

LAS ECUACIONES DE LIPUNOV Y EL ANALISIS DE LOS SISTEMAS DE GRAN ESCALA

Hebertt Sira Ramirez

Resumen. Este trabajo presenta una exposición detallada de la significación de las ecuaciones algebraicas de Liapunov en el análisis y el diseño de los sistemas lineales de Gran Escala. Se estudian las interpretaciones que dichas ecuaciones arrojan sobre los tópicos siguientes: 1) Interacción entre sub-sistemas en base al análisis de covarianzas cruzadas entre estados vectoriales de diferentes subsistemas. 2) Evaluación de las leyes descentralizadas de control en términos de evaluación del índice de funcionamiento compuesto del sistema global y 3) Interpretación geométrica (en términos de elipsoides multidimensionales) de la asimilación de incertidumbres por parte del sistema.

La exposición continúa con un algoritmo para la determinación descentralizada de la solución de las ecuaciones algebraicas de Liapunov asociadas con un sistema lineal de Gran Escala. Se especifican condiciones de convergencia del algoritmo y se presentan algunos ejemplos específicos de aplicación al área de los sistemas de potencia eléctrica. Estos ejemplos involucran resultados numéricos concretos.

El trabajo finaliza con algunas conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones en el área.

H. Sira Ramirez está con el Departamento de Sistemas de Control. Escuela de Ingeniería de Sistemas. Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela.

INTRODUCCION

La determinación de la estabilidad asintótica del origen como punto de equilibrio del sistema :

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = A \underline{x}(t) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

es posible mediante la aplicación directa del siguiente Teorema:

Teorema

El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema (1) si y solamente si existen matrices simétricas y positivas P, Q tales que:

$$P A + A' P = - Q \quad (2)$$

Además, si existe tal par (P,Q) entonces para cada matriz positiva y simétrica Q existe una única matriz simétrica P necesariamente positiva que es solución de (2).

La demostración de este teorema es ampliamente conocida y constituye un resultado clásico del estudio del equilibrio de la estabilidad en sistemas dinámicos (Véase: Bellman [2] , Kalman [3] , Lefschetz [5] y Liapunov [6]).

La ecuación (2) recibe el nombre de ecuación de Liapunov debido a que la forma cuadrática $\underline{x}' P \underline{x}$ es una función de Liapunov.

Dentro de la teoría del control, en los últimos años se ha manifestado un interés creciente en los llamados "sistemas de Gran Escala" . Prueba de ello son los artículos de recopilación bibliográfica como los de Athans, Sandell y Varaiya [8] , libros como el de Ho y Mitter [4] , Michel [7] y otros [13] ; no sin dejar de contar el número especial que sobre este aspecto fué editado recientemente por la IEEE Transactions on Automatic Control [10] .

El motivo del presente trabajo es el de poner de relieve la ingerencia que tienen las ecuaciones algebraicas de Liapunov en el análisis de los sistemas de Gran Escala, no solamente a nivel de estudios de estabilidad sino además en problemas de determinación de la interrelación entre sub-sistemas, evaluación de las leyes descentralizadas de control y asimilación de incertidumbres del tipo conjunto-teóricas por sistemas dinámicos lineales. Nuestro enfoque constituye una extensión sencilla de los resultados de Varaiya para el caso de sistemas multidimensionales [8] dando además una faceta nueva en lo

relativo a las incertidumbres conjunto-teóricas (desconocido pero acotado). Al mismo tiempo, en nuestro trabajo introduciremos un algoritmo que permite la determinación descentralizada de una ecuación de Liapunov para un sistema constituido por 2 sub-sistemas. Apuntamos al respecto que los resultados pueden extenderse fácilmente a sistemas compuestos por un número arbitrario de sub-sistemas.

Sandell^[9] ha apuntado las diferencias conceptuales que existen entre la descomposición y la descentralización en el control óptimo de los sistemas dinámicos de Gran Escala deterministas. Este artículo enfoca en el espíritu de Sandell^[9], y como una extensión de las ideas de Bailey y Laub^[11] el problema de la determinación descentralizada de la solución de una ecuación de Liapunov asociada a un sistema lineal de Gran Escala.

