a^b (k(s,t) - k(s',t))x_n(t)dt\right| \\
&\leq \int_a^b |k(s,t) - k(s',t)||x_n(t)|dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)}M(b-a) \;=\; \varepsilon \qquad para\; n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

3.4. Comentario final

Podemos decir que [1] es de mucha utilidad para comenzar el estudio con sus origenes y aplicaciones de la Teoría de Operadores Lineales Acotados.

Para la demostración de la identidad

$$L(X,Y) := B(X,Y) \qquad (\textit{proposición 3.12})$$

hemos seguido a la dada en [8] de su proposición 14 y mostrada en el capítulo 1.

La noción de operador de Fredholm fue tomada de [4] en el capítulo 3.

El concepto de operador Compacto se tomó de [5] en el capítulo 3.

3.5. Ejercicios propuestos

Esta sección contiene una lista de ejercicios que permiten complementar la teoría desarrollada anteriormente. Cuando la solución del ejercicio requiera el uso de un concepto (no dado en la teoría desarrollada en las secciones anteriores) éste será dado previamente.

Presentamos a continuación nuestros ejercicios.

Ejercicio 3.1 *Sea $T \in B(X,Y)$. Demostrar que si:*

$$M(T) \;=\; \text{ínf}\left\{M \;:\; \|T(x)\| \leq M\|x\|,\;\; \forall\, x \in X\right\}$$

entonces,

$$M(T) \;=\; \|T\|$$

Ejercicio 3.2 *Sea $T \in B(X,Y)$. Demostrar lo afirmado en la observación* 3.1 (b), *esto es,*

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \;=\; \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \;=\; \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

Ejercicio 3.3 *Sea $A \;=\; (a_{i,j})_{m\times n} \in M_{m\times n}$. Demostrar que la función:*

$$\|\cdot\| : M_{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\|A\| \;=\; \left(\sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

es una norma sobre $M_{m\times n}$

Ejercicio 3.4 *Sea $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Demostrar que*

$$\|T\| \leq \|A(T)\|$$

Ejercicio 3.5 *Dar un ejemplo de un* $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *tal que:*

$$\|T\| < \|A(T)\|$$

*(**Sugerencia:** Considere el operador lineal* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definido por:*

$$T\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

donde

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Interpretar geométricamente el operador T*.)*

Ejercicio 3.6 *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal. Demostrar que:*

$$T \text{ es } 1-1 \Longleftrightarrow N(T) := \{0\}$$

Ejercicio 3.7 *Sean* X *y* Y *espacios normados tales que:*

$$dim X = \infty \qquad y \qquad Y \neq \{0\}$$

Demostrar que existe un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ *que no es acotado*

Ejercicio 3.8 *Verificar que las siguientes transformaciones definen operadores lineales acotados. Estimar* $\|T\|$

a) $T : M_{m\times n} \longrightarrow M_{m\times n} \qquad T(A) = A^t B$

donde A^t *denota la transpuesta de la matriz* A *y,* B *es una matriz fija en* $M_{m\times n}$*.*

b) $T : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

c) $T : C'([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \qquad T(f)(x) = xf'(x)$ *donde* $x \in [0,1]$*, x fijo* *d)* $T : l^1 \longrightarrow l^2 \qquad T\left\{\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\right\} := \left\{\frac{1}{2^n}\sqrt{|x_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $T : l^1 \longrightarrow c_0 \qquad T\left\{\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\right\} := \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$

f) $T : C([0,1]) \longrightarrow c_0 \qquad T(f) := \left\{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$

Ejercicio 3.9 *Considere el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} l^2 \arrow[r, "S_d"] \arrow[d, "S_i"'] & l^2 \\ l^2 & \end{tikzcd}$$

Fig 3.4

donde S_d y S_i son operadores lineales acotados dados en el ejemplo 3.5. Demostrar que:

a) S_d *es* $1-1$ *pero no es sobre*

b) S_i *es sobre pero no es* $1-1$

c) $S_i \circ S_d = I$

d) $S_d \circ S_i \neq I$

e) *¿ Cuál es* $N(S_d \circ S_i)$ *?*

f) *¿ Cuál es el núcleo de* S_i*?*

Ejercicio 3.10 *Sean X, Y y Z espacios normados. Considere el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
Y \times Z & \\
X \arrow[u, "L"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & Y \\
Z &
\end{tikzcd}
$$

Fig 3.5

donde $T \in B(X,Y)$, $A \in B(X,Z)$ *y,* $Y \times Z$ *es el espacio normado definido en la proposición 1.14. El operador lineal* L *está definido como:*

$$L(x) \;=\; \Big(T(x), A(x)\Big), \qquad x \in X$$

Demostrar que:

a) $L \in B(X, Y \times Z)$ *y que además*

$$\|L\| \leq \|T\| + \|A\|$$

b) L *es* $1-1 \Longleftrightarrow N(T) \cap N(A) \;=\; \{0\}$

Ejercicio 3.11 *Dos espacios normados* X *y* Y *se dicen isomorfos si existe un operador* $T \in B(X,Y)$, *que es biyectivo y que además* $T^{-1} \in B(X,Y)$.

