IV CONGRESO ASOCIACION CHILENA DE CONTROL AUTOMATICO

TITULO:

ESTABILIDAD, CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD; UN ENFOQUE DESDE LA TEORIA DE CONJUNTOS

AUTOR (ES):

Hebertt J. Sira Ramirez

INSTITUCION Y PAIS:

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, Departamento de Sistemas de Control
Escuela de Ingeniería de Sistemas

RESUMEN CURRICULAR:

Hebertt Sira Ramirez nació en San Cristobal (Táchira), Venezuela el 15 de Diciembre de 1948, cursó estudios de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Los Andes en Mérida, de donde recibió el título de Ingeniero Electricista en 1970. Desde ese entonces ha trabajado como profesor de la Universidad. Cursó estudios de post-grado en el Massachussetts Institute of Technology (MIT) donde obtuvo los títulos de Master of Science in Electrical Engineering (1974), Electrical Engineer (1974) y Philosophy Doctor in Electrical Engineering (PhD) (1977).

El Dr. Sira tiene interés activo en problemas de estimación, control y Sistemas Robustos desde el punto de vista conjunto-teórico. Ha enseñado cursos de Control óptimo y Diseño de sistemas y ha contribuido a la literatura en las areas de Sistemas de Gran Escala, Evolución de incertidumbres y sistemas no-lineales. El Dr. Sira es miembro de la IEEE, IFAC, Sociedade Brasileira de Automática, Colegio de Ingenieros de Venezuela y Sigma Xi.

ACCA

1. INTRODUCCION

Los estudios de estabilidad, controlabilidad y observabilidad de sistemas dinámicos constituyen áreas plenamente maduras en las cuales existen una serie de resultados significativos de aplicación práctica y de enorme interés teórico. Dado el carácter básico de estos estudios nos eximiremos de dar una lista pormenorizada de los trabajos existentes hasta el momento en este área. Referiremos al lector,sin embargo, a los trabajos fundamentales de Kalman [1] sobre la idea de controlabilidad y observabilidad. En lo relativo a estabilidad el lector puede consultar Hahn [2].

Las condiciones hasta ahora existentes en referencia a estabilidad, observabilidad y controlabilidad están prescritas primordialmente a sistemas lineales por razones de sencillez en la estructura de dichos sistemas, aplicabilidad de los resultados y estética en la elegancia de los mismos. Todos los resultados hasta ahora presentes en la literatura se refieren a condiciones algebraicas de atributos de estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Una conjetura acerca de dichas condiciones para sistemas que no sean lineales e invariantes en el tiempo asegura que las mismas no tienen la más remota esperanza de ser algebraicas como en el caso más simple que acabamos de señalar. Es decir, los únicos sistemas que gozarían de condiciones netamente algebraicas para la caracterización de su estabilidad, controlabilidad y observabilidad serían los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Dentro de esta conjetura, y aceptando su validez *a priori* resulta entonces interesante conducir estudios de caracterización de estos atributos esenciales de los sistemas dentro de áreas no puramente algebraicas con los siguientes fines: 1) Si la caracterización algebraica es potestativa de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo, debe darse oportunidad de estudio de otras caracterizaciones que puedan ser aplicables a una clase más amplia de sistemas. 2) La investigación de otro tipo de caracterizaciones permite obtener experiencia a partir del caso más simple y averiguar las posibilidades de extensión de la técnica a sistemas más complejos. 3) Una caracterización conceptual diferente podría permitir rutas alternativas de caracter computacional en el estudio de los atributos anteriormente mencionados.

Dentro de esta enmarcación, el objetivo del presente artículo es el de dar a conocer una caracterización de tipo geométrica de los atributos de Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad (E.C.O.) adscritos a sistemas lineales. Aún cuando la factibilidad computacional de estos resultados permanece inexplorada, apuntaremos en esta exposición algunas posibilidades en esa dirección. Este artículo manejará, basicamente, las ideas y conceptos de la representación que deseamos proponer.

En la sección de desarrollo se introduce una serie de definiciones de cuya utilización obtenemos el resultado principal en forma de proposiciones. Mediante una aplicación directa del resultado principal logramos una caracterización conjunto-teórica de la E.C.y O. de sistemas lineales variantes en el tiempo. A continuación se presentan las conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones dentro de este área, en particular, insistimos allí la posibilidad de utilizar el concepto de caracterización conjunto teórica en la determinación de las regiones de estabilidad, controlabilidad y observabilidad en espacios paramétricos.