La sección II presenta el algoritmo de determinación descentralizada de una ecuación de Liapunov asociada a un sistema lineal constituido por dos sub-sistemas acoplados cuyos agentes de nivel inferior desean estudiar la solución de una ecuación particular del tipo de Liapunov que surge de alguno de los siguientes aspectos 1) determinación de las interrelaciones entre los subsistemas, 2) Determinación de la valía de las leyes descentralizadas de control que agentes locales pudiesen prescribir mediante leyes de lazo cerrado lineales, 3) Estudio de la asimilación conjunto-teórica de las incertidumbres de planta que afectan el sistema. La sección II Contiene un ejemplo numérico de la determinación de la estabilidad de un modelo eléctrico sencillo constituido por dos partes diferenciadas. También se esbozan en esta sección algunos resultados numéricos relativos al comportamiento del algoritmo en términos del grado de acoplamiento de los sub-sistemas. La sección III presenta algunos tópicos concernientes a la importancia de las ecuaciones de Liapunov en áreas distintas al de la determinación de la estabilidad de un sistema de Gran Escala. Estas áreas son las 3 que se estipulan en este párrafo. La sección IV presenta las conclusiones y algunas sugerencias para futuras investigaciones en este área.

II DESCOMPOSICION DE LA ECUACION DE LIAPUNOV

Considérese dos sistemas acoplados descritos por las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $\underline{x}_1 \in R^{n_1}$ y $\underline{x}_2 \in R^{n_2}$ y las matrices A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} son matrices que poseen las dimensiones apropiadas.

Las ecuaciones de Liapunov (2) pueden ser escritas entonces como:

$$P_{11}A_{11} + P_{12}A_{21} + A_{11}'P_{11} + A_{21}'P_{12} = -Q_{11} \quad (4)$$

$$P_{11}A_{12} + P_{12}A_{22} + A_{11}'P_{12} + A_{21}'P_{22} = -Q_{12} \quad (5)$$

$$P_{12}'A_{12} + P_{22}A_{22} + A_{12}'P_{12} + A_{22}'P_{22} = -Q_{22} \quad (6)$$

La observación básica consiste en que las ecuaciones anteriores se desacoplan cuando A_{12} y A_{21} son, al igual que Q_{12} , cero. Esto corresponde en un todo (en lo que respecta a Q_{12}) con la idea de tener dos sub-sistemas desacoplados cada uno de ellos al cargo de un agente de estudio que debe resolver en forma descentralizada una ecuación de Liapunov donde él prescribe la matriz Q_{ii} ($i = 1, 2$). Por lo tanto, siguiendo las ideas de Bailey y Laub^[1], si las matrices A_{12} y A_{21} son "pequeñas", la siguiente descomposición es "natural" de acuerdo con la estructura de las ecuaciones (4)-(6) (Véase Fig. 1.)

Niveles inferiores

Los agentes de estudio de los sub-sistemas resuelven en forma descentralizada las ecuaciones de Liapunov:

$$P_{11}^k A_{11} + A_{11}' P_{11}^k = -Q_1^k \quad (7)$$

$$P_{22}^k A_{22} + A_{22}' P_{22}^k = -Q_2^k \quad (8)$$

Coordinador

El coordinador resuelve la siguiente ecuación algebraica

$$A_{11} P_{12}^{k+1} + P_{12}^{k+1} A_{22}' + A_{12} P_{22}^k + P_{11}^k A_{21}' = 0 \quad (9)$$

donde:

$$Q_1^k = Q_{11} + A_{12} P_{12}^k + P_{12}^k A_{12}' \quad (10)$$

y

$$Q_2^k = Q_{22} + A_{21} P_{12}^k + P_{12}^k A_{21}' \quad (11)$$

Nótese que como punto posible de partida ó inicialización del algoritmo podemos tomar:

$$P_{12}^0 = 0 \quad (12)$$

La descomposición precedente está en un todo de acuerdo con el espíritu de la Teoría de Descomposición Jerárquica existente puesto que el problema global se subdivide en problemas que de una forma iterativa se encaminan hacia la solución del problema global (Véase Varaiya ^[11]).

En los métodos utilizados por otros autores ^[12] es más frecuente la descomposición directa del problema de determinación de la estabilidad en lugar de una descomposición directa de las condiciones necesarias y suficientes del problema tal como lo hemos hecho aquí y tal como lo hace Sandell ^[9], Bailey y Laub ^[1] en relación a problemas de control óptimo el primero y de estimación los segundos.

