

CONTROL ACTIVO DE VIBRACIONES MECÁNICAS MEDIANTE PLATITUD DIFERENCIAL

Hebertt Sira-Ramírez* Orestes LLanes-Santiago**

* *Departamento de Sistemas de Control
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela
CINVESTAV-IPN
Dept. Ingeniería Eléctrica
México D.F., México
email: hsira@mail.cinvestav.mx*

** *Departamento de Automática y Computación
I.S.P.J.A.E.
La Habana, Cuba
email: orestes@electronica.ispjae.edu.cu*

Resumen. En este artículo se muestra como la propiedad de platitud diferencial, que en los sistemas lineales invariantes en el tiempo es equivalente a la controlabilidad, puede ser usada ventajosamente en la estabilización activa de sistemas de vibración mecánica que sean lineales. El sistema propuesto hace uso de una planificación de trayectoria fuera de línea y un esquema de seguimiento de trayectoria por realimentación en línea para la evolución de la salida plana.

Palabras Claves. Platitud Diferencial, Control Activo, Vibraciones Mecánicas

1. INTRODUCCIÓN

El control de vibraciones en sistemas mecánicos ha sido extensamente tratado en los últimos tiempos. Algunos de estos trabajos son los de Tewani *et al* (1991); Titli *et al* (1993); Wang *et al* (1991); Olgac y Holm (1993a, 1993b), Beard (1994); Herzog (1994); Kim y Wang (1993); Roukieh (1993); Van de Vorst *et al* (1995); Rohman y Al-Sanad (1996). Estos sistemas se han utilizado para solucionar problemas de vibraciones en: mesas de calibración de instrumentos (Taganiki (1981)), en sistemas de suspensión de vehículos (Yue (1989)), en bases para maquinarias (Vilnay (1984)), en control de estructuras flexibles (Pan (1991)) y muchas otras.

Los conceptos de platitud diferencial fueron introduci-

dos por el Prof. M. Fliess y sus colaboradores (Fliess *et al*(1992)). Se ha demostrado que esta propiedad estructural es completamente equivalente a la controlabilidad en el caso lineal (Fliess (1992)). La identificación de una *salida plana* permite lograr fácilmente la estabilización o las tareas de seguimiento de trayectoria para cualquier variable de salida del sistema, incluyendo las salidas de fase no mínima (Ver Fliess *et al*(1998)). En este artículo se propone un esquema de regulación por realimentación para un sistema de vibración mecánico el cual está basado en una planificación de trayectoria que se realiza fuera de línea y en la platitud diferencial. La trayectoria de salida plana nominal propuesta consiste de 1) fase de supresión de la vibración, la cual regula el movimiento no controlado del sistema hacia un valor

Es fácil ver que esta salida parametriza completamente todas las variables del sistema. Para esto se calcula las siguientes derivadas en el tiempo de la salida plana,

$$\begin{aligned} f &= (c^2 - k_2 M_1) x_1 + c M_1 x_2 - c^2 x_3 \\ \dot{f} &= -c(k_1 + k_2) x_1 - k_2 M_1 x_2 + c k_2 x_3 \\ \ddot{f} &= k_2(k_1 + k_2) x_1 - c k_1 x_2 - k_2^2 x_3 \\ f^{(3)} &= \frac{c k_1 (k_1 + k_2)}{M_1} x_1 + \left[k_2(k_1 + k_2) + \frac{c^2 k_1}{M_1} \right] x_2 \\ &\quad - \frac{c k_1 k_2}{M_1} x_3 - \left(\frac{c^2 k_1}{M_1} + k_2^2 \right) x_4 \end{aligned} \quad (6)$$

De estas relaciones, uno obtiene las variables de estado como *funciones diferenciales* de la salida plana.

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{k_2 f + c \dot{f}}{c^2 k_1 + k_2^2 M_1} \\ x_2 &= -\frac{k_2 \dot{f} + c \ddot{f}}{c^2 k_1 + k_2^2 M_1} \\ x_3 &= -\frac{(k_1 + k_2) f + c \dot{f} + M_1 \ddot{f}}{c^2 k_1 + k_2^2 M_1} \\ x_4 &= -\frac{(k_1 + k_2) \dot{f} + c \ddot{f} + M_1 f^{(3)}}{c^2 k_1 + k_2^2 M_1} \end{aligned} \quad (7)$$

