

TITULO : "EL PROBLEMA DE ALCANCE DE TUBO MEDIANTE
EL PRINCIPIO DE ESTIMACION DE LA INTER -
ACCION".

AUTOR : Hebertt J. Sira Ramírez
(Universidad de los Andes
VENEZUELA.

Resumen: El objeto de este artículo es el de exponer una forma nueva de la utilización del Principio de Estimación de la Interacción (1) en el control de los Sistemas de Gran Escala Estocásticos.

Dentro de un marco estocástico, este estudio consi
dera la alternativa práctica de modelar las señales aleatorias que afectan la evolución de un Sistema de Gran Escala como conjuntos convexos acotados y cerrados de fácil definición en un problema general de control. El método estocástico que amerita medición (no siempre posible) de valores medios y covarianzas de los procesos que afectan al sistema como incertidumbre, es por tanto evadido, obteniéndose un diseño del tipo Mini-Max de fácil interpretación e implementación.

El artículo define un problema de control en el cual se desea mantener la trayectoria del sistema dentro de una sucesión de conjuntos dados en el espacio de estado ("tubo") del Sistema de Gran Escala Estocástico. Los diferentes agentes de control utilizan el Principio de Estimación de la Interacción desarrollado por Mesarovic (1) para obtener un esquema de descomposición del problema de control "Conjunto-Teórico".

Se presenta asimismo, el algoritmo de Estimación de la Interacción a ser llevado a cabo "fuera de línea" (a priori) para proveer a cada controlador un conjunto de información extra que le permita la resolución de su problema individual en una forma descentralizada. La prueba de convergencia de este algoritmo también se presenta en detalle.

La técnica Conjunto-Teórica para estimación y Control de Sistemas de Gran o Mediana Escala tiene enorme potencial en el análisis de Sistemas Socio-Económicos y de Planificación (8), (9).

I. INTRODUCCION

La literatura hasta ahora publicada sobre la teoría de los Sistemas de Gran Escala ha puesto énfasis especial en problemas de optimización asociados con el control de dichos sistemas. La razón se desprende, probablemente, de un deseo de alcanzar, dentro de la teoría de sistemas de Gran Escala, el mismo éxito que se ha logrado con las técnicas de descomposición en la teoría de la programación matemática.

Es interesante observar que desde hace algún tiempo¹ se vislumbró el hecho de que los problemas principales a ser considerados en un sistema de Gran Escala por lo general tienen poco o nada que ver con la optimalidad de su funcionamiento. Si a esto sumamos el agravante de que la determinación de soluciones óptimas es de índole bastante complicada, incluso para sistemas de pequeña o mediana escala, no es difícil entonces poner en tela de juicio la factibilidad de determinación y de implementación de señales de control óptimo en un sistema complejo.

El propósito de este trabajo es el de llamar la atención sobre la importancia que puede tener, dentro del control de los sistemas de Gran Escala, la consideración de tópicos enteramente diferentes al problema del funcionamiento óptimo. Centraremos nuestra atención en el problema de mantener las trayectorias de un sistema complejo dentro de límites pre-establecidos y que bajo algún criterio representan un funcionamiento deseable del sistema de Gran Escala frente a influencias aleatorias del mundo externo.

La técnica de base en el tratamiento del problema que aquí hemos de formular es la formulada por Schweppe², Witsenhausen³ y otros, la cual consiste en considerar las señales aleatorias como completamente desconocidas pero acotadas en todo instante por conjuntos acotados, cerrados y convexos (acc). El problema de mantener el estado de un sistema estocástico dentro de un "tubo" cuenta entonces de esta forma con una descripción compatible, natural y práctica de la incertidumbre que puede afectar el comportamiento del sistemas

En la sección siguiente formularemos el problema de alcance de tubo para un sistema estocástico con varios controladores (dos) que poseen diferentes conjuntos de información acerca del sistema a ser controlado(describiremos brevemente el problema de alcance de tubo centralizado en el Apéndice). La sección III tratará el problema de coordinación "fuera de línea" uti-

lizando el principio de estimación de la interacción introducido por Mesarovic y sus colaboradores⁴. En esa misma sección presentaremos un algoritmo de coordinación que permite sintetizar problemas de alcance de tubo individuales a ser adjudicados a los controladores locales. La sección IV expone las conclusiones y algunos tópicos de investigación futura que puedan desprenderse del presente trabajo.

II. FORMULACION DEL PROBLEMA

Considérese dos sistemas dinámicos acoplados de la forma:

$$x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k), u_1(k), w_1(k), k) \quad (2.1)$$

y

$$x_2(k+1) = f_2(x_2(k), x_1(k), u_2(k), w_2(k), k) \quad (2.2)$$

donde: $x_i(k)$ es el "estado" del i -ésimo subsistema ($i=1,2$) perteneciente al espacio Euclidiano R^{n_i} para todo k .

$u_i(k)$ es el "vector de control" para el i -ésimo subsistema y para todo k es un elemento de R^{m_i} .