Se puede demostrar que el algoritmo anterior siempre converge en la medida en que 1) P^0 esté lo suficientemente cerca a P y 2) A_{12} y A_{21} sean lo suficientemente pequeñas.

El algoritmo propuesto presenta ventajas en cuanto a que la determinación de la solución de la ecuación de Liapunov del sistema interconectado se obtiene en base a la solución de sub-problemas de resolución de ecuaciones de Liapunov de orden reducido y adscritas a los sub-sistemas que intergran el sistema mayor. Al mismo tiempo surge en forma natural la presencia de un coordinador que resuelve, en base a los datos suministrados por los niveles inferiores, un problema que es también de orden reducido. Este problema involucra la resolución de ecuaciones algebraicas matriciales. En las páginas siguientes estudiamos un sencillo ejemplo perteneciente al campo de la Ingeniería Eléctrica que ilustra la técnica de descomposición de las Ecuaciones de Liapunov hasta ahora expuesta.

Ejemplo:

Considérese la red RC de la figura 2, la cual representa un modelo de ca-

ble para alta tensión. El modelo en variables de estado para el sistema resulta ser (después de introducir algunos valores numéricos correspondientes a un cable para 220Kv/450mm) :

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t) \quad ; \quad \underline{x} \in R^6 \quad (13)$$

donde el vector de estado está constituido por los voltajes de nodo indicados en la figura; es decir $\underline{x}' = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ y:

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & -2.4 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & -2.4 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & -1.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & -2.4 & 1.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.8 & -4.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Estudiaremos la estabilidad del sistema anterior cuando $\underline{u} = 0$, considerando que el sistema eléctrico consta de dos partes acopladas bien diferenciadas. Una de las partes o sub-sistema está caracterizado por las variables $\underline{x}'_1 = (v_1, v_2, v_3)$ y la segunda por $\underline{x}'_2 = (v_4, v_5, v_6)$. La descomposición de las ecuaciones de Liapunov determina en forma descentralizada la solución P de la ecuación (1), la cual resultó ser

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0.73921 & 0.76102 & 0.65091 \\ 0.76102 & 1.29940 & 1.16640 \\ 0.65091 & 1.16640 & 1.13590 \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0.64626 & 0.39472 & 0.26401 \\ 1.25090 & 0.80261 & 0.53147 \\ 1.54070 & 1.05360 & 0.65978 \end{bmatrix}$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 2.54890 & 2.40830 & 0.85619 \\ 2.40830 & 2.67390 & 0.94498 \\ 0.85619 & 0.94498 & 0.41916 \end{bmatrix}$$

al cabo de 23 iteraciones entre los niveles inferiores y el coordinador. Por

otra parte, la solución centralizada de la misma ecuación de Liapunov coincide con la solución anterior dentro de un error de norma de 10^{-5} . Por lo tanto podemos concluir en base a este sencillo ejemplo que el algoritmo converge a la solución centralizada en un número de iteraciones que dependerá del grado de acoplamiento de los sub-sistemas. Con el fin de estudiar la dependencia de el grado de acoplamiento de los sub-sistemas en el proceso de convergencia del algoritmo descentralizado procedimos a implementar éste último en el sistema eléctrico bajo estudio parametrizando el acoplamiento entre las dos partes de la red por medio de un factor multiplicativo ϵ adscrito a las matrices de interacción en la ecuación (14).

El algoritmo descentralizado fué implementado para varios valores de ϵ . Las curvas de la figura 3 muestran los diferentes gráficos de la norma de P en función del número de iteraciones para diferentes valores de la constante de acoplamiento entre los sub-sistemas.

De los gráficos se desprende la influencia del acoplamiento entre los sub-sistemas en el proceso de convergencia del algoritmo propuesto para la resolución descentralizada de la ecuación de Liapunov. La convergencia resulta más lenta a medida que crece la interacción entre los sub-sistemas. Todos los experimentos graficados se refieren a un criterio de convergencia que exige una diferencia mínima de 10^{-5} en norma para declarar el proceso terminado.

