

Sur la commande des systèmes non différentiellement plats

H. SIRA-RAMIREZ*

CIFA 2000,

Sección de Mecatrónica

Departamento de Ingeniería Eléctrica

CINVESTAV-IPN

Avenida IPN, # 2508, Col. San Pedro Zacatenco A.P. 14740

07300 México, D.F., México

email: hsira@mail.cinvestav.mx

Résumé:

Dans cet article, nous proposons plusieurs méthodes de conception de commandes par bouclage pour la stabilité et le suivi de trajectoires pour des systèmes qui ne sont pas équivalents, par bouclage endogène, à des systèmes linéaires commandables. Nous illustrerons, en se basant sur des exemples physiques simples, l'efficacité des lois proposées.

Mots-Clés:

Suivi trajectoire, linearisation jacobienne, systèmes Liouvillians

I INTRODUCTION

Dans cet article, nous présentons, à travers des exemples illustratifs, plusieurs méthodes de conception de commandes disponibles pour la régulation en boucle fermée de systèmes non différentiellement plats, c'est à dire qui ne sont pas équivalents à des systèmes linéaires contrôlables par bouclage endogène. En considérant les travaux sur le suivi de trajectoire construit, nous exploiterons trois approches fondamentales: 1) Approximation d'un système plat du même ordre, 2) Immersion dans un système plat d'ordre plus élevé et 3) Exploitation du caractère Liouvillien sur les systèmes non plats.

Dans un premier exemple, nous considérons le problème de construction d'une commande par bouclage pour le système "balle et poutre" (see Hauser *et al* [17]). Un schéma de régulation par "feedback" est proposée pour une manoeuvre d'équilibre à équilibre, qui ne passe pas par l'origine (singulière) des coordonnées généralisées. Le système admet une trajectoire exacte déterminée par les mouvements angulaires de la poutre en ce qui concerne le déplacement nominal désiré de la balle le long de la poutre. Cependant l'équation différentielle qui régit l'élaboration de la trajectoire exacte due à ce déplacement angulaire, possède une discontinuité à droite. Ceci ne permet l'utilisation de cette trajectoire dans ce cas dès que les dérivées secondes du mouvement angulaire nominal sont retenues pour obtenir la trajectoire

de référence nominale d'entrée. En approchant le système par un système différentiellement plat, on peut calculer hors-ligne un état nominal approché et des trajectoires en entrée commandées. On montre que cette approximation obtenue est remarquablement proche de celle calculée, pour autant que les mouvements angulaires de la poutre soient pris en compte. Le schéma de bouclage est complété en utilisant une loi de commande par bouclage, linéaire incrémentale, fonction du temps, obtenue récemment par des techniques algébriques développées par Fliess et Rudolph [14]. La loi de commande proposée est réalisée pour subir d'importantes perturbation d'état. Une sortie de loi de commande par bouclage, basée sur un observateur d'état fonction du temps, est aussi construite, and ses performances sont testées par simulation sur ordinateur.

Le second exemple se rapporte à un exemple "du livre" de système non linéarisable pour lequel une sortie à non minimum de phase est requise pour suivre une trajectoire stabilisante donnée. Une procédure d'approche, basée sur un algorithme itératif hors-ligne, spécifie une trajectoire de référence comme sortie pour un sous-système plat convenable en ce qui concerne le défaut de la trajectoire de sortie désirée. Le caractère "partiellement plat" permet donc de spécifier une entrée nominale et un état de trajectoire nominal pour le système entier. La loi de commande par bouclage est encore construite sur la base d'une linéarisation approchée à partir de la trajectoire nominale calculée hors-ligne et de la spécification d'une loi de commande par bouclage, linéaire fonction du temps qui place les valeurs propres du système en boucle fermée instantanément en des points constants et fixes sur la partie gauche du plan complexe. Cette procédure de construction de bouclage a été démontrée convenable, dans le contexte d'une construction d'un observateur asymptotique, dans la classe linéaire, fonction du temps et pour des systèmes dont les coefficients appartiennent au corps de Hardy, c'est à dire celui dans laquelle la "classe de comparabilité" la plus grande est constitué par des fonctions exponentielles du temps (voir [14]).

Le troisième exemple s'appuie sur un schéma de

*Ce travail est supporté par le Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, et pour le Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, (CONACYT) sur Contrat de Recherche No. 32681-A

régulation par bouclage, qui permet une régulation efficace d'une manoeuvre de descente en phase terminale d'un vaisseau spatial commandé verticalement. L'approche est basée sur une construction de trajectoire hors-ligne qui exploite le fait que le modèle du vaisseau spatial commandé verticalement est "Liouvillien", c'est à dire qu'il montre un défaut en ce qui concerne le caractère plat de la variable masse totale du vaisseau. En fait, on montre que les dynamiques de haute valeur satisfont une équation différentielle scalaire linéaire fonction du temps, et dont le paramètre la définissant, est constituée d'une fonction différentielle de la variable platte. En d'ordre termes, les dynamiques de position du vaisseau peuvent être exprimées en termes d'intégrations de fonctions de la sortie platte et d'un nombre finis de ses dérivées par rapport au temps. Ceci facilite considérablement la construction de la loi de commande par bouclage en autorisant un calcul hors-ligne de la commande idéale en boucle ouverte, laquelle régule le vaisseau vers une position d'équilibre en vol stationnaire. Comme d'habitude, de cette petite hauteur de vol, la manoeuvre d'atterrissage finale peut être accomplie en toute sécurité avec une coupure du réacteur. Cette approche résulte donc d'un régulateur à retour d'état linéaire fonction du temps, complétant la commande en boucle ouverte calculée hors-ligne.

II Système de la balle et de la poutre et quelques de ses propriétés

On considère le système de la balle et de la poutre de la figure 1. En adoptant comme coordonnées généralisées, $q = [r, \theta]^T$, la fonction d'énergie cinétique est donnée par:

$$T(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left[(J + J_B + mr^2) \dot{\theta}^2 + \left(m + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 \right]$$

où J est le moment d'inertie de la poutre par rapport à la liaison pivot, J_B est le moment d'inertie de la balle par rapport à son centre, R est le rayon de la balle et m sa masse.

D'autre part, l'énergie potentielle du système est donnée par: $V(q) = mgr \sin \theta$. Le Lagrangien du système s'écrit donc:

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left[(J + J_B + mr^2) \dot{\theta}^2 + \left(m + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 \right] - mgr \sin \theta$$

En appliquant les équations de Euler-Lagrange, on trouve facilement que le modèle mathématique du système "Balle et Poutre" est donné par:

$$\begin{bmatrix} m + \frac{J_B}{R^2} & 0 \\ 0 & mr^2 + J + J_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -mr\dot{\theta} \\ mr\dot{\theta} & mr\dot{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg \sin \theta \\ mgr \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (1)$$

Il a été montré que la variable de position sur la poutre, r , avait un degré relatif défini mauvais (en fait, entre "3 et 4") (voir [17]). Le système n'est donc pas linéarisable par bouclage avec un retour d'état statique. D'où, il n'est pas non plus possible de linéariser par retour d'état dynamique. Le variété d'équilibre du système a une position horizontale parfaite de la poutre $q = 0$, sans mouvement de translation de la balle, qui peut être située à une distance quelconque de l'origine, $r = \text{constante}$.

II.1 Construction de la trajectoire hors-ligne

Le manque de linéarisabilité par bouclage du système empêche une approche de construction directe pour la stabilisation des mouvements du système autour du variété d'équilibre, duquel nous devons nécessairement exclure l'origine.

On suppose que l'on désire réaliser, dans un intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$, une manoeuvre de transfert d'un point d'équilibre à un autre point d'équilibre de la balle en provoquant un déplacement commandé, d'une position d'équilibre initiale donnée $(r(t_i), \theta(t_i)) = (r_{init}, 0)$, vers une deuxième position d'équilibre $(r(t_f), \theta(t_f)) = (r_{final}, 0)$, avec $r_{final} < r_{init}$ telles que $0 \notin [r_{init}, r_{final}]$. On suppose qu'une trajectoire nominale pour le transfert requis est spécifiée pour la coordonnée de position de la balle, r telle que:

$$r^*(t) = \begin{cases} r_{init} & \text{pour } t < t_i \\ r_{init} + (r_{final} - r_{init})\psi(t, t_i, t_f) & \text{pour } t_i \leq t \leq t_f \\ r_{final} & \text{pour } t > t_f \end{cases}$$

Où la fonction $\psi(t, t_i, t_f)$ est une spline polynomiale suffisamment lisse, satisfaisant $\psi(t_i, t_i, t_f) = 0$ et $\psi(t_f, t_i, t_f) = 1$.