$w_i(k)$ es el "vector de perturbación de planta" para el i -ésimo subsistema y para todo k es un elemento de R^{q_i} .

f_i son aplicaciones de transición de estado desde $R^{n_i} \times R^{n_j} \times R^{m_i} \times R^{q_i} \times Z^+$ dentro de R^{n_i} ($i, j = 1, 2$; $i \neq j$). Z^+ es el conjunto de los enteros no negativos donde toma valores el índice temporal k .

Cada controlador realiza mediciones sobre su propio subsistema de acuerdo con:

$$z_i(k) = h_i(x_i(k), y_i(k), k) \quad (2.3)$$

$z_i(k)$, ($i=1,2$) es un vector en R^{p_i} y se denominara "el vector de mediciones del i -ésimo controlador".

$y_i(k)$, ($i=1,2$) es un elemento de R^{r_i} y representa "el vector de perturbación de la medición para el i -ésimo controlador"

Dado el sistema dinámico (2.1-2.3) con $u_i(k) \in U_i^k$ (acc) en R^{m_i} , $w_i(k) \in W_i^k$ (acc) en R^{q_i} , $y_i(k) \in V_i^k$ (acc) en R^{r_i} y $x_i(0) \in X_i(0)$ (acc) en R^{n_i} encuentrense sucesiones admisibles de control $u_i(k) \in U_i^k$ tales que el vector de estado $(x_1'(k), x_2'(k))$ en $R^{n_1+n_2}$ permanece dentro de una suce-

sión de conjuntos acotados, cerrados y convexos (acc) en $R^{n_1+n_2}$ simbolizada mediante $\{x^k\}$, durante todo el horizonte de planificación $k=0,1,\dots,N$ ($=N$) y para todos los valores posibles que puedan tomar las cantidades aleatorias $x_1(0)$, $u_1(k)$ y $y_1(k)$. A este problema le daremos el nombre de: el problema Global de Alcance del Tubo de Blanco.

Asignaremos a cada controlador un conjunto llamado "el Conjunto de Información" I_1 . Este conjunto esta compuesto por: el Conjunto de Información Inicial" P_1 y "el Conjunto de Información en Línea" $Y_1(k)$. El Conjunto P_1 esta constituido por: a) Conocimiento perfecto de las aplicaciones f_1, h_1 b) Conocimiento de los conjuntos acc que representan las incertidumbres bajo las cuales evoluciona el i-ésimo subsistema así como las que afectan el programa de mediciones relacionado con este subsistema ($w_1^k, x_1(0), v_1^k$). c) Conocimiento perfecto de parte del tubo de Blanco x^k (esta parte la especificaremos más adelante). d) Conocimiento perfecto de la disponibilidad de control U_1^k como un conjunto acc en R^{m_1} . El conjunto de información en línea $Y_1(k)$ esta constituido por: a) El conjunto de todos los vectores de medición z_1 que se han obtenido del subsistema i hasta el instante k inclusive. b) El conjunto de todos los vectores de control u_1 usados hasta el instante k exclusive. c) El conjunto de "información extra" que, en general, contiene información acerca de los estados del otro subsistema (más adelante definiremos este conjunto en forma más precisa). Cada controlador desconoce la estructura del subsistema bajo la influencia del otro controlador.

No es difícil demostrar ⁵ que a fin de evitar una situación de "juego" entre los controladores y para podernos concretar sobre los aspectos cooperativos que deben prevalecer en la solución descentralizada del problema propuesto debemos hipotetizar, junto a la estructura de la información someramente detallada anteriormente, la existencia de intercambio de información entre los controladores tanto a priori como sobre la marcha. Este intercambio de información es necesario y resulta natural el hacerlo a través de un agente que llamaremos coordinador cuya tarea principal es la de servir de agente supervisor con capacidades computacionales limitadas. Este coordinador influencia los subsistemas de tal forma que actuen en forma armoniosa con respecto a la meta de lograr el alcance del Tubo de Blanco $\{x^k\}$. El coordinador es capaz de recibir y distribuir información desde y hacia los controladores.

Las diferentes formas bajo las cuales el coordinador puede influenciar los subsistemas y forzarles a actuar en forma armónica conlleva un conjunto de acciones a las que le daremos el nombre genérico de coordinación.

Por lo general, las tareas del coordinador son de dos tipos: fuera de línea (o a priori) y en línea (sobre la marcha). En este trabajo nos concentraremos primordialmente sobre las acciones que el coordinador toma bajo el criterio impuesto por el principio de estimación de la interacción con el fin de influenciar a priori los conjuntos de información de los controladores del sistema. El tipo de coordinación que se establecerá, fuera de línea, redundará en una descomposición del problema del alcance del Tubo de Blanco. No trataremos en este trabajo los aspectos de coordinación en línea que tienden a modificar sobre la marcha el llamado conjunto de información extra de que hablabamos con anterioridad. Para una serie de tópicos relacionados con este punto el lector puede referirse a Sira⁶ donde además se presentan otros modos de coordinación diferentes al tratado aquí.

El coordinador se encargará entonces de proveer, a priori, a cada controlador con esa "parte del Tubo de Blanco" que cada uno necesita para poder definir un problema individual de alcance de Tubo. La asignación de tubos individuales se hace mediante todo un proceso fuera de línea que nosotros denominaremos algoritmo de coordinación fuera de línea.