Es posible determinar en base a las fórmulas (7), (8), (9), (10) y (11) el valor, en general, de la constante de acoplamiento ϵ a partir del cual el proceso descentralizado no converge. Es obvio que este valor es un estimado del valor de ϵ que convierte al proceso iterativo en una aplicación no-contractiva. Una primera aproximación a este valor está dado por:

$$\epsilon^2 \leq \frac{\|A_{11}\| \|A_{22}\|}{\|A_{12}\| \|A_{21}\|}$$

III OTRAS AREAS DE INGERENCIA DE LAS ECUACIONES DE LIAPUNOV

1) Interrelaciones entre los sub-sistemas

Considérese el siguiente sistema compuesto :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde $\underline{x}_1 \in R^{n_1}$ y $\underline{x}_2 \in R^{n_2}$. $\underline{w}_1$ y $\underline{w}_2$ son procesos aleatorios no correlacionados, cada uno con una distribución gaussiana en los espacios R^{r_1} y R^{r_2} respectivamente. Dichos procesos están completamente caracterizados por las estadísticas:

$$E\{\underline{w}_k\} = \underline{0} \quad k=1,2 \quad ; \quad E\{\underline{w}_k(t)\underline{w}_j'(s)\} = \delta_{kj}(t-s)Q_{kj}(s) \quad ; \quad k,j = 1,2$$

donde E es el operador de esperanza, δ_{kj} es una delta de Kronecker generalizada y Q_{kj} es una matriz de dimensiones apropiadas, positiva y simétrica cuando los subíndices coinciden. Cada sub-sistema se encuentra entonces excitado por un proceso de ruido independiente. Sea $\underline{x}' = (\underline{x}_1', \underline{x}_2')$ y considerémos la matriz de autocorrelación $P(t) = E\{\underline{x}(t)\underline{x}'(t)\}$ entonces, definiendo:

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad ; \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad Q \triangleq \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (15a)$$

entonces es fácil demostrar que $P(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt} P(t) = A P(t) + P(t) A' + BQB' \quad (16)$$

Se sabe que si A es estable, entonces el $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ existe y está representado por una matriz $\bar{P} > 0$ que cumple:

$$A \bar{P} + \bar{P} A' = - BQB' \quad (17)$$

Particionando $\bar{P}$ acorde con la estructura (15) es fácil ver entonces que

- 1) $\bar{P}_{11}$ y $\bar{P}_{22}$ representan la cantidad de ruido que se transmite, respectivamente a los sub-sistemas 1 y 2.
- 2) $\bar{P}_{12}$ representa, entonces, un índice de acoplamiento entre los "estados" $\underline{x}_1$ y $\underline{x}_2$ ($\bar{P}_{21}$ es simplemente el transpuesto de $\bar{P}_{12}$)

Estos resultados representan una extensión a sistemas de gran escala de

resultados previamente obtenidos por Varaiya^[8]. Cualquier función escalar conveniente que se defina sobre la matriz $\bar{P}_{12}$ se convierte en un índice del acoplamiento que existe entre los estados de los sub-sistemas. No hay que perder de vista que $\bar{P}_{12}$ representa la matriz de covarianza cruzada entre los procesos $\underline{x}_1$ y $\underline{x}_2$ en régimen permanente y por ende, el acoplamiento de que hacemos referencia es un acoplamiento en el sentido estocástico de correlación entre dos variables vectoriales aleatorias. Un buen índice de acoplamiento definido en términos de las matrices $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{22}$ y $\bar{P}_{12}$ puede resultar de una particularización de los índices de acoplamiento introducidos por Milne. Para esto supóngase que los autovalores de $\bar{P}_{11}$ son $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n_1}$ y que los de $\bar{P}_{22}$ son $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_2}$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que los autovalores de $\bar{P}_{11}$ son mayores que los de $\bar{P}_{22}$. Si se define $r = \max_i |\lambda_i|$ y $R = \min_i |\mu_i|$ entonces diremos que los sub-sistemas 1 y 2 están debilmente acoplados si se cumple que: $r/R \ll 1$ y $n_1 \delta_{12}^2 / R^2 \ll 1$ donde δ_{12} es el máximo de los valores absolutos de los elementos de $\bar{P}_{12}$.

