

Control por Regímenes Deslizantes Aplicado a un Sistema Mecánico Vibratorio Diferencialmente Plano: resultados experimentales *

J. Enríquez-Zárate † G. Silva-Navarro, H. Sira-Ramírez.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Dept. de Ing. Eléctrica - Sección de Mecatrónica.
A.P. 14-740, C.P. 07300 México, D.F. México

Resumen

En este artículo se aplica un controlador por regímenes deslizantes basado en la planitud diferencial a un sistema mecánico vibracional, con el objetivo de alcanzar el seguimiento asintótico de salida en presencia de perturbaciones armónicas. El sistema mecánico consta de dos masas conectadas por medio de resortes, un motor de cd y un generador de vibraciones. La salida a controlar es la posición de la masa subactuada, la cual está afectada por una fuerza armónica externa al sistema con frecuencia de excitación variable. El control activo de vibraciones explota la propiedad de la planitud diferencial del sistema dinámico con un controlador que retroalimenta la medición de las posiciones y las velocidades estimadas numéricamente. En el esquema de control se consideran trayectorias de referencia planificadas fuera de línea y la acción de perturbaciones pequeñas. El desempeño del sistema en lazo cerrado se muestra mediante simulaciones numéricas y resultados en tiempo real obtenidos en una plataforma experimental.

1 Introducción

Muchos sistemas de ingeniería están afectados directamente por señales o vibraciones indeseables. El control de vibraciones en sistemas mecánicos es un problema de estudio importante, ya que por medio de los métodos de control se pueden atenuar o cancelar el ruido o las vibraciones. Básicamente hay tres métodos para realizar el control de vibraciones, conocidos como control pasivo, control semi-activo y control activo. El control pasivo de vibraciones

se basa en la incorporación de resortes y amortiguamientos al sistema con el objetivo de reducir la respuesta del sistema primario; dicha incorporación de resortes y amortiguadores solo será útil para una frecuencia de excitación específica y bajo condiciones de operación estables, por lo cual no es recomendable en casos de frecuencias de excitación variables o parámetros desconocidos. El control semi-activo de vibraciones se basa en la aplicación de resortes o amortiguadores variables o ajustables, es decir, que pueden adaptarse a las condiciones de operación del sistema. El control activo de vibraciones incorpora más grados de libertad al sistema, siendo la fuerza aplicada a los actuadores que se controla a partir de la información retroalimentada y prealimentada entregada por sensores. En general, la incorporación de grados de libertad al sistema ocasiona dinámicas complejas y fuertes acoplamientos que pueden ser lineales o no lineales. Para más detalles ver [1, 3, 4, 6].

Por otro lado, muchos sistemas dinámicos poseen la propiedad estructural llamada la *planitud diferencial*. Esta propiedad es equivalente a la existencia de un conjunto de salidas independientes, llamadas salidas planas, las cuales son iguales al número de entradas de control y que parametrizan a cada variable de estado del sistema y entrada de control (ver [2]). Por medio de la planitud diferencial el análisis y el diseño de un controlador se simplifica substancialmente. En particular, la combinación de la planitud diferencial con la técnica de control por regímenes deslizantes [7], utilizada cuando se requiere un esquema de control robusto (e.g., cuando hay incertidumbres o perturbaciones que afectan a la dinámica del sistema), califica como un controlador adecuado para conseguir el seguimiento asintótico robusto de trayectorias deseadas.

En este artículo se considera el problema de controlar una plataforma mecánica de dos grados de

*Proyecto financiado parcialmente por el Proyecto CONACyT 32681-A.

†Correo electrónico: jenrique@mail.cinvestav.mx

libertad, la cual consta de dos masas y dos resortes. El objetivo de control consiste en el seguimiento por parte de la masa subactuada de una trayectoria planificada y la atenuación de las vibraciones o perturbaciones externas que la afectan directamente. La ley de control empleada se basa en la aplicación de la planitud diferencial combinada con la técnica de control por regímenes deslizantes, con la se puede obtener el seguimiento asintótico de la trayectoria planificada fuera de línea en presencia de vibraciones externas (fuerzas perturbadoras armónicas). El esquema de control constituye un control activo de vibraciones, usando únicamente la retroalimentación de las posiciones de las masas y la estimación o aproximación numérica de las velocidades y las aceleraciones. El control activo permite compensar vibraciones armónicas con frecuencia de excitación variable, logrando una respuesta asintótica en la salida del sistema. Se presentan algunas simulaciones numéricas y resultados obtenidos en una plataforma experimental.