2. DESARROLLO

Empezaremos esta sección introduciendo algunas definiciones relativas a potencias tensoriales de cualquier grado, haciendo hincapié en las de segundo grado. Introduciremos también la idea de poliedro generalizado y discutiremos una clase especial de poliedros generalizados. Con el fin de establecer una conexión definitiva entre ecuaciones matriciales y ecuaciones vectoriales introduciremos un mapa lexicográfico que elimina la redundancia asociada con soluciones simétricas de ecuaciones matriciales (algebraicas o diferenciales) y al mismo tiempo relaciona en forma natural la solución vectorizada con el generador infinitesimal de un semigrupo continuo que surge de una potencia tensorial de segundo orden de la matriz de coeficientes del sistema.

Definición 1 Sea P una matriz simétrica con elementos $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$. designaremos mediante λ al mapa lexicográfico definido sobre el espacio de las matrices simétricas (sub-espacio) de n-ésimo orden y que toma valores en el espacio euclideo de $n(n+1)/2$ dimensiones, de tal forma que:

$$\lambda(P) = [\, p_{11}, \sqrt{2}\, p_{12}, \ldots, \sqrt{2}\, p_{1n}, p_{22}, \sqrt{2}\, p_{23}, \ldots, \sqrt{2}\, p_{n-1\ n}, p_{nn} \,]'$$

donde ' significa transpuesta del vector en cuestión. El mapa así definido establece una relación uno a uno y sobreyectiva entre los espacios considerados. Este mapa, evidentemente lineal, forma la base de nuestra "vectorización" de ecuaciones algebraicas y diferenciales matriciales involucradas en la determinación de las tres propiedades a que alude nuestro artículo.

Definición 2 Sea $\underline{x}$ un vector n-dimensional con componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Designaremos mediante $\underline{x}^{[p]}$ al vector $\binom{n+p-1}{p}$-dimensional de formas homogéneas de grado p en las componentes de $\underline{x}$ (los elementos de $\underline{x}^{[p]}$ son de la forma:

$$\alpha\, \Pi_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$$

donde $\sum p_i = p$; $p_i > 0$ y

$$\alpha^2 = \binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}\cdots\binom{p-p_1-p_2-\cdots-p_n}{p_n}$$

Si $\underline{y} = A\underline{x}$ entonces $\underline{y}^{[p]} = A^{[p]}\ \underline{x}^{[p]}$ define implícitamente $A^{[p]}$ a quien apropiadamente llamaremos "la potencia tensorial de grado p de A" . Designaremos mediante $A_{[p]}$ a la versión infinitesimal de $A^{[p]}$, es decir, si $\underline{x}$ satisface la ecuación diferencial $d/dt\ \underline{x}(t) = A(t)\underline{x}(t)$ entonces : $d/dt\ \underline{x}^{[p]}(t) = A_{[p]}(t)\ \underline{x}^{[p]}(t)$. Algunas propiedades interesantes de las potencias p-tensoriales son 1) $(AB)^{[p]} = A^{[p]}B^{[p]}$; 2) $(A^q)^{[p]} = (A^{[p]})^q$ siempre y cuando A^q esté definida, y 3) $(A')^{[p]} = (A^{[p]})'$. Las demostraciones de estas fórmulas pueden encontrarse en Brockett [3], Sira [4],[5].

Como caso particular , y debido al uso constante que le daremos en este trabajo, definimos ahora las potencias tensoriales de segundo orden de un vector n-dimensional. Sea $\underline{x}$ un vector de n componentes $x_1,x_2,\dots x_n$. De acuerdo con la definición anterior, el vector $\underline{x}^{[2]}$ está dado por:

$$\underline{x}^{[2]} = [x_1^2,\sqrt{2}\ x_1x_2,\sqrt{2}\ x_1x_3,\dots,\sqrt{2}\ x_1x_n,x_2^2,\sqrt{2}\ x_2x_3,\dots,x_{n-1}^2,\sqrt{2}\ x_{n-1}x_n,x_n^2]'$$

