

Régimes glissants, structures variables linéaires et modules

Michel FLIESS et Hebertt SIRA-RAMIREZ

Résumé — La théorie des modules permet de généraliser les notions de régimes glissants et de structures variables linéaires, indépendamment de toute représentation d'état ou entrée-sortie et de façon à poursuivre une grande variété de dynamiques modèles. On en déduit une justification de la commande prédictive.

Linear sliding modes and variable structure systems: a module-theoretic approach

Abstract — Linear sliding modes and variable structure systems are generalized, via module theory, independently of any state-variable or input-output representation. A great variety of model dynamics can be followed. Predictive control may be justified in this context.

I. INTRODUCTION. — Cette Note généralise les notions de régimes glissants et de structures variables linéaires, domaines qui ont suscité une abondante littérature. Renvoyons aux livres d'Utkin ([17], [18]), de Bühler [2], de Slotine et Li [15] et de Zinober [19].

Sont utilisés les liens entre modules et systèmes linéaires [5], qui permettent de s'affranchir de toute représentation particulière d'état ou entrée-sortie. Le comportement, auquel on veut aboutir, n'est pas nécessairement la stabilisation en un point mais englobe des poursuites de modèles plus complexes. Il se traduit par un certain sous-module, dit désiré, indépendant des perturbations. Sous l'hypothèse de commandabilité du système non perturbé et en prenant une base du module désiré, qui, alors, est un module libre, on se ramène à un régime glissant classique, ou inspiré de [10], [11], qui est robuste. Le possible déphasage non minimal est, ici, traité par changement de sortie.

Deux illustrations sont brièvement examinées. La première montre que l'on peut imposer toute dynamique à la sortie. Quant à la seconde, elle fournit une justification théorique de la commande prédictive, popularisée par Richalet (voir [12]). Cette dernière avait, jusqu'à aujourd'hui, été abordée par diverses techniques d'optimisation, le plus souvent dans le cadre des systèmes linéaires en temps discret (voir [1], [16]).

II. DYNAMIQUES ET PERTURBATIONS. — II.1. Soit $\mathbb{R}$ le corps des réels. On note $\mathbb{R}[d/dt]$ l'anneau commutatif principal des opérateurs différentiels linéaires de la forme $\sum_{finie} a_\alpha (d^\alpha/dt^\alpha)$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Nous entendrons par *module* tout $\mathbb{R}[d/dt]$ -module de type fini. Le module engendré par un ensemble $w = \{w_i \mid i \in I\}$ est noté $[w]$.

II.2. Un *système linéaire* ([5], [8]) est un module. Une *dynamique linéaire perturbée* D (cf. [5]) est un module D , où l'on distingue une *commande* $u = (u_1, \dots, u_m)$ et une *perturbation* $f = (f_1, \dots, f_n)$, telles que le module quotient $D/[u, f]$ soit de torsion. La non-interaction entre commande et perturbation se traduit par la condition $[u] \cap [f] = \{0\}$. La commande est supposée *indépendante*, c'est-à-dire le module $[u]$ libre. Une telle hypothèse ne se justifie point pour la perturbation, dont certaines composantes peuvent satisfaire des équations différentielles linéaires homogènes, c'est-à-dire être de torsion.

II.3. Soit l'épimorphisme canonique $\iota : D \rightarrow D/[f] = \bar{D}$. Comme $[u] \cap [f] = \{0\}$, la restriction de ι à $[u]$ est un isomorphisme entre $[u]$ et $[\bar{u}] = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m] = [\iota u] = [\iota u_1, \dots, \iota u_m]$.

Note présentée par Bernard PICINBONO.

Comme $\bar{D}/[\bar{u}]$ est de torsion, nous appellerons $\bar{D}$ la dynamique linéaire *non perturbée*, où $\bar{u}$ est la *commande non perturbée*.

II.4. Il est loisible de supposer la dynamique non perturbée $\bar{D}$ commandable, c'est-à-dire le module $\bar{D}$ libre ([5], [8]).

III. MODULES DÉSIRÉS. — III.1. Imposer une certaine dynamique modèle peut se traduire de la façon suivante :

DÉFINITIONS. — On appelle module désiré tout sous-module S de D , tel que :

- $S \cap [f] = \{0\}$.

- L'image canonique $\bar{S}$ de S dans $\bar{D}$, appelée module désiré non perturbé, est un module de rang m , c'est-à-dire tel que le module quotient $\bar{D}/\bar{S}$ soit de torsion.

D/S (resp. $\bar{D}/\bar{S}$) est la dynamique résiduelle (resp. dynamique résiduelle non perturbée). On appelle commande désirée (resp. commande désirée non perturbée) l'image canonique de u dans D/S (resp. $\bar{D}/\bar{S}$).