II.2 Construction exacte de la trajectoire hors-ligne

De la première équation de 1 on obtient l'équation différentielle *implicite* suivante pour le déplacement angulaire requis, $\theta^*(t)$, en fonction du déplacement longitudinal nominal, $r^*(t)$

$$mr^*(t)[\dot{\theta}^*(t)]^2 = mg \sin(\theta^*(t)) + \left(\frac{J_B}{R^2} + m \right) \ddot{r}^*(t) \quad (2)$$

L'équation différentielle explicite suivante pour $\theta^*(t)$ est donc facilement obtenue de (2) par des considérations physiques élémentaires et des considérations de faisabilité mathématique simple sur le système:

$$\dot{\theta}^*(t) = - \left[\sqrt{\frac{mg \sin(\theta^*(t)) + \left(\frac{J_B}{R^2} + m \right) \ddot{r}^*(t)}{mr^*(t)}} \right] \text{sign} \left\{ \frac{mg \sin(\theta^*(t)) + \left(\frac{J_B}{R^2} + m \right) \ddot{r}^*(t)}{mr^*(t)} \right\} \quad (3)$$

où "sign" représente la fonction *signum*.

La figure 2 montre une simulation typique de l'équation différentielle (2.3) avec les paramètres suivants: $m = 0.11$

[Kg], $R = 0.015$ [m], $L = 0.5$ [m], $J_B = 10^{-5}$ [N-m/s²], $J = 10^{-2}$ [N-m/s²], $r_{init} = 0.8$ [m], $r_{final} = 0.3$ [m], et un spline polynomial "lisse" interpolant entre 0 et 1,

$$\psi(t, t_i, t_f) = \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^5 \times \left[\gamma_1 - \gamma_2 \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right) + \dots - \gamma_6 \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^5 \right]$$

$$\gamma_1 = 252, \gamma_2 = 1050, \gamma_3 = 1800,$$

$$\gamma_4 = 1575, \gamma_5 = 700, \gamma_6 = 126$$

et $t_i = 2$ [s], $t_f = 5.5$ [s].

Malheureusement, aucune stratégie de conception de commande traditionnelle basée sur la précédente construction d'une trajectoire hors-ligne ne prouve que cela soit possible, ceci étant dû au manque de différentiabilité de la vitesse angulaire élaborée, requise pour le calcul hors-ligne de l'effort d'entrée nominal. Cependant, la solution exacte obtenue de (2.3) en fournit une qui permet de valider partiellement les schémas solutions approchés, comme celle proposée dans le paragraphe suivant.

II.3 Construction de la trajectoire approchée hors-ligne

Si l'on ne tient pas en compte le terme de la force centripète $-mr\dot{\theta}^2$, dans la première équation du système (2.1), une construction de la trajectoire approchée peut être réaliser en fonction de la relation résultante suivante:

$$\theta_a^*(t) = -\arcsin \left[\frac{1}{g} \left(1 + \frac{J_b}{mR^2} \right) \ddot{r}^*(t) \right] \quad (4)$$

La figure 3 montre que, pour une manoeuvre de transfert suffisamment lente qui garantit de petites forces centripètes, l'approximation (2.4) est assez bonne, quand on la compare avec la construction de la trajectoire angulaire exacte. Dans la simulation fournissant cette figure, nous avons utilisé les mêmes paramètres que précédemment qui garantissent une force centripète petite.

La relation approchée (2.4) fait de la position de la balle, r , une sortie plate qui nous permet de calculer une trajectoire de référence nominale pour la variable d'entrée en effort. En utilisant la deuxième équation dans (2.1), on obtient

$$\tau^*(t) = mgr^*(t) \cos(\theta_a^*(t)) + 2mr^*(t)\dot{r}^*(t)\dot{\theta}_a^*(t) + (m[r^*(t)]^2 + J + J_B)\ddot{\theta}_a^*(t)$$

II.4 Design de la commande

II.4.1 Une commande par retour d'état:

On définit les variables d'état et de sortie comme étant: $r_{1,\delta} = r - r^*(t)$, $r_{2,\delta} = \dot{r} - \dot{r}^*(t)$, $\theta_{1,\delta} = \theta - \theta_a^*(t)$, $\theta_{2,\delta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_a^*(t)$ et $u_\delta = \tau - \tau^*(t)$.

La linéarisation du système autour de la trajectoire nominale $(r^*(t), \dot{r}^*(t), \theta_a^*(t), \dot{\theta}_a^*(t), u^*(t))$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{r}_{1,\delta} &= r_{2,\delta} \\ \dot{r}_{2,\delta} &= B[\dot{\theta}_a^*(t)]^2 r_{1,\delta} - Bg \cos \theta_a^*(t) \theta_{1,\delta} \\ &\quad + 2Br^*(t)\dot{\theta}_a^*(t)\theta_{2,\delta} \\ \dot{\theta}_{1,\delta} &= \theta_{2,\delta} \\ \dot{\theta}_{2,\delta} &= -\frac{1}{(m[r^*(t)]^2 + J + J_B)^2} \left\{ \left[2mr^*(t) \left(-2mr^*(t)\dot{\theta}_a^*(t)\dot{r}^*(t) - mgr^*(t) \cos(\theta_a^*(t)) + u^*(t) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2m\dot{\theta}_a^*(t)\dot{r}^*(t) + mg \cos(\theta_a^*(t))}{m[r^*(t)]^2 + J + J_B} \right] \right\} r_{1,\delta} \\ &\quad - \left[\frac{2mr^*(t)\dot{\theta}_a^*(t)}{m[r^*(t)]^2 + J + J_B} \right] r_{2,\delta} \\ &\quad + \left[\frac{mgr^*(t) \sin(\theta_a^*(t))}{m[r^*(t)]^2 + J + J_B} \right] \theta_{1,\delta} \\ &\quad - \left[\frac{2mr^*(t)\dot{r}^*(t)}{m[r^*(t)]^2 + J + J_B} \right] \theta_{2,\delta} \\ &\quad + \left[\frac{1}{m[r^*(t)]^2 + J + J_B} \right] u_\delta \end{aligned} \quad (5)$$

En prenant en compte les identifications évidentes, le système linéaire est de la forme, $\dot{x}_\delta = A(t)x_\delta + b(t)u_\delta$, avec,

$$\dot{x}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21}(t) & 0 & a_{23}(t) & a_{24}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41}(t) & a_{42}(t) & a_{43}(t) & a_{44}(t) \end{bmatrix} x_\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4(t) \end{bmatrix} u_\delta, \quad x_\delta = \begin{bmatrix} r_{1,\delta} \\ r_{2,\delta} \\ \theta_{1,\delta} \\ \theta_{2,\delta} \end{bmatrix}$$

Pour les trajectoires n'incluant pas l'origine des coordonnées, le système linéaire fonction du temps (5) est trouvé pour être uniformément commandé d'après le critère du rang établi par Silverman et Meadows [20]. Le critère du rang est testé sur la matrice de commandabilité:

$$C = [b(t), (A - \frac{d}{dt})b(t), \dots, (A - \frac{d}{dt})^3 b(t)]$$

Nous proposons, d'après [14], une commande à retour d'état fonction du temps linéaire et incrémentale, pour la stabilisation du système linéarisé, qui est de la forme:

$$u_\delta = -k_1(t)r_{1,\delta} - k_2(t)r_{2,\delta} - k_3(t)\theta_{1,\delta} - k_4(t)\theta_{2,\delta}$$

avec des gains variables dans le temps, $\{k_1(t), k_2(t), k_3(t), k_4(t)\}$, choisis de telle sorte que le polynôme caractéristique instantané de la matrice du système en boucle fermée, calculé avec: $p(\lambda) = \det[\lambda I - A(t) + b(t)k^T]$, montre des coefficients constant coïncidant avec ceux du polynôme de Hurwitz de la forme, $p(\lambda) = \lambda^4 + \gamma_4\lambda^3 + \gamma_3\lambda^2 + \gamma_2\lambda + \gamma_1$, dont les racines sont situées assez lointainement dans le plan gauche complexe. Cette procédure, utilisée dans [14], dans le contexte de la conception de l'observateur linéaire et fonction du temps de Luenberger, est valide - et on sait qu'elle garantit une stabilité exponentielle du système en boucle fermée linéarisé - grâce au fait que les coefficients des matrices du système en boucle ouverte linéarisé, $A(t), b(t)$, appartiennent à un corp de Hardy.