<u>Definición 3</u> Designaremos mediante $\underline{x}^{(\underline{p})}$ (nótese el caracter vectorial de p) al vector $\binom{n+p}{p}$-dimensional $(1,\underline{x}',(\underline{x}^{[2]})',(\underline{x}^{[3]})',\dots,\ (\underline{x}^{[p]})')'$. Por simple extensión de las definiciones anteriores, si $\underline{y} = A\ \underline{x}$, entonces $\underline{y}^{(\underline{p})} = A^{(\underline{p})}\ \underline{x}^{(\underline{p})}$ donde $A^{(\underline{p})}$ es una matriz bloque-diagonal de la forma $\mathrm{diag}(\ 1,A,\ A^{[2]},\dots,A^{[p]})$. Es fácil ver que si $\underline{x}(t)$ satisface la ecuación diferencial lineal $d/dt\ \underline{x}(t) = A(t)\ \underline{x}(t)$ entonces el vector $\underline{x}^{(\underline{p})}(t)$ satisface $d/dt\ \underline{x}^{(\underline{p})}(t) = A_{(\underline{p})}(t)\ \underline{x}^{(\underline{p})}(t)$ donde $A_{(\underline{p})}(t)$ es la versión infinitesimal de $A^{(\underline{p})}(t)$.

<u>Definición 4</u> Un <u>poliedro generalizado</u> (PG) es un conjunto cerrado de la forma:

$$\{\ \underline{x} \in R^n\ :\ <\underline{x}^{(\underline{p})},\ \underline{h}_i> \ \geq\ 0\ \ ;\ \ i = 1,2,\dots,M\ \}$$

donde $\underline{h}_i$ recibe el nombre de <u>vector de soporte generalizado</u>. Los poliedros (polítopos) e hiperelipsoides pasan a ser casos particulares de los PG. Un PG está entonces constituido por un número finito de restricciones lineales sobre una familia de potencias tensoriales en las coordenadas del espacio euclideo donde se modela tal cuerpo geométrico. Para algunas aplicaciones de la idea del PG a problemas de evolución de incertidumbres y de modelaje de conjuntos de estados alcanzables para sistemas lineales, el lector puede consultar a Sira [5],[6] y [7].

<u>Definición 5</u> Sea $\underline{x}$ un vector n-dimensional, denotamos mediante $>\underline{x},\underline{x}<$ al <u>producto externo</u> de $\underline{x}$ consigo mismo (Es decir $>\underline{x},\underline{x}<$ es una matriz de n x n, simétrica dada por:

$$>\underline{x},\underline{x}< \ = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 & \dots & x_2x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix}$$

Las definiciones anteriores nos permitirán establecer el resultado básico de esta sección. Damos el resultado en forma de dos proposiciones.

Proposición 1

Denotemos mediante Σ al producto externo de $\underline{x}$ consigo mismo, es decir $\Sigma = >\underline{x},\underline{x}<$ entonces $\lambda(\Sigma) = \underline{x}^{[2]}$.

Demostración esta proposición es una consecuencia directa de las definiciones anteriores.

Proposición 2

Sea $\underline{x}$ un vector n-dimensional que satisface la ecuación diferencial lineal $d/dt\ \underline{x}(t) = A\ \underline{x}(t)$. Entonces $d/dt\ \Sigma = A\ \Sigma + \Sigma\ A'$ y lo que es más:

$$\lambda\ (\ A\ \Sigma + \Sigma\ A'\ ) = A_{[2]}\lambda(\Sigma) \qquad (1)$$

y

$$\lambda\ (\ \Phi(t,t_0)\Sigma_0\ \Phi'(t,t_0)\ ) = \Phi^{[2]}(t,t_0)\lambda(\Sigma_0) \qquad (2)$$

donde (t,t_0) es la matriz de transición (matriz fundamental) asociada con A y $_0$ es el producto externo del vector $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ consigo mismo

Demostración

La ecuación diferencial que satisface el producto externo es trivial de establecer dada la definición de producto externo, y la proposición 1.