2) Evaluación de la eficacia de las leyes de control descentralizadas

Considérese el sistema de Gran Escala compuesto por dos sub-sistemas descritos mediante:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{bmatrix}$$

Supóngase que se desea controlar descentralizadamente el sistema anterior de acuerdo con el siguiente índice de funcionamiento:

$$J = \int_0^{\infty} \{ \underline{x}_1' Q_{11} \underline{x}_1 + \underline{x}_2' Q_{22} \underline{x}_2 + \underline{u}_1' R_1 \underline{u}_1 + \underline{u}_2' R_2 \underline{u}_2 \} dt$$

Se conoce desde hace bastante tiempo el hecho de que en forma descentralizada la aplicación de leyes de control lineales no conduce al óptimo valor del índice de funcionamiento. Sin embargo, es posible mediante el uso de las ecuaciones de Liapunov, el conocer la efectividad de una ley de control descentralizada con respecto a otra ley diferente que sea, al igual que la primera,

de índole lineal. Así entonces, supóngase que el controlador 1 y el controlador 2 prescriben las siguientes leyes de control:

$$\underline{u}_1 = -F_1 \underline{x}_1 \quad \text{y} \quad \underline{u}_2 = -F_2 \underline{x}_2 \quad (20)$$

Sean A , B y Q como en (15a) y sean $F = \text{diag}(F_1, F_2)$ y $R = \text{diag}(R_1, R_2)$ entonces, el índice de funcionamiento toma el valor:

$$\int_0^{\infty} \underline{x}' (Q + F' R F) \underline{x} \, dt = \underline{x}_0' P \underline{x}_0 \quad (21)$$

donde $\underline{x}' = (\underline{x}_1', \underline{x}_2')$ y $\underline{x}_0$ es el estado inicial conjunto de los sub-sistemas. Entonces P , sirve para evaluar el costo incurrido en la aplicación de las leyes de control descentralizado. P satisface:

$$P A' + A P = -(Q + F' R F) \quad (22)$$

y como antes puede ser resuelta en forma descentralizada de acuerdo con el algoritmo propuesto en la sección II. La ingerencia de las ecuaciones de Liapunov en tópicos enteramente diferentes a los de estabilidad clásica quedan expuestos una vez mas. Nótese que el segundo miembro de la ecuación (22) sigue siendo una matriz diagonal a bloques.

La evaluación de la efectividad de una ley de control particular, que en forma descentralizada hayan escogido los controladores locales se hace a partir de la siguiente propiedad, que en cierta forma es de por sí la definición de una matriz positiva: Sean P_1 y P_2 las soluciones de (22) para un conjunto de dos leyes diferentes de control del tipo (20). Diremos entonces que el primer conjunto es más efectivo que el segundo siempre que P_1 sea más positiva que P_2 es decir si $P_1 - P_2 > 0$. En caso en que esta diferencia no sea positiva definida ó negativa definida, diremos que las leyes de control no son comparables. Nótese que la posibilidad $P_1 = P_2$ se sucede únicamente cuando los conjuntos de leyes de control que se pretenden evaluar son idénticos. Algunos estudios colaterales de sensibilidad del costo con respecto a valores de Q y R así como de parámetros en F pueden ser fácilmente llevados a cabo sobre la base de la ecuación (22).

3) Deformación de incertidumbres conjunto-teóricas en sistemas dinámicos

Aunque los resultados a ser expuestos en este aparte son potestativos de sistemas generales multidimensionales, los resultados pueden ser fácilmente extendidos a sistemas de Gran Escala en la forma como lo hemos venido haciendo en secciones anteriores. Estudiaremos por tanto el problema sin adscribirlo específicamente a un sistema de gran escala, en el entendido de que el lector podrá fácilmente hacer las interpretaciones inherentes de estos resultados para el caso de un sistema constituido por la interconexión de dos sistemas dinámicos lineales controlados por agentes distintos.

Considérese el sistema lineal :

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{w}(t) \quad \underline{x}(t_0) = \underline{0} \quad (23)$$

Sea $\underline{w}(t)$ un proceso aleatorio cuyos valores son completamente desconocidos y sin estructura estadística conocida excepto por el hecho de que con certidumbre, estos valores se encuentran dentro de la región del espacio euclidiano correspondiente definida mediante:

$$W = \{ \underline{w} \in R^q : \underline{w}' Q^{-1} \underline{w} \leq 1 \} \quad (24)$$