La entrada de control es también obtenida como una función de los estados y por lo tanto como una función de las diferentes derivadas en el tiempo de la salida plana. La variable de control puede ser por tanto calculada por la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} f^{(4)} &= -\frac{1}{M_1^2 M_2} [k_2 M_1 M_2 (k_1 + k_2)^2 \\ &\quad + c^2 k_1 M_2 (k_1 + k_2) + c^2 M_1 k_1 k_2 + k_2^3 M_1^2] x_1 \\ &\quad + \frac{1}{M_1^2 M_2} [c M_1 M_2 (k_1 - k_2) (k_1 + k_2) \\ &\quad - c^3 k_1 (M_1 + M_2) - c k_2^2 M_1^2] x_2 \\ &\quad + \frac{1}{M_1^2 M_2} [k_2^2 M_1 M_2 (k_1 + k_2) \\ &\quad + c^2 k_1 k_2 (M_1 + M_2 + k_2^3 M_1^2)] x_3 \\ &\quad + \frac{1}{M_1^2 M_2} [c k_2^2 M_1 M_2 + c^3 k_1 (M_1 + M_2) \\ &\quad + c k_2^2 M_1^2] x_4 \\ &\quad - \frac{1}{M_1^2 M_2} (c^2 k_1 M_1 + k_2^2 M_1^2) u \end{aligned} \quad (8)$$

Si una trayectoria nominal $f^*(t)$ es conocida para la salida plana, la cual corresponde con una transferencia razonable del movimiento no controlado de la salida

plana hacia una posición de equilibrio deseada, que está en completa correspondencia con el valor de equilibrio deseado, y_d , para la salida del sistema $y = x_1$, entonces, todas las trayectorias de las variables de estado del sistema y la entrada nominal de control requerida son perfectamente conocidas.

La parametrización diferencial (7) permite estudiar las relaciones estáticas para el conjunto de sistemas de equilibrio constante. Si un valor deseado para la salida y está dado por $y_d = \bar{x}_1 = 0$, entonces el valor constante correspondiente de la salida plana es también cero, como puede obtenerse de la primera ecuación de (7) haciendo $x_1 = 0$ y $f = \bar{f} = \text{constante}$. Similarmente se obtiene $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \bar{x}_4 = \bar{u} = 0$. Además de lo anterior, la parametrización diferencial estudia la dinámica de los ceros asociada a cualquiera de las variables de estado. Por ejemplo, si $y = x_1$ se quiere mantener constante a un valor $y = \bar{y}$, entonces la correspondiente dinámica de los ceros está dada por,

$$\dot{f} + \frac{k_2}{c} \left[f + \left(\frac{c^3 k_1 + k_2^2 c M_1}{k_2} \right) \bar{y} \right] = 0 \quad (9)$$

la cual es una dinámica asintótica y exponencialmente estable. El valor de equilibrio de la salida plana f correspondiente con el valor constante de la salida y está dado entonces por

$$\bar{f} = - \left(\frac{c^3 k_1 + k_2^2 c M_1}{k_2} \right) \bar{y}$$

Un planteamiento similar puede ser hecho acerca de la dinámica de los ceros asociada con el valor cero de la variable de estado x_2 . En este caso, esta dinámica de los ceros está dada por

$$\ddot{f} + \frac{k_2}{c} \dot{f} = 0$$

la cual claramente indica que \dot{f} es global y exponencialmente estable a cero.

La dinámica de los ceros asociada con un valor constante, \bar{x}_3 , de la coordenada de posición correspondiente a la masa M_2 , es obtenida de (7) como

$$\ddot{f} + \frac{c_1}{M_1} \dot{f} + \frac{k_1 + k_2}{M_1} \left[f + \left(\frac{c^2 k_1 + k_2^2 M_1}{k_1 + k_2} \right) \bar{x}_3 \right] = 0$$

la cual es una dinámica exponencialmente estable con equilibrio constante. Un planteamiento similar puede ser hecho con respecto al valor cero de la velocidad de la masa M_2 , que es la variable x_4 .

3. ESTABILIZACIÓN USANDO PLANIFICACIÓN DE TRAYECTORIA

Suponga que se desea llevar las oscilaciones no controladas de la masa M_1 a una posición de equilibrio, es decir, se desea controlar activamente al sistema mecánico por medio de una entrada de control externa u , tal que en un intervalo de tiempo finito $[t_i, t_f]$, la coordenada de posición x_1 sea establemente llevada al valor de equilibrio cero, con velocidad cero asociada y aceleración cero. Para lo anterior, la entrada de control activo realimentado u será asumida cero antes del instante de aplicación de la misma $t_e < t_i$, por lo que el sistema inicialmente oscilará libremente en respuesta a un conjunto arbitrario y desconocido de condiciones iniciales en el tiempo $t_0 < t_e$.