2 Sistema mecánico vibratorio

Un diagrama esquemático del sistema mecánico vibratorio se muestra en la Fig. 1. El sistema mecánico

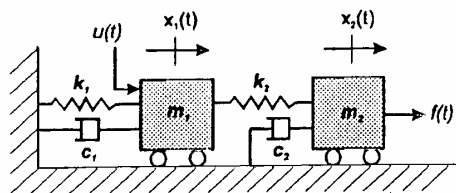


Figura 1: Diagrama esquemático del sistema mecánico.

co consta de dos masas (m_1, m_2), las cuales se encuentran conectadas por los resortes bidireccionales (k_1, k_2). Cada carrito que sostiene a las masas tiene un sistema anti-fricción (rodamiento de bolas), de esta manera los amortiguadores (c_1, c_2) como se muestra en la Fig. 1 se incluyen para describir los pequeños amortiguamientos viscosos presentes en el sistema. El control de fuerza que se representa por $u(t)$ se aplica directamente a la masa m_1 para satisfacer los objetivos de control deseados (seguimiento de trayectorias y atenuación de vibraciones). Dicho control de fuerza se genera por un servomotor sin escobillas, el cual se encuentra conectado a un mecanismo piñón-cremallera. La masa subactuada m_2 está directamente afectada por una fuerza exó-

gena (vibración armónica), siendo $f(t) = F \sin(\omega t)$, la cual se obtiene a partir de un generador de vibraciones que se encuentra montado sobre la masa m_2 (la excéntrica de dicho generador está conectada a la flecha de un motor de cd con regulación de velocidad). Los decodificadores ópticos pueden medir la posición de la masa m_2 por medio de sistemas de cables con poleas (donde las velocidades y aceleraciones se aproximan numéricamente en los algoritmos de control).

Los subsistemas *primario* y *secundario* están compuestos por los elementos (m_2, c_2, k_2) y (m_1, c_1, k_1), respectivamente. Las vibraciones no deseadas en la masa m_2 se producen por la acción de la fuerza armónica $f(t)$.

El subsistema secundario (m_1, c_1, k_1) puede considerarse como un absorbedor pasivo de vibraciones para el subsistema primario (m_2, c_2, k_2). Esto es típicamente diseñado para satisfacer las condiciones de resonancia interna, donde la fuerza armónica $f(t)$ se atenúa en $x_2(t)$ solo para frecuencias de excitación específicas ω y condiciones de operación estables. La principal desventaja de este esquema de control en lazo abierto es la ausencia de robustez con respecto a incertidumbre en los parámetros o variaciones en la frecuencia de excitación. La introducción del control de fuerza $u(t)$ resulta en un esquema de control activo de vibraciones, el cual se diseñará usando las herramientas de la planitud diferencial, la técnica de control por regímenes deslizantes y la planificación de trayectorias.

2.1 Modelo Matemático

El modelo matemático del sistema mecánico de dos grados de libertad mostrado en la Fig. 1 está dado por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= u(t) \quad (1) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) &= f(t) \quad (2) \end{aligned}$$

donde x_1 y x_2 representan la posición horizontal de la masa m_1 y m_2 con respecto al punto de reposo, respectivamente. La entrada de control $u(t)$ y la señal exógena $f(t)$ son fuerzas que pueden jalar o empujar a la masa m_1 y m_2 , respectivamente.

Definiendo las variables de estado como $z_1 = x_1, z_2 = \dot{x}_1, z_3 = x_2$ y $z_4 = \dot{x}_2$ el modelo (1)-(2) se describe en espacio de estado como

$$\dot{z} = Az + Bu + Ef, \quad z \in R^4, \quad f \in R^1 \quad (3)$$

$$y = z_3, \quad y \in R^1 \quad (4)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Claramente se puede observar que las vibraciones libres del sistema (3)-(4) son únicamente estables para el caso en que no existe amortiguamiento (i.e., cuando $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, siendo que la matriz A tiene todos sus valores propios sobre el eje imaginario) y asintóticamente estable para el caso amortiguado (i.e., cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, donde todos los valores propios de A tienen parte real negativa). Además, resulta fácil verificar que este sistema es completamente controlable.