Las fórmulas (1) y (2) se establecen de la manera siguiente:

$$d/dt\ \Sigma = A\Sigma + \Sigma A' \text{ implica } \lambda(d/dt\ \Sigma\ ) = d/dt\ \lambda(\Sigma) =$$

$$= d/dt\ \underline{x}^{[2]} = \lambda(A\Sigma\ + \Sigma A'\ ) = A_{[2]}\ \underline{x}^{[2]} = A_{[2]}\lambda(\Sigma)$$

esto establece la fórmula (1). De las fórmulas anteriores tenemos :

$$\lambda(\ \Phi(t,t_0)\ \Sigma_0\ \Phi'(t,t_0)) = \Phi^{[2]}(t,t_0)\ \underline{x}_0^{[2]} = \Phi^{[2]}(t,t_0)\ \lambda(\Sigma_0)$$

ya que

$$\underline{x}^{[2]}(t) = \Phi_{A_{[2]}}(t,t_0)\ \underline{x}_0^{[2]} = \lambda\ (\Sigma(t)\ )$$

Para una demostración de la penúltima igualdad vease Sira [5] . Esto establece la fórmula (2) de la proposición.

Comentario

El resultado dado en las fórmulas (1) y (2) es completamente general irrespectivamente de quién sea la matriz Σ, siempre que ésta sea simétrica. En otras palabras : $(P = P'\ ;\ Q = Q'\ )$

$$\lambda(AP + PA') = A_{[2]}\lambda(P) \qquad (3)$$

y

$$\lambda(\ M\ Q\ M'\ ) = M^{[2]}\lambda(Q) \qquad (4)$$

Presentaremos ahora una aplicación de este resultado a la descripción de conjuntos de matrices simétricas y su representación como PG en el espacio vectorial donde toma valores el mapa λ.

Considérese el conjunto de matrices simétricas y positivas definidas. Sea Q un elemento cualquiera de este conjunto, definiremos mediante la notación $\mathcal{Q}$ a dicho conjunto, es decir:

$$\mathcal{Q} \doteq \{ Q \varepsilon R^{nxn} : \ Q = Q' > 0 \}$$

Este conjunto puede ser caracterizado por un PG abierto (es decir aquel que no tiene fronteras) al establecer la imagen de dicho conjunto bajo la acción del mapa λ . Por definición tendremos :

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{Q}) &\doteq \{ \underline{q} \, \varepsilon \, R^{n(n+1)/2} : \ \underline{q} = \lambda(Q) \ \ \forall \ Q \ \varepsilon \ \mathcal{Q} \ \} \qquad (5) \\ &\doteq \{ \underline{q} \, \varepsilon \, R^{n(n+1)/2} : \ < \underline{q}^{(n)}, \underline{h}_i > > 0 \ ; \ i = 1,2,\ldots, n \} \end{aligned}$$

donde los vectores de soporte generalizados $\underline{h}_i$, tienen la siguiente estructura:

$$\underline{h}_1' = [\ 0, \underline{a}_1', \underline{0}^{[2]'}, \underline{0}^{[3]'}, \ldots, \underline{0}^{[n]'}]'$$

$$\underline{h}_2' = [\ 0, \underline{0}', \underline{a}_2', \underline{0}^{[3]'}, \ldots, \underline{0}^{[n]'}]'$$

$$\vdots$$

$$\underline{h}_n' = [\ 0, \underline{0}', \underline{0}^{[2]'}, \underline{0}^{[3]'}, \ldots, \underline{0}^{[n-1]'}, \underline{a}_n']'$$

los vectores $\underline{a}_k$ tienen dimensión $\binom{n+k-1}{k}$ y son vectores constantes facilmente calculables a partir de las operaciones de potenciación tensorial y la definición de menores prinicipales de una matriz simétrica. De hecho estos vectores son tales que el producto interno de $\underline{h}_k$ y $\underline{q}^{(n)}$ dá como resultado $\det Q_k$, siendo Q_k el menor principal de orden k de la matriz Q.

Como corolario a la definición anterior podemos considerar el caso de conjunto de matrices positivas semidefinidas. Este caso puede ser representado como un conjunto cerrado a diferencia del caso anterior. Como es bien sabido, un PG no tiene por que ser necesariamente acotado, ó convexo y en ciertas oportunidades ni siquiera conexo (Vease [5]). Por lo tanto, en el espacio de imágenes del mapa λ , el conjunto que representa la totalidad de las matrices simétricas y positivas definidas tiene una estructura poco regular.

Los Poliedros Generalizados y la estabilidad, controlabilidad y observabilidad de los sistemas lineales

Haremos ahora uso de los resultados obtenidos con la finalidad de caracterizar geometricamente la estabilidad, controlabilidad y observabilidad de los sistemas lineales. Comenzaremos exponiendo los ya bien conocidos teoremas referentes a la caracterización algebraica de estas propiedades de los sistemas lineales.