A partir de una sencilla aplicación del Principio de Pontryaguin, se logra demostrar que en cada instante t , el estado del sistema (23) se encuentra acotado por un conjunto que puede ser aproximado por un elipsoide de la forma :

$$X = \{ \underline{x} \in R^n : \underline{x}' P^{-1}(t) \underline{x} \leq 1 \}$$

donde la matriz $P(t)$ es positiva definida para todo t , y está dada por la solución única de la ecuación diferencial matricial :

$$\frac{d}{dt} P(t) = \left(A + \frac{1}{2} \beta I \right) P(t) + P(t) \left(A + \frac{1}{2} \beta I \right)' + \frac{1}{\beta} B Q B' \quad (25)$$

donde β es un parámetro de diseño que sirve para ajustar el elipsoide al conjunto de estados accesibles del sistema en cuestión.

En régimen permanente se tiene que si $(A + \frac{1}{2} \beta I)$ es estable entonces el $\lim P(t)$ cuando t tiende a infinito, existe y está representado por una matriz positiva definida P^* dada por la solución única de la ecuación de Liapunov:

$$P^* (A + \frac{1}{2} \beta I)' + (A + \frac{1}{2} \beta I) P^* = -\beta^{-1} B Q B' \quad (26)$$

La ecuación anterior nos permite por lo tanto conocer la dispersión ó la forma del elipsoide de incertidumbre que acotará al conjunto de estados accesibles del sistema dado. Al mismo tiempo, la solución de la ecuación (26) representa la deformación (en forma aproximada) que el sistema introduce al elipsoide W que acota las señales de entrada de planta al sistema. Dice en suma entonces esta ecuación la forma precisa cómo el sistema asimila las incertidumbres externas. Desde este punto de vista la ecuación (26) nos muestra las combinaciones lineales de estados que son mas susceptibles a la amplitud del control o señal externa, si por ejemplo hacemos $Q = I$ en (24). Es decir dada una distribución conjunto-teórica equidispersa (como sería el caso de una esfera de restricciones sobre $w(t)$) entonces, la matriz P^* y en particular el elipsoide $X^* = \{x \in R^n : x' P^* x \leq 1\}$ nos muestra la forma como se distribuye la incertidumbre de planta en el espacio de estado del sistema después de un periodo de tiempo muy largo.

Por el contrario, haciendo $P^* = I$, podemos hallar la forma cómo deben ser los rangos de ciertas variables de control o de entrada, ó incluso los rangos de algunas combinaciones lineales de dichas variables, para que la incertidumbre final del estado reciba una distribución uniforme en todas las direcciones.

El valor intuitivo dado por la geometría del tópicó que estamos exponiendo tiene un poder que sólo se puede medir en forma exacta al momento de ejercer funciones de diseño de un sistema y se requieran canales adecuados a las señales de entrada que redunden en el cometido de equidad en distribución de las amplitudes en el espacio de estado, en la forma en que lo proponemos.

Las ecuaciones de Liapunov permiten entonces el estudio de aspectos cua-

litativos y cuantitativos acerca de las distribuciones o asimilaciones de la incertidumbre de las señales de planta en el estado del sistema . Alternativamente, las ecuaciones de Liapunov permiten el diseño de cotas en los controles o señales de excitación externas para que exista una "equidad " en la distribución de la incertidumbre final de planta en el estado del sistema y todos los estados existan dentro de cotas comparables sinó iguales.