La función de transferencia del sistema (3)-(4) entre la perturbación $f(t)$ y la salida $y = z_3$ se obtiene como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + c_1 s + (k_1 + k_2)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

donde $a_4 = m_1 m_2$, $a_3 = m_1 c_2 + m_2 c_1$, $a_2 = m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2) + c_1 c_2$, $a_1 = k_2 c_1 + c_2 (k_1 + k_2)$ y $a_0 = k_1 k_2$. Cuando $f(t) \equiv 0$ y $u = u^e$ es una entrada constante (fuerza) el estado de equilibrio es $x^e = \text{col}(u^e/k_1, 0, u^e/k_1, 0)$, en cuyo caso $u^e = 0$ implica que $x^e = 0$. En cualquier otro caso la perturbación se manifiesta en conflicto con la transferencia del estado de equilibrio del sistema a una trayectoria deseada.

Observación 1 La salida $y = z_3$ tiene grado relativo 4 con respecto a u y grado relativo 2 con respecto a f , por lo tanto, el problema de desacoplamiento de la perturbación $f(t)$ no tiene solución. De tal manera que la atenuación de la señal perturbada no se podrá conseguir solamente con un controlador robusto.

3 Planitud diferencial del sistema vibratorio

Un sistema dinámico es *diferencialmente plano* si existe un conjunto de funciones diferenciables de los estados, llamadas *salidas planas*, por medio de las

cuales todas las variables de estado y las entradas de control se pueden expresar en términos de las salidas planas y de sus derivadas. Esta propiedad estructural y muchas otras aplicaciones ilustrativas han sido ampliamente discutidas en varios artículos de Fliess y colaboradores (ver [2]). La planitud diferencial es una propiedad que permite generalizar el problema de la linealización exacta a diferentes clases de sistemas no-lineales y resulta especialmente útil para solucionar problemas de estabilización asintótica, linealización exacta, salidas de fase no-mínima, planificación de trayectorias, etc.

Para simplicidad en el análisis de la planitud diferencial en el sistema mecánico (3)-(4) se supone que $f(t) \equiv 0$. Debido a que el sistema es completamente controlable, entonces es diferencialmente plano. En efecto, la salida a controlar $y = z_3$ es la salida plana. A continuación se muestra la parametrización de todas las variables de estado y la entrada de control. Para ello primeramente se determinan las derivadas hasta de cuarto orden de la salida $y = z_3$, resultando

$$\begin{aligned} y &= z_3 \\ \dot{y} &= \dot{z}_3 = z_4 \\ \ddot{y} &= \dot{z}_4 = \frac{k_2}{m_2} (z_1 - z_3) - \frac{c_2}{m_2} z_4 \\ \ddot{\ddot{y}} &= -\frac{k_2 c_2}{m_2^2} z_1 + \frac{k_2}{m_2} z_2 + \frac{k_2 c_2}{m_2^2} z_3 \\ &\quad + \left[\left(\frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_2}{m_2} \right] z_4 \\ {}^{(4)}y &= \frac{k_2}{m_2} \left[\left(\frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_2}{m_2} - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} \right] z_1 \\ &\quad - \frac{k_2}{m_2} \left[\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right] z_2 \\ &\quad + \frac{k_2}{m_2} \left[\frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} - \left(\frac{c_2}{m_2} \right)^2 \right] z_3 \\ &\quad + \left[\frac{2k_2 c_2}{m_2^2} - \left(\frac{c_2}{m_2} \right)^3 \right] z_4 + \frac{k_2}{m_1 m_2} u \end{aligned}$$