III.2. La condition $S \cap [f] = \{0\}$ signifie que la perturbation ne doit pas affecter la dynamique de référence. Elle implique que la restriction de ι à S définit un isomorphisme entre S et $\bar{S}$: S et $\bar{S}$ sont des modules libres de rang m . Ajoutons que la commande désirée est, en général, affectée par la perturbation, tandis que la commande désirée non perturbée ne l'est pas.

III.3. Le module désiré S est dit à *déphasage minimal*, c'est-à-dire tel que le système inverse correspondant soit stable, si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $[\bar{u}] \subseteq \bar{S}$.

- Si $[\bar{u}] \subseteq \bar{S}$, soit $\tau : [\bar{u}, \bar{S}]/\bar{S} \rightarrow [\bar{u}, \bar{S}]/\bar{S}$ l'endomorphisme linéaire associé à d/dt (cf. [6]), où $[\bar{u}, \bar{S}]$ désigne le module engendré par les éléments de $\bar{u}$ et $\bar{S}$. Alors, les parties réelles des valeurs propres de τ sont strictement négatives.

Il convient d'assumer l'*observabilité* du système non perturbé, c'est-à-dire $\bar{D} = [\bar{u}, \bar{y}]$ (cf. [5]). Il faut, sinon, que les parties réelles des *modes cachés* dus à la perte d'observabilité, c'est-à-dire des valeurs propres de l'endomorphisme linéaire $t : \bar{D}/[\bar{u}, \bar{y}] \rightarrow \bar{D}/[\bar{u}, \bar{y}]$ associé à d/dt , soient strictement négatives [6].

IV. RÉGIME GLISSANT ET COMMUTATIONS. — IV.1. Soient $z = (z_1, \dots, z_m)$ une base de S et $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ la base image de $\bar{S}$. Le système d'entrée $\bar{u}$ et de sortie $\bar{z}$ est *inversible* (à droite et à gauche), donc *découplable* (cf. [3], [4]). Aussi se restreint-on au cas monovariable, $m = 1$. Alors, $\bar{z}$ est unique à un facteur multiplicatif réel, non nul, près.

IV.2. Supposons que S soit à déphasage minimal. Un régime glissant *robuste* et une politique de communications habituelles ([2], [15], [17], [18], [19]) peuvent être suivis pour conduire z en zéro, si le numérateur de la fonction de transfert reliant $\bar{u}$ et $\bar{z}$ est constant. Sinon, ils se déduisent de [10], [11]; alors, les sauts se produisent sur une dérivée de la commande, qui reste continue.

IV.3. Une fonction de transfert est dite à *déphasage minimal* si, et seulement si, son numérateur soit est constant, soit ne possède que des racines à parties réelles strictement négatives.

IV.4. Si S n'est pas à déphasage minimal, on peut remplacer $\bar{z}$ par une autre sortie $\bar{\sigma} \in \bar{D}$, une base de $[\bar{u}, \bar{z}]$, par exemple, afin que la fonction de transfert reliant $\bar{u}$ et $\bar{\sigma}$ soit à déphasage minimal. La convergence de $\bar{\sigma}$ assurant celle de $\bar{z}$, on est ramené au cas précédent.

IV. 5. Il est, toujours, possible de choisir $\bar{\sigma}$ pour que le numérateur de la fonction de transfert, à déphasage minimal, reliant $\bar{u}$ et $\bar{\sigma}$ ne soit pas réduit à une constante. La commutation se fait, alors, grâce à des sauts d'une dérivée de la commande, qui demeure continue [10], [11].

IV. 6. *Remarque.* — On connaît les liens entre régimes glissants, *perturbations singulières* et *grands gains* (cf. [18]). Imposer à $\bar{z}$, ou à $\bar{\sigma}$, la loi $\varepsilon \dot{\xi} + \xi = 0$, où ε est une « petite » constante positive, conduit à calculer $\bar{u}$ par une boucle fournissant des résultats voisins.

V. ILLUSTRATIONS. — V. 1. Choisissons une sortie $y = (y_1, \dots, y_m)$ dans D , d'image $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$ dans $\bar{D}$, telle que le module $[\bar{y}]$ soit libre [inversibilité à droite (cf. [4])]. Imposer un comportement dynamique à cette sortie se traduit par un sous-module Δ de $[\bar{y}]$ de rang m , c'est-à-dire tel que $[\bar{y}]/\Delta$ soit de torsion, où Δ désigne l'image de Δ dans $\bar{D}$. Remarquons que cette dynamique modèle peut être déterminée par une équation différentielle linéaire homogène quelconque.