Les gains fonction du temps sont calculés par:

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \frac{1}{(a_{23}^2 - a_{21}a_{24}^2)b_4} \left\{ a_{21}(a_{23} - a_{24}\gamma_4) \right. \\ &\quad \left. + a_{23}(a_{21}\gamma_3 + \gamma_1 + a_{41}a_{23}) \right. \\ &\quad \left. - a_{21}a_{24}(a_{41}a_{24} + \gamma_2) \right\} \\ k_2(t) &= \frac{1}{(a_{23}^2 - a_{21}a_{24}^2)b_4} \left\{ a_{23}(a_{21}\gamma_4 + a_{23}a_{42} + \gamma_2) \right. \\ &\quad \left. - a_{21}a_{24}(a_{21} + a_{42}a_{24} + \gamma_3) - \gamma_1a_{24} \right\} \\ k_3(t) &= \frac{1}{(a_{23}^2 - a_{21}a_{24}^2)b_4} \left\{ a_{23} \left[a_{21}(a_{23} - a_{24}\gamma_4) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{24}\gamma_2 + (a_{43} + \gamma_3)a_{23} \right] \right. \\ &\quad \left. + a_{24}^2(\gamma_1 - a_{43}a_{21}) \right\} \\ k_4(t) &= \frac{a_{44} + \gamma_4}{b_4} \end{aligned}$$

La commande par bouclage du système non-linéaire est donc synthétisée par:

$$\tau = \tau^*(t) + u_\delta = \tau^*(t) - k^T(t)(x - x^*(t))$$

La figure 4 montre les performances de la commande par bouclage proposée, basée sur une linéarisation approchée autour de la trajectoire construite hors-ligne. Les pôles constants de la boucle fermée ont tous été imposés pour avoir la valeur réelle -2. Comme on peut le voir, la loi de commande proposée possède de bonnes performances même si les écarts initiaux significatifs sont autorisés pour les positions de la balle et de la poutre à partir de la valeur initiale nominale de l'équilibre instable de la trajectoire désirée.

II.5 Une commande par bouclage de sortie

Pour les trajectoires n'incluant pas l'origine des coordonnées, le système linéarisé (5) avec une variable de sortie incrémentale $y_\delta = r_{1,\delta} = cx_\delta = [1, 0, 0, 0]x_\delta$, est trouvé pour être uniformément observable, d'après le

critère du rang établi par Silverman et Meadows [20], guidé par la matrice d'observabilité:

$$O = \left[c^T, (A(t) - \frac{d}{dt})^T c^T, \dots, ((A(t) - \frac{d}{dt})^T)^3 c^T \right]^T$$

Un type d'observateur d'état de Luenberger est donné par:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_\delta = A(t)\hat{x}_\delta + b(t)u_\delta + H(t)(y_\delta - \hat{y}_\delta)$$

avec $\hat{y}_\delta = \hat{r}_{1,\delta}$ et $H(t)$ vecteur colonne, avec ses composantes $h_1(t), \dots, h_4(t)$ constituées de gains variables dans le temps. De tels observateurs peuvent donc être calculés tant que le polynôme $q(\lambda) = \det[\lambda I - A(t) + H(t)c]$ a des coefficients constants coïncidants avec ceux du polynôme de Hurwitz de la forme: $q(\lambda) = \lambda^4 + \beta_4\lambda^3 + \beta_3\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_1$. Puisque, les coefficients de la matrice $A(t)$ et, évidemment, ceux de c , appartiennent à l'ensemble de Hardy, l'observateur proposé garantit une estimation asymptotique exponentielle de l'état du système incrémental (5).

Les gains de l'observateur peuvent être calculés par:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \beta_4 + a_{44} \\ h_2(t) &= (\beta_4 + a_{44})a_{44} + \beta_3 + a_{43} + a_{42}a_{24} + a_{21} \\ h_3(t) &= \frac{m_3a_{23} - a_{24}m_4}{a_{23}^2 + a_{24}(a_{23}a_{44} - a_{24}a_{43})} \\ h_4(t) &= \frac{m_4a_{23} + m_3(a_{23}a_{44} - a_{24}a_{43})}{a_{23}^2 + a_{24}(a_{23}a_{44} - a_{24}a_{43})} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} m_3(t) &= \beta_2 + a_{42}a_{23} - a_{21}a_{44} + a_{41}a_{24} + (\beta_4 + a_{44}) \times \\ &\quad (a_{43} + a_{42}a_{24}) + a_{44} \left[(\beta_4 + a_{44})a_{44} + \beta_3 \right. \\ &\quad \left. + a_{43} + a_{42}a_{24} + a_{21} \right] \\ m_4(t) &= \beta_1 - a_{21}a_{43} + a_{41}a_{23} + (\beta_4 + a_{44})a_{42}a_{23} \\ &\quad + a_{43} [(\beta_4 + a_{44})a_{44} + \beta_3 + a_{43} + a_{42}a_{24} + a_{21}] \end{aligned}$$

Le vecteur d'état estimé, $\hat{x}_\delta$, est alors utilisé dans la loi du retour d'état dérivée dans le paragraphe précédent

$$\tau = \tau^*(t) - k^T(t)\hat{x}_\delta$$

Les figures 5 et 6 montre les résultats des simulations du système non-linéaire en boucle fermée commandé par retour sur la sortie et sujet à des écarts initiaux significatifs par rapport à la trajectoire nominale proposée et à des erreurs d'estimation initiales raisonnable.

III Stabilisation du système à non minimum de phase non linéarisable

On considère le système non-linéaire de fonctions affines et lisses suivant, déjà considéré dans Hirshorn [15],

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3^2 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \tag{6}$$

Soient f et g représentant les ensembles vectoriels

$$f = \begin{bmatrix} x_3^2 - x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On montre facilement que le système n'est pas exactement linéarisable par retour d'état *statique*. D'où, d'après les résultats de Charlet et al [7], le système n'est pas linéarisable par retour d'état dynamique non plus. La raison est la suivante: même si les ensembles vectoriels définis par $\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\}$ sont globalement linéairement indépendants, la distribution générée par $\{g, \text{ad}_f g\}$ n'est pas involutive. Les conditions bien connues pour la linéarisation par bouclage ne fonctionnent pas (voir Isidori [16]). Le système est donc non différentiellement plat (voir Fliess et al, [12],[13], pour les définitions et les résultats de base) et il montre un défaut caractérisé par la variable x_1 . Le plus grand sous-système linéarisable est clairement celui spécifié par les variables (x_2, x_3) avec la sortie plate donnée par $F = x_2$. Notez que le changement inversible global des coordonnées d'état $z_1 = x_1$, $z_2 = x_3^2 - x_2$, $z_3 = x_3$ révèle facilement que la variable défaut, x_1 , est une sortie à non minimum de phase.

III.1 Schéma de formulation de problème et de conception de commande

On désire stabiliser asymptotiquement la variable de défaut, x_1 , vers 0 en la forçant à suivre une trajectoire donnée adéquate, $x_1^*(t)$, qui atteint l'objectif de stabilisation désiré en un temps fini.

Le problème fondamental est de spécifier une trajectoire de référence convenable $F^*(t)$ correspondante pour la sortie du sous-système plat $F = x_2$. Notez que de la première équation de (6), la relation entre $x_1^*(t)$ et $F^*(t)$ conduit à l'équation différentielle non-linéaire implicite suivante:

$$(\dot{F}^*)^2 = F^* + \dot{x}_1^*(t) \quad (7)$$

dont les solutions ne devraient pas exister pour certaines références $x_1^*(t)$ et quand elles existent, elles devraient être instables. Par exemple pour $x_1^*(t)$ identiquement nul, et $\dot{F}(t_0) > 0$, (7) montre deux solutions instables possibles $F^*(t) = [\sqrt{F(t_0)} + (1/2)(t - t_0)]^2$ et $F^*(t) = [\sqrt{F(t_0)} - (1/2)(t - t_0)]^2$.

On suppose pour le moment qu'une trajectoire de référence faisable, $F^*(t)$, peut être calculée pour la variable x_2 , sur la base d'une trajectoire nominale donnée, $x_1^*(t)$, pour la variable de défaut x_1 . Il vient alors qu'un état nominal et des trajectoires de référence d'entrée nominales peuvent être facilement calculés grce au caractère partiel plat du système. En effet,

$$x_1 = x_1^*(t), \quad x_2 = x_2^*(t) = F^*(t), \quad x_3 = x_3^*(t) = \dot{F}^*(t),$$

$$u = u^*(t) = \ddot{F}^*(t)$$

La linéarisation approchée du système non-linéaire (6), autour de l'état nominal calculé et des trajectoires

d'entrée, est donnée par,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(\dot{F}^*(t))^2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_\delta \quad (8)$$

avec $x_{i\delta} = x_i - x_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$ et $u_\delta = u - u^*(t)$.

Le système (8) est trouvé pour être uniformément commandé pour ces trajectoires satisfaisant partout les restrictions, $\ddot{F}^*(t) \neq -1/2$. Ce fait est facilement établi en considérant le test de rang de commandabilité, d à Silverman et Meadows [20],

$$C = \begin{bmatrix} b, (A(t) - \frac{d}{dt})b, (A(t) - \frac{d}{dt})^2 b \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{F}^*(t) & -1 - 2\ddot{F}^*(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est clair que, aussi longtemps que $F^*(t)$ est donnée par une trajectoire du temps polynomiale, alors les coefficients du système fonction du temps non-linéaire (8) appartiennent à un corps de Hardy. Une procédure de conception de commande par bouclage systématique, expliquée dans les paragraphes suivants, peut être alors utilisée pour la stabilisation du système non-linéaire.