IV CONCLUSIONES

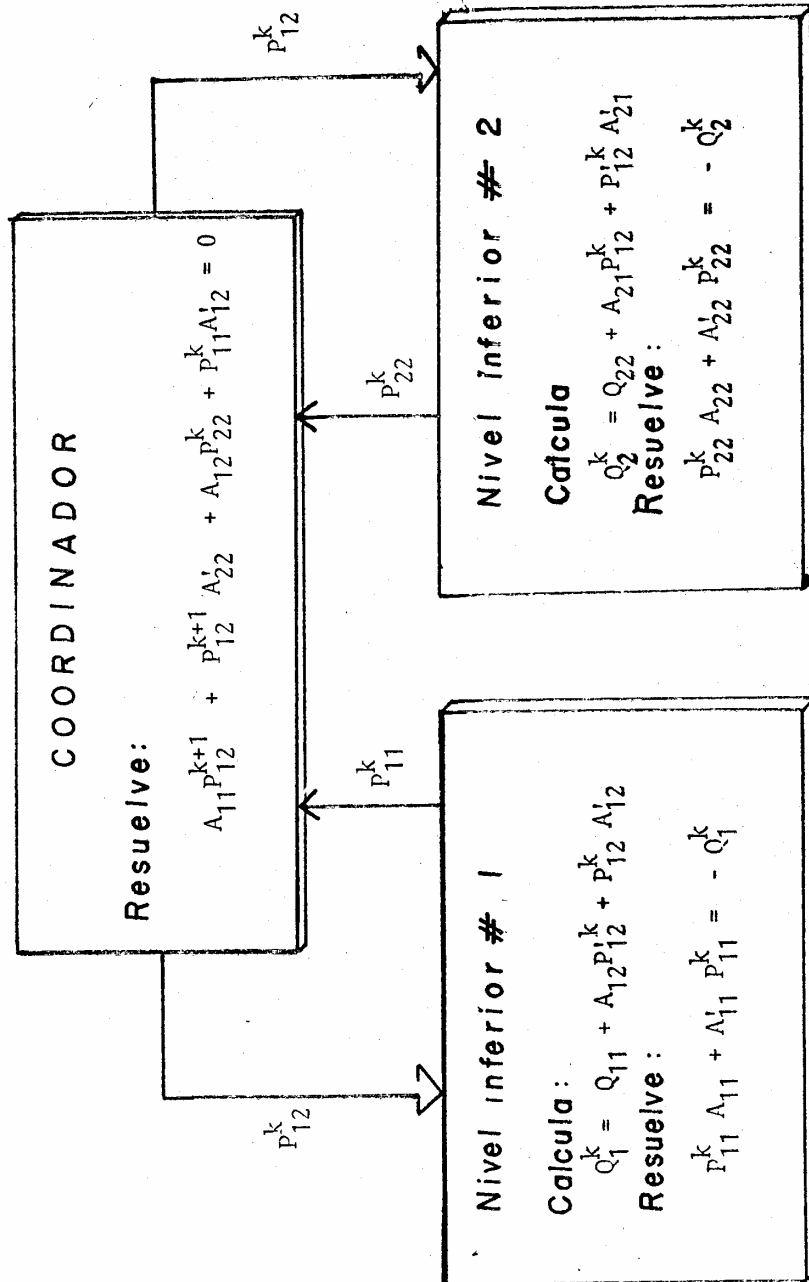
En este artículo hemos introducido primeramente una extensión de las ideas de Bayley y Laub (1) al problema de la determinación descentralizada de la solución de una ecuación de Liapunov. Este resultado, hemos demostrado en los sub-siguientes apartes, tiene amplia aplicación no sólo en la determinación del origen como punto de equilibrio estable; sinó además en otra serie de tópicos que son igualmente interesantes dentro de la teoría del control y como lo es, la determinación del grado de interrelación entre sub-sistemas de un sistema interconectado, la evaluación de leyes de control descentralizadas con respecto a un índice escalar de funcionamiento y finalmente, el estudio de la transformaciones geométricas introducidas por el sistema a cotas de incertidumbres de planta en el espacio de estado. Estas aplicaciones corresponden, al menos las dos primeras, a extensiones de ideas previamente expuestas por Varaiya en el contexto de sistemas lineales centralizados. Hemos hecho una evaluación numérica del algoritmo presentado en un ejemplo concreto de un sistema de Gran Escala. Estos resultados numéricos ponen en su exacta dimensión la valía o nó de los algoritmos propuestos por Bailey y Laub^[1] y de índole similar (todos ellos estan basados en el método de Piccard) al nuestro en problemas de naturaleza más complicada como lo son problemas de estimación óptima.