Proponemos una acción de control en dos fases. Primero, forzar el sistema a seguir una referencia constante de la salida plana cuyo valor será \bar{f}_0 . El efecto de esta primera fase es eliminar todas las oscilaciones en el sistema. Cuando el sistema mecánico ha sido estabilizado a unos valores de desplazamiento constante y de velocidades cero, el estado es entonces forzado a moverse suavemente hacia el origen de coordenadas. Esta segunda fase es realizada, forzando la salida plana f a seguir una adecuada trayectoria la cual lleve a f de un valor constante \bar{f}_0 a cero en el intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$. Note, que acorde a (7), si f es forzada a cero, todas las variables de estado son llevadas a un equilibrio en el origen. El correspondiente controlador puede ser inmediatamente obtenido de la ecuación (8).

Propondremos entonces, la siguiente trayectoria estabilizante para la salida plana f que ha sido escogida en forma arbitraria,

$$f^*(t) = \begin{cases} \bar{f}_0 & \text{para } t < t_i \\ \bar{f}_0 [1 - \psi(t, t_i, t_f)] & \text{para } t_i \leq t \leq t_f \\ 0 & \text{para } t > t_f \end{cases} \quad (10)$$

donde $\psi(t, t_i, t_f)$ interpola suavemente entre el valor 0 y 1 durante el intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$. Es decir $\psi(t_i, t_i, t_f) = 0$ y $\psi(t_f, t_i, t_f) = 1$. La función ψ puede ser especificada como un polinomio de Bézier. El valor \bar{f}_0 es en principio arbitrario, pero puede ser juiciosamente seleccionado a ser una fracción de la máxima amplitud observada de las oscilaciones incontroladas de la variable $f(t)$, $t < t_i$, antes de que la entrada de control u sea aplicada.

La entrada de control realimentado tiene que forzar a la salida plana a seguir la trayectoria $f^*(t)$, que fue establecida fuera de línea, en el intervalo de tiempo $[t_e, \infty) \supset [t_i, t_f]$. El control realimentado se especifica sobre la base de (8) como

$$u = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{M_1^2 M_2} [k_2 M_1 M_2 (k_1 + k_2)^2 \\ & \quad + c^2 k_1 M_2 (k_1 + k_2) + c^2 M_1 k_1 k_2 + k_2^3 M_1^2] x_1 \\ & + \frac{1}{M_1^2 M_2} [c M_1 M_2 (k_1 - k_2) (k_1 + k_2) \\ & \quad - c^3 k_1 (M_1 + M_2) - c k_2^2 M_1^2] x_2 \\ & + \frac{1}{M_1^2 M_2} [k_2^2 M_1 M_2 (k_1 + k_2) \\ & \quad + c^2 k_1 k_2 (M_1 + M_2) + k_2^3 M_1^2] x_3 \\ & + \frac{1}{M_1^2 M_2} [c k_2^2 M_1 M_2 + c^3 k_1 (M_1 + M_2) \\ & \quad + c k_2^2 M_1^2] x_4 - v(t) \end{aligned} \right\} \left(\frac{M_1^2 M_2}{c^2 k_1 M_1 + k_2^2 M_1^2} \right) \quad (11)$$

con

$$v(t) = \frac{d^4}{dt^4} f^*(t) - \alpha_3 \left(\frac{d^3}{dt^3} f - \frac{d^3}{dt^3} f^*(t) \right) \\ - \alpha_2 \left(\ddot{f} - \ddot{f}^*(t) \right) - \alpha_1 \left(\dot{f} - \dot{f}^*(t) \right) \\ - \alpha_0 \left(f - f^*(t) \right) \quad (12)$$

con el conjunto de coeficientes, $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, seleccionados como un conjunto de coeficientes Hurwitz, que ponen convenientemente los polos de las dinámicas lineales de error de seguimiento de lazo cerrado.

El seguimiento de la señal de error $e_f = f - f^*(t)$, es por tanto construido para satisfacer la siguientes dinámicas lineales asintótica y exponencialmente estables

$$e_f^{(4)}(t) + \alpha_3 e_f^{(3)}(t) + \alpha_2 e_f^{(2)}(t) + \alpha_1(t) e_f^{(1)} \\ + \alpha_0 e_f(t) = 0 \quad (13)$$

en el intervalo de tiempo $[t_e, \infty)$.