III. COORDINACION MEDIANTE ESTIMACION DE LA INTERACCION

El principio de coordinación mediante estimación de la interacción aplicado al problema del alcance del Tubo de Blanco establece que el coordinador debe especificar a cada controlador un Tubo de Interacción donde deben encontrarse con probabilidad uno los valores vectoriales de la interacción que proviene del otro subsistema. Cada controlador considera entonces este Tubo de interacción como perturbación adicional a ser tomada en cuenta para la resolución de su problema de alcance de Tubo de Blanco individual. El tubo de interacción representa todo el conocimiento a priori de la incertidumbre que cada controlador debe encarar debida a la interconexión de los subsistemas. El algoritmo de coordinación que propondremos más adelante trata de reducir mediante un proceso fuera de línea el tamaño de esta incertidumbre para cada controlador y lograr lo que denominaremos balance de la interacción.

Puesto que concentraremos nuestros esfuerzos en el caso lineal daremos

a continuación la estructura particularizada de las aplicaciones de transición de estado definidas en (2.1) y (2.2) :

$$f_1(x_1(k), x_2(k), u_1(k), u_2(k), k) = A_{11}(k)x_1(k) + A_{12}(k)x_2(k) + B_1(k)u_1(k) + G_1(k)u_2(k) \quad (3.1)$$

$$f_2(x_2(k), x_1(k), u_2(k), u_1(k), k) = A_{22}(k)x_2(k) + A_{21}(k)x_1(k) + B_2(k)u_2(k) + G_2(k)u_1(k) \quad (3.2)$$

denominaremos a $A_{12}(k)$ y $A_{21}(k)$ como "las matrices de interacción". Es preciso recordar en este momento al lector que el Apéndice al final del trabajo presenta una revisión sucinta del problema del alcance del Tubo de Blanco desde el punto de vista centralizado es decir, para un sistema con patrón clásico de la información y conviene leerlo antes de adentrarnos en el problema que estamos tratando.

En presencia de la estructura del sistema dada por (3.1) y (3.2) y los conjuntos que cada controlador calcula a priori en la solución del problema de alcance del Tubo de Blanco individual (Vease Apéndice) damos a continuación una descripción detallada del proceso de coordinación para el caso que nos ocupa:

El coordinador provee a cada controlador con "Tubos de Interacción" obtenidos por ejemplo a partir del conocimiento que tiene el coordinador del tubo global en $R^{n_1+n_2}$ y el cual él puede descomponer en el producto cartesiano de dos tubos de Blanco, uno en R^{n_1} y otro en R^{n_2} de tal forma que este producto cartesiano siempre esté contenido dentro del tubo original. Los tubos de interacción se obtienen hallando las imágenes directas a través de las transformaciones lineales de interacción (o matrices de interacción) de estos Tubos de Blanco individuales. Cada controlador cuenta entonces con un tubo de Blanco individual dado por el coordinador, un tubo de Interacción dado también por el coordinador, conjuntos que representan la incertidumbre de planta y su capacidad de control. En resumen cada controlador cuenta con un problema de alcance de tubo de Blanco donde la interacción puede ser vista como incertidumbre adicional.

Cada controlador procede entonces a efectuar los cálculos fuera de línea que le permitan concluir si su problema de alcance del Tubo de Blanco Individual tiene o no solución y en este proceso calcula su "Tubo de Blanco Re

ducido"definido en el Apéndice. Cada Tubo de Blanco Reducido representa la región más grande del espacio de estado de cada subsistema donde se debe encontrar en el instante correspondiente el estado del subsistema a fin de que existan trayectorias factibles a través del tubo individual hasta el término del horizonte de planificación N . Cada Tubo de Blanco Reducido representa entonces el mejor estimado "a priori" de la trayectoria de cada subsistema. Debido a propiedades obvias del Tubo de Blanco Reducido éste siempre está contenido dentro del Tubo de Blanco Individual. Es claro entonces que a partir de este hecho un nuevo estimado de la trayectoria de interacción pueda ahora calcularse a partir de los Tubos de Blanco Reducidos obtenidos por computaciones de cada controlador efectuadas a priori. Si se toma ahora por Tubo individual de Interacción el que se obtiene una vez que se transforma mediante la matriz de interacción el Tubo de Blanco Reducido tendremos un nuevo modelo a priori de la incertidumbre causada por la interacción de los subsistemas, para cada controlador. El proceso se continúa como antes hasta obtener un estimado de la interacción que ya no puede ser mejorado sensiblemente con más computos "fuera de línea".

Introduciremos ahora alguna notación matemática con el fin de proponer el algoritmo de Coordinación en forma más concisa y dar un bosquejo de la prueba de convergencia del mismo.

El coordinador proporciona digamos al controlador # 1 con un Tubo de Interacción que denotaremos mediante $\{E_{2,n}^k\}$ $k = 0, 1, \dots, N-1$, (n es un índice que identifica el n -ésimo tubo proporcionado por el coordinador en el proceso conocido como algoritmo de coordinación) este representa la interacción (o su estimado) del subsistema 2 sobre el subsistema 1. El controlador # 2 recibe de parte del coordinador un tubo de interacción que denotamos mediante $\{E_{1,n}^k\}$. Asumiremos adicionalmente que cada controlador ha recibido, también del coordinador, un tubo de Blanco Individual que respectivamente denotaremos mediante $\{x_1^k\}$ y $\{x_2^k\}$.