Le commande par retour d'état, fonction du temps, linéaire et incrémentale,

$$u_\delta = -k_1(t)x_{1\delta} - k_2(t)x_{2\delta} - k_3(t)x_{3\delta} \\ = \alpha_1 x_{1\delta} - (\alpha_2 - 2\alpha_1 \ddot{F}^*(t))x_{2\delta} - \alpha_3 x_{3\delta} \quad (9)$$

place les valeurs propres instantanées du système linéarisé (8) en des endroits constants du plan complexe, donnés par les racines du polynôme,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_1$$

Evidemment, les coefficients du polynôme $p(\lambda)$ sont choisis de telle sorte qu'il soit un polynôme de Hurwitz avec des racines suffisamment éloignées dans la partie gauche du plan complexe. Ainsi, pour une large classe de trajectoires de référence, respectant la condition $\ddot{F}^*(t) \neq -1/2$, la commande par bouclage proposée (9) garantit la stabilité asymptotique globale vers 0 pour les variables d'état incrémentales, x_δ . Comme conséquence, la commande fonction du temps

$$u = u^*(t) + \alpha_1 x_{1\delta} - (\alpha_2 - 2\alpha_1 \ddot{F}^*(t))x_{2\delta} - \alpha_3 x_{3\delta} \\ = \ddot{F}^*(t) + \alpha_1 (x_1 - x_1^*(t)) \\ - (\alpha_2 - 2\alpha_1 \ddot{F}^*(t))(x_2 - F^*(t)) - \alpha_3 (x_3 - \dot{F}^*(t))$$

localement asymptotiquement stabilise le système non-linéaire donné (6) vers la trajectoire d'état désirée, en atteignant l'équilibre stable désiré.

III.2 Génération hors-ligne d'une trajectoire de référence de sortie plate

Un schéma pour générer une trajectoire de référence $x_2^*(t) = F^*(t)$ qui satisfait approximativement la relation

actuelle (7) entre la sortie plate x_2 et la sortie plate x_1 , peut être obtenu en regardant la première équation différentielle, nommée: $\dot{x}_1 = x_2^2 - x_2 = (\dot{x}_2)^2 - x_2$, comme l'équation d'opérateur différentiel non-linéaire (non borné) suivant, en prenant pour n'importe quelle fonction lisse $x_1 = x_1^*(t)$, dans l'espace des fonctions réelles lisses, défini sur la recte réelle R , par

$$x_2 = T(x_2) = (\dot{x}_2)^2 - \dot{x}_1^*(t) \quad (10)$$

Les solutions approchées candidates aux équations de l'opérateur, telle que (10), peuvent être obtenues, sous restrictions de teneur de fréquence convenable, en discrétisant l'équation de l'opérateur en processus itératif fonctionnel séquentiel de la forme:

$$x_{2,k+1}(t) = T(x_{2,k}(t)) = (\dot{x}_{2,k})^2 - \dot{x}_1^*(t) \quad (11)$$

Le processus itératif débute par une approximation initiale raisonnable $x_{2,0}(t)$.

En prenant comme première approximation: $x_{2,0} = \text{constant}$, on obtient, de (11), la séquence suivante d'approche des candidats de référence pour la variable plate x_2 en fonction de $x_1^*(t)$,

$$\begin{aligned} x_{2,0} &= \text{constant} \\ x_{2,1} &= -\dot{x}_1^*(t) \\ x_{2,2} &= (-\ddot{x}_1^*(t))^2 - \dot{x}_1^*(t) \\ x_{2,3} &= [2\ddot{x}_1^*(t)(x_1^*)^{(3)}(t) - \ddot{x}_1^*(t)]^2 - \dot{x}_1^*(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (12)$$

Schémas de calcul itératif fonctionnel hors-ligne, semblables à (12), a été utilisé avec succès pour des aspects de construction de trajectoires de problème de suivi de trajectoire de sortie à non minimum de phase, comme ceux rencontrés dans les schémas de conversion de puissance DC/AC utilisant des circuits traditionnels de convertisseurs de puissance DC/DC (voir Sira-Ramírez [21]). Il a été montré que le même type de calculs fournissait des trajectoires de référence efficaces pour les systèmes non-linéarisables par feedback, et non affines, tel que "le pendule de longueur variable" (voir [22]) et aussi pour des systèmes non-linéaires, à non minimum de phase multi-variables tel que le système PVTOL (voir [23]).¹

Les itérations fonctionnelles pour résoudre les équations de l'opérateur, définies sur les espaces de Banach, ont été sujets à des travaux soutenus réalisés par des mathématiciens, en commençant par les travaux de Liouville vers 1836. La méthode a été brillamment formalisée par Banach dans [2] et, plus tard, intensément utilisée les solutions d'équations intégrales par Chaplygin [6]. L'extension se rapportant aux opérateurs non bornés

¹notes qu'en choisissant une trajectoire de référence variant suffisamment lentement, $x_1^*(t)$, les itérations peuvent être rendu effectivement "contractive", dans le sens où la distance entre les sorties produites est rendue uniformément, et monotonement, décroissante.

est due à Baluev [1]. Des références d'introduction assez complètes sont rassemblées dans le livre de Kurpel [18] et de Den Heiger [11]. Des développements plus récents dans ce domaine peuvent être trouvés dans les travaux de Chen *et al* [10]. Notez que si l'on prend $F^*(t) = x_{2,1}(t) = -\dot{x}_1^*(t)$ comme trajectoire de référence pour x_2 , les variables d'état nominales et les trajectoires d'entrée nominales sont données par,

$$(x_1, x_2, x_3, u) \mapsto (x_1^*(t), -\dot{x}_1^*(t), -\ddot{x}_1^*(t), -(x_1^*)^{(3)}(t)) \quad (13)$$

on peut facilement voir que la trajectoire du système adoptée (13) est une trajectoire de référence nominale naturelle pour le système commandable linéaire suivant,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned} \quad (14)$$

qui peut être vu comme une approximation plate du premier ordre, autour de l'origine, du système original (6). Notez que les systèmes (6) et (14) ont la même linéarisation (jacobienne) commandable, donnée par (8), autour de n'importe quel point d'équilibre de la forme $(x_1 = \text{constant}, x_2 = 0, x_3 = 0)$. Il en suit que, en utilisant un schéma de linéarisation approché, une trajectoire nominale de la forme (13), prescrit par (14), peut être aussi suivi par le système non-linéaire (6). Evidemment, la trajectoire désirée, $x_1^*(t)$, peut être prescrite comme x_1 lisse, d'une valeur initiale arbitraire constante x_{init} , vers la valeur finale désiré zéro, en un temps fini, à condition que la condition $x_1^*(t) \neq 1/2$ soit stipuleusement respectée.

Si l'on utilise l'approximation

$$F^*(t) = x_{2,2}(t) = (\ddot{x}_1^*(t))^2 - \dot{x}_1^*(t),$$

la trajectoire de référence

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, u) &\mapsto \\ &(\dot{x}_1^*(t), (\ddot{x}_1^*(t))^2 - \dot{x}_1^*(t), 2\ddot{x}_1^*(t)x_1^{(3)*}(t) - \ddot{x}_1^*(t), \\ &2[(x_1^{(3)*}(t))^2 + \ddot{x}_1^*(t)x_1^{(4)*}(t)] - x_1^{(3)*}(t)) \end{aligned}$$

constitue une trajectoire de référence nominale naturelle pour le système différentiellement plat, implicite,

$$\begin{aligned} (-\ddot{x}_1)^2 - \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u \end{aligned}$$

qui n'est pas trivialement déductible du système original (6).

III.3 Résultats des simulations

III.3.1 Etat nominal hors-ligne et conception de la trajectoire de référence d'entrée:

La trajectoire de référence, $x_1^*(t)$, pour la variable de défaut, x_1 , à été choisie pour être une spline polynomiale,

ou polynôme de Bézier, en interpolant entre une valeur initiale constante x_{init} , supposée être valide durant un intervalle initial $[t_1, T]$ et une valeur finale désirée de zéro. La transition est atteinte d'une manière "lisse" durant un intervalle de temps fini donné par $[t_1, T]$. La trajectoire désirée est alors,

$$x_1^*(t) = \begin{cases} x_{init} & \text{for } t \in [t_0, t_1] \\ x_{init} \left\{ 1 - \left(\frac{t-t_1}{T-t_1} \right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t-t_1}{T-t_1} \right) + \dots \right. \right. \\ \quad \left. \left. - r_6 \left(\frac{t-t_1}{T-t_1} \right)^6 \right] \right\} & \text{for } t \in [t_1, T] \\ 0 & \text{for } t > T \end{cases}$$

avec

$$r_1 = 252, \quad r_2 = 1050, \quad r_3 = 1800, \quad r_4 = 1575,$$

$$r_5 = 700, \quad r_6 = 126$$

On pose $t_1 = 4$ et $T = 12$ pour garantir une petite valeur de $\dot{F}^*(t)$, et pour rendre aussi cette fonction uniformément bornée loin de la valeur singulière $\dot{F}^*(t) = -1/2$.