4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Las simulaciones fueron desarrolladas para comprobar el buen comportamiento del controlador activo propuesto. Los valores utilizados para los parámetros del sistema fueron los siguientes,

$$M_1 = 0.5 \text{ [Kg]}, \quad M_2 = 0.2 \text{ [Kg]}, \quad k_1 = 175 \text{ [N/m]}, \\ k_2 = 450 \text{ [N/m]}, \quad c = 16 \text{ [N/(m/s)]}$$

La trayectoria planificada $f^*(t)$ para la salida plana fue especificada por el siguiente polinomio de Bézier,

$$\psi(t) = \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^5 \left[r_1 - r_2 \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right) \right]$$

$$+r_3 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^2 - \dots - r_6 \left(\frac{t-t_i}{t_f-t_i} \right)^5]$$

con,

$$r_1 = 252, r_2 = 1050, r_3 = 1800, r_4 = 1575,$$

$$r_5 = 700, r_6 = 126$$

$$\text{y } t_e = 4 \text{ [s]}, t_i = 6 \text{ [s]}, t_f = 8.$$

Los coeficientes Hurwitz del polinomio característico fueron tomados iguales a los del siguiente polinomio estable de cuarto orden en la variable compleja λ ,

$$(\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2)^2$$

$$\text{con } \xi = 0.7, \omega_n = 15 \text{ [rad/s]}.$$

La figura 2 muestra la respuesta del sistema para las acciones de regulación del controlador diseñado. Las dos fases de estabilización están claramente mostradas con valores razonables de los transientes y de la amplitud de la entrada de control.

Con el objetivo de evitar un cambio muy brusco de la entrada de control se dota al mismo de un "embrague" que incrementa suavemente el valor del control desde cero hasta su máximo valor. Para esto, se prescribe de nuevo un factor polinómico de Bézier $k(t)$ el que multiplica la amplitud del control realimentado $u(t)$. El "embrague" dota al sistema de una transición suave hacia una acción de control total durante un período de tiempo $[t_a, t_b]$ con $t_a = t_e = 4 \text{ [s]}$ y $t_b = 6 \text{ [s]}$. La respuesta controlada se muestra en la figura 3.

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto e ilustrado una opción de seguimiento de trayectoria para la estabilización de un sistema mecánico de vibración. El esquema de regulación está basado en una planificación de trayectoria fuera de línea y la propiedad de plitud diferencial que exhibe el sistema estudiado. Los resultados de la simulación son muy estimulantes ya que los parámetros usados fueron seleccionados de una plataforma de prueba real. Las desviaciones de posición, y las amplitudes de las velocidades y la fuerza externamente aplicada son muy razonables y la entrada de control realimentado es físicamente realizable.

6. REFERENCIAS

Beard A.M., Shubert D.W. and Von Flotow A.H. (1994); "A practical product implementation of

an active/passive vibration isolation system"; *Proceedings of Active Control of Vibration and Noise*, ASME, Vol. 75, pp. 485-492.

Burdness J.S., Metcalfe V.V.(1985); "The active control forced vibration produced by arbitrary disturbances"; *Transaction ASME Journal of Vibration Acoustic Stress and Reliability in Design*, Vol. 107, pp. 33-37.

Fliess, M., Lévine, J., Martín, P., and Rouchon, P., "Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats", *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, Mathématiques*, Vol. 315, pp. 619-624, 1992.

Fliess, M., "A Remark on Willems trajectory characterization of linear controllability", *Systems and Control Letters*, Vol. 19, pp. 43-45, 1992.

Fliess, M. Sira-Ramirez, H., Márques, R., "Regulation of non-minimum phase outputs: A flatness based approach" in *Perspectives in Control: Theory and Applications*, D. Normand-Cyrot (Ed.), Springer, London 1998.

Hersog R.(1994); "Active versus Passive vibration absorbers"; *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp. 367-371, 1994.

Kim Y.S. and Wang K.W.(1993); "On the sliding mode control of structural vibrations via variable damping"; *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, No. 5, pp. 421-430, 1993.

Lévine, J., "Are there new industrial perspectives in the control of mechanical systems?" in *Advances in Control*, Paul M. Frank (Ed.), Springer, London, 1999.

Olgac N. and Holm-Hansen B.T.(1993a); "A new direction in active vibration absorption: delayed resonator"; *Symposium on Mechatronic*, ASME, pp. 15-20.

Olgac N. and Holm-Hansen B.T.(1993b); "Vibration Absorbers utilizing only position measurements for time varying excitation frequencies," *Symposium on Mechatronic*, ASME, pp. 223-229.

Pan T.(1991); "Dual active and passive control of large flexible structures"; *Transactions ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 113, pp. 469-475.