Cada controlador calcula entonces su Tubo de Blanco Reducido Individual de acuerdo al siguiente proceso recursivo de marcha atrás:

$$x_{R1}^k = A_{11}^{-1}(k) \left((x_{R1}^{k+1} \ominus (G_1(k)w_1^k \oplus E_{2,n}^k)) \oplus B_1(k)u_1^k \right) \cap x_1^k \quad (3.3)$$

con $X_{R1}^N = X_1^N$ como condición inicial para el proceso recursivo. El controlador # 2 calcula asimismo su Tubo de Blanco Reducido Individual:

$$X_{R2}^k = A_{22}^{-1}(k)((X_{R1}^{k+1} \ominus (G_1(k)W_1^k \oplus E_{1,n}^k)) \oplus -B_2(k)U_2^k) \cap X_2^k \quad (3.5)$$

con $X_{R2}^N = X_2^N$.

Con el fin de enfatizar la dependencia de los Tubos de Blanco Reducidos sobre los Tubos de Interacción (o sus estimados) $\{E_{2,n}^k\}$ y $\{E_{1,n}^k\}$ definiremos las siguientes aplicaciones:

Sea L_1 la aplicación definida mediante:

$$L_1: \prod_{N+1}^{N+1} R_1^N \times \prod_N^N R_1^N \times \prod_N^N R_1^N \times \prod_N^N R_1^N \rightarrow \prod_{N+1}^{N+1} R_1^N$$

con

$$L_1(\{X_1^k\}, \{U_1^k\}, \{W_1^k\}, \{E_{2,n}^k\}) = \{X_{R1}^k\} \quad (3.6)$$

donde $\prod_N^N R^S$ significa el producto cartesiano de R^S , N veces consigo mismo.

Similarmente sea L_2 la aplicación definida mediante:

$$L_2(\{X_2^k\}, \{U_2^k\}, \{W_2^k\}, \{E_{1,n}^k\}) = \{X_{R2}^k\} \quad (3.7)$$

es decir, L_1 y L_2 son aplicaciones que toman por valores "tubos" en el espacio de llegada de la aplicación respectiva. El tubo a que esta aplicación da origen es exactamente el mismo que se obtiene con el proceso recursivo de marcha atrás descrito por (3.4) y (3.5) respectivamente. Por simplicidad y también porque no pensamos variar el resto de los argumentos que intervienen en la definición de las aplicaciones L_1 y L_2 denotaremos los Tubos Reducidos definidos en (3.6) y (3.7) únicamente como función de los tubos de Interacción $\{E_{2,n}^k\}$ y $\{E_{1,n}^k\}$ respectivamente. Es decir:

$$\{X_{R1,n+1}^k\} = L_1(\{E_{2,n}^k\}) \quad \text{y} \quad \{X_{R2,n+1}^k\} = L_2(\{E_{1,n}^k\})$$

donde hemos provisto del índice $n+1$ a los Tubos Reducidos que se calculan a partir del n -ésimo Tubo de Interacción suplido por el coordinador a los controladores con el fin de indicar una relación causal entre ambos tubos.

A continuación presentamos el Algoritmo de Coordinación fuera de línea.

1) Inicialización

Defínase $\{E_{2,1}^k\} = \{A_{12}(k) X_2^k\}$ y $\{E_{1,1}^k\} = \{A_{21}(k) X_1^k\}$

2) Hagase $n = 1$

- 3) Los controladores $\{X_{R1,n+1}^k\} = L_1(\{E_{2,n}^k\})$
 calculan : $\{X_{R2,n+1}^k\} = L_2(\{E_{1,n}^k\})$

y comunican estos tubos reducidos al coordinador.

- 4) El coordinador compara $\{X_{R1,n+1}^k\}$ con $\{X_{R1,n}^k\}$ y $\{X_{R2,n+1}^k\}$ con $\{X_{R2,n}^k\}$ y si estos tubos son suficientemente cercanos entre sí entonces el proceso finaliza obteniéndose los tubos de interacción para cada subsistema como $\{A_{12}(k) X_{R2,n+1}^k\}$ y $\{A_{21}(k) X_{R1,n+1}^k\}$ respectivamente.
 De otra manera:

- 5) El Coordinador calcula los "nuevos" tubos de Interacción como:

$$\{E_{2,n+1}^k\} = \{A_{12}(k) X_{R2,n+1}^k\}$$

$$\{E_{1,n+1}^k\} = \{A_{21}(k) X_{R1,n+1}^k\}$$

y comunica estos tubos de Interacción a los controladores # 1 y 2 respectivamente.

- 6) Hágase $n = n+1$ y el proceso se repite a partir del paso 3) en adelante hasta obtener balance de la Interacción

La prueba de la convergencia de este algoritmo esta basada en las siguientes proposiciones:

Proposición 1 Sean $L_1(A)$ y $L_1(B)$ ($i=1,2$) dos Tubos Reducidos individuales no vacíos calculados a partir de los Tubos de Interacción A y B respectivamente donde $A = \{A^k\}$ y $B = \{B^k\}$ ($k=0,1,\dots,N-1$) satisfacen la propiedad $A^k \subset B^k$ para todo k. Entonces $\{L_1(A)\} \supset \{L_1(B)\}$. Es decir, cada conjunto del Tubo $\{L_1(A)\}$ contiene el correspondiente del Tubo $\{L_1(B)\}$.