De esta manera, las variables de estado y la entrada de control quedan parametrizados en términos de la

salida plana de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{k_2}(m_2\ddot{y} + c_2\dot{y} + k_2y) \\ z_2 &= \frac{m_2}{k_2}\ddot{y} + \frac{c_2}{k_2}\dot{y} + y \\ z_3 &= y \\ z_4 &= \dot{y} \\ u &= \frac{1}{b} \left[\overset{(4)}{y} - (a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4) \right] \\ &= \frac{1}{b} \left\{ \overset{(4)}{y} - \left[\frac{a_2m_2}{k_2}\ddot{y} + \left(\frac{a_1m_2 + a_2c_2}{k_2} \right)\dot{y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{a_1c_2}{k_2} + a_2 + a_4 \right)y + (a_1 + a_3)y \right] \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k_2}{m_2} \left[\left(\frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_2}{m_2} - \frac{(k_1 + k_2)}{m_1} \right], \\ a_2 &= -\frac{k_2}{m_2} \left[\frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right], \\ a_3 &= \frac{k_2}{m_2} \left[\frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} - \left(\frac{c_2}{m_2} \right)^2 \right] \\ a_4 &= \left[\frac{2k_2c_2}{m_2^2} - \left(\frac{c_2}{m_2} \right)^3 \right], \quad b = \frac{k_2}{m_1m_2} \end{aligned}$$

Si el objetivo de control es el seguimiento asintótico de la salida para una trayectoria de referencia deseada $y^*(t)$, entonces se pueden calcular las variables de estado y la entrada de control requeridas para obtener el seguimiento perfecto de la trayectoria nominal. De esta manera, la parametrización ideal (5) y (6) puede utilizarse para determinar $z^*(t)$ y $u^*(t)$ a partir de una trayectoria de salida conocida $y(t) = y^*(t)$.

La planitud diferencial, sin embargo, no es suficiente para lograr el seguimiento asintótico de referencias ni la robustez en presencia de señales exógenas o incertidumbre en los parámetros del sistema. En el caso en que $f(t) \neq 0$ la parametrización debería incluir explícitamente el efecto de f y sus derivadas hasta de segundo orden.

Por las razones anteriores se utilizará un controlador por regímenes deslizantes basado en la planitud diferencial, con el fin de tener un esquema de control más realista y alcanzar así un mejor desempeño del sistema en lazo cerrado.

4 Control por regímenes deslizantes basado en la planitud diferencial

Especificando una trayectoria deseada $y^*(t)$ para la salida plana $y(t) = z_3$ y definiendo el error de seguimiento como $e(t) = y(t) - y^*(t)$ se puede obtener un controlador por retroalimentación de estados, basado en el seguimiento exacto del error, como sigue (ver (6)):

$$u = \frac{1}{b} \left\{ -\left[\frac{a_2m_2}{k_2}\ddot{y} + \left(\frac{a_1m_2 + a_2c_2}{k_2} \right)\dot{y} + \left(\frac{a_1c_2}{k_2} + a_2 + a_4 \right)y + (a_1 + a_3)y \right] + v \right\} \quad (7)$$

donde v es una nueva entrada. La aplicación de (7) al sistema (3)-(4), pero en coordenadas $(y, \dot{y}, \ddot{y})$, resulta en un sistema en lazo cerrado descrito en la forma canónica de Brunovsky. La nueva entrada de control $v(t)$ se diseña entonces para estabilizar al sistema sobre la trayectoria deseada. Por ejemplo, aplicando la retroalimentación lineal del error

$$v(t) = \alpha_3\ddot{e}(t) + \alpha_2\dot{e}(t) + \alpha_1e(t) + \alpha_0e(t) + \overset{(4)}{y}^*(t) \quad (8)$$

donde α_i , $i = 0, \dots, 3$, son constantes reales positivas, seleccionadas de tal manera que el polinomio $s^4 + \alpha_3s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0$ sea Hurwitz, de acuerdo a alguna dinámica lineal preestablecida (asignación de polos). De esta forma la dinámica del error de seguimiento queda descrita por la siguiente ecuación diferencial

$$\overset{(4)}{e}(t) + \alpha_3\ddot{e}(t) + \alpha_2\dot{e}(t) + \alpha_1e(t) + \alpha_0e(t) = 0 \quad (9)$$

la cual es asintóticamente estable, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Conviene señalar que este controlador lineal no considera la perturbación $f(t)$ ni incertidumbre en los parámetros. Para poder trabajar con estas dificultades haremos uso de la técnica de control por regímenes deslizantes y de sus propiedades de robustez ampliamente conocidas.