La trajectoire de référence pour la sortie du sous-système plat x_2 a été premièrement choisie pour être l'approximation étiquetée, $x_{2,1}(t)$, générée par l'algorithme de calcul itératif précédent. Les trajectoires de référence pour les variables, x_3 et u , correspondant à la première approximation, ont été respectivement identifiées comme $x_{3,1}$ et $u_1(t)$. Ces dernières ont été posées comme: $x_{3,1}(t) = \dot{x}_{2,1}(t) = -x_1^*(t)$. On a aussi utiliser la seconde trajectoire de référence candidate $x_{2,2}(t)$, obtenue de la même procédure décrite plus haut. Dans le second cas, nous posons, $F^*(t) = x_{2,2}(t) = (\dot{x}_1^*(t))^2 - \dot{x}_1^*(t)$. Ce choix produit les trajectoires de référence suivantes pour la variable x_3 et pour la commande u , identifiées maintenant, respectivement, comme $x_{3,2}$ et u_2 ,

$$\begin{aligned} x_3^*(t) &= x_{3,2}(t) = \dot{F}^*(t) = 2\dot{x}_1^*(t)x_1^{(3)}(t) - \ddot{x}_1^*(t) \\ u^*(t) &= u_2(t) = 2 \left[\left(x_1^{(3)}(t) \right)^2 + \ddot{x}_1^*(t)x_1^{(4)}(t) \right] \\ &\quad - \left(x_1^{(3)}(t) \right) \end{aligned}$$

La figure 7 montre les trajectoires nominales calculées hors-ligne, pour l'état et les variables d'entrée du système, correspondant, respectivement, à la première et à la seconde trajectoire de référence candidate, $x_{2,1}(t)$, $x_{2,2}(t)$, pour la sortie du sous-système plat x_3 .

III.4 Spécification de la commande et performance en boucle fermée

Les pôles constants du système en boucle fermée fonction du temps ont été choisis pour être les racines du polynôme de Hurwitz,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + \alpha) \\ &= \lambda^3 + (\alpha + 2\xi\omega_n)\lambda^2 + \omega_n(2\alpha\xi + \omega_n)\lambda + \alpha\omega_n^2 \end{aligned}$$

avec $\omega_n = 1.3$, $\xi = 0.7$ et $\alpha = 2.2$.

Pour illustrer la procédure de conception de la commande proposée, nous avons pris comme signal de référence pour la sortie du sous-système plat x_2 , le signal $x_{2,2}(t)$. On remarque que les réponses en boucle fermée obtenues pour la trajectoire de référence $x_{2,1}(t)$, et les références correspondant à $x_{3,1}$ et u_1 , possèdent des propriétés de suivi identiques.

La figure 8 montre les réponses en boucle fermée des trois variables d'état ainsi que l'entrée de commande comparée avec l'état de référence et les trajectoires d'entrée. Les états initiaux du système non-linéaire ont été choisis pour être $x_1(0) = 0.4$, $x_2 = -0.1$ and $x_3(0) = 0.1$. La figure 9 montre les erreurs de suivi d'état $e_1(t) = x_1 - x_1^*(t)$, $e_2 = x_2 - F^*(t) = x_2 - x_{2,2}(t)$, $e_3 = x_3 - \dot{F}^*(t) = x_3 - \dot{x}_{2,2}(t)$. Les simulations démontrent clairement les caractéristiques de suivi satisfaisantes de la commande par retour d'état fonction du temps proposée.

IV Un Modèle d'Atterrissage pour un Vaisseau Commandé Verticalement

IV.1 Un système non différentiellement plat

On considère le modèle non-linéaire décrivant le mouvement et le comportement de la masse, d'un véhicule en mouvement commandé en essayant un atterrissage régulé verticalement sur une surface d'une planète dont l'accélération gravitationnelle g est constante et la résistance atmosphérique négligeable (voir [19], [3] et [24]. Voir aussi la discussion intéressante apparaissant dans le paragraphe écrit par Cellier *et al* dans le "CRC Control Handbook" [5]).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{\sigma\alpha}{x_3} u \\ \dot{x}_3 &= -\sigma u \end{aligned} \quad (15)$$

où x_1 est la position en hauteur sur l'axe vertical, orienté positivement vers le bas (c'est à dire $x_1 < 0$ pour l'altitude actuelle), x_2 est la vitesse de descente et x_3 représente la masse combinée du véhicule et le carburant résiduel (voir Figure 10). La commande d'entrée est représentée par le taux commandé d'éjection par unité de temps, notée u . Le paramètre σ est la vitesse d'éjection relative. La constante α est un paramètre positif tel que le produit $\sigma\alpha$ soit le déplacement maximum du moteur en freinage. Les valeurs de la commande u sont restreintes à l'intervalle $[0, 1]$. Ceci signifie que le vaisseau ne peut pas accélérer vers la surface de la planète et que l'accélération descendante maximale est représentée par la condition de chute libre $u = 0$.

Il est assez facile de montrer que le système au dessus n'est pas linéarisable par retour d'état statique et donc, d'après les résultats de Charlet *et al*, [7], qu'il n'est pas non plus linéarisable par retour d'état dynamique. Comme résultat, le système n'est pas différentiellement plat [12],[13]. Par exemple, considérons la transformation de coordonnées d'état inversible localement suivante,

valide loin de la ligne de singularité $x_3 = 0$,

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 & x_1 &= z_1 \\ z_2 &= x_2 & x_2 &= z_2 \\ z_3 &= x_2 - \alpha \ln x_3 & x_3 &= \exp\left(\frac{z_2 - z_3}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Le système transformé montre clairement une coordonnée non commandable donnée par z_3 ,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= g - \sigma \alpha \exp\left(\frac{z_3 - z_2}{\alpha}\right) u \\ \dot{z}_3 &= g \end{aligned}$$

IV.2 Le vaisseau en atterrissage lent comme système Liouvillien

Le système (15) possède donc un défaut. En fait, le plus grand sous-système linéarisable est représenté par la variable x_3 . La sortie linéarisant de cette sous-système est donc donné par la variable de coordonnée de masse x_3 , notée F . La variable d'altitude x_1 , que nous notons W peut être représentée par la intégrale d'une *fonction différentielle* de la sortie platte F . On a le paramétrisation différentielle-intégrale suivant,

$$x_3 = F ; u = -\frac{\dot{F}}{\sigma} ; \ddot{W} = g + \alpha \frac{\dot{F}}{F} ; x_1 = W ; x_2 = \dot{W} \quad (17)$$

Le système est Liouvillien (voir les articles par Chelouah, [8], et par Chelouah et Petitot, [9], pour des définitions) à partir du moment que la sortie non platte W est expressible en fonction d'intégrales d'une fonction différentielle de F . Plus précisément une fonction implicant F et $\dot{F}$. Notez cependant que dans ce cas particulier, la variable platte F peut être aussi obtenue par des intégrations élémentaires de fonctions de la variable non platte W , et ses dérivées,

$$\dot{F} = -\frac{1}{\alpha} (g - \ddot{W}) F$$

IV.3 Analyse de la paramétrisation différentielle-intégrale

La paramétrisation intégro-différentielle précédente (17) contient des informations utiles en ce qui concerne les relations entre les valeurs d'équilibre statique possible de certaines variables et contient aussi les propriétés des variables du système.

Par exemple, si $W = \bar{W}$ est une constante différente de zéro donnée, ce qui est le cas en condition de vol au-dessus du sol, alors $\dot{W} = \ddot{W} = 0$, et de (17), la variable F est asymptotiquement et exponentiellement stable vers zéro avec la valeur propre $-g/\alpha < 0$. Ceci signifie que le vaisseau consomme toute la masse de carburant (et sa propre masse "morte" aussi!), pour garder la condition d'équilibre constante de la variable d'altitude W . Le système ne montre pas un point d'équilibre significatif physique pour la variable platte F , quand la sortie

non platte W est maintenue constante avec la vitesse de descente identiquement nulle.

Une condition de chute libre est donnée par $\ddot{W} = g$. Ceci implique que $\dot{F} = 0$, c'est à dire que la masse du vaisseau reste constante, et que la commande d'entrée $u = 0$, comme lue dans (17). D'un autre côté, notez que l'accélération gravitationnelle g est nécessairement plus grande que $\ddot{W}$ lors de la descente commandée. Autrement, la masse du vaisseau augmente ce qui est physiquement impossible. Pour des descentes commandées continuellement ($u(t) \neq 0$ sur n'importe quel intervalle de temps), l'une d'elles devrait même assurer que la quantité $-(g - \ddot{W}(t))/\alpha$ est bornée loin de zéro et qu'elle est plus petite que la constante strictement négative $-\mu$. Comme résultat, l'évolution de la variable masse, $F(t)$, est strictement décroissante, et de plus, d'après les résultats de la théorie des systèmes linéaires (voir Callier et Desoer [4], chap. 7), elle est exponentiellement et asymptotiquement stable vers zéro. Notez cependant physiquement parlant, bien avant que $F(t)$ soit proche de zéro, la masse du carburant a été complètement consommée et que la masse du vaisseau est devenue constante. Ainsi, $F(t)$ a une limite inférieure physique représentée par la "masse morte" du vaisseau.