Teorema 1

El origen de coordenadas es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema lineal $\dot{\underline{x}} = A\,\underline{x}(t)$ si y solamente si existen matrices simétricas, positivas definidas P y Q tales que :

$$PA + A'P = -Q \tag{7}$$

aún más, si existe tal par (P,Q) entonces para cada matriz positiva definida (y simétrica) Q existe una única matriz simétrica P,necesariamente positiva definida que es solución de la ecuación lineal algebraica (7).

El resultado anterior es bien conocido y fué tomado integramente de Sandell *et al.* [6].

Haciendo uso del operador λ en ambos miembros de la ecuación (7) obtenemos, de acuerdo a la proposición 2 :

$$A'_{[2]}\,\underline{p} = -\,\underline{q} \tag{8}$$

donde $\underline{p} = \lambda(P)$ y $\underline{q} = \lambda(Q)$

El teorema 1 nos permite asegurar que si el sistema es estable entonces para cada vector $\underline{q}$ que corresponda con una matriz Q positiva definida, entonces la solución del sistema (7) debería arrojar un único vector $\underline{p}$ que se corresponde con una matriz positiva definida P. En otras palabras, "*la imagen inversa bajo el mapa lineal* $A'_{[2]}$ *del conjunto* $\lambda(-Q)$ *debe estar contenida en el conjunto* $\lambda(P)$ *donde* P *es el conjunto de todas las matrices positivas definidas y simétricas,*"

El resultado anterior afirma que un sistema lineal será estable solo en el evento de que un poliedro generalizado esté completamente contendio dentro de otro. Los poliedros generalizados a que se refiere el resultado son fácilmente caracterizables como se desprende de las páginas anteriores. Si el sistema es inestable, los conjuntos a que hacemos referencia habrán de ser completamente disjuntos. Esto concuerda con el hecho de que la estabilidad es una propiedad determinante, es decir, un sistema es o no es estable alrrededor del origen. Para algunas definiciones relacionadas con imagenes inversas de conjuntos y poliedros generalizados el lector puede consultar a Schweppe [7] ó Sira [8].

Examinaremos seguidamente algunas caracterizaciones conjunto-teóricas de controlabilidad y observabilidad de sistemas dinámicos lineales. El siguiente teorema es tomado íntegramente de Brockett [9].

Teorema 2

Existe un control $\underline{u}$ que transfiere el estado del sistema $\dot{\underline{x}} = A(t)\underline{x} + B(t)\,\underline{u}$ desde un valor $\underline{x}_0$ hasta un valor $\underline{x}_1$ en el instante $t=t_1 > t_0$ si y solamente si $\underline{x}_0 - \Phi(t_0,t_1)$ pertenece al rango de espacio de la matriz:

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,t)B(t)B'(t)\ \Phi'(t_0,t)\ dt \qquad (9)$$

Aún mas, si $\underline{z}_0$ es cualquier solución de $W(t_0,t_1)\ \underline{z} = \underline{x}_0 - \Phi(t_0,t_1)$ entonces $\underline{u}$ dado por $\underline{u} = -B'(t)\ \Phi'(t_0,t)\ \underline{z}_0$ es un control que realiza la transferencia deseada. La matriz W a que hace referencia este teorema cumple las siguientes propiedades:

1) $W(t_0,t_1)$ es simétrica
2) $W(t_0,t_1)$ es semidefinida positiva para todo $t_1 \geqq t_0$
3) $W(t_0,t_1)$ satisface la ecuación diferencial matricial :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(t,t_1) &= A(t)\ W(t,t_1) + W(t,t_1)\ A'(t) - B(t)B'(t) \\ W(t_1,t_1) &= 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Demostración Véase Brockett [9].