V RECONOCIMIENTOS

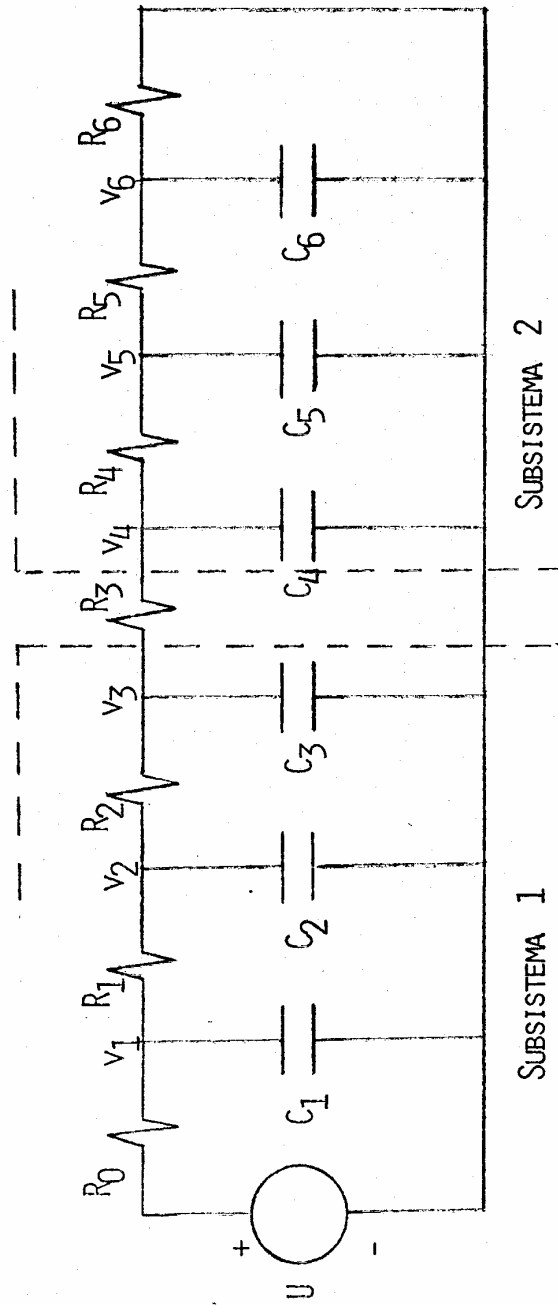
El autor de este trabajo está altamente agradecido al Br. Fernando Chiantera de la Escuela de Ingeniería de Sistemas por las largas horas dedicadas a la elaboración de programas de computación. Sin su valiosa ayuda, este trabajo no hubiese sido posible de realizar.

REFERENCIAS

- (1) Baily, F. y Laub A., " An Iterative Procedure of of Decentralized Estimation and Control," en W. Findeisen (Editor), Proceedings of the Workshop Discussion on Multilevel Control, Varsovia, Polonia, 1975
- (2) Bellman, R. " Stability Theory of Differential Equations," International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York 1953.
- (3) Kalman, R ., " Liapunov Functions for the Problem of Lurie in Automatic Controls," Proceedings of The National Academy of Sciences, Estados Unidos. Vol. 49 pp 201-205. 1963 .
- (4) Ho, Y. y Mitter,S., (Editores), Directions in Large-Scale Systems Plenum Press, New York, 1976.
- (5) Lefschetz, S., Stability of Nonlinear Control Systems, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York 1965.
- (6) Liapunov,A., Problème Général de la Stabilité du Mouvement, Annals of Mathematical Studies, No. 17. Princeton University Press, Princeton. 1949.
- (7) Michel, A., y Miller , R., Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, Academic Press, New York. 1977.
- (8) Sandell,N., Varaiya, P., y Athans, M., " A Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems," Proceedings Engineering Foundation Conference on Systems Engineering and Power: Status and Prospects, Agosto 1975, Henniker, New Hampshire. EEUU.
- (9) Sandell, N., " Decomposition Vs. Decentralization in Large Scale System Theory," Proceedings of the 1976 Conference on Decision and Control, Clearwater, Florida.
- (10) Special Issue on Large Scale Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Abril de 1978.
- (11) Varaiya, P., "Decomposition of Large Scale Systems," en System Theory, Editores: Zadeh y Polak, Inter-University Electronics Series, Vol. 8, McGraw-Hill , New York, 1969.
- (12) Wismer et alter., Optimization Methods for Large Scale Systems David Wismer (Editor), McGraw-Hill, New York 1971.
- (13) 1976 IFAC Symposium on Large Scale Systems and Applications, Udine, Italy , Junio,1976.



ESTRUCTURA JERARQUICA DEL ALGORITMO DESCENTRALIZADO PARA LA DETERMINACION DE LA ESTABILIDAD
DE UN SISTEMA DINAMICO LINEAL DE GRAN ESCALA.



MODELO DE UN CABLE PARA ALTA TENSION DE 220 Kv / 450 MW

FIG. 2