Considere la superficie de conmutación definida como

$$\sigma(e, \dot{e}, \ddot{e}) = \ddot{e} + \beta_2\dot{e} + \beta_1e + \beta_0e \quad (10)$$

donde β_i , $i = 1, \dots, 3$ son parámetros de diseño que permiten la regulación y estabilización del sistema. El movimiento deslizante del error de seguimiento $e(t)$, que es el error dinámico restringido a $\sigma(\cdot) = 0$,

está gobernado por la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\ddot{e} + \beta_2 \dot{e} + \beta_1 e + \beta_0 e = 0 \quad (11)$$

donde las constantes $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ son seleccionadas de tal forma que el polinomio $s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0$ sea Hurwitz. Como consecuencia se tiene que el error dinámico en la superficie deslizante $\sigma(\cdot) = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

La superficie deslizante $\sigma(\cdot) = 0$ se hace globalmente atractiva aplicando una aproximación continua del controlador discontinuo por regímenes deslizantes (ver [5]), restringiendo σ para que cumpla con la siguiente dinámica

$$\dot{\sigma} = -\mu[\sigma + \gamma \text{sign}(\sigma)] \quad (12)$$

donde μ, γ denotan constantes reales positivas y $\text{sign}(\sigma)$ es la llamada función *signum*. Por medio de la función de Lyapunov $V(\sigma) = \sigma^2$ es fácil mostrar la convergencia asintótica de σ a la superficie deslizante $\sigma = 0$ (i.e., $\sigma \dot{\sigma} < 0$).

El control por regímenes deslizantes se sintetiza entonces como

$$v = -[\beta_2 \ddot{e}(t) + \beta_1 \dot{e}(t) + \beta_0 e(t)] + \mu[\sigma(\cdot) + \gamma \text{sign}(\sigma(\cdot))] + \frac{d}{dt} y^{(4)}(t) \quad (13)$$

Cuando se toman en cuenta las limitaciones físicas del sistema mecánico vibratorio, el grado o cantidad de suavizamiento aplicado en (12) es conveniente para evitar las altas frecuencias de conmutación. Para ello usaremos la siguiente aproximación de la función *signum*

$$\text{sign}(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon} \quad (14)$$

donde ϵ es cualquier constante positiva y pequeña.

5 Simulación y resultados experimentales

El funcionamiento del sistema en lazo cerrado se ilustra mediante algunas simulaciones numéricas y varios experimentos realizados en tiempo real en una plataforma experimental del sistema mecánico vibratorio bajo estudio.

La plataforma experimental se compone de tres subsistemas: i) la planta electromecánica con un actuador (motor de cd sin escobillas) y sensores (decodificadores de alta resolución de 4000 pulsos por revolución con una resolución lineal efectiva de hasta 2266 cuentas/cm) como se describe en la Fig.

1; ii) un controlador en tiempo real basado en un DSP instalado en una PC; iii) paquetería de programación y ambiente gráfico, para programar los algoritmos de control y graficar las señales de los decodificadores. La frecuencia máxima de muestreo es de 1.131 Khz (equivalente a un tiempo de muestreo mínimo de 0.000884 s), sin embargo, para evitar daños y altas frecuencias éste fue fijado a un valor de 0.00884 s. En la plataforma experimental únicamente se dispone de las mediciones de posición (por medio de los decodificadores) y las derivadas hasta de cuarto orden de la salida plana se aproximan numéricamente dentro del algoritmo de control en tiempo real, de cuyos cálculos resulta ruido en la entrada de control.

Los parámetros físicos del sistema mecánico vibratorio se proporcionan en la **Tabla I**.

Tabla I. Parámetros del sistema	
$m_1 = 1.85 \text{ kg}$	$m_2 = 2.55 \text{ kg}$
$k_1 = 400 \text{ N/m}$	$c_1 = 10 \text{ N/(m/s)}$
$k_2 = 175 \text{ N/m}$	$c_2 = 10 \text{ N/(m/s)}$

Estos parámetros fueron validados para determinar la respuesta en lazo abierto y la respuesta frecuencial del sistema mecánico. Los parámetros del controlador por regímenes deslizantes propuesto en (7) y (13) fueron diseñados para tener los polinomios

$$s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0 = (s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (15)$$

por lo tanto,

$$\beta_0 = p\omega_n^2, \quad \beta_1 = \omega_n^2 + 2p\zeta\omega_n, \quad \beta_2 = (p + 2\zeta\omega_n) \quad (16)$$