IV.4 Conception de trajectoire et commande en boucle ouverte

On s'assure que le vaisseau est initialement situé à une certaine hauteur de vol, $W(t_0)$, lors de la manoeuvre d'exploration du site d'atterrissage. Notre problème de commande consiste à réaliser une descente commandée qui amène lentement le vaisseau d'une hauteur initiale $W(t_0) = W_0$ à une hauteur finale petite $W(T) = W_T < 0$, en un temps fini $T - t_0$. La commande d'entrée ne devrait pas saturer en ses valeurs extrêmes 0 ou 1, à partir du moment que soit la chute libre, soit une ascension indésirable ne déplace le vaisseau d'équilibre cible. On s'assure que la masse du vaisseau est connue à l'instant t_0 et est donnée par $F(t_0) = F_0$.

Nous proposons une trajectoire construite convenable pour la sortie non platte W , que nous notons $W^*(t)$, et satisfaisant les conditions initiales et finales, $W^*(t_0) = W_0$ et $W^*(T) = W_T$, ainsi que nous supposons précédente, $-(g - \ddot{W}^*(t))/\alpha < -\mu$. Ceci devrait être réalisé en spécifiant une fonction polynomiale spline convenable, suffisamment "lisse", $\psi(t, t_0, T)$, satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} \psi(t_0, t_0, T) = 0 & ; \frac{d^j}{dt^j} \psi(t, t_0, T)|_{t=t_0} \\ & j = 1, 2, \dots \text{finite} \\ \psi(T, t_0, T) = 1 & ; \frac{d^i}{dt^i} \psi(t, t_0, T)|_{t=T} \\ & i = 1, 2, \dots \text{finite} \\ \left(\frac{\ddot{\psi}(t, t_0, T) - g}{\alpha} \right) < -\mu \quad \forall t \in [t_0, T] \end{cases} \quad (18)$$

La trajectoire construite (18) impose un nombre fini de dérivées par rapport au temps initiales et finales pour le "polynôme spline" prescrit $\psi(t, t_0, T)$. Ces conditions garantissent un départ suffisamment lisse de l'équilibre en vol initial et une arrivée suffisamment lisse à la position finale de vol. La trajectoire construite requise serait alors donnée par,

$$W^*(t) = F_0 + \psi(t, t_0, T)(W_T - W_0) \quad (19)$$

La trajectoire construite (19) est utilisée dans la résolution de l'équation différentielle ordinaire linéaire et fonction du temps suivante pour la trajectoire de la masse plate $F^*(t)$

$$\dot{F}^*(t) = -\frac{1}{\alpha} (g - \ddot{W}^*(t)) F^*(t) ; F(t_0) = F_0 \quad (20)$$

La solution de (20) est ensuite utilisée pour le calcul hors-ligne de l'entrée de commande (en boucle ouverte) idéale $u^*(t)$ en parvenant au transfert vers l'altitude désirée sous des conditions idéales. La commande en boucle ouverte, d'après (17), est donnée par

$$u^*(t) = \frac{1}{\sigma\alpha} (g - \ddot{W}^*(t)) F^*(t) \quad (21)$$

IV.5 Une commande par bouclage basée sur une linéarisation approchée

La commande en boucle ouverte (21) ne peut être évidemment utilisée seule dans la manoeuvre de descente actuelle, ceci étant due à son manque de robustesse respectivement par rapport aux perturbations initiales et on-line. L'idée traditionnelle de solution est alors de compenser les petits écarts autour des trajectoires idéales $F^*(t), W^*(t)$. Ceci est accompli sur la base d'un calcul par bouclage (fonction du temps) linéaire à partir d'un modèle approché linéarisé.

On définit $x_{1\delta} = x_1 - W^*(t)$, $x_{2\delta} = x_2 - \dot{W}^*(t)$. L'entrée de commande incrémentale est défini par la relation $u = u^*(t) + u_\delta$.

Une linéarisation jacobienne du système (15) autour des trajectoires construites, est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\delta} &= x_{2\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} &= \left(\frac{g - \ddot{W}^*(t)}{F^*(t)} \right) x_{3\delta} - \left(\frac{\sigma\alpha}{F^*(t)} \right) u_\delta \\ \dot{x}_{3\delta} &= -\sigma u_\delta \end{aligned} \quad (22)$$

Une commande par bouclage fonction du temps linéaire convenable pour le système linéarisé (22) serait donné par

$$u_\delta = \frac{F^*(t)}{\sigma\alpha} \left[\left(\frac{g - \ddot{W}^*(t)}{F^*(t)} \right) x_{3\delta} + 2\zeta\omega_n x_{2\delta} + \omega_n^2 x_{1\delta} + \lambda x_{3\delta} \right]$$

Où ζ , ω_n et λ sont des constantes construites positives représentant les coefficients damping et la fréquence naturelle des dynamiques linéarisées en boucle fermée des variables d'altitude et de vitesse. Le système en boucle fermée est donné par

Le système a boucle fermée est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\delta} &= x_{2\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} &= -2\zeta\omega_n x_{2\delta} - \omega_n^2 x_{1\delta} - \lambda x_{3\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} &= -\frac{1}{\alpha} \left(\lambda F^*(t) + g - \ddot{W}^*(t) \right) x_{3\delta} \\ &\quad - \left[\frac{F^*(t)}{\alpha} \right] (2\zeta\omega_n x_{2\delta} + \omega_n^2 x_{1\delta}) \end{aligned} \quad (23)$$

Les variables incrémentales $x_{1\delta}$ et $x_{2\delta}$ sont les variables d'état du système linéaire fonction du temps avec les valeurs propres placées à volonté dans la partie ouverte gauche du plan complexe. Ce système est excité par la variable d'état $x_{3\delta}$, que l'on peut démontrer comme étant un signal $\mathcal{L}_2$, qui converge vers zéro. Ceci implique que $x_{1\delta}$ et $x_{2\delta}$ sont asymptotiquement stable vers zéro. Pour montrer que $x_{3\delta}$ est un signal $\mathcal{L}_2$, nous avons procédé comme suit. D'après l'hypothèse $-(g - \ddot{W}^*(t))/\alpha < -\mu$, et le fait que λ soit une constante positive, il en suit que la quantité $-(\lambda F^*(t) + g - \ddot{W}^*(t))/\alpha$ est aussi restrictivement plus petite que $-\mu < 0$, pour tout t . A partir du moment que la quantité $F^*(t)$ est exponentiellement stable vers zéro, le second summand de la dernière équation (23) représente un signal d'entrée forcé qui décroît vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. D'après la théorie des systèmes linéaires (voir [4]), la variable incrémentale $x_{3\delta}$ est un signal $\mathcal{L}_2$ qui est aussi asymptotiquement stable vers zéro. Donc, en fait, le système linéaire décrivant le sous-système plat linéarisé ($x_{1\delta}, x_{2\delta}$) est excité par un signal $\mathcal{L}_2$ qui décroît vers zéro. Le système en boucle fermée linéarisé (23) est donc asymptotiquement stable vers zéro pour n'importe quelles valeurs données des conditions initiales incrémentales.

La commande par bouclage proposée est donnée par

$$\begin{aligned} u &= u^*(t) + u_\delta(t) = \left(\frac{g - \ddot{W}^*(t)}{\sigma\alpha} \right) (F^*(t) + x_{3\delta}) \\ &\quad + \frac{F^*(t)}{\sigma\alpha} [2\zeta\omega_n x_{2\delta} + \omega_n^2 x_{1\delta} + \lambda x_{3\delta}] \end{aligned} \quad (24)$$

IV.6 Résultats des simulations

Des simulations ont été réalisées pour tester l'efficacité et la robustesse du schéma de régulation par bouclage proposé (24).