La prueba de esta proposición se lleva a cabo mediante conocidas propiedades de las relaciones entre información y control en un problema de alcance de Tubo de Blanco. Sira⁶ presenta una prueba inductiva de esta misma proposición.

Proposición 2 Si en la proposición anterior $A \supset B$ entonces $\{L_1(A)\} \subset \{L_1(B)\}$

La prueba de esta proposición se sigue en forma trivial de la anterior intercambiando los papeles de A y B .

Proposición 3 Sea $\{E_{i,n}^k\}$ un Tubo de Interacción provisto por el coordinador al controlador "j" ($i, j = 1, 2 ; i \neq j$) en el n-ésimo paso del Algoritmo de Coordinación fuera de línea descrito anteriormente, entonces:

$$\begin{aligned} \text{para } n \text{ par } \{E_{j,n}^k\} \subset \{E_{i,n+2}^k\} \quad \text{y} \quad \{E_{i,n}^k\} \subset \{E_{i,n+1}^k\} \quad \text{y} \\ \text{para } n \text{ impar } \{E_{i,n}^k\} \supset \{E_{i,n+2}^k\} \quad \text{y} \quad \{E_{i,n}^k\} \supset \{E_{i,n+1}^k\} \end{aligned}$$

La prueba de esta proposición se encuentra en todo detalle en Sira⁶ donde se hace a través de un proceso inductivo. La prueba esta basada en el hecho de que el algoritmo propuesto produce una sucesión de Tubos de Interacción para cada controlador que tiene la propiedad de irse contrayendo y expandiendo dentro del Tubo de Interacción inicialmente dado. Estas contracciones y expansiones en la forma como se describen en esta proposición son debidas a las interrelaciones, que se pueden derivar de los sistemas dinámicos como el descrito, entre la incertidumbre y la capacidad de control desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. En general se puede decir que a mayor incertidumbre en un problema de alcance de Tubo de Blanco corresponde un Tubo Reducido menor que el que se obtendría con menos incertidumbre y viceversa. Como en nuestro caso la Interacción es vista como incertidumbre de planta adicional, no es difícil ver que el tamaño de los conjuntos que representan esta incertidumbre incidirá, en la forma indicada en la proposición, sobre los Tubos Reducidos los cuales a su vez determinan la nueva interacción (o incertidumbre extra) para la próxima corrida de cálculos en el algoritmo.

La proposición anterior muestra que el Algoritmo de Coordinación fuera de línea genera para cada controlador una sucesión de Tubos de Interacción con dos sub-sucesiones claramente identificables. La sucesión de tubos pares y la sub-sucesión de tubos impares, (con respecto al valor de n). Para cada controlador la sub-sucesión formada por los tubos cuyo índice n es impar es en realidad una sucesión monotónica y uniformemente contractiva. Por otro lado, para cada controlador, la sub-sucesión formada por todos los tubos de interacción cuyo índice n es par, forma una sucesión uniforme y monotónicamente expansiva. El siguiente teorema establece que ambas sucesiones convergen

al mismo tubo de interacción.

Teorema 1 El Algoritmo de Coordinación fuera de línea descrito anteriormente genera, para cada controlador, una sucesión convergente de Tubos de Interacción. Aún más, los límites hacia los cuales tienden estas sucesiones de Tubos satisfacen el principio del balance de la Interacción.

La prueba de este teorema es someramente como sigue:

1) Se debe probar que tanto la sucesión de tubos de Interacción con índice n impar, como la sub-sucesión de tubos de interacción con índice n par, convergen. Para esto es fácil ver que como la sub-sucesión par es monotonica y uniformemente expansiva y además acotada siempre por el tubo de interacción inicial (calculado con los tubos de Blanco individuales) entonces, esta sucesión de tubos es convergente. Del hecho de que la sub-sucesión impar siempre decrece (o se contrae) y además está interiormente acotada por la sucesión convergente par, se sigue que esta sucesión de tubos también debe converger.

2) Resta ahora demostrar que ambas sub-sucesiones (la par e impar) convergen de hecho al mismo tubo de Interacción para cada controlador. La prueba de esta parte se hace por contradicción. Para esto se supone que ambas sub-sucesiones generadas por el algoritmo convergen a tubos diferentes, es decir, que el resultado de la aplicación del "algoritmo fuera de línea" arroja para cada controlador dos sub-sucesiones de tubos de interacción que convergen a tubos diferentes. A partir de esta hipótesis se demuestra facilmente que dichos tubos-límite son por así decirlo puntos "fijos" en el espacio de tubos para la aplicación engendrada por el algoritmo de coordinación. Esta aplicación es la que relaciona el tubo $\{E_{i,n+1}^k\}$ con $\{E_{i,n}^k\}$ a través de L_1 y de las matrices de interacción. Dicha aplicación es continua en el espacio de tubos e involucra operaciones lineales (sumas vectoriales, diferencias de Pontryaguín, imágenes directas e inversas de conjuntos acc). Se sigue entonces que dicha aplicación no puede tener un número infinito de puntos fijos en el espacio de los tubos. Es fácil ver que la contradicción surge del hecho de que si las sub-sucesiones convergen a tubos diferentes entonces un tubo intermedio entre estos que tenga fronteras comunes con ellos también debe ser "fijo". Es fácil entonces construir un número infinito de tubos fijos para la aplicación generada por el algoritmo.