De esta manera, se seleccionaron $p = 20$, $\zeta = 0.7071$, $\omega_n = 12.566 \text{ rad/s}$, $\mu = 10$, $\gamma = 10$ y $\epsilon = 0.01$. La trayectoria deseada para la salida plana $y(t) = x_2(t)$ se planifica fuera de línea con base a la siguiente definición

$$y^*(t) = \begin{cases} \bar{y} = \text{constante} & \text{si } 0 \leq t < T_1 \\ \bar{y}[1 - \psi(t, T_1, T_2)] & \text{si } T_1 \leq t < T_2 \\ 0 & \text{si } t > T_2 \end{cases}$$

donde $\bar{y} = 0.010 \text{ m}$, $T_1 = 6 \text{ s}$, $T_2 = 8 \text{ s}$, y $\psi(t, T_1, T_2)$ es un polinomio de Bézier, tal que $\psi(T_1, T_1, T_2) = 0$ y $\psi(T_2, T_1, T_2) = 1$. El polinomio se propone de la siguiente manera

$$\psi(t, T_1, T_2) = \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \right)^3 [r_1 - r_2 \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \right) + r_3 \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \right)^2 + \dots + r_6 \left(\frac{t - T_1}{T_2 - T_1} \right)^5]$$

con las constantes $r_1 = 252$, $r_2 = 1050$, $r_3 = 1800$, $r_4 = 1575$, $r_5 = 700$ y $r_6 = 126$ seleccionadas de tal manera que se obtuviera una respuesta suavizada en el seguimiento dinámico del polinomio en lazo cerrado del sistema.

Varias simulaciones numéricas fueron realizadas con y sin la presencia de una fuerza exógena (vibración armónica), la cual está dada por $f(t) = F \sin(\omega t)$, con $F = 2.295$ N y $\omega = 62.8$ rad/s. Note que la amplitud de esta vibración es pequeña y la frecuencia de excitación es elevada, en comparación con las frecuencias naturales del sistema físico (6.7 rad/s y 18.3 rad/s). Así pues, dicha fuerza perturbadora ocasiona una respuesta altamente oscilatoria en el sistema dinámico, con lo cual es posible excitar las posibles dinámicas no modeladas en el sistema mecánico vibratorio con el servomotor.

5.1 Resultados en simulación

En la Fig. 2 se muestra la simulación numérica usando un controlador por regímenes deslizantes y la planitud diferencial para $f(t) = 0$ [N]. De esta manera uno puede observar un buen desempeño dinámico con respecto al seguimiento asintótico de la salida. En el caso en que $f(t) = 2.295 \sin(62.8t)$ [N] (ver Fig. 3) el seguimiento asintótico de la salida es también razonable, debido a que la fuerza de la vibración externa se atenúa, pero con el compromiso de tener comportamientos internos y acciones de control altamente oscilatorias.

5.2 Resultados experimentales

En las Figs. 4 y 5 se pueden observar los resultados experimentales obtenidos con la aplicación del esquema de control por regímenes deslizantes basado en la planitud diferencial. Específicamente, cuando $f(t) = 0$ [N] la respuesta en lazo cerrado del sistema es muy similar a la obtenida por medio de las simulaciones numéricas (ver Fig. 4). La entrada de control presenta alta frecuencia para los cambios discontinuos y suaves en la trayectoria de referencia deseada. Esto es consecuencia de la deficiente aproximación numérica de las velocidades (cálculo de las derivadas) dentro del algoritmo de control en tiempo real. Cuando el sistema mecánico soporta la fuerza de vibración $f(t) = 2.295 \sin(62.8t)$ [N] (ver Fig. 5) el seguimiento asintótico de la salida resulta razonable y mejor que la obtenida en las simulaciones numéricas. El control activo de vibraciones es capaz de atenuar las perturbaciones en la salida, resultando en un seguimiento asintótico y robusto de la trayectoria de referencia planificada. De cualquier manera la respuesta del sistema

en lazo cerrado y las acciones de control presentan dinámicas altamente oscilatorias. Otros experimentos con frecuencia de excitación variable, inclusive cerca de las frecuencias de resonancia del sistema, resultaron en un desempeño satisfactorio del esquema de control activo de vibraciones.