V. 2. La liberté de $[\bar{y}]$ entraîne $[\bar{y}] \cap [f] = \{0\}$: Δ est, toujours, un module désiré. Il est, en vertu de IV, possible d'atteindre la dynamique modèle correspondante par un régime glissant robuste à déphasage minimal.

V. 3. La *commande prédictive* consiste, souvent, à imposer à la sortie la poursuite d'une consigne constante. Si les composantes de cette dernière ne sont pas toutes nulles, on se ramène au cadre linéaire de cette Note par une translation élémentaire des composantes de la sortie. On poursuit, alors, la consigne nulle qui correspond au module désiré $[\bar{y}]$. La commande prédictive est, en vertu de ce qui précède, possible par un régime glissant robuste à déphasage minimal, que l'on peut choisir tel que les sauts portent sur une dérivée de la commande, qui demeure continue.

VI. CONCLUSION. — L'extension aux systèmes instationnaires se fait en remplaçant $\mathbb{R}$ par un *corps différentiel* et en utilisant l'algèbre non commutative (voir [5]). Les problèmes qualitatifs peuvent, par exemple, se traiter en supposant que ce corps est *de Hardy* (voir [7]). Pour la généralisation au non-linéaire, déjà abordée en [13], [14], un problème essentiel consiste à trouver l'analogue de la base du module désiré. Cela est possible s'il est remplacé par une extension *différentiellement plate* du corps de base [9].

Travail effectué grâce au concours financier du CNRS, qui a permis le séjour du second auteur au Laboratoire des Signaux et Systèmes.

Note remise le 27 avril 1993, acceptée après révision le 26 août 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. BITMEAD, M. GEVERS et V. WERTZ, *Adaptive Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [2] H. BÜHLER, *Régulation par mode de glissement*, Presse Polytechnique Romande, Lausanne, 1986.
- [3] E. DELADEAU et M. FLIESS, Algorithme de structure, filtrations et découplages, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315, série I, 1992, p. 101-106.
- [4] M. FLIESS, Generalized linear systems with lumped or distributed parameters and differential vector spaces, *Int. J. Control*, 49, 1989, p. 1989-1999.
- [5] M. FLIESS, Some basic structural properties of generalized linear systems, *Systems Control Lett.*, 15, 1990, p. 391-396.
- [6] M. FLIESS, A simple definition of hidden modes, poles and zeros, *Kybernetika*, 27, 1991, p. 186-189.
- [7] M. FLIESS, Some remarks on gain scheduling, *Actes 1^{re} Conf. Europ. Automatique*, Grenoble, 1991, Hermès, Paris, 1991, p. 177-181.

- [8] M. FLIESS, A remark on Willems' trajectory characterization of linear controllability, *Systems Control Lett.*, 19, 1992, p. 43-45.
- [9] M. FLIESS, J. LÉVINE, P. MARTIN et P. ROUCHON, Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 315, série I, 1992, p. 619-624.
- [10] M. FLIESS et F. MESSEAGER, Sur la commande en régime glissant, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 951-956.
- [11] F. MESSEAGER, Sur la stabilisation discontinue des systèmes, *Thèse*, Université Paris-Sud, Orsay, 1992.
- [12] J. A. RICHALET, A. RAULT, J.-L. TESTUD et J. PAPON, Model predictive heuristic control: applications to industrial processes, *Automatica*, 14, 1978, p. 413-428.
- [13] H. SIRA-RAMIREZ, Asymptotic output stabilization for nonlinear systems via dynamical variable structure control, *Dynamics Control*, 2, 1992, p. 45-58.
- [14] H. SIRA-RAMIREZ, On the sliding mode control on nonlinear systems, *Systems Control Lett.*, 19, 1992, p. 393-312.
- [15] J. J. E. SLOTTINE et W. LI, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [16] R. SOETERBOEK, *Predictive Control: A Unified Approach*, Prentice Hall, New York, 1992.
- [17] V. I. UTKIN, *Sliding Modes and their Applications in Variable Structure Systems*, Mir, Moscou, 1978.
- [18] V. I. UTKIN, *Optimization and Sliding Mode Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [19] A. S. I. ZINOBER éd., *Deterministic Control of Uncertain Systems*, Peregrinus, Londres, 1990.

M. F. : Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-ESE.,
plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France;

H. S.-R. : Departamento Sistemas de Control, Escuela de Ingeniería de Sistemas,
Facultad de Ingeniería, ULA, Avenida Tulio Febres Cordero, Mérida, 5101, Venezuela.