Demostrar que si X *y* Y *son isomorfos con* X, *siendo además un espacio de Banach, entonces* Y *es también un espacio de Banach.*

Ejercicio 3.12 *Dos espacios normados X y Y se dicen isométricamente isomorfos si existe un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ tal que:*

$$T(X) \;=\; Y \qquad y \text{ además} \qquad \|T(x)\| \;=\; \|x\|, \;\; \forall\, x \in X$$

Demostrar que si X y Y son isométricamente isomorfos entonces son isomofos.

Ejercicio 3.13 *¿ Se preserva siempre la separabilidad de un espacio de Banach a través de un isomorfismo isométrico?*

Ejercicio 3.14 *Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ dotado de la norma usual Y. Sea:*

$$M \;:=\; \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; 0 \right\}$$

Demostrar que M es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$, construir espacio cociente $\mathbb{R}^n/M$ y hallar $\|[(1,1,1,\ldots,1)]\|$

Ejercicio 3.15 *Resolver las siguientes ecuaciones integrales:*

a) $\dfrac{5s}{6} \;=\; x(s) - \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2} s\, t\, x(t)dt$

b) $s \;=\; x(s) - \displaystyle\int_0^{s} (t-s)x(t)dt$

Ejercicio 3.16 *Sean X y Y espacios normados y:*

$$K(X,Y) \;:=\; \left\{ T : X \longrightarrow Y,\; T \;\; \text{es un operador compacto} \right\}$$

Demostrar que:

a) *$K(X,Y)$ es un subespacio vectorial cerrado de $B(X,Y)$.*

b) *Si Y es un espacio de Banach, ¿ es $K(X,Y)$ un espacio de Banach?*

Ejercicio 3.17 *Sean S un operador compacto y T un operador lineal acotado. Supóngase que las composiciones $S \circ T$ y $T \circ S$ estan bien definidas. Demostrar que ambas composiciones definen operadores compactos.*

Referencias bibliográficas

Bibliografía

[1] Banach, S.,(1987) Theory of Linear Operations. English translation by F.Jellett, London, United Kingdom.

[2] Bartle, Robert.,(1976) The elements of Real Analysis. second edition. John Wiley and sons.

[3] Bollobás, Béla.,(1990) Linear Analysis An Introductory Course. Cambridge University Press.

[4] Davis, Martin.,(1966) A first course in Functional Analysis. Gordon and Breach.

[5] De Vito, Carl L.,(1990) Functional Analysis and Linear Operator Theory. Addison - Wesley publishing company.

[6] Diestel, Joseph.,(1984) Sequences and Series In Banach Spaces. Springer - Verlag. New York, Inc.

[7] Grossman, Stanley I.,(1992) Álgebra Lineal con Aplicaciones. Mc. Graw - Hill. Interamericana de México S.A.

[8] Habala, Pert; Hájek, Pert; Zizler, Václav.,(1996) Introduction to Banach Spaces. matfypress, vydavatelstvi Matematicko - fyzikálni fakulty univerzity Karlovy.

[9] *León M. Luis R.,(2000) Minimización en Espacio de Hilbert y Espacios de Banach. Trabajo de Ascenso. Mérida - Venezuela.*

[10] *Mazon Ruíz, José M.,(1997) Cálculo Diferencial. Teoría y Problemas. Mc Graw - Hill. Iteramaricana de España S.A.*

[11] *Merentes, N. y Rivas, S.,(1996) El Operador de Composición en Espacios de Funciones con algún tipo de Variación Acotada. Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana. Centros de Estudios Avanzados - I.V.I.C. Caracas.*

[12] *Pérez-Grasa, Isabel; Minguillón C., Esperanza; Jarne J., Gloria.,(2001) Matemáticas para la Economía. Programación matemática y sistemas dinámicos. Mc Graw - Hill. Iteramericana de España S.A.U.*

[13] *Yosida, Kosaku., (1974) Functional Analysis. Springer - Verlag Berlin: Heidelberg, New York.*

[14] *White, A.J.,(1968) Real Analysis an introduction. Addison - Wesley publishing company, Inc.*