3) Una vez probada la convergencia del algoritmo y en virtud de la propiedad de que el tubo-límite es fijo con respecto a la acción dinámica del algoritmo se sigue que la incertidumbre asociada con la interacción representada en este tubo límite no puede mejorarse más. Queda entonces demostrado igualmente que el principio de balance de la interacción a que alude el teorema se consigue con la aplicación repetida del algoritmo de coordinación expuesto.

Nota El algoritmo de coordinación precedente converge siempre que los Tubos de Blanco individuales iniciales junto con los correspondientes Tubos de Interacción produzcan Tubos Reducidos Individuales no vacíos. Cuando por el contrario se obtengan tubos vacíos en una de las etapas del algoritmo entonces el problema no es coordinable para los tubos de Blanco Individuales dados. Previamente a la aplicación del algoritmo de coordinación se debe llevar a cabo un proceso de búsqueda de Tubos Individuales de Blanco, compatibles con el Tubo de Blanco Global, que produzcan Tubos Reducidos no vacíos. Sira⁶ lleva a cabo un análisis extenso de las diferentes alternativas y formas como tal síntesis de Blancos Individuales se puede llevar a cabo fuera de línea.

IV. CONCLUSIONES

La utilización de la técnica de modelaje de la incertidumbre a través de conjuntos convexos, acotados y cerrados representa una alternativa práctica al estudio de los sistemas dinámicos y los problemas asociados con su control debido al hecho de que un conocimiento intuitivo (nacido de la experiencia) de las diferentes variables que afectan el comportamiento de un sistema siempre puede ser traducido en rangos de variación de dichas cantidades lo cual siempre se puede traducir en conjuntos convexos multidimensionales. A diferencia del método probabilístico esta técnica no se basa en medidas de estadísticas de los procesos aleatorios bajo consideración. Es de hacer notar que tales medidas no son siempre posibles sobre todo en sistemas complejos con los cuales es antiproducente el conducir "experimentos".

En este trabajo hemos puesto de relieve la importancia que la técnica "Conjunto-Teórica" puede tener en el problema del control de un sistema de Gran Escala donde riga un patrón no clásico de la información. La interpretación y aplicación de los principios generales de coordinación hallan lugar dentro del problema de alcance de tubo de Blanco para un sistema complejo donde exista más de un controlador.

El algoritmo de coordinación propuesto en este trabajo puede ser considerado como un proceso iterativo encaminado a la reducción de la incertidumbre inicial de que se provee a cada controlador en la forma de un estimado "conjunto-teórico" de las trayectorias de interacción.

El modelo de la incertidumbre de interacción, en la forma de un tubo, es constantemente alterado a cada nueva etapa del algoritmo. En este sentido, el mecanismo de base inherente en el algoritmo es el "mecanismo de coordinación del modelo" discutido por Mesarovic⁴. El algoritmo propuesto proporciona a cada controlador un Tubo de Interacción que puede ser considerado como el mejor de los estimados, fuera de línea, de la influencia que un subsistema pueda tener sobre el otro durante el curso de la operación dinámica de los mismos. Considerando estas estimaciones, en forma de conjuntos, como incertidumbre adicional cada controlador puede actuar de manera descentralizada en la persecución del objetivo de mantener el estado de su subsistema dentro del Tubo de Blanco dado por el coordinador.

El esquema de acción propuesto anteriormente es, básicamente, un esquema de "lazo abierto" con respecto a la incertidumbre proporcionada por la interacción con todas las desventajas que tal criterio puede tener sobre la operación del sistema como un todo. Dentro de la técnica "Conjunto-Teórica" estos esquemas a lazo abierto, por lo general redundan en un aumento del conservatismo inherente y característico de todo método perteneciente a la filosofía "Mini-Max" de diseño. Las ventajas se resumen básicamente a las que pueda tener la acción independiente de los controladores en la operación "en línea" del sistema, unidas por ende a una reducción considerable de costos de comunicación. Sin embargo aún queda abierta la posibilidad de sintetizar en forma descentralizada, políticas de control a "lazo cerrado" con respecto a la incertidumbre de planta y la asociada con los estados iniciales.

Debemos enfatizar que nuestro objetivo no ha sido el de llevar a cabo una descomposición del problema de Alcance de Tubo del Blanco por medio del algoritmo propuesto. Aún cuando el coordinador tiene que llevar a cabo algunos cálculos y comunicar sus resultados a los controladores locales, sus esfuerzos computacionales pueden ser considerados como mínimos. De hecho una vez que los controladores locales han sido provistos con Tubos de Blanco Individuales, las tareas del coordinador pueden ser adjudicadas a los controladores locales. El coordinador pasa así a jugar el papel de un canal de comunicación.