La ecuación (10) es una ecuación diferencial matricial llamada del tipo Gramian. Se sigue del teorema anterior y las propiedades de W que para que un sistema sea controlable o completamente controlable, el rango de W debe ser n. Esto implica que W ha de ser positiva definida. Por lo tanto para controlabilidad en un instante dado t_1 habrá de cumplirse que :

$$\lambda\ (W(t_0,t_1))\ \varepsilon\ \mathcal{W}$$

donde $\mathcal{W}$ es el poliedro generalizado dado por (5) y (6). En otras palabras, " *el estado en el instante* t_0 *, del sistema de tiempo reversa :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underline{w}(t) &= A_{[2]}(t)\ \underline{w}(t) - B^{[2]}(t)\ \underline{i} \\ \underline{w}(t_1) &= \underline{0} \quad , \end{aligned} \qquad (11)$$

$\underline{w}(t_0)$ *debe pertenecer al poliedro generalizado* (5). *Este poliedro ha de ser, por lo tanto, accesible desde el origen por la dinámica del sistema* $(A_{[2]}\ ,- B^{[2]}\ )$ *cuando se utiliza como señal de control el vector constante* $i = \lambda(I)$."

Otra posible caracterización conjunto-teórica de la controlabilidad surge inmediatamente del hecho anterior, ésta es que " *la imagen inversa del conjunto* (5) *bajo el mapa lineal :*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_{A_{[2]}}(t_0,t)\ B^{[2]}\ (t)\ dt$$

debe contener al vector $\underline{i} = \lambda(I)$."

Hemos visto entonces que controlabilidad completa en un instante dado es equivalente a accesibilidad de un conjunto por parte de un sistema dinámico relacionado con el sistema original. Esta accesibilidad a su vez es equivalente al establecimiento ó nó de pertenencia de un vector constante dentro de un poliedro generalizado.

A la luz del resultado anterior , la propiedad de controlabilidad completa uniforme [9] es equivalente a la accesibilidad de un tubo poliédrico generalizado por parte del sistema caracterizado por el par $(A_{[2]}, -B^{[2]})$. Esta a su vez puede transformarse en una condición de pertenencia de un vector constante $\underline{i}$ a una familia continua de conjuntos poliédricos generalizados, caracterizados por la imagen inversa bajo un operador lineal del conjunto de "estados terminales" del sistema descrito por el par anteriormente señalado.

Es bien conocida la relación de dualidad que existe entre el concepto de controlabilidad y el de observabilidad. En este trabajo haremos uso de esta relación para establecer la caracterización conjunto-teórica de la observabilidad de sistemas lineales. Enunciamos el teorema correspondiente al teorema 2, el cual puede hallarse también en Brockett [9].

Teorema 3

Supóngase que A(t) y C(t) se conocen en el intervalo $[t_0,t_1]$ junto con: $\dot{\underline{x}} = A(t)\,\underline{x}(t)$; $\underline{y}(t) = C(t)\,\underline{x}(t)$. Entonces, es posible determinar $\underline{x}(t_0)$ dentro de una constante de error aditiva que se encuentra en el espacio nulo de $M(t_0,t_1)$ donde :

$$M(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi'(t,t_0)C'(t)C(t)\,\Phi(t,t_0)dt \qquad (12)$$

En particular, es posible determinar $\underline{x}(t_0)$ en forma unívoca si $M(t_0,t_1)$ es no-singular. Es imposible distinguir, con el conocimiento de $\underline{y}$ el estado inicial $\underline{x}_1$ del estado inicial $\underline{x}_2$ si $\underline{x}_1-\underline{x}_2$ se encuentra en el epacio nulo de $M(t_0,t_1)$. La matriz M definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:

1) $M(t_0,t_1)$ es simétrica
2) $M(t_0,t_1)$ es semidefinida positiva
3) $M(t,t_1)$ satisface la ecuación diferencial matricial :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}M(t,t_1) = -A'(t)M(t,t_1) - M(t,t_1)A(t) - C'(t)C(t) \\ &M(t_1,t_1) = 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Demostración Véase Brockett [9]

Nuestra caracterización conjunto-teórica de la observabilidad rezaría así: " *el estado en el instante* t_0 , *del sistema de tiempo reversa:*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\underline{m}(t) = -A'_{[2]}(t)\,\underline{m}(t) - C'^{[2]}(t)\,\underline{i} \\ &\underline{m}(t_1) = \underline{0}\,, \end{aligned} \qquad (14)$$

$\underline{m}(t_0)$ *debe pertenecer al poliedro generalizado* (5). *Este poliedro ha de ser, por lo tanto, accesible desde el origen por el sistema* (14) ".