Nous avons prescrit la trajectoire construite $W^*(t)$, pour la sortie non plate x_1 , par le spline polynomial suivant,

$$W^*(t) = W_0 + \psi(t, t_0, T)(W_T - W_0)$$

avec

$$\psi(t, t_0, T) = \left(\frac{t - t_0}{T - t_0} \right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t - t_0}{T - t_0} \right) + \dots \right]$$

$$-r_4 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^3 + r_5 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^4 - r_6 \left(\frac{t-t_0}{T-t_0} \right)^5 \Big]$$

et

$$r_1 = 252 ; r_2 = 1050 ; r_3 = 1800 ; r_4 = 1575$$

$$r_5 = 700 ; r_6 = 126$$

La hauteur de vol de surveillance initiale a été posée $W_0 = -700$ et l'équilibre de vol final $W_T = -1$. La trajectoire prescrite $W^*(t)$ a ses premières dérivées quatrième égales à zéro au temps initial, $t = t_0$, et ses premières dérivées cinquième égales à zéro au temps final, $t = T$. Ceci garantit une manoeuvre d'atterrissage avec des caractéristiques de départ et d'arrivée suffisamment lisses. La masse initiale a été posée à $F_0 = 1500$ Kg. Les paramètres définissant le modèle du système ont été mis à

$$\sigma = 50 \text{ Kg/s} ; \alpha = 200 \text{ m/s} ; g = 1.63 \text{ m/s}^2$$

La figure 11 montre les résultats des calculs hors-ligne représentés par la solution de l'équation différentielle (20) pour la variable masse plate $F^*(t)$, et le calcul de la commande en boucle ouverte. La trajectoire de sortie non plate idéale $W^*(t)$, avec la trajectoire de la masse nominale calculée, $F^*(t)$, permettent à tour de rôle le calcul de la commande en boucle ouverte idéale à partir de l'expression (21). L'évolution dans le temps de ces variables de manoeuvre de descente idéale est montré sur la Figure 11, ainsi que la vitesse verticale idéale, $\dot{W}^*(t)$, correspondante et l'accélération idéale verticale $\ddot{W}^*(t)$.

Les paramètres de commandes ont été posés de façon à obtenir des valeurs propres en boucle fermée réelles pour le système commandé

$$\zeta = 1 ; \omega_n = 0.4 ; \lambda = 0.8$$

La figure 12 représente les performances de la loi de commande par bouclage (24) quand des erreurs initiales significantes sur l'altitude en vol de surveillance initiale sont incluses. Comme il est montré lors des simulations, la commande réussit à mettre la position du vaisseau et la vitesse de descente aux valeurs prescrites de la manoeuvre d'atterrissage construite.

V Conclusions

Dans cette article, nous avons fourni un état aussi bien que des schémas de régulation par bouclage de la sortie pour le système de la balle et de la poutre, qui sont basés sur la construction d'une trajectoire et d'une linéarisation approchée autour de la trajectoire nominale prescrite, calculée à partir d'une approximation plate différentielle des dynamiques du système non-linéaire. Les conceptions de l'observateur et de la commande pour le système linéarisé fonction du temps en résultant, sont construits pour placer les pôles du système en boucle fermée et des dynamiques d'erreurs d'estimation en des valeurs constantes du plan complexe suffisamment éloignées de l'axe

imaginaire. Les techniques de conception du régulateur et de l'observateur peuvent être utilisées grâce au fait que les coefficients des matrices du système en boucle ouverte appartiennent à l'ensemble de Hardy. La méthode proposée peut être aussi étendue pour considérer des manoeuvres plus difficiles incluant des problèmes de suivi de trajectoire. Elle peut être aussi partiellement utilisée dans des schémas de commande hybride, et adaptée pour éviter des singularités implicites dans une manoeuvre de transfert qui inclue de passer par, ou de rester sur l'origine des coordonnées de position du système. Nous avons aussi montré que la sortie à non minimum de phase pour un certain système plat non différentiel, fréquemment utilisé dans la littérature comme exemple de système linéaire affine pénible, peut être efficacement stabilisé localement par une combinaison d'une construction de trajectoire hors-ligne et un schéma de commande par bouclage linéaire fonction du temps. La commande par feedback est construite sur la base d'une linéarisation approchée autour des trajectoires d'entrée et de l'état de référence calculés, suivie d'un placement des pôles fixes de la boucle fermée, réalisé par bouclage d'état incrémental fonction du temps. Les aspects de la construction de la trajectoire hors-ligne reposent sur une procédure itérative fonctionnelle qui demande simplement une ou deux itérations pour obtenir une trajectoire de référence raisonnable, pour les variables d'entrée et de sorties du sous-système plat, sur la base de la variable à non minimum de phase de la trajectoire de référence désirée. Les performances satisfaisantes de la commande par bouclage proposée ont été estimées via des simulations sur ordinateur. Il a été montré que la commande supportait des écarts d'état initiaux relativement importants par rapport à la trajectoire de référence nominale, imposée, calculée hors-ligne. Une approche de conception de trajectoire a été proposée pour la régulation par bouclage d'une manoeuvre d'atterrissage douce d'un système vaisseau spatial commandé verticalement, non différentiellement plat et à non minimum de phase. L'approche est possible grâce au caractère Liouvillien du modèle commandé. Cette caractéristique permet un calcul hors-ligne de tous les signaux pertinents nécessaires au schéma de commande de conception de trajectoire. Les calculs hors-ligne incluent le calcul de l'évolution de la variable non plate qui est en correspondance avec la trajectoire de sortie plate donnée. Ceci nécessite la solution d'une équation différentielle fonction du temps linéaire avec une donnée initiale appropriée. Les calculs hors-ligne incluent aussi ce calcul du signal d'entrée de commande en boucle ouverte en fonction de la trajectoire à sortie plate construite et de la trajectoire à variable non plate calculée, représentée par l'altitude du vaisseau. La commande en boucle ouverte permettrait une descente lisse, sous des conditions de vol idéales, non perturbées, et des initialisations exactes. La commande par bouclage proposée utilise un signal de commande en boucle ouverte calculé hors-ligne complétement avec une commande par retour basée sur linéarisation produisant

les manoeuvres de correction nécessaires on-ligne. Il a été montré que la loi de commande incrémentale, qui est juste une commande par bouclage proportionnelle dérivative avec des termes de compensation fonction du temps, stabilisait asymptotiquement le modèle linéarisé résultant décrivant les écarts de la trajectoire de descente idéale calculée hors-ligne. Les performances de cette commande ont été testées avec satisfaction en utilisant des simulations digitales sur ordinateur lesquelles incluaient des erreurs initiales significatives respectivement aux valeurs initiales de la trajectoire construite.

RÉFÉRENCES

- [1] A. N. Baluev, "On a method by Chaplygin", *Vestnik, Leningrad University*. Vol 11, No. 13, pp. 27-42, 1956.
- [2] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales", *Fund. Math.* Vol. 3, pp. 133-181, 1922.
- [3] V. Cantoni and S. F. Finzi, "Slowest descent on the moon", *SIAM Review*, Vol. 22, No. 4, pp. 495-499, 1980.
- [4] F. M. Callier and Ch. A. Desoer, *Linear Systems Theory*, Springer Texts in Electrical Engineering, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] F. Cellier, H. Elmqvist, M. Otter and W. Levine, *The Control Handbook*, Section II, Chapter 7, pp. 99-100. W. S. Levine (Ed.), CRC Press and IEEE Press, 1996.
- [6] S. A. Chaplygin, "A new method for approximate integration of differential equations", *GITTL*, Moscow, 1950.
- [7] B. Charlet, J. Lévine and R. Marino, "Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization", *SIAM J. of Control and Optimization*, Vol. 29, pp. 38-57, 1991.
- [8] A. Chelouah, "Extensions of differential flat fields and Liouvillian systems" in *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, San Diego, California, USA, December 1997, pp. 4268-4273.
- [9] A. Chelouah and M. Petitot, "Finitely discretizable nonlinear systems: Concepts and definitions" in *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, Louisiana, USA, December 1995. pp. 19-24.
- [10] M. J. Chen, Z. Y. Chen and G. R. Chen, *Approximate Solutions of Operator Equations*. World Scientific, Singapore 1997.
- [11] C. Den Hajer, *The Numerical Solutions of Non-linear Operator Equations by Imbedding Methods*, Mathematics Centre Tracts, Vol. 107, Amsterdam, 1979.
- [12] M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin and P. Rouchon, "A Lie Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems" in *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 5, pp. 922-937, 1999.
- [13] M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin and P. Rouchon, "Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples", *International J. of Control*, Vol. 61, pp. 1327-1361, 1995.
- [14] M. Fliess and J. Rudolph, "Corps de Hardy et observateurs asymptotiques locaux pour systèmes différentiellement plats", *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. II-324, pp. 513-519, 1997.
- [15] R. M. Hirschorn, "Incremental tracking in nonlinear systems", *Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, December 1999, pp. 4808-4809.
- [16] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3d. Edition, Springer-Verlag, London 1995.
- [17] J. Hauser, S. Sastry, and P. Kokotovic, "Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 392-398, 1992.
- [18] N. S. Kurpel', *Projection-Iterative Methods for Solution of Operator Equations*, Vol. 46, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, R.I., 1976.
- [19] J. S. Meditch, "On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing" *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-9, No. 4, pp. 477-484, 1964.
- [20] L. M. Silverman and H. E. Meadows, "Controllability and observability in time-variable linear systems", *SIAM J. Control*, Vol. 5, pp. 64-73, 1967.
- [21] H. Sira-Ramírez, "Flatness and trajectory tracking in sliding mode based regulation of DC-to-AC conversion schemes", *38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, December 1999, pp. 4268-4273.
- [22] H. Sira-Ramírez, "On the control of the variable length pendulum" *38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, December 1999, pp. 1188-1189.
- [23] H. Sira-Ramírez, "Non-minimum Phase Output Reference Trajectory Tracking for a PVTOL Aircraft" *IEEE International CCA/CACSD Conference*, Anchorage, AL, September 25-27, 2000. (to appear).
- [24] H. Sira-Ramírez, "A variable structure control approach to the problem of soft landing on a planet" *Control Theory and Advanced Technology*, Vol. 6, No. 1, pp. 53-73, 1990.