Las extensiones a que un trabajo de este tipo puede dar lugar son variadas y cuyo carácter reviste cierta importancia debido a las múltiples aplicaciones que la técnica conjunto-teórica ha aportado en el pasado dentro del marco centralizado en el control de los sistemas dinámicos. Véase por ejemplo Glover⁷, Glover y Schweppe⁸, Hyilicza, Lee y Schweppe⁹, Y. Khaled¹⁰ etc. Una de las áreas que requiere urgente atención dentro de esta técnica, en general, es la relativa a estudios computacionales así como una ampliación del rango de aplicaciones por cuanto se han visto un tanto restringidas al área de los sistemas eléctricos de potencia. Recientemente ha habido un esfuerzo a aplicar esta filosofía a sistemas Sociales¹¹ y se encuentra en progreso un trabajo de aplicación a los sistemas económicos¹².

En particular, es posible una extensión del trabajo aquí realizado al problema de alcance del Tubo de Blanco para un sistema de Gran Escala utilizando el "principio de predicción de la interacción" así como también el principio de coordinación mediante el "reparto de cargas" desarrollados por Mesarovic. El problema de Agregación desde el punto de vista "conjunto-teórico" sigue siendo un problema abierto en esta área.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Simon, H., " The Architecture of Complexity " Proceedings of the American Philosophical Society, Vol. 106, Diciembre 1962.
- (2) Schweppe F., "Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-13 No. 1 , Febrero 1968
- (3) Witsenhausen, H., "Minimax Controls of Uncertain Systems" MIT Electronics Systems Laboratory, Cambridge, MASS., Reporte # ESL-R-269 ,Abril de 1966 (Reporte NASA. N66-33441)
- (4) Mesarovic, Macko y Takahara., " Theory of Hierarchical, Multilevel, Systems " Mathematics in Science and Engineering, Vol 68, Academic Press, New York 1970.
- (5) Sira, H., " Set-Theoretic Control of Large Scale Uncertain Systems" MIT Electronics Systems Laboratory, Cambridge MASS., Reporte # ESL-R-757 , Junio 1977.
- (6) Sira, H., " Set-Theoretic Control of Large Scale Uncertain Systems" Tesis de Doctorado ante el " Massachusetts Institute of Tecnology" Mayo de 1977. Cambridge, Mass. EEUU.
- (7) Glover, D., "Control of Systems with Unknown but Bounded Disturbances- Application to Electric Power Systems" Tesis de Doctorado ante el " Massachusetts Institute of Technology", Enero de 1971. Cambridge, Mass. EEUU.
- (8) Glover y Schweppe., "Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances" IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-16, No.5 Octubre de 1971.
- (9) Hnyilicza E, Lee Y, y Schweppe, F., "Steady State Security Regions: A Set Theoretic Approach" 9th Power Industry Computer Applications Conference, New Orleans, LA, Junio de 1975.
- (10) Khaled, Y., "Average Frequency Trajectory Control: Normal Mode," Tesis de Maestria en Ingenieria Electrica ante el " Massachusetts Institute of Technology" Noviembre 1976. Cambridge, Mass. EEUU.
- (11) Wong, C., " Identifying the Region of Policy Robustness in Parameter Space" Tesis de Doctorado ante " Northwestern University " Noviembre 1977. Boston, Mass. EEUU.
- (12) Alvarez C., " Control Conjunto-Teórico de un Sistema Macroeconómico" Tesis de Ingeniería de Sistemas ante la " Universidad de Los Andes" (aun en progreso), Mérida, Venezuela.

APENDICE

En este apéndice daremos una descripción somera del problema de Alcance de Tubo del Blanco para un sistema que cuenta con un patrón de información clásico, es decir para una situación completamente centralizada. Este apéndice sirve de base a la exposición hecha en este trabajo sobre el problema de alcance del Tubo de Blanco para un sistema con múltiples controladores.

Supongase que tenemos un sistema lineal, variante en el tiempo de dimensión finita descrito por:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + G(k)h(k) \quad (A.1)$$

con

$$x(0) \in X(0) \quad \text{acotado, cerrado y convexo en } R^n$$

$$h(k) \in W^k \quad \text{acotado, cerrado y convexo en } R^q$$

$$u(k) \in U^k \quad \text{acotado, cerrado y convexo en } R^m$$

para $k = 0, 1, \dots, N$, donde $A(k)$, $B(k)$ y $G(k)$ son matrices reales de dimensiones apropiadas. El controlador realiza medidas de la forma:

$$z(k) = H(k)x(k) + y(k) \quad (A.2)$$

donde $y(k) \in V^k$ un conjunto acotado, cerrado y convexo en R^p y $H(k)$ es una matriz real de p filas y n columnas.

El problema de alcance del Tubo de Blanco requiere sintetizar una sucesión de controles admisibles $u(k) \in U^k$ $k=1, 2, \dots, N-1$ que tenga por objeto el mantener dentro de una sucesión de conjuntos acotados, cerrados y convexos $\{X^k\}$ el estado $x(k)$ del sistema (A.1) durante todo el periodo de planificación N y a pesar de todas las incertidumbres que afectan el comportamiento de la planta y que corrompen las mediciones que se efectúan sobre el estado del sistema.