La caracterización de controlabilidad completa y controlabilidad com pleta uniforme en terminos de accesibilidad de conjuntos de blanco y de tubos respectivamente se sigue en forma similar a lo desarrollado en lo pertinente al tópico de controlabilidad. Así mismo, se pueden lograr caracterizaciones en términos de pertenencia ó no del vector $\underline{i}$ a un poliedro o familia de poliedros generalizados.

La caracterización conjunto-teórica de la controlabilidad y observabilidad de los sistemas lineales variantes en el tiempo se reduce en última instancia a chequear la pertenencia ó no de un vector constante a un conjunto denominado poliedro generalizado el cual es facilmente calculable en términos de las matrices del sistema. El método se apoya substancialmente en concepciones geométricas de la vectorización apropiada de matrices simétricas que en forma algebraica caracterizan estos atributos importantes de los sistemas y constituye por tanto un camino que se pudiera utilizar a los fines relacionados con estudios de controlabilidad y observabilidad genérica [10].

3. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado algunos resultados preliminares en la caracterización conjunto-teórica de importantes propiedades asociadas con sistemas dinámicos lineales tales como son : estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Para los dos últimos casos se estudió el caso más complejo de sistemas variantes en el tiempo. Hemos visto que la estabilidad de un sistema puede ser determinada en base a la verificación de la contenencia de un conjunto dentro de otro en un espacio de estado apropiado. Aún cuando no hicimos énfasis en ello, de esta caracterización geométrica pueden inferirse también consecuencias algebraicas. Los problemas de determinación de la controlabilidad y la observabilidad puede hacerse en términos de la accesibilidad de un conjunto terminal por parte de un sistema dinámico lineal relacionado con el sistema original a través de mapas tensoriales (en versiones infinitesimales y discretas a la vez). La extesnión de los resultados obtenidos a problemas de controlabilidad y observabilidad uniforme es directa y redunda en propiedades de accesibilidad de tubos de blanco en el mismo espacio de estado. Este tópico ha recibido suficiente atención en el pasado y existe un buen número de resultados aplicables directamente al caso que nos ocupa [5].

Como tópicos de investigación futura proponemos la aplicación de la idea de las caracterizaciones conjunto-teóricas de la estabilidad, controlabilidad y observabilidad a determinación de regiones en el espacio paramétrico del sistema, donde dichas propiedades se puedan verificar. La extensión de los resultados obtenidos a problemas invariantes en el tiempo aparece simple y trivial.

REFERENCIAS

[1] Kalman, R., " Mathematical Description of Linear Dynamic Systems," SIAM Journal for Control, Vol. No. 1 No.2, 1963, 152-192.

[2] Hahn, W., Stability of Motion, Springer Verlag. Berlin 1967.

[3] Brockett, R., "Lie Algebras and Lie Groups in Control Theory," En Differential Geometric Methods in System Theory , D.Q. Mayne y R.W. Brockett Editores, Reidel Dordrecht. Holanda 1973. 43-82.

[4] Sira Ramirez, H., " Evolucion de Incertidumbres Generalizadas en Sistemas Dinamicos," Reporte I-110-78 CDCH- ULA, (En progreso)

[5] Sira-Ramirez, H., " Reachable Sets and Set-Theoretic Evolution of the Uncertainty in Linear Systems," II Congreso Brasileiro de Automatica. Universidad Federal de Santa Catarina, Florianopolis. Brasil. Sept. de 1978. pp. 677-689.

[6] Sira-Ramirez, H., " Evolution of Generalized Set-Theoretic Uncertainties in Linear Systems," 1979 Conference on Information Sciences and Systems. John Hopkins University. Baltimore. USA. Marzo de 1979.

[7] Sira-Ramirez, H., " Evolution of Generalized Uncertainties in Bi-linear Systems," 1979 IEEE-IECE International Symposium on Circuits and Systems, Tokio Institute of Technology. Tokio,Japon. Julio de 1979.

[8] Sandell, N., Varaiya, P., y Athans, M., " A Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems," Presentado en el 1976 IFAC Symposium on Large Scale Systems, Udine, Italia. Junio de 1976.

[9] Brockett, R., Finite Dimensional Linear Systems, John Wiley and Sons Inc. New York. 1970.

[10] Casti, J.L., Dynamical Systems and Their Applications: Linear Theory, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 135. Academic Press. New York, 1977.