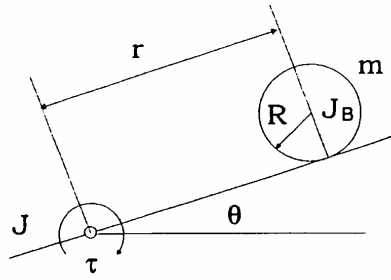


Figure 1: Système de la Balle et de la Poutre.

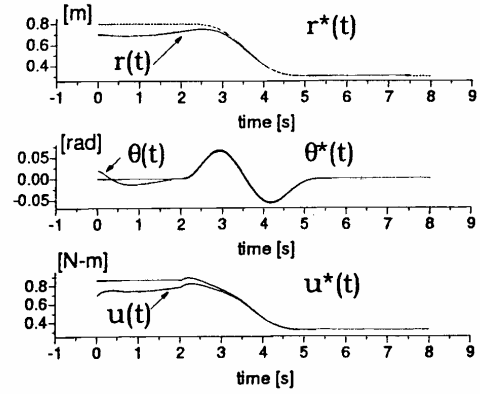


Figure 4: Performances en boucle fermée de la commande par bouclage basée sur une linéarisation approchée.

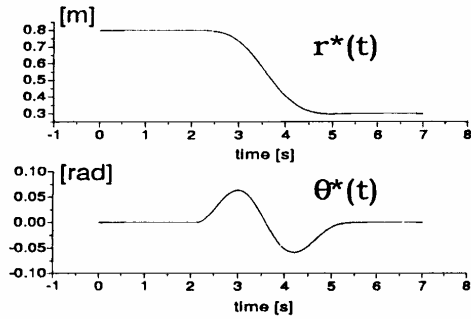


Figure 2: Construction de la trajectoire hors-ligne.

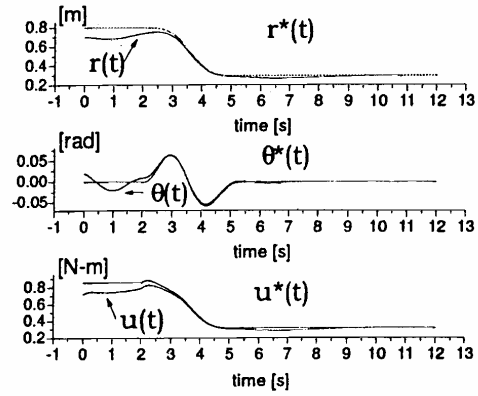


Figure 5: Performances en boucle fermée de la commande par bouclage de sortie basée sur une linéarisation approchée.

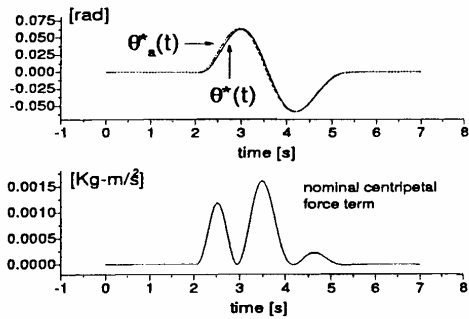


Figure 3: Construction de la trajectoire hors-ligne approchée et magnitude de la force centripète.

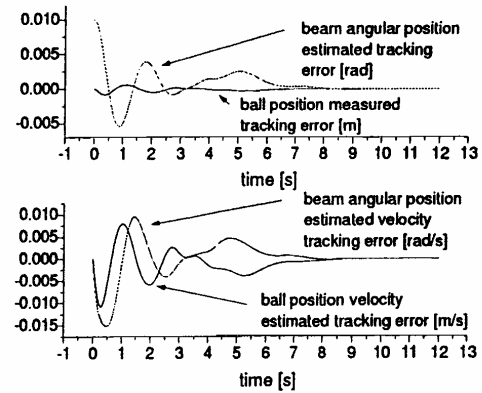


Figure 6: Erreurs de suivi d'état générées par l'estimateur.

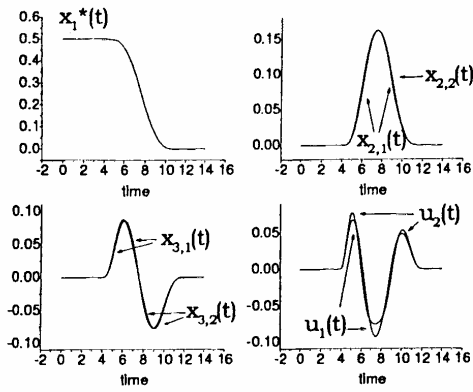


Figure 7: Trajectories d'entrée et d'état nominales calculées hors-ligne.

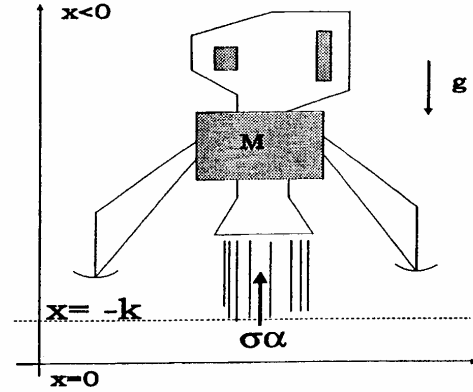


Figure 10: Vaisseau spatial commandé verticalement.

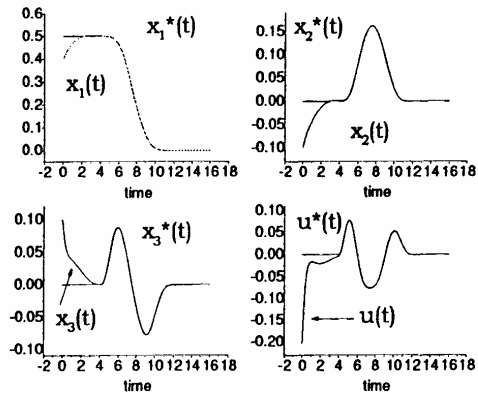


Figure 8: Réponses commandées par bouclage du système non linéarisable.

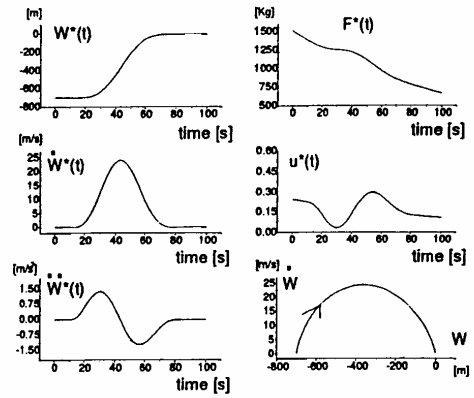


Figure 11: Signals de la trajectoire construite en boucle ouverte.

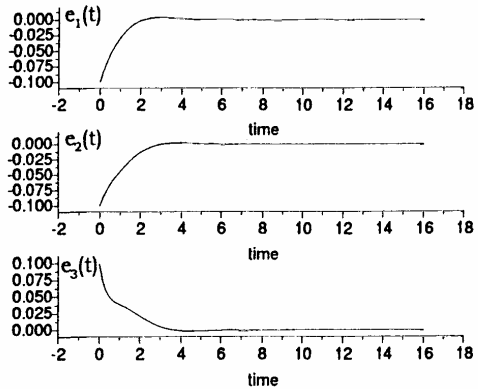


Figure 9: Erreurs de suivi en boucle fermée de la trajectoire d'état.

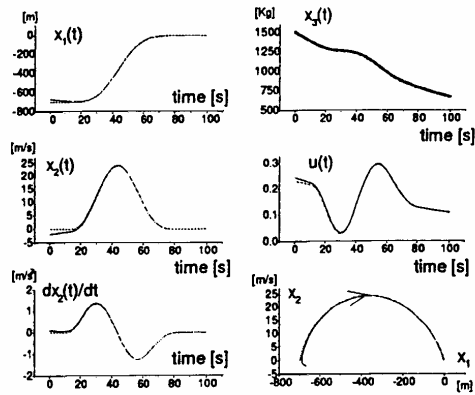


Figure 12: Performances en boucle fermée de la commande calculée hors-ligne et basée sur une linéarisation.