Rohman M.A. and Al-Sanad H.(1996); "Control of Nonlinear Vibrations of Foundations Built in Sand Soil"; *Journal of Vibration and Control* Vol. 2, No. 1, pp. 53-68.

Roukieh S. and Titli A.(1993); "Robust Sliding Mode Control of semi-active and active suspension for private cars"; *IFAC World Congress*; Sydney, Vol. 3, pp. 155-159.

Taganaki W.T.(1981); "Isolation en vibrations d'une table par une servocommande"; *Journal of the Faculty of Engineering, The University of Tokio (B)* 37, n.3, pp. 631-656.

- Tewani S.G., Walcott B.L. and Rouch K.E (1991); "Active Optimal Vibration Control using Dynamic Absorber"; *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, pp. 1182-1187.
- Titli A., Roukieh S. and Dayre E.(1993); "Three Control Approaches for the design of Car Semi-Active Suspension (Optimal Control, Variable Structure Control, Fuzzy Control)"; *Proceedings of the 32nd IEEE Control Decision Conference*, San Antonio, Texas, pp. 2962-2963.
- Van de Vorst D., Van Campen D.H., De Kraker A., Kok J.J., and Fey R.H.B.(1995); "Vibration Control of Periodically Excited Nonlinear Dynamic Multidof Systems"; *Journal of Vibration and Control* Vol. 1, No. 1, 75-92.
- Vilnay O.(1984); "Active control of machinery foundation"; *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No.2, pp. 273-281.
- Wang K.W., and Kim Y.S. (1991); "Semi-active vibration control of structures via variable damping elements"; *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 7, No. 4, pp. 335-347.
- Yue C.(1989); "Alternative control laws for automotive active suspensions"; *Transaction ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, Vol. 111, 286-291.

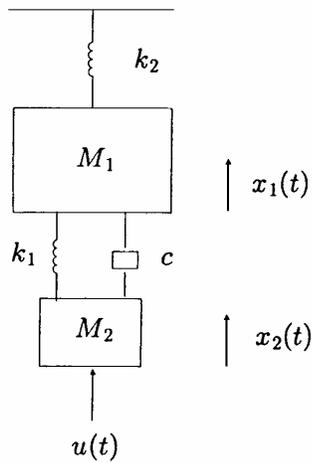


Fig. 1. Sistema de Vibración mecánico .

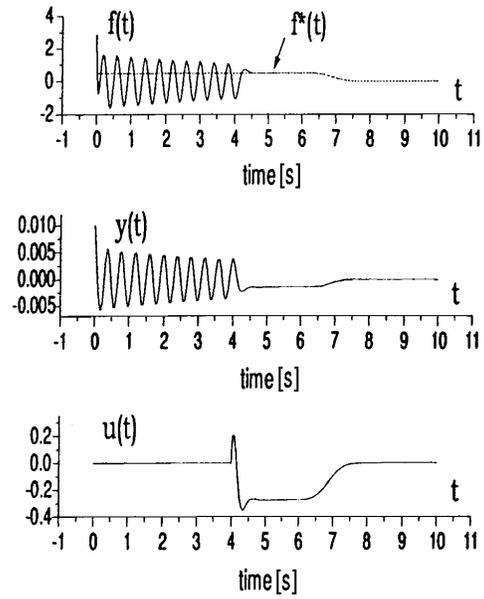


Fig. 2. Respuestas controladas del sistema mecánico.

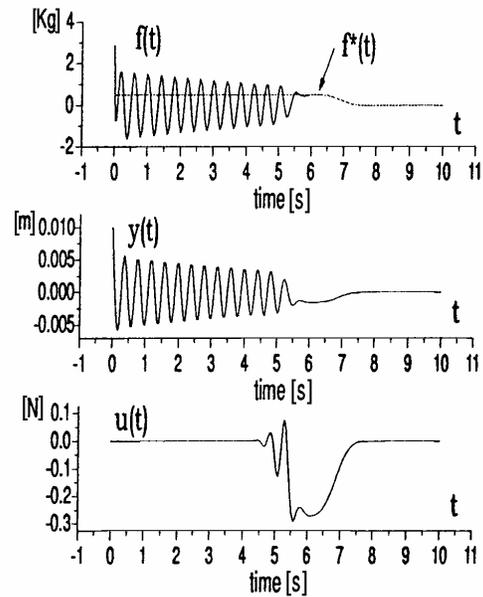


Fig. 3. Respuestas controladas incluyendo la acción del embrague en el control.