6 Conclusiones

La planitud diferencial y la técnica de control por regímenes deslizantes fueron aplicados a un sistema mecánico vibratorio para realizar simultáneamente el seguimiento asintótico de una trayectoria de referencia y la atenuación de perturbaciones. El sistema mecánico consta de dos masas conectadas con resortes. La salida a controlar es la posición de la masa subactuada, la cual está afectada directamente por una vibración indeseable (fuerza armónica con frecuencia de excitación variable). El esquema de control activo de vibraciones explota la propiedad de la planitud diferencial durante el diseño del controlador, empleando para la retroalimentación solamente la medición de las posiciones y la aproximación numérica de las velocidades. El controlador es dinámicamente capaz de realizar el seguimiento de una trayectoria planificada fuera de línea aún en presencia de pequeñas perturbaciones. El funcionamiento del sistema ha sido validado por medio de simulaciones numéricas y resultados obtenidos en una plataforma experimental. El controlador activo de vibraciones resulta ser muy robusto ante la acción de la señal perturbadora (armónica) de frecuencia de excitación variable.

Referencias

- [1] J. Anthonics, J. Swevers, F. Moshou y Ramon (1999). H^∞ -controller design for a vibrations isolation platform, *Control Engineering Practice*, Vol. 7, pp.1333-1341.
- [2] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martín y P. Rouchon (1995). Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. *Int. J. of Control*, Vol. 61, pp. 1327-1361.
- [3] D. Inman, *Engineering Vibration*, Prentice-Hall, NY, 1994.
- [4] N. Ölgac and B. Holm-Hansen (1995). Tunable active vibration absorber: The delayed resonator, *Transactions of the ASME on Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control*, 117(12), pp. 513-519.
- [5] H. Sira-Ramírez (1993). A dynamical variable structure control strategy in asymptotic output tracking problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 38, No. 4, pp.615-620.

- [6] W.T. Thomson, *Theory of Vibrations with Applications*, George, Allen and Unwin, London, 1981.
- [7] Utkin, V.I., *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Figura 2: Resultados en simulación usando regímenes deslizantes y planitud diferencial cuando $f(t) = 0$ [N].

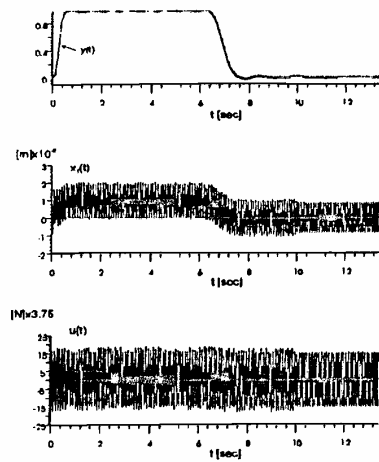


Figura 3: Resultados en simulación usando regímenes deslizantes y planitud diferencial cuando $f(t) = 2.295 \sin(62.8t)$ [N].

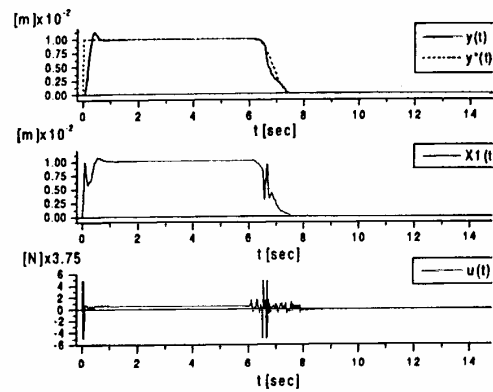


Figura 4: Resultados experimentales usando regímenes deslizantes y planitud diferencial cuando $f(t) = 0$ [N].

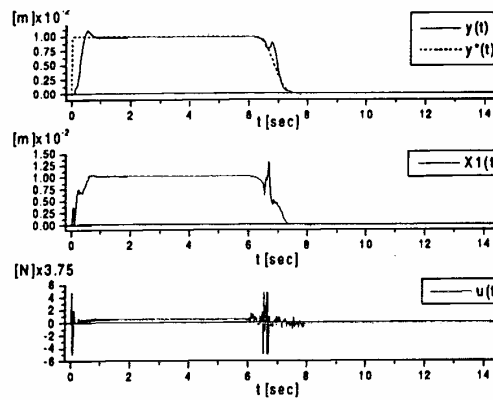


Figura 5: Resultados experimentales usando regímenes deslizantes y planitud diferencial cuando $f(t) = 2.295 \sin(62.8t)$ [N].