La filosofía básica con la cual se ataca el problema propuesto consiste en efectuar primeramente una serie de cálculos que permitan ver si el problema tiene o no solución factible. Para ello se procede con una lógica derivada de la programación dinámica y la cual comprende el cálculo de los siguientes conjuntos:

$$X_M^N = \left\{ y \in R^n : y + G(N-1)h(N-1) \in X^N \text{ para todo } h(N-1) \in W^{N-1} \right\} \quad (A.3)$$

Este conjunto representa, evidentemente el conjunto de estados en el instan-

te N al cual debe pertenecer cualquier elemento de R^n que no sea afectado por las perturbaciones $w(N-1)$ con respecto a la meta de pertenecer con probabilidad 1 al conjunto de Blanco en la etapa final X^N . A este conjunto se le denomina Conjunto de Blanco Modificado en el instante N . En forma breve este conjunto se expresa, utilizando la diferencia de Pontryaguin, como:

$$X_M^N = X^N \ominus G(N-1)W^{N-1} \quad (A.4)$$

Debemos ahora buscar el conjunto de estados en el instante $N-1$ que pueden ser transferidos mediante acción apropiada (permisible) de control al conjunto X_M^N . A este conjunto le daremos el nombre de Conjunto de Accesibilidad en el instante $N-1$ y se define como:

$$X_A^{N-1} = \{x \in R^n: \exists u \in U^{N-1} \text{ tal que } A(N-1)x + B(N-1)u \in X_M^N\} \quad (A.5)$$

Utilizando la definición de suma vectorial de dos conjuntos esta expresión se puede escribir como:

$$X_A^{N-1} = A^{-1}(N-1) [X_M^N \oplus -B(N-1)U^{N-1}] \quad (A.6)$$

donde A^{-1} significa imagen inversa bajo la transformación lineal A y que como es sabido no requiere en forma alguna necesariamente la existencia del inverso de la matriz A para su cálculo (de hecho mediante una descripción por soportes de los conjuntos poliédricos involucrados únicamente se requiere la transpuesta de A para tal cálculo, otro tanto ocurre en el caso de elipsoides).

De todos los elementos pertenecientes al Conjunto de Accesibilidad interesan solamente aquellos que también pertenecen al Conjunto de Blanco en el instante $N-1$, X^{N-1} . Definimos entonces:

$$X_R^{N-1} = X^{N-1} \cap X_A^{N-1} \quad (A.7)$$

Los elementos pertenecientes a este conjunto, y al cual le daremos el nombre de Conjunto de Blanco Reducido en el instante $N-1$, son aquellos elementos que además de pertenecer al Conjunto de Blanco X^{N-1} también pueden ser transferidos a una región del espacio de estado en el siguiente instante desde donde no importa que perturbación de planta se presente, siempre cumplirá el requerimiento (el estado $x(N)$ resultante de tal transferencia) de pertenecer a X^N .

Por tanto es inmediato ver que el problema del alcance del Tubo de Blanco constituido por los conjuntos $X^1, X^2, \dots, X^{N-1}, X^N$ es completamente equivalente al problema del alcance del Tubo de Blanco $X^1, X^2, \dots, X^{N-2}, X_R^{N-1}$ por cuanto si se logra llegar a X_R^{N-1} tendremos garantizado, por definición, el alcance del conjunto de Blanco X^N . El nuevo problema puede ser analizado en la misma forma y llegaríamos a la conclusión que este nuevo problema es equivalente al de alcanzar el Tubo de Blanco constituido por los conjuntos $X^1, X^2, \dots, X^{N-3}, X_R^{N-2}$. Procediendo entonces de esta manera obtenemos todo un proceso recursivo de marcha atrás que nos permitirá definir un Tubo de Blanco Reducido constituido por todos los Conjuntos de Blanco Reducidos y que se calculan como lo indicamos a continuación:

$$X_M^k = X_R^k \ominus G(k-1)W^{k-1} \quad (A.8)$$

$$X_A^{k-1} = A^{-1}(k-1) \left((X_R^k \ominus G(k-1)W^{k-1}) \oplus -B(k-1)U^{k-1} \right) \quad (A.9)$$

$$X_R^{k-1} = X^{k-1} \cap X_A^{k-1} \quad (A.10)$$

La condición inicial para este proceso recursivo es simplemente:

$$X_R^N = X^N \quad (A.11)$$

Proposición A.1

El Tubo de Blanco $\{X^k\}$ es "alcanzable" si y solamente si $X(0) \subset X_R^0$. La prueba de esta proposición es inmediata de la construcción anterior.

Existen varias formas de sintetizar sucesiones de control que permiten el alcance del Tubo de Blanco. Algunas de las formas propuestas en la literatura son del tipo "control a lazo cerrado" y particularmente son fáciles de calcular cuando los conjuntos involucrados son elipsoides.

Otra alternativa consiste en calcular conjuntos en el espacio de los controles desde donde la escogencia arbitraria de vectores de control garantiza la permanencia de la sucesión vectorial de estados resultantes dentro del Tubo de Blanco. Para un estudio de estas alternativas el lector es referido a Sira.⁶